

М. А. Волчкевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ

ГЕОМЕТРИЯ

7

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Под редакцией
И. В. Яценко

Москва
«Просвещение»
2020



Рубрикатор



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Дополнительная информация по теории, связь между научными дисциплинами, исторические сведения



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

Подробный разбор задач всех типов с решениями



УПРАЖНЕНИЯ

Упражнения практического характера для освоения нового материала



ЗАДАЧИ

☆☆☆ Простые
☆☆☆ Типовые
☆☆☆ Повышенной сложности

Задачи для самостоятельного решения трёх уровней сложности



ВОПРОСЫ

Вопросы на повторение материала параграфа

ВИДЫ ВЫДЕЛЕНИЙ В ТЕКСТЕ



Естественно-научные определения



Вопросы по ходу параграфа



«Обратите внимание!» Аксиомы, теоремы, свойства, признаки



Историческая справка, этимология слова



Теоремы, свойства, признаки с доказательствами



Научное дополнение, интересная заметка

Волчкевич М. А.

В67

Математическая вертикаль. Геометрия. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М. А. Волчкевич ; под ред. И. В. Яценко. — М. : Просвещение, 2020. — 287 с. : ил. — ISBN 978-5-09-075052-3.

Материал данного пособия представляет собой курс геометрии за 7 класс для школ участников проекта «Математическая вертикаль». Пособие позволит сформировать представления о геометрии, овладеть методами доказательств, дать представление о свойствах геометрических фигур и развить пространственное мышление, применять полученные знания на практике. В пособиях есть материал международных исследований, оценивающих уровень и качество математического и естественнонаучного образования учащихся 7—9 классов основной школы.

Линия учебных пособий по математике для 7 классов разработана с учётом возрастных и психологических особенностей данного возраста. В пособиях реализована технология уровневой дифференциации.

Учебное пособие издаётся в авторской редакции.

Сайт поддержки курса <http://vgeometry.mcsme.ru/>.

Авторы курса будут признательны за отклики, замечания и предложения по совершенствованию курса, которые можно присылать на электронный адрес vgeometry@mcsme.ru.

УДК 373:514+54(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-075052-3

© Издательство «Просвещение», 2020
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2020
© ЧОУ ДПО МЦНМО
Все права защищены

Геометрия как наука

Первые учёные

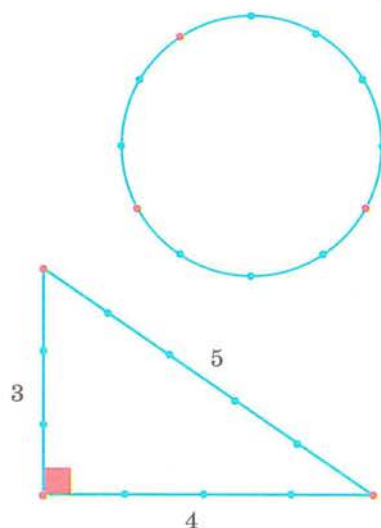


Первые учёные

С чего всё началось?

Ребята, сегодня мы с вами приступаем к изучению геометрии. Геометрия — наука древняя, ей уже несколько тысяч лет. В государствах тех времён — Египте и Вавилоне, Индии и Китае всегда были необходимы строители, землемеры и астрономы. Одни возводили дворцы и пирамиды, другие размечали земельные участки и прокладывали дороги. А жрецы следили за движением звёзд, Солнца и Луны, измеряли по ним время и предсказывали солнечные затмения. Строителей Древнего Египта и Вавилона уже потом греки стали называть **гарпедонавтами**, что на их языке означало «натягиватели верёвок». Это и понятно — ведь для проведения прямых линий они использовали обыкновенную верёвку. С её помощью египтяне чертили на земле не только прямые линии, но и окружности.

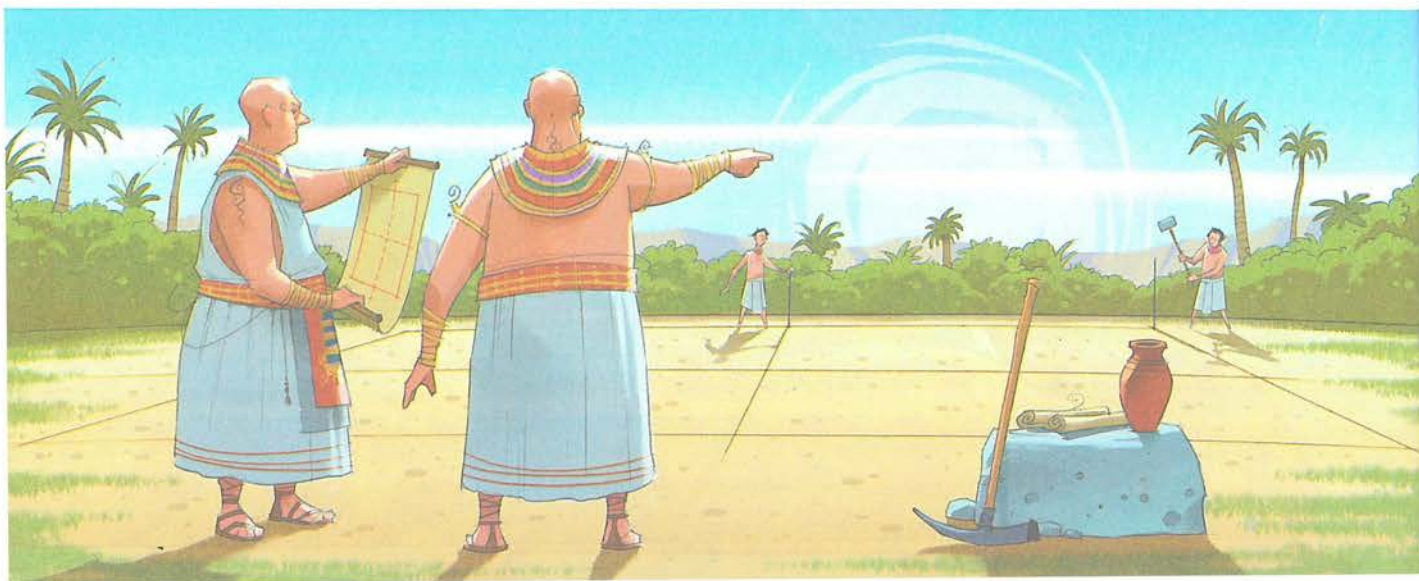
Само слово **геометрия** с древнего греческого языка переводится как «землемерие». Вот что говорит о его происхождении знаменитый греческий историк Геродот: «Царь Сесострис разделил землю вдоль Нила между всеми жителями и дал каждому по равному квадрату. От этого он стал получать доход, повелев собирать каждый год по



Правило 12 узелков и Египетский треугольник

Рис. 2

Рис. 1



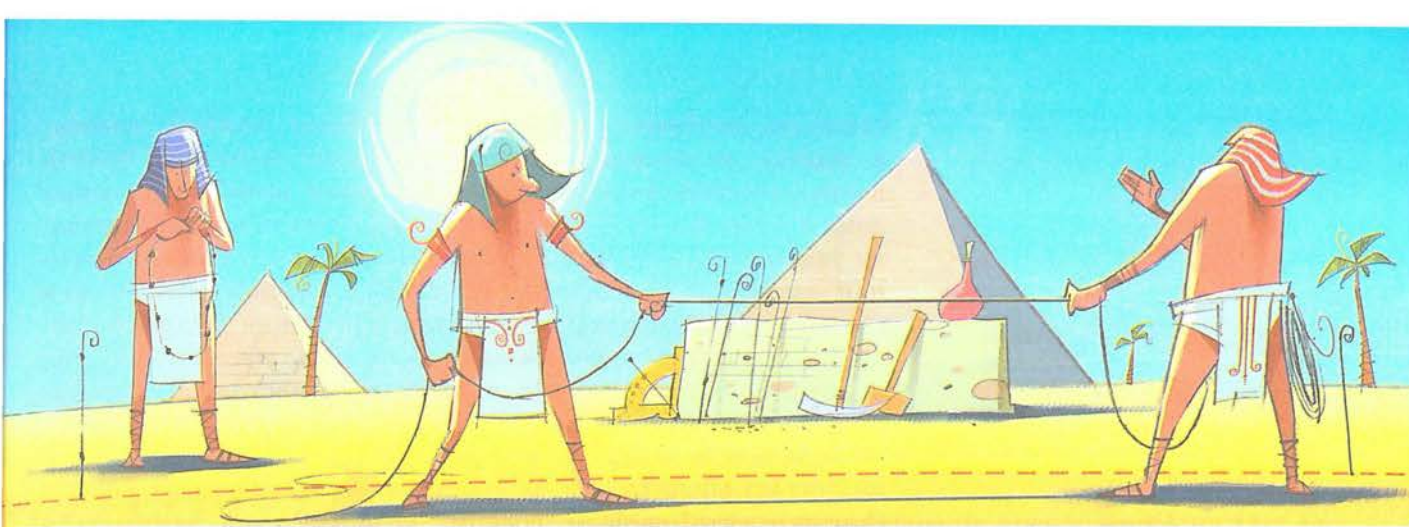


Рис. 3

дать. Если река смывала у кого-то часть его надела, он мог сообщить об этом царю, и тот посылал своих людей измерить, насколько уменьшился участок. Тогда его владелец должен был платить подать соразмерно величине оставшегося у него надела. Мне думается, что так и было изобретено землемерное искусство, а затем уже перенесено в Элладу». Примерно в то же время геометрия возникла в Древней Индии и Китае. Алтари индийских храмов имели самую разную форму: были алтари в виде квадрата или круга, а бывали в виде треугольника или черепахи. Но их площади всегда должны были быть одинаковыми. Чтобы сделать новый алтарь, нужно было уже неплохо владеть геометрией. Сведения о строительстве таких алтарей сохранились в специальных трактатах, которые называются «Сульва-сутра». Вы можете легко сообразить, что означает это название. Не догадываетесь? Конечно же они назывались «Правила верёвки»!

За много веков в древнем Вавилоне, Египте, Индии или Китае было собрано множество геометрических фактов. Может показаться странным, но ни в одном из дошедших до нас исторических документов мы не найдём никаких объяснений этим фактам и ни одной попытки доказать их. Возможно, дело заключалось в том, что во всех государствах того времени научными знаниями обладали только жрецы — особое сословие людей, которые участвовали в религиозных культах, писали законы и передавали свои должности по наследству. Любое знание было там набором правил или указаний, с которыми никто не спорил. Не нужно было убеждать других людей в правильности законов или применяемых ими формул — достаточно было просто сказать: «Делай так». А ведь многие формулы того времени были неточными, а некоторые — просто неправильными. Всё совершенно поменялось, когда с геометрией познакомились древние греки. Греция тогда не была единым государством — по всему Средиземному морю возникали маленькие греческие колонии. Люди в них жили до-



А знаете, как одной верёвкой можно построить прямой угол? Для этого нужно сделать из неё кольцо, завязать на нём 12 узелков на равных расстояниях друг от друга, а потом натянуть верёвку между тремя узлами так, как это показано на рисунке 2. Тогда в одном из этих узлов верёвка пойдёт под прямым углом.

Почему это работает?

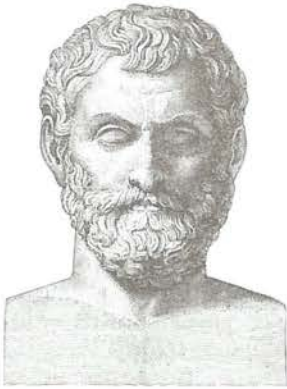
Дело в том, что натянутая так верёвка образует треугольник, стороны которого относятся как числа 3, 4 и 5. Такой треугольник называют египетским. Египтяне часто использовали его при строительстве своих сооружений и хорошо знали, что один угол у него прямой, но никак не пытались это объяснить.

Позже это объяснили уже греческие учёные.

статочно свободно, над ними не было единой власти, а жрецы в храмах выбирались самим народом. Власть в этих городах-государствах часто тоже выбиралась народом, а суды были открытыми и публичными. Свою правоту там необходимо было доказывать другим людям, а научная истина рождалась в спорах философов. Узнав геометрические факты от египтян, греческие мудрецы стали их проверять и доказывать — то есть убеждать других в истине. В этот момент и появилась настоящая геометрия, да и вообще наука как таковая.

ФАЛЕС ИЗ МИЛЕТА

Считают, что первым греком, который стал заниматься геометрией, был знаменитый мудрец Фалес. Он жил в городе Милет на берегу Средиземного моря. Это был портовый город, и сам Фалес плавал на кораблях, торговал и много путешествовал. Он несколько лет пробыл в Египте, научился там у жрецов астрономии, счёту времени и возведению речных плотин. Однажды фараон Амасис, желая проверить мудрость Фалеса, попросил его вычислить высоту пирамиды Хеопса. Фалес сумел это сделать, не поднимаясь на саму пирамиду. Знаете, как он это сделал? Он догадался, что в солнечный день все предметы одинаково отбрасывают свои тени. А значит, тень от пирамиды можно вычислить так, как если бы это была обыкновенная палка. Вначале Фалес измерил длину основания пирамиды. Потом воткнул в песок палку и стал ждать, когда её тень станет равна длине самой палки. В этот момент он заметил, куда упала тень от вершины пирамиды, и нашёл расстояние от этого места до центра квадрата в её основании (рис. 6). Это расстояние и равнялось высоте пирамиды! Такое рассуждение привело в восторг фараона, и он признал Фалеса великим мудрецом. Возможно, именно Фалес первым догадался, что луна на небе светится не сама по себе, а отражает солнечный свет. Но достоверно известно лишь то, что в 585 году до нашей эры он предсказал полное солнечное затмение, после которого стал знаменитым.



Фалес Милетский
(нач. VII—кон. VI до н.э.)

Рис. 4



Рис. 5

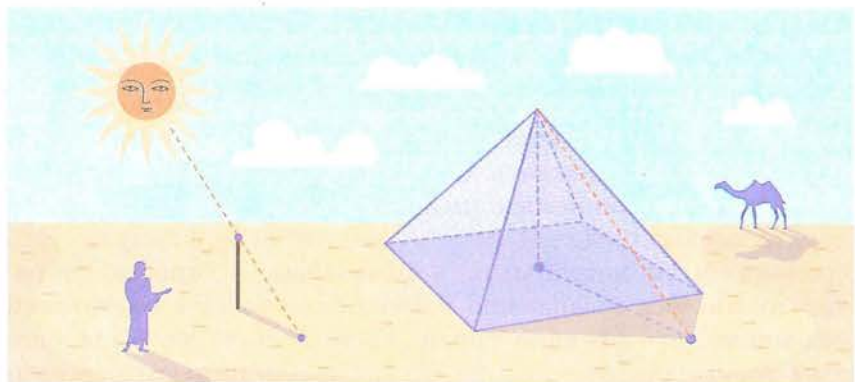


Рис. 6

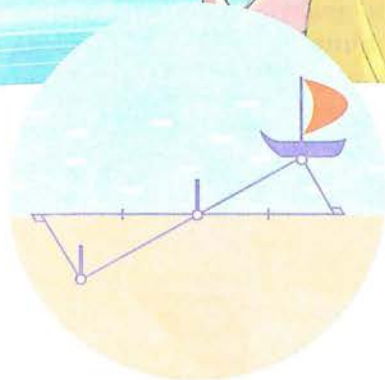
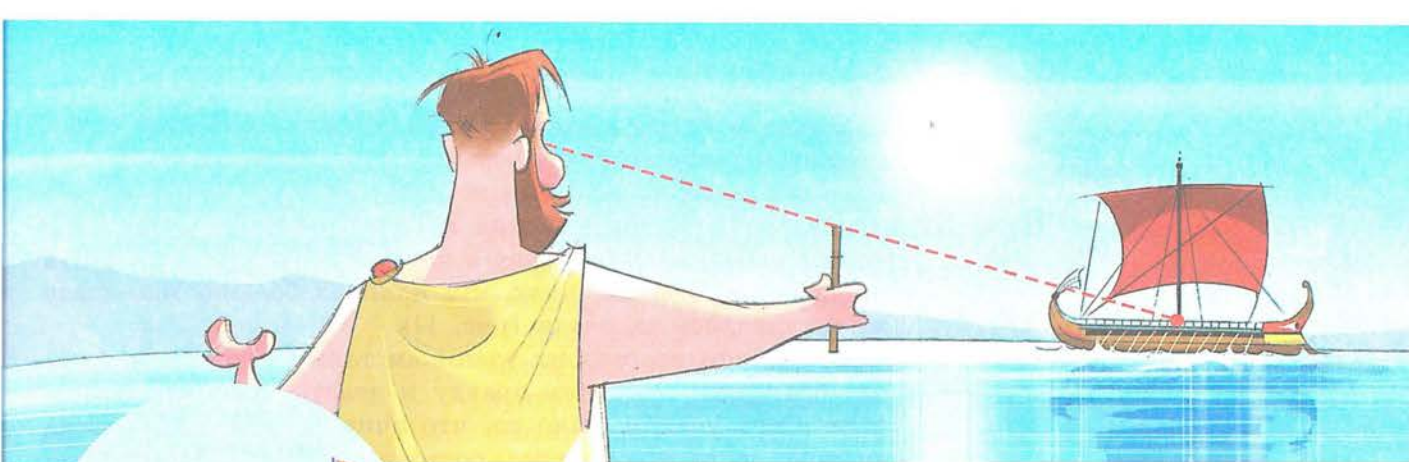


Рис. 7

Про Фалеса рассказывали анекдоты. Однажды он шёл по дороге, наблюдая за звёздами, и упал в колодец. Жители Милета стали над ним смеяться: «Думает о небе, а под ноги не смотрит!» Тогда Фалес сумел вычислить, что на следующий год должен быть богатый урожай оливок, и скупил зимой в городе все давяльни для масла. На следующий год действительно случился богатый урожай, всем потребовалось делать из оливок масло, а Фалес стал отдавать в наем свои давяльни и заработал много денег. Так он доказал жителям Милета, что философы тоже могут стать богатыми, но просто к этому не стремятся.

Именно Фалес первым стал объяснять и доказывать геометрические факты. Так, он доказал, что при пересечении двух прямых линий получаются равные друг другу углы, показал, как по сторонам и углам находить на чертежах равные треугольники, и даже объяснил, почему диаметр окружности всегда «виден» из любой её точки под прямым углом (рис. 5). Фалес придумал, как с помощью геометрических построений находить расстояние от корабля до берега, не покидая при этом самого берега. Никаких записей от Фалеса не сохранилось, но возможный способ вычисления такого расстояния от берега в точке А до корабля в море показан на нашем рисунке. Попробуйте по чертежу на рисунке 7 понять, как он мог это делать.

ПИФАГОР

Следующим после Фалеса греческим ученым был Пифагор. Родился он на маленьком острове Самос в Эгейском море — теперь это глухая греческая провинция. Ещё юношей Пифагор встретился со стариком Фалесом и узнал от него о геометрии. Фалес посоветовал ему плыть в Египет, чтобы продолжать учение. Десять лет провёл Пифагор в Египте, потом на десять лет попал в рабство в Вавилон и снова вернулся на остров Самос. Уже после этого он отправился на юг Италии, где в то время было много греческих колоний, поселился в городе Кротон и основал там свою знаменитую школу. Эта школа была огромной: вначале в ней было 200 учеников, потом — больше тысячи. Для своих учеников Пифагор был мистиком и пророком —



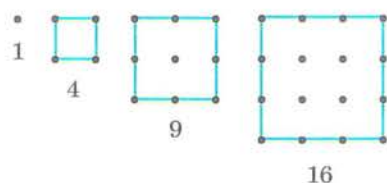
Пифагор
(570—490 гг. до н.э.)

Рис. 8



Рис. 9

Квадратные числа



Треугольные числа

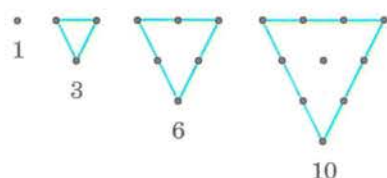


Рис. 10

он ходил в белых одеждах, проповедовал презрение к богатству и говорил о переселении душ. Имущество у пифагорейцев было общим, они не ели мяса и воздерживались от чрезмерного употребления вина. По преданию, Пифагор изобрёл специальную чашу, в которую можно было налить лишь немного вина: у тех, кто наливал больше, оно сразу же выливалось на землю (рис. 11).

Пифагор говорил ученикам так: «Боги дали людям две благодати: говорить правду и делать добро». Но главным в его учении было то, что очищение души человека должно достигаться через постоянное занятие математикой. Знание математики приближает человека к богам: ведь даже бог не может сделать так, чтобы дважды два не равнялось четырём! Значит, в мире есть законы, которым подчиняются и люди, и боги. А кто знает математику, тот знает эти законы и становится равен самому богу!

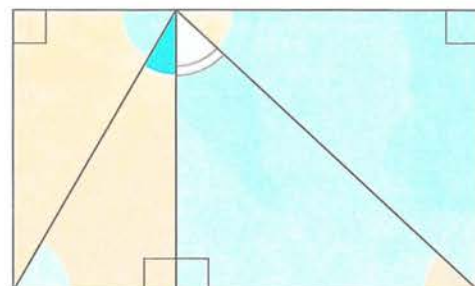
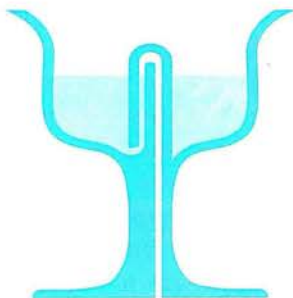
«Всё есть число» — так говорил Пифагор, но имел он в виду только целые числа. Считается, что именно он разделил все числа на чётные и нечётные. Кроме того, числа могли быть квадратные или треугольные (рис. 10). Если число камешков было таким, что из него можно было сложить полный квадрат, то это число было квадратным. А если из камешков складывался треугольник, то число считалось треугольным. Таким образом, даже числа у Пифагора имели вид геометрических фигур. Но это ещё не всё — числа могли звучать. Не удивляйтесь — ученики Пифагора изучали ещё и музыку, ведь именно Пифагор изобрёл первую музыкальную гамму. В её основе находились те же целые числа, вернее, отношения этих чисел. Если длины частей струны на монохорде (а это древний музыкальный инструмент с одной струной, рис. 9) относились как несколько первых целых чисел — например как $1 : 2 : 3$, то они звучали «согласно», то есть давали гармонию.

Пифагор и его ученики открыли, что сумма углов во всех треугольниках одинакова и равна двум прямым углам (рис. 12). Кроме того, они изучали свойства



Чаша Пифагора

Рис. 11



Сумма углов треугольника равна двум прямым углам

Рис. 12

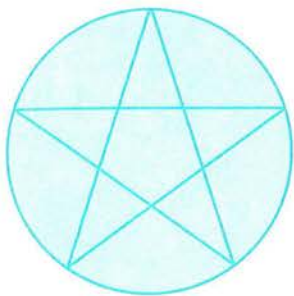
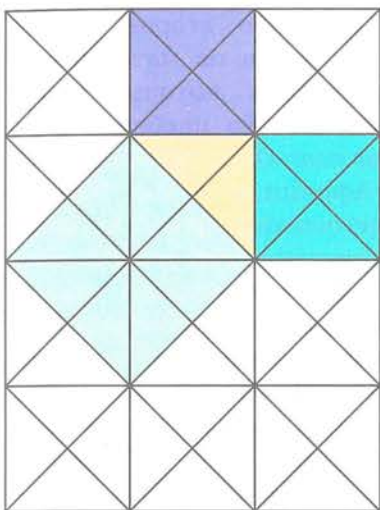


Рис. 13



Мозаика, которая могла привести к открытию теоремы Пифагора

Рис. 14

Рис. 15

пентаграммы — правильной пятиконечной звезды (рис. 13) и сделали её главным знаком своей школы. Пять концов этой звезды означали для них пять стихий, из которых состоит весь мир: огонь, воду, воздух, землю и эфир. Пифагорейцы нашли отношение отрезков, на которые делят друг друга звенья пентаграммы, и научились строить её циркулем и линейкой. Пентаграмма была для них символом здоровья. Если пифагореец тяжело заболел на чужбине без денег, он просил нарисовать на стене дома пентаграмму (рис. 15). Тогда другой член их братства, увидев этот знак, платил щедрое вознаграждение тому человеку, который ухаживал за пифагорейцем.

Но самое главное — Пифагору приписывают открытие важнейшей теоремы о прямоугольном треугольнике. Звучит она так:



Теорема Пифагора

Если три квадрата своими сторонами образуют треугольник с прямым углом, то больший из этих квадратов по площади равен сумме двух других.

Одна легенда говорит о том, что Пифагор догадался до своей теоремы, просто рассматривая мозаику на полу храма (рис. 14). Другая — о том, что за это открытие он принёс в жертву богам гекатомбу, то есть 100 быков. Согласитесь, сто быков — это очень много, в те времена такую жертву могли позволить себе только цари. Сами пифагорейцы мяса не ели и пригласили на пир целый город — вот насколько богата была школа Пифагора!

Египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5 был известен людям гораздо раньше, но только теперь стало





Чему равно пятое по счету «треугольное» число?



Евклид
(кон. IV — нач. III в. до н.э.)

Рис. 16

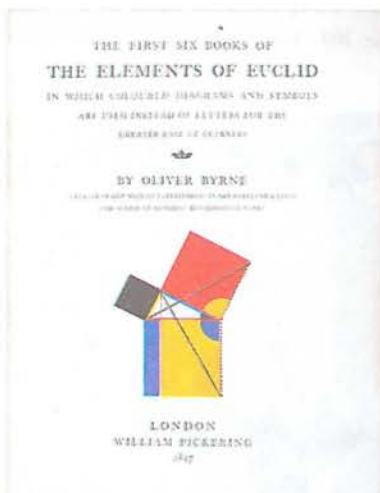


Рис. 17

понятно, почему один из его углов прямой. Оказалось, всё дело в том, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Очень важно, что Пифагор не просто открыл свою теорему, но ещё и доказал её. Таким образом он объяснил причину самого явления.

Пифагор погиб в результате заговора местной знати: ей не нравилось, что молодые люди оставляют свои дома и уходят учиться в его школу. Но сама школа пифагорейцев не распалась — она существовала ещё долго после его смерти.

ЕВКЛИД

Знаете, какая книга занимает первое место в мире по количеству изданий? Не догадываетесь? Это Библия. А какая книга после неё занимает почётное второе место? Вы удивитесь, если узнаете, что это книга по математике. Но она тоже очень старая — это учебник, который написан больше 2000 лет назад. Автором этого учебника был знаменитый греческий учёный Евклид. Он жил и работал в Александрии, городе на севере Африки, который больше 500 лет был научным центром всего мира. Там была знаменитая александрийская библиотека, про которую вы, наверное, слышали. Евклид написал 13 книг по математике, но первые из них были посвящены именно геометрии. Интересно, что прямо по этим книгам геометрию во всём мире изучали вплоть до XX века. Да и сейчас многие современные учебники содержат целые главы из этой книги. Знаете, как она называлась? В переводе на русский язык — «Начала», а на латыни — «Элементы» (рис. 17).

Скорее всего, вы уже слышали, что всю математику условно делят на две части: элементарную и высшую. Элементарную по большей части проходят в школе, а высшую — в университетах. Многие думают, что «элементарная» значит «простая». Но это не так: в элементарной математике встречаются очень сложные задачи! На самом деле естественно предположить, что такое деление объясняется очень просто: к элементарной математике относят те её разделы, о которых говорится в знаменитых «Элементах», то есть в книгах Евклида.

Все знания по геометрии, которые были получены греками раньше, Евклид привёл в единую систему: он дал определения геометрическим фигурам и строго доказал множество теорем, которые называл «положениями». А то, что было совсем очевидным и не удавалось доказать, он назвал аксиомами и постулатами. С аксиомами должны были согласиться все, кто собирался изучать математику. Они служили основой, или фундаментом, на котором потом строилось всё научное «здание».

В первой книге «Начал» было восемь аксиом — все они отражали очевидные законы логики, знакомые каждому из вас. Например, первая аксиома гласила следующее: «Равные одному и тому же должны быть равны

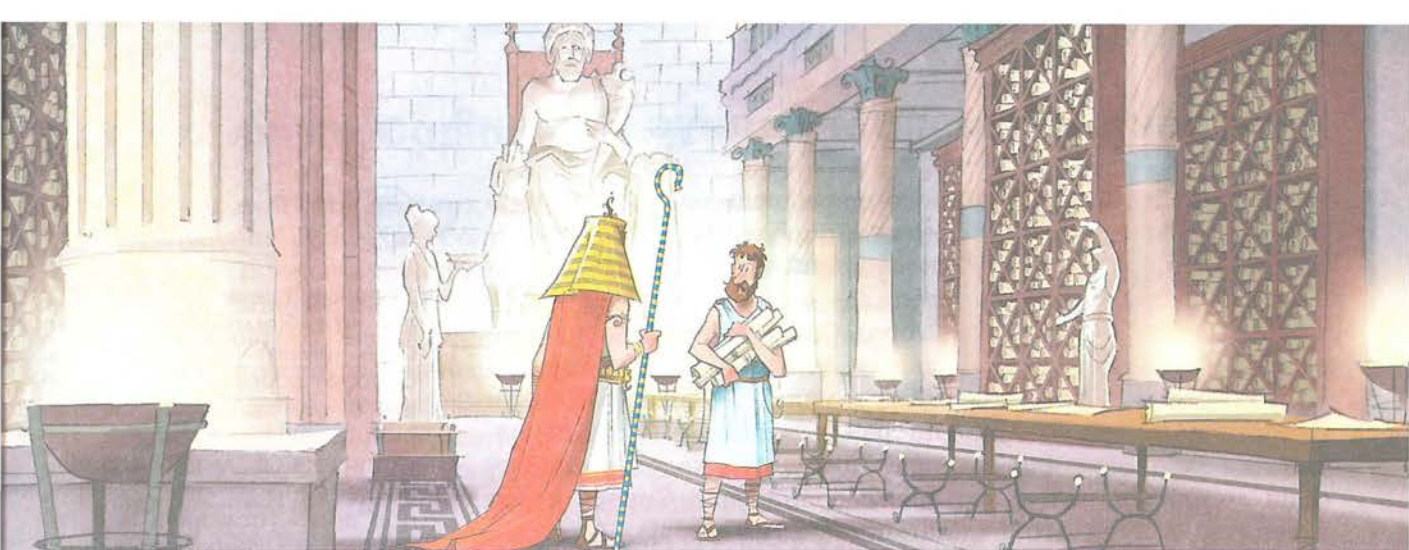


Рис. 18

между собой». А восьмая: «Целое больше своей части». Как с этим не согласиться? Из школьной математики вы знаете, что если к двум частям уравнения прибавить одинаковое число, то само уравнение не изменится. В этом заключалась вторая аксиома Евклида.

Постулатами же Евклид назвал аксиомы геометрии. Постулатов у него было всего пять.

Приведём здесь первые четыре постулата:



Постулаты Евклида

- 1 Между любыми двумя точками можно провести отрезок.
- 2 Любой отрезок можно сколько угодно продолжать до прямой линии.
- 3 Из любой точки можно провести круг любого радиуса.
- 4 Все прямые углы равны между собой.

Эти четыре постулата настолько очевидны, что каждый из вас может проверить их на листе бумаги. Правда, бумага должна быть для этого бесконечной... А вот пятый свой постулат Евклид формулировал гораздо сложнее, и мы приводить его здесь не будем. Вы можете прочитать о нём в §13 нашего учебника, который посвящён параллельным прямым.

Александрийскую библиотеку основал царь Птолемей — один из военачальников Александра Македонского. Из всех царей того времени он был самым умным, ценил литературу и науку, собирал книги со всего света и приглашал в Александрию известных учёных. В его библиотеке потом насчитывалось более 500 000 книг. Каждая книга представляла собой свиток — свёрнутую в трубку рукопись на длинной полосе папируса.



Рассказывают, что однажды царь Птолемей решил изучить геометрию. Он позвал Евклида и попросил указать ему самый лёгкий для этого способ. Евклид ответил ему так: «В геометрии нет царской дороги!» С тех пор это высказывание стало афоризмом (рис. 18).

Как греки вычислили радиус Земли?

Как вычислить радиус земного шара, ведь он должен быть огромен? Размеры Земли первым определил Эратосфен — он заведовал Александрийской библиотекой уже после Евклида. Знаете, как он это сделал?

На юге Египта был город Сиена (сейчас он называется Асуан, там стоит большая плотина на реке Нил). В этом городе был глубокий высохший колодец. Жители Сиены знали, что всего один раз в году, а именно в полдень 22 июня, солнце освещает дно этого колодца. Эратосфен догадался, что в это время солнце над Сиеной стоит в зените, а лучи его падают отвесно на землю. Александрия находилась от Сиены точно на север на расстоянии пяти тысяч египетских стадиев, то есть до неё было около 800 километров. В полдень 22 июня солнце над Александрией не дошло до зенита, и все предметы отбрасывали там тени. По их длине Эратосфен измерил угол, под которым падали на землю лучи солнца. Получилось, что они «отклонились от вертикали» на семь с лишним градусов, что соответствует $\frac{1}{50}$ полного круга (рис. 19). Имея эти

данные, Эратосфен понял, что расстояние от Александрии до Сиены должно быть тоже в 50 раз меньше длины всей земной окружности. И он легко посчитал, что весь путь вокруг Земли должен быть равен $800 \cdot 50 = 40\,000$ км. Этот результат удивительно хорошо согласуется с современными данными о размерах земного шара, радиус которого равен примерно 6 370 км, а ведь получен он с помощью элементарной геометрии больше 2000 лет назад!



Древние греки хорошо знали, что Земля круглая, то есть имеет форму шара. Скорее всего, первыми до этого догадались пифагорейцы. Они наблюдали, как уходящие в море корабли постепенно «погружались под воду», оставляя над горизонтом лишь верхушки своих мачт. Греки понимали, что это — иллюзия, причина которой в «закруглении» самой Земли.

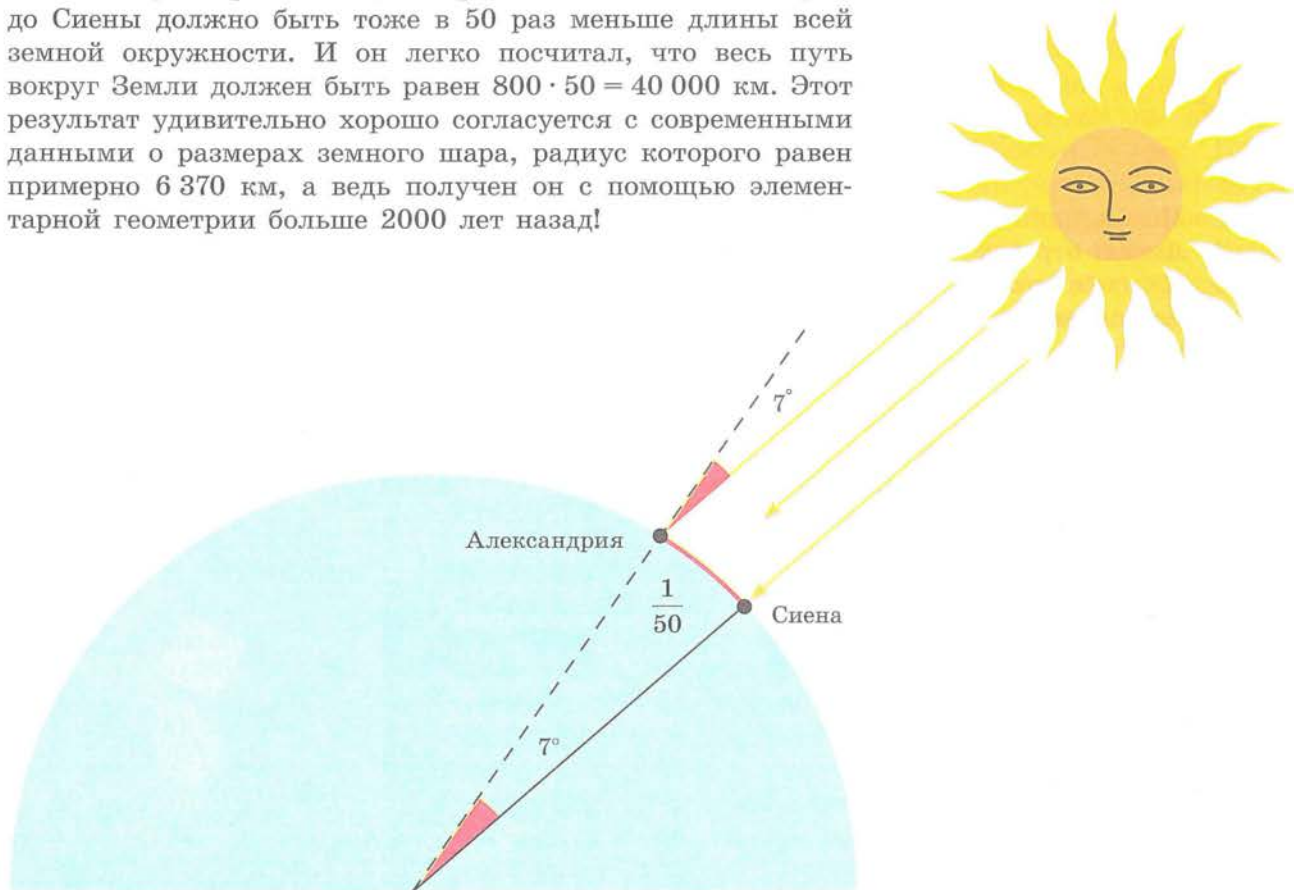


Рис. 19

Далеко ли до Солнца?

Небо над головой для древних людей было полно загадок. Посмотрите на Луну и Солнце: далеко ли до них? На глаз сказать очень трудно. А древним грекам это было ещё труднее. Многие из них думали, что Солнце размером с небольшой остров, но уж точно не больше всей Греции. А звёзды — просто светящиеся точки на небесной сфере, которая вращается вокруг Земли и до которой ну не дальше, чем от Афин до Милета. И всё же нашёлся человек, который сумел вычислить размеры и Луны, и Солнца, и нашёл расстояния до них! Этого человека звали Аристарх, родился он на том же маленьком острове Самос, что и Пифагор.

Аристарх также много лет работал в Александрийской библиотеке, а точнее — в астрономической обсерватории при ней. Он наблюдал за небесными светилами и заметил, что бывает такое положение, когда на утреннем или вечернем небе одновременно видны одна половина Луны и Солнце (рис. 20). В это время он измерил угол между Луной и Солнцем и получил 87 градусов (рис. 21). Аристарх понял, что ровно половина Луны может быть видна с Земли только тогда, когда направления на неё с Земли и Солнца образуют прямой угол. Астрономы называют это положение **квадратурой**. Потом он нарисовал треугольник с такими же углами на песке и нашёл отношение длин двух его сторон. Так он понял, насколько Солнце дальше от Земли, чем Луна. У него получилось, что в 19 раз. А поскольку во время солнечных затмений Луна точно загораживает собой Солнце, то с Земли они видны одинаково. Значит, Солнце должно быть больше Луны тоже в 19 раз. Дальше Аристарх использовал свои наблюдения уже лунных затмений и сумел получить приблизительные размеры Луны и Солнца. Эти вычисления сложнее и требуют очень хорошего знания геометрии. Мы приводить их здесь не будем, ограничимся его рисунком (рис. 22).



Рис. 20

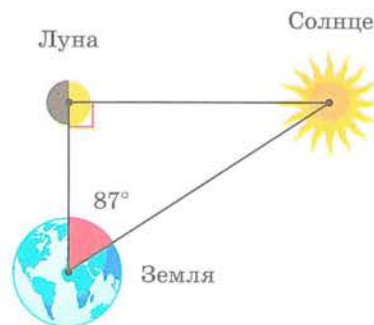


Рис. 21



Аристарх ошибся больше чем в 10 раз, но главное он понял: Солнце гораздо больше Луны и Земли. Поэтому было бы странно, чтобы оно вращалось вокруг Земли. Наоборот, Земля должна вращаться вокруг Солнца! А простые люди, да и учёные тогда думали не так, поэтому Аристарху почти никто не поверил. А ведь он был прав, и за это его справедливо называют «Коперником Античности».

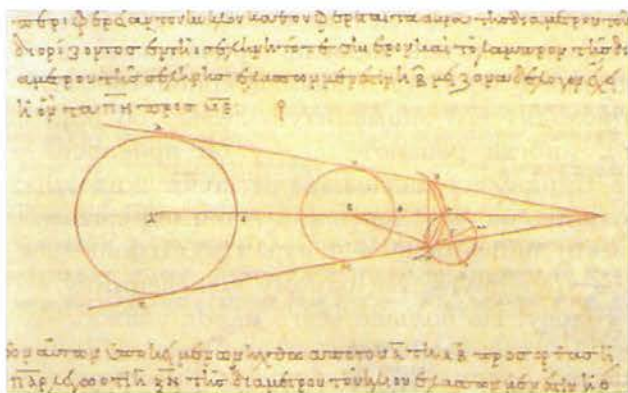


Рисунок Аристарха

Рис. 22



Медаль с профилем Архимеда (287—212 гг. до н.э.).

Рис. 23



Родился Архимед в городе Сиракузы на острове Сицилия — на карте этот остров напоминает «мяч», по которому носком ударил «сапог» Италии. Его отец Фидий был астрономом и, конечно, привил Архимеду любовь к математике и астрономии.



Рис. 24

АРХИМЕД

Вы можете спросить: кто из древних ученых был самым гениальным? Трудно сказать — все они были гениями... Но самым разносторонним из них был точно Архимед. Архимеда одинаково интересовали и математика, и физика, и астрономия. А ещё он был выдающимся инженером.

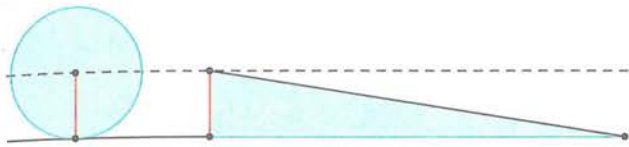
Удивительно то, что настоящей наукой Архимед стал заниматься лишь в возрасте 40 лет. По тем временам это было очень поздно. Но лучше поздно, чем никогда, как говорит известная пословица. За оставшиеся ему 35 лет жизни Архимед сделал больше, чем все его современники вместе взятые! С юности Архимеда интересовали всевозможные механизмы, и многие из своих изобретений он сделал ещё в молодости. Известно только, что примерно в 40 лет Архимед отправился в Александрию и познакомился там с Эратосфеном, астрономом Кононом и другими учёными мужами. Потом уже Архимед вернулся в Сиракузы и стал писать оттуда научные письма. Приходили эти письма на имя одного из учеников Конона — Досифея, и каждое начиналось так: «Архимед приветствует Досифея».

Что же содержалось в этих письмах? В них Архимед сообщал удивительные вещи: каким образом можно вычислить площадь круга (рис. 25) или найти центр тяжести параболоида (рис. 26), какую часть от объёма всего цилиндра должен занимать вписанный в этот цилиндр шар и многое другое (рис. 27). Для всех этих фигур он получал идеально точные формулы, а ведь шар или параболоид — всё это «кривые» тела, греки с ними работать тогда ещё не умели. Каждое письмо Архимеда было открытием, а его методы были совсем не «элементарны» — можно даже сказать, что за два века до нашей эры он первым открыл «высшую» математику!

Архимед очень гордился тем, как он вычислил объём шара, и просил своих родственников изобразить на его могильной плите шар внутри цилиндра, а рядом написать соотношение их объёмов. Об этом через 150 лет после его смерти вспомнил римский оратор Цицерон, поехал в Сиракузы и по данному чертежу нашёл там могилу Архимеда. По его словам, вся она заросла терновником.

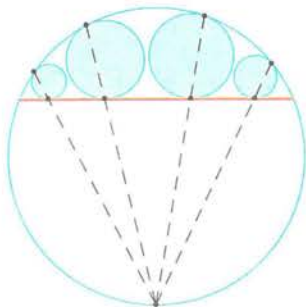
Архимед много занимался элементарной геометрией — в школе проходят его знаменитую лемму об окружностях¹ (рис. 28), иногда решают задачу об арбелосе — ноже, которым в Сиракузах разделявали кожи животных (рис. 29). Посмотрите на его чертежи: Архимед доказал, что две окружности, вписанные в части любого арбелоса, непременно равны друг другу. Ни одному кожевнику это не пришло бы в голову! Но больше всего народ уважал Архимеда не за это — всеобщее восхищение вызывали его

¹ Эта лемма состоит в том, что если какая-то окружность касается одного сегмента круга в двух точках, то проходящая через них прямая всегда делит дугу другого сегмента пополам.



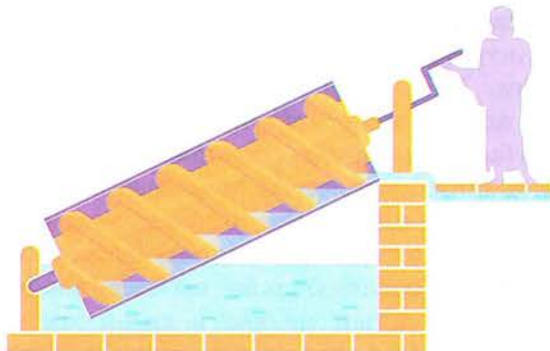
Круг имеет площадь, равную площади треугольника, высота которого — радиус, а основание — длина окружности

Рис. 25



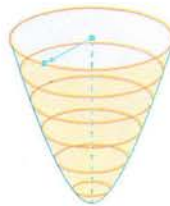
Лемма об окружностях

Рис. 28



Архимедов винт

Рис. 30



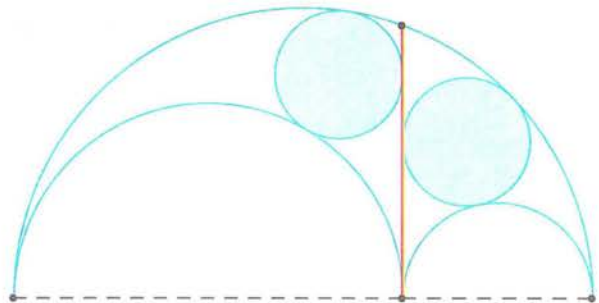
Параболоид

Рис. 26



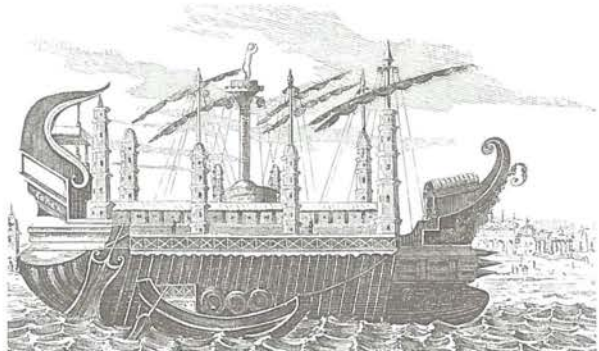
Шар составляет $\frac{2}{3}$ от объёма цилиндра

Рис. 27



Теорема об арбелосе

Рис. 29



Корабль Гиерона

Рис. 31

инженерные изобретения. Он придумал, как специальным винтом поднимать воду из реки в город (рис. 30), как с помощью блоков и верёвок переносить огромные тяжести. (Кстати, архимедов винт до сих пор используют в обычной мясорубке!) Однажды правитель Сиракуз Гиерон повелел построить корабль в подарок египетскому царю — внуку того Птолемея, который разговаривал с Евклидом. Корабль получился столь большим и тяжёлым, что его не могли сдвинуть с места все жители Сиракуз (рис. 31). Тогда Гиерон попросил помощи у Архимеда. Тот смастерил такую систему блоков и рычагов, что смог в одиночку спустить этот корабль на воду. Гиерон был в полном восторге.



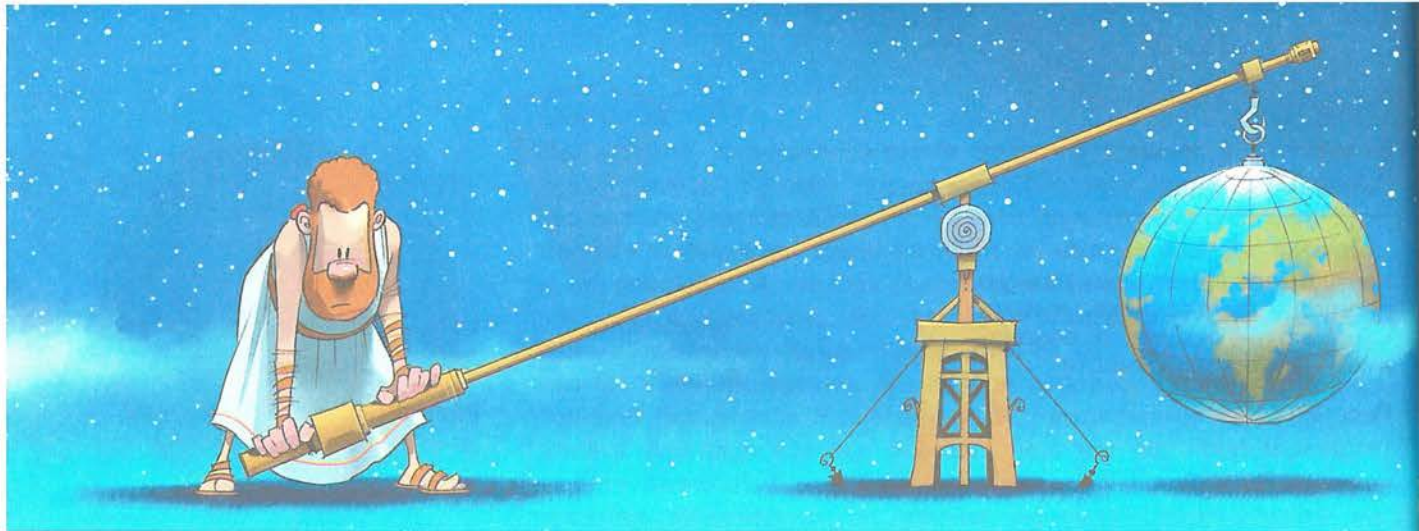


Рис. 32



Рис. 33

Архимед же сказал так: «Дай мне точку опоры, и я тебе сдвину Землю!» (рис. 32).

Архимед был так поглощён своей наукой, что временами забывал есть и пить. Сидя перед очагом, он чертил круги и треугольники прутом на золе, а когда ходил в общественную баню — на своём намазанном маслом теле. Именно в бане он и сделал ещё одно выдающееся открытие. Дело было вот в чём. Как-то Гиерон заказал своему мастеру сделать золотой венец и отвесил ему для этого нужную меру золота. Венец он получил, но в то же время получил и донос, что тот мастер утаил часть золота и заменил его серебром. Проверить это не было никакой возможности — ведь полученный им венец имел правильный вес, а его форма была слишком сложной для измерений (рис. 33). Гиерон опять обратился за помощью к Архимеду. Тот стал думать над этим вопросом и как раз отправился в баню. Принимая там ванну, он заметил, что чем больше погружает в неё своё тело, тем больше выливается из ванны воды... Наверняка каждый из вас в своей жизни наблюдал нечто подобное. Но Архимед выскочил из ванны и,



Катапульти метали каменные ядра весом до 250 кг

Рис. 34



Рис. 35

«Коготь» Архимеда

не одеваясь, прямо по улице побежал домой. Говорят, что при этом он громко кричал: «Эврика! Эврика!» — что означало: «Нашёл! Нашёл!» (рис. 36). Дальше всё было уже просто: дома он сделал два слитка одинакового веса с нужным венцом — один из золота, другой из серебра. Он стал погружать эти слитки в воду и смотрел, сколько они вытесняют воды. Оказалось, что серебряный слиток вытесняет воды больше, чем золотой. Тогда он погрузил в воду «золотой» венец и понял, что он тоже вытесняет больше воды, чем нужно. Так Архимед установил, что мастер при его изготовлении подмешал серебро, и даже вычислил, сколько именно он утаил золота.

Но главное — Архимед открыл новый закон: при погружении в воду тело всегда вытесняет количество воды, равное объёму самого тела. Это наблюдение стало первым в его исследованиях свойств жидкостей.

Может быть, мы с вами и не узнали бы столько об Архимеде, если бы он не прославился при обороне своего родного города от римлян. Тогда Рим уже много лет воевал с Карфагеном, Сицилия долго была независима, но в 214 г. до н.э. Сиракузы решили принять сторону Карфагена. Римское войско осадило город. Во главе его стоял лучший полководец Марцелл. Он рассчитывал взять Сиракузы за неделю, но не мог ожидать, что участие одного человека может всё поменять. Просто этим человеком был великий Архимед. Для обороны своего города он создал небывалые военные машины: это были катапульты, метавшие камни на огромные расстояния (рис. 34); подъёмные краны с крючьями, которые цепляли римские корабли и топили их в гавани (рис. 35). Дошло до того, что солдаты Марцелла в ужасе разбегались, как только видели над крепостной стеной верёвку или бревно!

Существует даже легенда о том, что Архимед установил на крепостных стенах множество зеркал и с помощью силы солнца поджигал ими римские корабли. Многие



Рис. 36



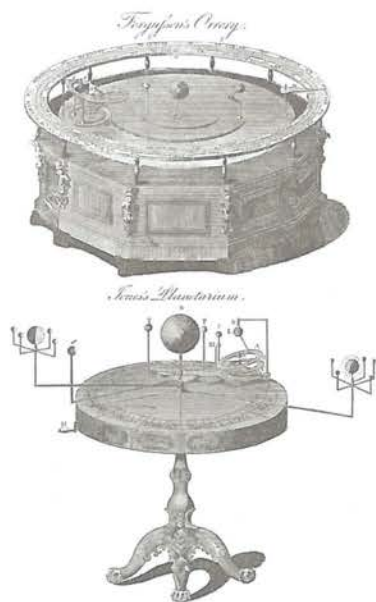
Параболоид собирает лучи солнца в одну точку — фокус

Рис. 37

потом сомневались, что это в принципе было возможно. Однако к тому времени греки уже знали об удивительном свойстве зеркального парабооида собирать солнечный свет в одной точке — **фокусе**. Чем больше и шире параболоид, тем дальше находится от него его фокус и тем сильнее нагревается эта точка. Похожий опыт каждый из вас может провести с увеличительным стеклом — с его помощью легко зажечь бумагу или палку. Где же Архимед взял такой огромный параболоид, чтобы им можно было на расстоянии зажигать целые корабли? Первым на этот вопрос ответил в 1747 году французский ученый Жорж-Луи де Бюффон. Он построил систему из 128 небольших плоских зеркал, расположил их по параболе и с их помощью смог зажечь дерево на расстоянии 50 метров. Более того — на том же месте он расплавил этими зеркалами свинец и серебро. Тот же опыт повторили в 2005 году исследователи из Технологического института в Массачусетсе — им удалось похожим способом поджечь корабль, стоявший на расстоянии 50 метров от берега (рис. 37). Так что идея Архимеда вполне могла бы осуществиться.

К сожалению, сочинение Архимеда, посвящённое зеркалам, его знаменитая «Катоприка», оказалось полностью утраченным. Хотя можем ли мы быть уверены в этом до конца? Ведь другой его важный труд «Метод механических теорем» тоже считали навсегда потерянным. А потом его случайно обнаружили в середине XIX века в подвале библиотеки Константинополя на стёртом пергаменте, поверхность которого были написаны богослужебные тексты. Этот палимпсест снова потерялся, был найден только через 100 лет и расшифрован уже в XXI веке.

Осада Сиракуз продолжалась почти два года. Наконец римляне взяли город хитростью и предательством. На улицах начались резня и грабёж. Римский легионер ворвался к Архимеду с приказом немедленно следовать за ним к Марцеллу. Но Архимед так был поглощён решением геометрической задачи, что не слышал шума в городе и сказал ему только: «Не наступи на мои чертежи!». Это были его последние слова — раздражённый солдат убил его. Историк Плутарх пишет, что Марцелл, узнав о смерти Архимеда, сильно опечалился и потом сторонился его убийцы. Он разыскал родственников Архимеда и милолично обошёлся с ними. Впрочем, вряд ли это было действительно так. В ту эпоху для всего греческого мира римляне были ещё варварами и жестоко расправлялись с побеждёнными. Известно, что на память о великом учёном Марцелл взял себе его «небесную сферу» — чудесный маленький планетарий, сделанный руками Архимеда. На нём можно было наблюдать движение пяти планет, восходы солнца и фазы Луны (рис. 38). «Небесную сферу» Архимеда потом несколько веков всем показывали в Риме — она всегда вызывала восхищение!



Планетарий

Рис. 38



Рис. 39

Античная математика

Спустя два века после взятия Сиракуз римляне стали с уважением относиться к культуре древних греков, учили их язык и ценили занятия наукой. В Афинах и Александрии ещё несколько веков трудились многие выдающиеся учёные. Назовём лишь некоторых: знаменитый астроном Птолемей, который составил атлас звёздного неба; математик Аполлоний, изучавший сечения круглого конуса; инженер Герон, сделавший масляную лампу и первую паровую турбину. А последним математиком Античности была женщина — прекрасная Гипатия, которая разрабатывала астролябию и была убита толпой религиозных фанатиков. После этого точная наука пришла в упадок и возродилась только через много веков. Но об этом мы поговорим в другой раз.

Важно помнить, что для древних учёных математика во многом была геометрией — они рисовали чертежи, измеряли площади и расстояния, да и мыслили они геометрическими фигурами. Если сказать образно — геометрия была колыбелью всей современной математики. Поэтому неудивительно, что её изучают в школе. Она и на сегодняшний день не потеряла своей красоты. Сколько удивительных теорем вы сможете понять или даже доказать сами, приняв на веру лишь несколько очевидных фактов! Геометрия учит логике, ясности рассуждений и смелости мысли. Она учит и аккуратности: с помощью плохих чертежей рассуждать можно, но очень неудобно. Старайтесь всегда рисовать крупные и красивые чертежи! Ну и потом... разве не интересно вам пройти самим по стопам великих мудрецов и гениев того времени? Ведь все они в вашем возрасте знали не больше вас! Возможно, кто-нибудь из ваших сверстников даже захочет помериться с древними мощью своего ума... Старинная латинская поговорка гласит: «*Ex ungue leonem pingere*» — по когтям узнают льва.



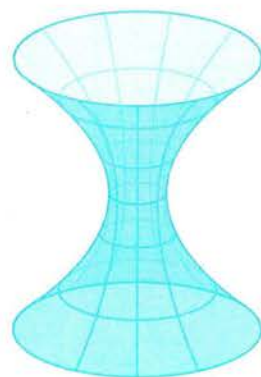
Как вы думаете, кто изображён на рисунке 39?

Геометрия и современность

Многие думают, что в математике давно уже всё сделано, всё доказано и открыто. Не верьте им — в ней столько же нового и неизведанного, как в биологии, физике или химии. Исаак Ньютон говорил так: «Сам себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу... в то время как великий океан истины расстилается предо мной неисследованным». Люди всегда пытались понять, как устроен этот мир. И для этого им всегда была нужна математика. Математика нужна для того, чтобы правильно строить самолёты и возводить здания, чтобы делать винты и гайки, чтобы считать деньги и — расстояния до далёких звёзд. Она нужна, чтобы узнать, сколько рыб живёт в пруду и сколько их будет там через год. Роботы, мобильные телефоны, компьютеры, — вы думаете, их сделали люди, которые не знали математики?

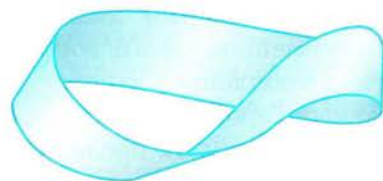
Теперь геометрия — это её часть. Со времён Евклида и Архимеда в ней было сделано многое. Были открыты геометрии на кривых поверхностях, где треугольники имеют разные суммы углов. Первым, кто исследовал такую гиперболическую геометрию, был наш великий русский ученый Николай Лобачевский. Уже потом оказалось, что геометрия Лобачевского необходима для теории относительности Эйнштейна, и теперь её используют даже для наведения искусственных спутников. Были исследованы геометрии с большим числом измерений, геометрия «пластилиновых» фигур — **топология**. В топологии из обыкновенной кружки легко можно сделать баранку, а лента Мёбиуса имеет всего одну сторону (рис. 41)!

С появлением компьютеров появилась возможность строить **фракталы** — геометрические фигуры с бесконечно извилистой границей и дробной размерностью (рис. 42). Удивительно, но такие сложные и красивые узоры компьютер рисует по очень простым математическим формулам! В геометрии осталось много ещё никем не решённых



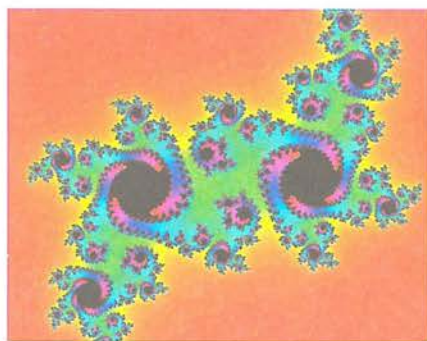
Гиперболоид

Рис. 40



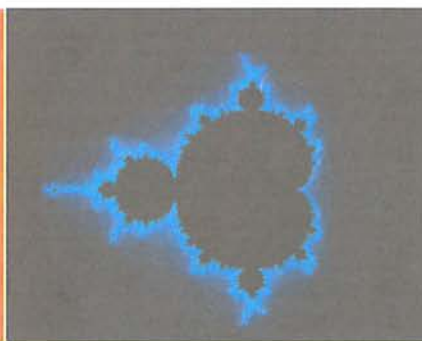
Лента Мёбиуса

Рис. 41

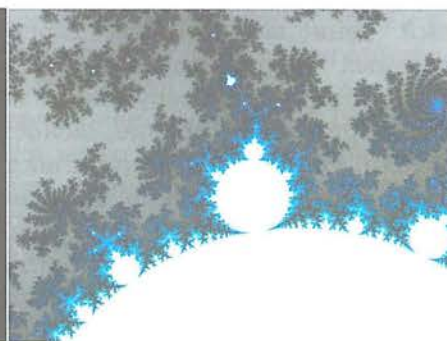


Множество Жюлиа

Рис. 42



Множество Мандельброта



Множество Мандельброта
под увеличением

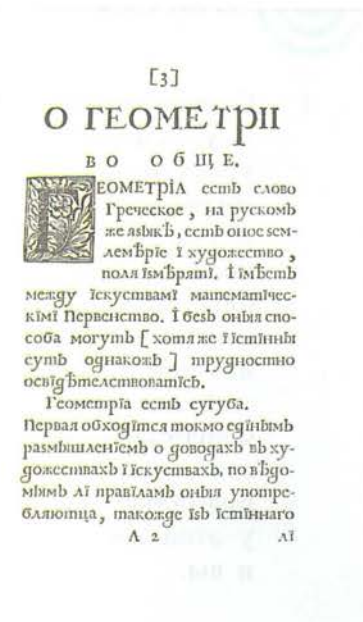
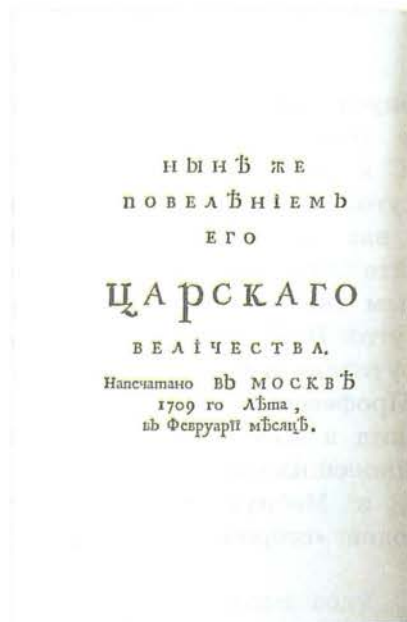
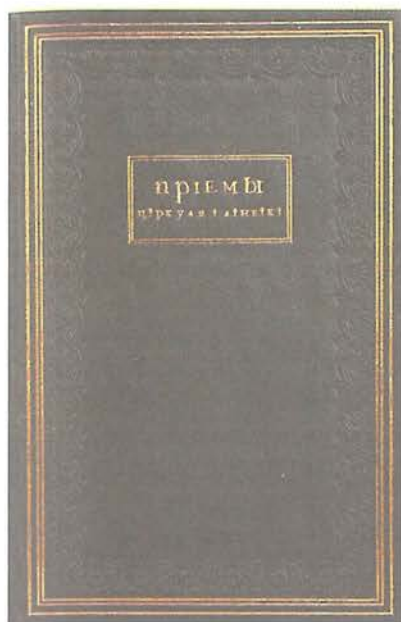
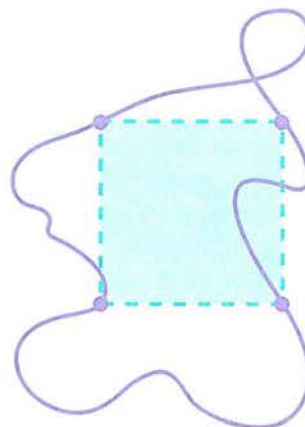


Рис. 43

задач. Например, пока никто не знает точно, чему равна площадь самого первого фрактала — множества Мандельброта; можно ли в любую кривую линию на плоскости вписать обыкновенный квадрат (рис. 44); во сколько цветов нужно раскрасить плоскость, чтобы любые две её точки на расстоянии 1 см были разных цветов? Интересно, что значительное продвижение в решении последней из этих проблем произошло только в 2018 году. А вот вам пример ещё одного вопроса, на который очень сложно ответить. У вас есть большой диван, и вы хотите занести его в свою комнату. Пролезет этот диван через открытую дверь или нет?

Помните, что в геометрии нет «царской» дороги? Так вот, русский царь Пётр Великий сам изучал геометрию — даже в походах он читал по ней книги и своей рукой вносил туда исправления. Первая книга, которую напечатали русским гражданским шрифтом в 1709 году, была подготовлена им лично. Она называлась «Приёмы циркуля и линейки» (рис. 43). Одну её главу о построении солнечных часов Пётр Первый вообще написал сам. Известно, что по-русски царь писал с ошибками, но на своих чертежах он ошибок никогда не делал. Историки называют Петра царём-инженером или царём-плотником. Он строил корабли и крепости, отливал пушки, закладывал города. Запомните: любой инженер или конструктор обязан знать геометрию. Но её должен знать и каменщик, и плотник. Да и вообще любой образованный человек!



На любой ли замкнутой кривой можно расположить все четыре вершины квадрата?

Рис. 44



- 1 Склеиваем лист Мёбиуса (рис. 45). Возьмите прямоугольную полоску бумаги. Напишите на её углах буквы A , B , C и D с двух сторон бумаги. Вначале совместите угол A с углом B , а угол C с углом D . Тогда у вас получится обыкновенное кольцо. Теперь склейте короткие стороны бумаги (они отмечены красным цветом) так, чтобы угол A совпал с углом C , а угол B — с углом D . Лента у вас при этом «перекрутится» и получится знаменитый лист Мёбиуса! Профессор математики Август Фердинанд Мёбиус жил в XIX веке. В 1858 году его служанка случайно сшила ленту в такое «неправильное» кольцо, и Мёбиус обнаружил, что у этой ленты всего одна «сторона»! Проверьте это и вы.

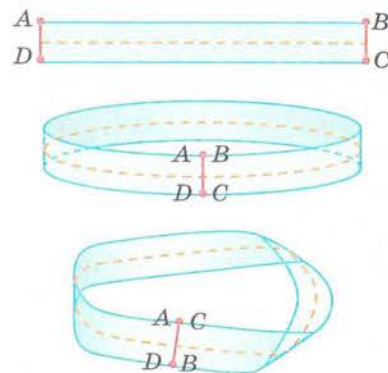


Рис. 45

- 2 Разрезаем ленту Мёбиуса. Возьмите ещё одну прямоугольную полоску бумаги и проведите на ней с двух сторон линию на одинаковых расстояниях от её краёв (на рисунке 46 она показана оранжевым цветом). Если опять из этой полоски сделать обыкновенное кольцо, а потом разрезать его по этой оранжевой линии, то оно распадётся на два колечка. А теперь склейте из полоски лист Мёбиуса и разрежьте его по оранжевой линии... Попробуйте вначале угадать, что у вас получится!

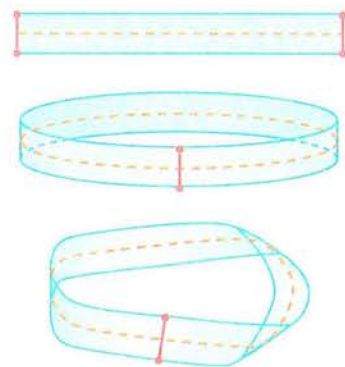


Рис. 46

- 3 Сделайте из бумаги третью прямоугольную полоску, проведите с двух её сторон такую же линию (рис. 46), а теперь перекрутите полоску вокруг себя два раза и склейте её концы. Если теперь разрезать полоску по данной линии, то она распадётся... Попробуйте догадаться на что!

- 4 Завяжите на верёвке узлы на равных расстояниях друг от друга, а потом сделайте из неё кольцо так, чтобы на нём было ровно 30 узлов и все расстояния между соседними узлами были одинаковыми. А теперь натяните верёвку между тремя узлами так, чтобы в одном из них получился прямой угол.

- 5 Положите на лист бумаги три карандаша так, чтобы они касались его только своими грифелями (рис. 47).

- 6 Положите на стол 6 неотточенных карандашей так, чтобы каждый касался всех остальных.

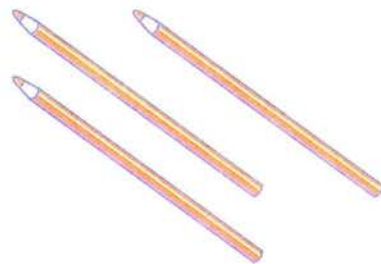


Рис. 47



ВОПРОСЫ

- 1 Как проводили прямые линии древние строители?
- 2 Какой треугольник называют египетским?
- 3 Как Фалес измерил высоту пирамиды Хеопса?
- 4 Кто написал первый учебник геометрии? Как он назывался?
- 5 Какие утверждения в математике называются аксиомами и постулатами?
- 6 Где находилась самая большая библиотека Древнего мира? Кто её основал?
- 7 Что такое пентаграмма? Для какой школы она была опознавательным знаком?
- 8 Кто первым определил радиус земного шара? Как он это сделал?
- 9 Кого называют «Коперником Античности»? Что такое квадратура Луны?
- 10 В каком городе родился Архимед? В каком году и как он погиб?
- 11 Какое изобретение Архимеда используется в обыкновенной мясорубке?
- 12 Что просил изобразить Архимед на своём надгробии?
- 13 Какое свойство параболоида использовал Архимед для защиты родного города?
- 14 Почему школьную математику называют элементарной?
- 15 Кто первым открыл геометрию, отличную от геометрии Евклида?
- 16 Какую вы знаете поверхность, у которой только одна сторона?
- 17 Назовите хотя бы одну ещё никем не решённую геометрическую задачу.
- 18 Кто из русских царей занимался геометрией?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 1 На рисунке 48 изображены четыре карандаша, каждый из которых касается трёх других. Возможна ли эта конструкция?
- 2 В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла,

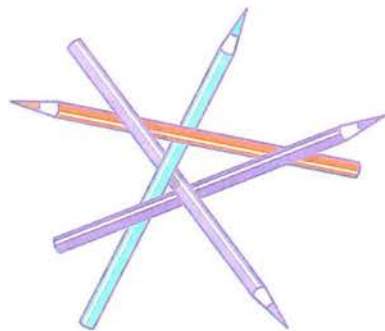


Рис. 48

образованного двумя другими. Начертите план такого города.

- 3 Пять человек разделили один арбуз на 5 частей. После того как они их съели, осталось 6 корок. Как такое могло быть, если корки никто не грыз?
- 4 Какие провода в городе выше: у троллейбуса или у трамвая? Можно ли на этот вопрос ответить, не выходя на улицу?



Рис. 49



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Ошибка Колумба

Все знают, что Колумб открыл Америку. Но удивительно то, что сам Колумб этого так и не узнал... Более того, ступив на берег Америки, он совершенно искренне думал, что открыл Индию или Китай!

Подходил к концу XV век, а морской путь в далёкую Индию так и не был ещё найден... Отважные португальцы пытались плыть туда вокруг Африки — это было очень долго и опасно, причём свои карты они держали в секрете. И цели пока не достигли.

Христофор Колумб был итальянцем — он родился в Генуе в семье ткача (рис. 50). Генуя же тогда была городом купцов, банкиров и мореплавателей. Не удивительно, что Колумб уже с 14 лет плавал на торговых кораблях и сделался опытным капитаном. Правда, больше морей и океанов его интересовали деньги, слава и географические карты. Именно как географ он совершил главную ошибку в своей жизни. Ошибка эта и привела его к великому открытию. Вот как это случилось.

Образованные люди того времени понимали, что наша Земля — это огромный шар. Первым его размеры вычислил «отец» античной географии — Эратосфен, вторым — знаменитый астроном Птолемей. Надо сказать, что размер Земли у него получился значительно меньше. Многие тоже это знали, и стали сомневаться. А всё потому,



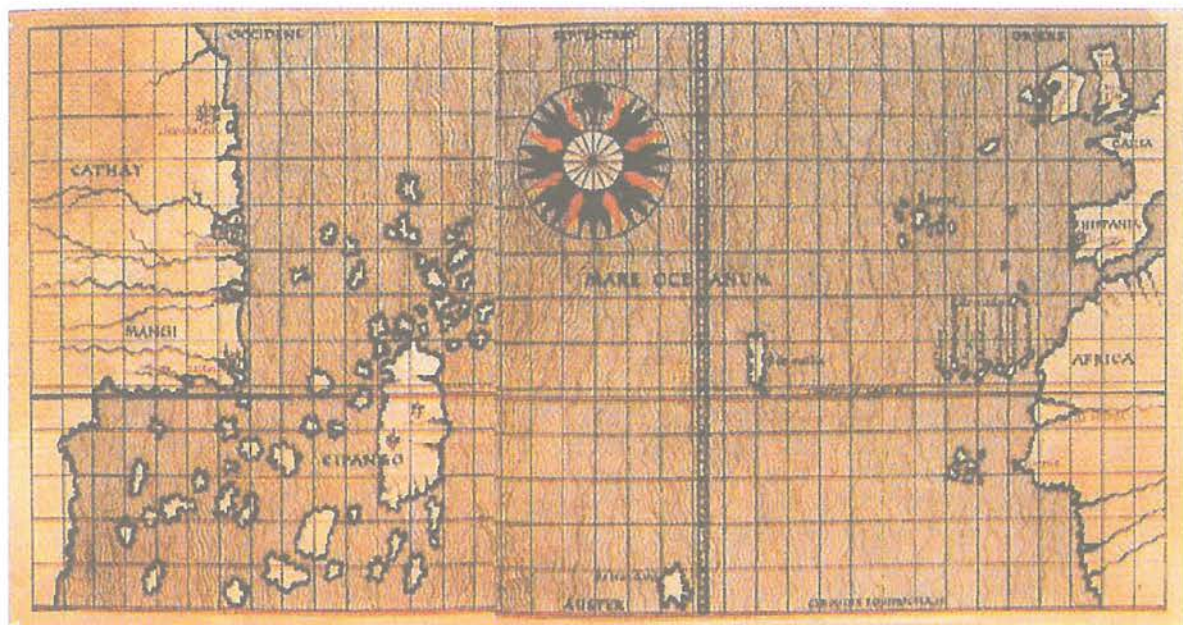
Рис. 50



Индия была для европейцев сказочной страной: Марко Поло писал, что там водятся люди с хвостами, муравьи величиной с собаку и многое другое. Но главное — из Индии арабы везли пряности: перец, мускатный орех, корицу. В те времена восточные пряности были на вес золота. В буквальном смысле — корабль с грузом пряностей стоил дороже корабля, гружённого золотыми слитками.



Рис. 51



Путь из Африки в Индию
на карте Тосканелли. 1474 г.

Рис. 52



Считалось, что **стадий** — это расстояние, которое взрослый человек проходит за то время, пока диск солнца поднимается над линией горизонта. Кому бы сейчас это пришлось в голову? Получалось, что длина одного стадия зависела не только от страны, где его измеряли, но и просто от времени года — ведь зимой и летом солнце восходит неодинаково. Даже в Египте были стадии длиной 175 метров, а бывали и 209 метров. Как в этом было разобраться?

Кроме того, Эратосфен мог не очень точно измерить угол, под которым падали солнечные лучи на землю, мог просто ошибаться... И учёные эпохи Возрождения стали проверять математиков Античности.

что путь вокруг Земли Эратосфен считал в египетских стадиях. Стадии же в Древнем мире бывали разные: вавилонские, греческие, египетские...

В 1410 году в Европе были опубликованы труды мусульманского математика Аль-Фергани, который тоже измерил Землю. Все его вычисления были проведены уже в арабских милях. Только арабские мили были в полтора раза длиннее европейских — в разных странах тогда люди не только говорили на разных языках, но и мерили всё разными способами! Возможно, ученые из Флоренции случайно приняли арабские мили за более короткие европейские, и длина земного экватора в их умах сократилась почти в полтора раза. Возможно, они больше поверили Птолемею. Но Земля стала для них маленькой, а путь вокруг неё должен был составить всего 25 000 км. Получалось, что плыть до вожаемой Индии было короче не на восток, а на запад!

Дошло до того, что по заказу португальского короля астроном Паоло Тосканелли в 1474 году даже нарисовал карту мира, на которой самый короткий путь из Европы в Индию и Китай лежал через Атлантический океан (рис. 52). Этим и воспользовался Христофор Колумб, когда решил «обогнуть» Землю с другой стороны. Известно, что он читал «Географию» Птолемея, общался с Тосканелли и производил свои собственные выкладки. По его расчётам до Индии плыть было не больше 5000 километров. Это было далеко, но вполне возможно. На такой путь в одну сторону должна была уйти пара месяцев. Дело было за малым — убедить короля дать деньги на снаряжение экспедиции. Больше десяти лет убеждал Колумб королей Португалии и Испании в возможности своего путешествия.



Колумб перед королём и королевой в 1493 г.

Рис. 53

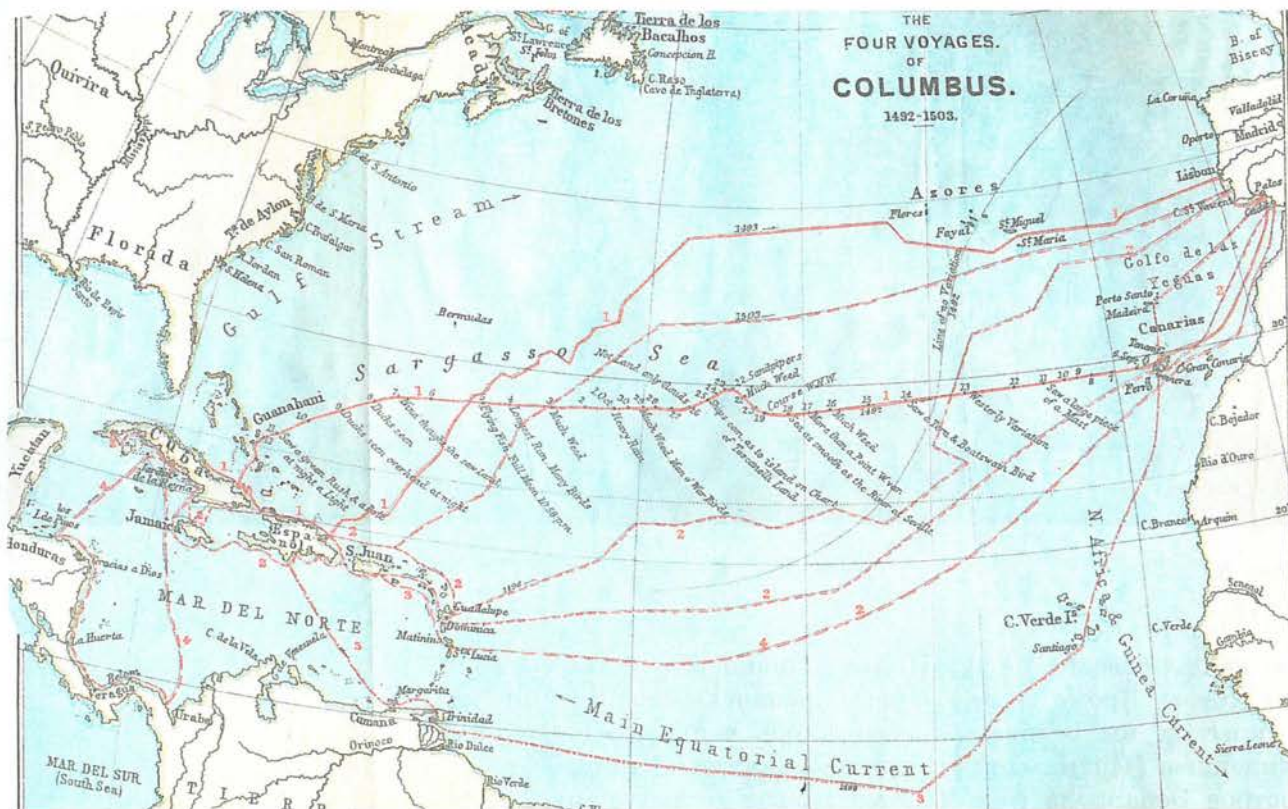
Ещё раньше он пытался убедить в этом же правителей Генуи — если бы ему это удалось, то не Испания, а Италия могла бы стать на века богатейшей страной Европы.

Наконец 3 августа 1492 года три испанских корабля покинули порт Палос и взяли курс на Канарские острова, а потом прямо на запад. Плыли они, держась строго 27-го градуса северной широты. Не догадываетесь почему? Конечно же, это была широта Индии! Экспедиция Колумба состояла из трёх каравелл. Самая большая из них «Санта-Мария» имела в длину не больше 40 метров (рис. 55), две другие — около 20 метров. Даже для того времени корабли эти были очень маленькими. Отправиться на них через океан с командой из 90 человек казалось невероятно смелым решением. Собственные постели там были только у самого Колумба и капитанов. Матросам же приходилось спать по очереди на полу в тесных трюмах на сырых бочках и ящиках.

Колумбу действительно очень повезло: если бы на его пути в Индию не встретился новый материк, вся его экспедиция непременно бы погибла от голода и жажды. Ведь Эратосфен был прав — он правильно рассчитал размеры нашей планеты: до Индии на самом деле было больше 20 000 км. Если бы там был один бескрайний океан,



Убедить королей Испании и Португалии оказалось не просто — Колумбу не верили. Вот что, например, ему говорили: «Если бы вам удалось как-нибудь спуститься в другое полушарие, то как подняться оттуда обратно? Даже при самом благоприятном ветре кораблю ни за что не влезть на огромную водяную гору, какую образует выпуклость Земли». Были и более серьёзные доводы: если путь окажется длиннее, на него просто не хватит запасов пищи и воды. Кроме того, с «той стороны» океана к берегам Европы никто ещё никогда не приплывал — поэтому до Индии должно быть очень далеко.



Четыре путешествия Колумба. 1492—1503 гг.

Рис. 54

корабли Колумба никогда бы не вернулись обратно. Через месяц плавания в открытом море команда стала роптать, назревал бунт: матросы требовали, чтобы Колумб повернул назад. На его счастье, 12 октября 1492 года наконец на горизонте они увидели землю — это был первый маленький остров, который Колумб назвал Сан-Сальвадор, то есть «святой Спаситель». В марте 1493 г. его корабли вернулись в Испанию, везя в трюмах немного золота, диковинные растения, яркие перья птиц и нескольких туземцев. Христофор Колумб объявил, что открыл западную Индию, а её коренных жителей назвал индейцами. По иронии судьбы так их и называют до сих пор.

Всего Колумб совершил четыре экспедиции в «Индию» (рис. 54) через Атлантический океан, но так и не понял, где он находился. Бросив якорь летом 1498 года у берега Южной Америки, в пресноводной бухте реки Ориноко, он вообще считал, что нашёл Земной Рай. В том же году конкуренты Испании — португальцы наконец достигли Индии по морю. Васко да Гама обогнул Африку с юга и через два года вернулся из далёкой Индии с пряностями на борту. Из его команды в живых осталась только половина людей, но зато затраты на саму экспедицию окупились в 60 раз! Колумба стали подозревать в обмане, ведь



«Санта-Мария». Самая большая из каравелл Колумба

Рис. 55



Рис. 56

он нашёл совсем «не ту» Индию. Пряностей не было, золота тоже. Кроме того, первые испанские поселения на открытых им островах подвергались частым нападениям индейцев. Испанцы их жестоко подавляли. В результате на остров Эспаньола (так Колумб назвал остров Гаити) прибыл новый наместник, который заковал Колумба в кандалы и отправил в Испанию. Его лишили звания адмирала и всех дарованных ему привилегий. Уступив возмущению народа, кандалы потом сняли, но Колумб не расставался с ними до конца своей жизни и даже просил положить их с собой в гроб.

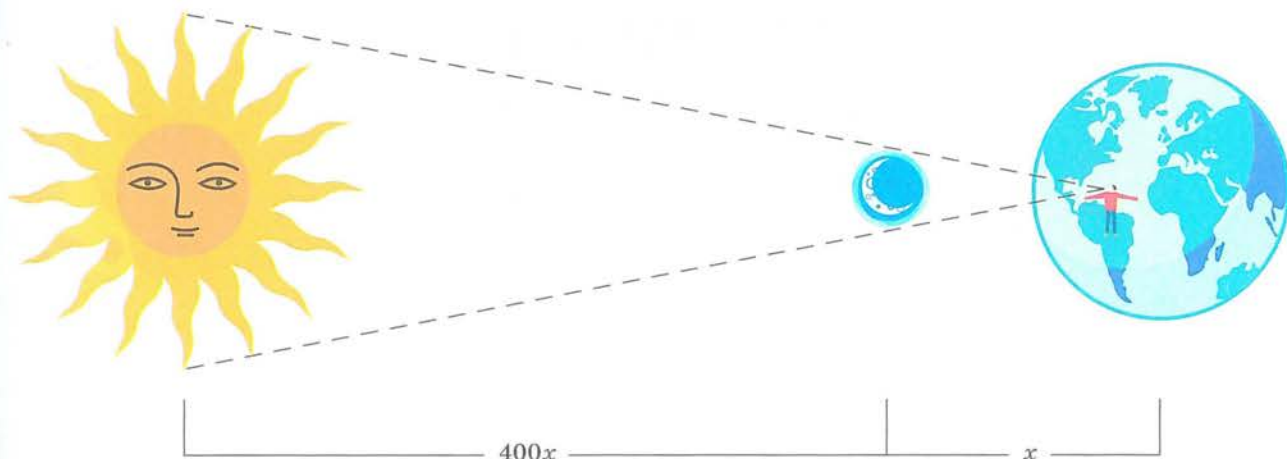
Таким образом, приходится признать исключительную важность математических расчётов даже для географических открытий. Перед своим рискованным путешествием Колумб не стал проверять древних учёных и ошибся «всего» на несколько тысяч километров! Он не сумел бы их преодолеть и должен был по дороге погибнуть мучительной смертью. Этого не произошло по счастливой случайности... А ошибка, которую он допустил, стала самой великой из тех, какие совершили путешественники всех времён и народов.

Ошибка Аристарха

Каковы же настоящие размеры Луны и Солнца и расстояния до них? Если вы заглянете в современную энциклопедию или интернет, то обнаружите, что Луна примерно в четыре раза меньше Земли, а Солнце в 109 раз больше её. Но с Земли они видны почти одинаково — древние люди вообще сначала считали, что Луна и Солнце одинаковых размеров. Получается, что на самом деле Солнце почти в



Рис. 57



Сравнение расстояния между Солнцем и Луной

Рис. 58



Луна примерно в 400 раз меньше Солнца и в 400 раз ближе к Земле. Размер обоих небесных тел кажется наблюдателю с Земли одинаковым. Поэтому в моменты затмений Луна может полностью закрыть Солнце.

400 раз больше Луны (рис. 58) и поэтому должно быть во столько же раз дальше её! Давайте вспомним: у Аристарха получилось не так — он считал, что Солнце дальше Луны всего в 19 раз. То есть Аристарх ошибся почти в 20 раз! Как же так вышло?

Самая главная ошибка возникла на первом шаге: Аристарх не имел ещё точных приборов для измерения угла между Солнцем и Луной. Когда на небе была видна «половинка» Луны, этот угол у него получился равным 87 градусам. А на самом деле нужный угол должен быть на два градуса больше. Казалось бы, Аристарх ошибся совсем немного — это не должно было привести к такой разнице значений. Но привело, поскольку эти два угла почти прямые. А в таком случае треугольник, образованный Луной, Землей и Солнцем, сильно меняется даже при небольшом изменении угла.

Ошибку Аристарха позже нашли и исправили астроном Гиппарх и Архимед. Это, безусловно, делает им честь! Но в отличие от самого Аристарха, оба они побоялись поставить Солнце в центр Вселенной... Хотя модель Аристарха гораздо лучше объясняла движение Луны и планет на небе, в неё не верили больше тысячи лет. Почему? Скорее всего, просто боялись. Людям было сложно признать, что наша Земля в космосе — рядовая маленькая планета, а не центр мира. По Аристарху получалось, что Земля движется вокруг Солнца по огромному кругу, радиус которого в 23 000 раз больше радиуса её самой!

Но это ещё не всё: за один год она делает оборот вокруг Солнца, поэтому должна лететь в пустоте с гигантской скоростью, и за полгода перемещаться на 150 миллионов километров. Почему же тогда в течение года звёзды на небе не становятся к нам ближе, не меняется их

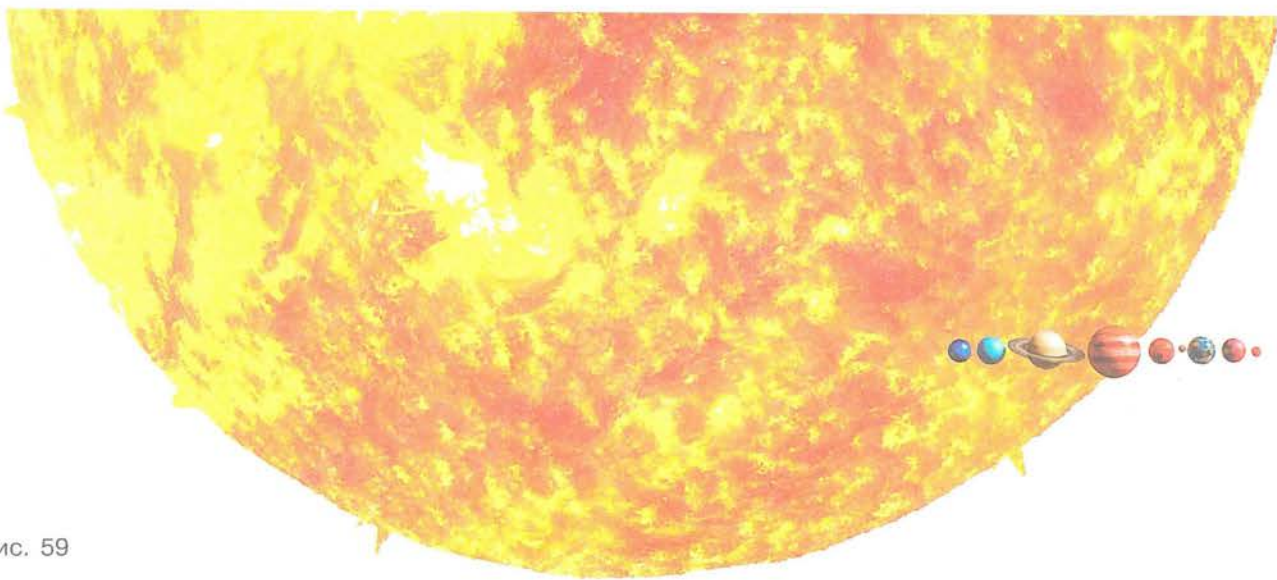


Рис. 59



Большой оранжевый шар на этом макете — Солнце. Рядом с ним планеты. Какая из них наша Земля?

яркость и форма созвездий? Это был главный вопрос, который задавали учёные Аристарху. Он смело отвечал на него так: величина звёзд, форма созвездий и их яркость не меняются потому, что они ещё дальше от нас — в тысячи раз дальше Солнца и Луны!

Представьте себе: в чёрном космосе висит огненный апельсин с диаметром 10 см. Это будет наше Солнце. На расстоянии 10 метров от него по окружности движется голубая крупинка с диаметром всего 1 миллиметр — это будет наша Земля. Вокруг неё на расстоянии 6 сантиметров и тоже по окружности движется белая пылинка — Луна. А ближайшая к нам другая звезда — такой же светящийся апельсин — находится где-нибудь за 2000 км от вас. Представили? Тогда вы поймёте, почему древним людям становилось страшно при одной мысли об этом. Вместо уютного небольшого мира Аристарх предлагал им бесконечную чёрную бездну.

Да, Аристарх ошибся почти в 20 раз. Но эта ошибка не повлияла на главный его вывод — Солнце во много раз больше Земли, поэтому именно оно должно быть поставлено в центр нашего мира. Земля же миллионы лет вращается вокруг этого центра в огромной и бесконечной Вселенной.



1

Точки и прямые

- §1 Геометрические фигуры
- §2 Точка, прямая, плоскость
- §3 Две прямые на плоскости
- §4 Отрезки и лучи
- §5 Полуплоскость



§1 Геометрические фигуры



Рис. 1.1

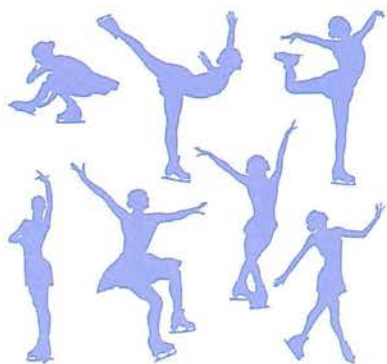


Рис. 1.2

Что такое геометрические фигуры?

Вы можете спросить: что изучает наука геометрия? Неужели она нужна только для того, чтобы «мерить землю»? Конечно, нет! Ещё геометрия нужна людям для того, чтобы правильно строить здания, делать игрушки и детали сложных механизмов, чтобы создавать красивые орнаменты (рис. 1.1), да и просто нашу с вами одежду и обувь. Дома, ботинки, детали машин, плитки на полу — всё это геометрические фигуры. Значит, в общем случае геометрия и должна изучать свойства геометрических фигур.

Но что такое геометрические фигуры? Любой язык многозначен, и слово «фигура» может обозначать многое. Часто говорят о фигуре человеческого тела, шахматных фигурах, о фигуре речи. Даже существует вид спорта, связанный с этим словом: фигурное катание. Кстати, как вы думаете, почему он так называется? В любом случае мы с вами пользуемся словом «фигура», когда хотим сказать о форме чего-либо. Например, садовник подстригает кусты, чтобы придать им определённую форму (рис. 1.4). Примерно то же самое делает с нашими волосами парикмахер.

Обратите внимание: когда мы рассуждаем о форме какого-либо предмета, нас не интересуют его цвет или вес. Не имеет значения и материал, из которого он сделан. Каменный шар, мяч или мыльный пузырь имеют одну и ту же форму — форму шара. Значит, геометрической фигурой будет не мяч или пузырь, а именно шар (рис. 1.5). С точки зрения геометрии нас будет интересовать только форма самого предмета и его размеры.



Рис. 1.3



Рис. 1.4

Что такое размер предмета, поймёт каждый: шар или тот же ботинок может быть большим или маленьким — в конце концов, ботинок меньшего размера на ногу просто не наденешь! А вот что такое форма?

Любой человек понимает, что форма вещи — это то, как она выглядит: круг и квадрат очевидно имеют разную форму, шар и ботинок тоже. Но почему? На этот непростой вопрос античные философы отвечали примерно так: форма вещи — это соотношение между собой её частей, это внутренние пропорции самой вещи, можно сказать — «душа» предмета. Вот жидкость не имеет никакой формы (рис. 1.7). Вернее, она принимает любую форму: чашки, амфоры — любого сосуда, куда её нальют. Так и материал, из которого сделан любой предмет, «принимает» форму этого предмета, а значит, форма вещи существует сама по себе — неважно, из чего эта вещь сделана.



В математике различают шар и его поверхность — сферу. Если сравнить шар с апельсином, то сфера — это кожа апельсина.

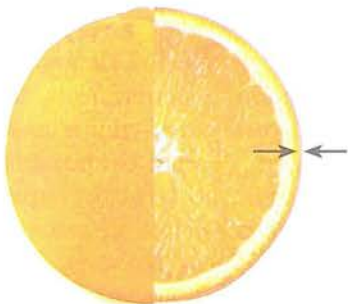


Рис. 1.6



Рис. 1.5



Рис. 1.7



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Посмотрите на рисунок 1.8. На нём изображены геометрические фигуры, которые можно нарисовать на листе бумаги или на плоскости. Все они имеют легко узнаваемую форму и служат моделями предметов окружающего нас мира. Постарайтесь на этих рисунках найти каждую из таких фигур и подобрать к ней название из списка.

куб
конус
пирамида
отрезок
круг
угол
трапеция
цилиндр
пятиугольник
сфера
спираль
ломаная
прямоугольник
овал
квадрат

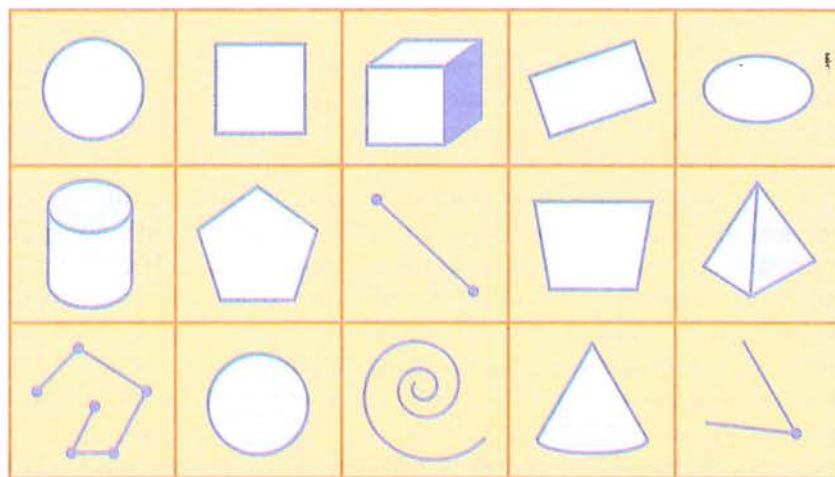


Рис. 1.8



Купол Исаакиевского собора
в Санкт-Петербурге

Рис. 1.9

Если вы без труда угадали все фигуры на данных рисунках, значит, у вас прекрасная геометрическая интуиция! А теперь скажите: чем прямоугольник отличается от трапеции или круг от овала? Согласитесь — сделать это уже сложнее... А ещё сложнее дать всем геометрическим фигурам точные математические определения.

Отрезок, прямая или ломаная линия, угол, прямоугольник, круг — всё это довольно простые, но очень важные фигуры. В практике человечества они появились не случайно. Чтобы проложить прямо улицу, необходимо было как-то провести прямую линию, чтобы построить арену цирка или купол храма, нужно было начертить окружность. А чтобы возвести здание, всегда вешали верёвку с грузом — отвес, чтобы по нему строить вертикаль, на языке геометрии — перпендикуляр. Кроме того, люди давно заметили, что на ровной местности самый короткий путь из одного места в другое всегда идёт по отрезку прямой линии. Поэтому обычно так и говорят: «Иди прямо».

Сначала в курсе геометрии мы будем изучать фигуры на плоскости, которые вообще не имеют никакого веса и объёма. Геометрию таких плоских фигур называют

планиметрией. Это название возникло от греческого слова «планис», что означает «плоскость». Кстати, именно от него произошло и русское слово план, то есть «плоский чертёж». На плоскости некоторые геометрические фигуры не имеют даже площади. Какая площадь может быть у отрезка или прямой? Да и любая кривая линия на плоскости не имеет площади. Можно сказать, что в геометрии любая линия — это как будто нитка, но только бесконечно тонкая. Даже разглядывая её в микроскоп, мы всё равно не заметим у неё никакой толщины.

Математические модели

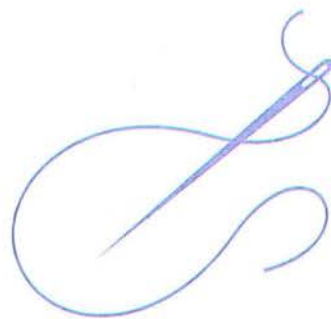
Скажите: на что похожа окружность? Правильно: она похожа на обруч или на обод колеса (рис. 1.14). Ещё правильнее было бы сказать, что колесо и обруч имеют форму окружности. Но в отличие от них окружность не имеет веса и толщины. Однако она имеет и размер, и форму. Окружность — это замкнутая линия, которая служит абстрактной **моделью** колеса, а с колесом человек постоянно имел дело. Древние люди считали окружность самой совершенной из всех линий.

А как же дать строгое определение окружности? Чем она отличается, например, от овала? Интуитивно это понятно: овал вытянут, а окружность везде одинакова, всюду «круглая». Но для геометрии такое интуитивное определение никак не годится. Давайте вспомним, как мы рисуем окружность: обычно мы пользуемся для этого циркулем. Кстати, за две тысячи лет циркуль не сильно изменился (рис. 1.13). А теперь представьте, что вы инженер античного города и вам необходимо построить круглую арену амфитеатра или цирка диаметром 100 метров, но у вас нет такого большого циркуля? Древние строители использовали для этого обыкновенную верёвку. Если один конец верёвки привязать к вбитому в землю шесту,



Улица в древних Помпеях

Рис. 1.10



Слово «линия» образовалось от латинского выражения *linea restis*, что означает «льняная нить»

Рис. 1.11



Рис. 1.12



Рис. 1.13



Рис. 1.14



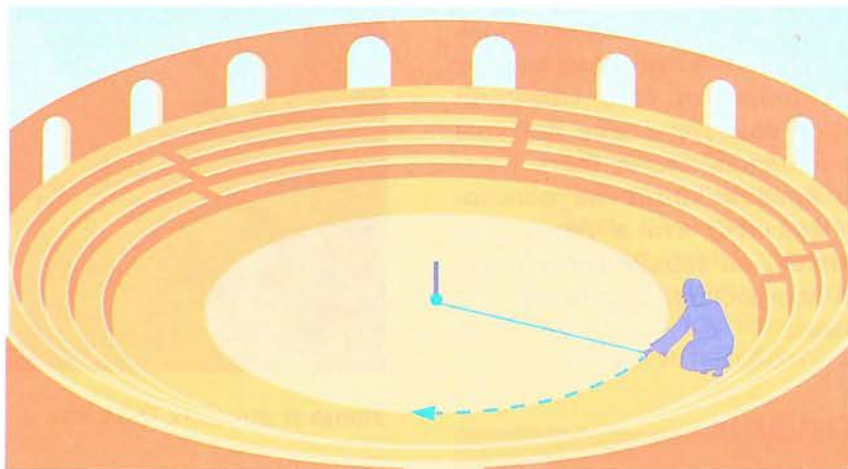


Рис. 1.15

а другой свободный её конец вести по земле, то он опишет нужную нам окружность (рис. 1.15). Важно только, чтобы верёвка оставалась всё время натянутой. Почему это важно? Дело в том, что тогда расстояние от конца верёвки до песта не будет меняться, ведь длина верёвки остаётся той же. А раз так, то любая точка нарисованной окружности окажется на одинаковом расстоянии от места, где был закреплён пест. Это место (или эта точка) называется **центром** окружности. По той же причине одинаковую длину имеют и все спицы колеса — любая его точка удалена от центра на одно и то же расстояние, называемое **радиусом**. Итак, мы с вами пришли к естественному и строгому определению окружности:



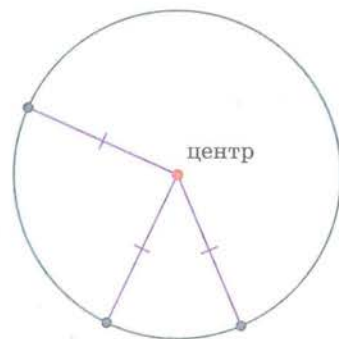
Окружностью называют замкнутую линию, все точки которой находятся на равном расстоянии от центра.

Теперь уже ясно, чем овал отличается от окружности, — он просто не подходит под это определение: точки овала находятся на разных расстояниях от любой точки на плоскости¹.

Вы уже знаете, что для проведения прямой линии древние строители (да и современные) использовали всё ту же верёвку. Если верёвку натянуть, то она превратится в отрезок прямой линии, а если сказать точнее: **отрезок прямой служит математической моделью натянутой верёвки**. Ведь реальная верёвка имеет толщину и какой-то вес, а её математическая модель не имеет никакой толщины и невесома. Вот почему строителей пирамид и храмов в Древнем Египте и Древней Индии называли «натягивателями верёвок».

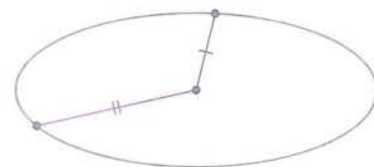


Рис. 1.16



Окружность

Рис. 1.17



Овал

Рис. 1.18

¹ Ещё необходимо проверить, что вообще не существует ни одной точки, которая бы находилась на одинаковом расстоянии от всех точек овала. Мы сделаем это строго, когда будем изучать свойства окружности.

Из чего состоят все геометрические фигуры?

А как вы думаете: из чего состоят геометрические фигуры? Ломаная и квадрат, наверное, состоят из отрезков. А из чего состоит сам отрезок, окружность, да и вообще произвольная фигура, нарисованная на листе бумаги? Любая линия, которая получается как след от движения карандаша или ручки по бумаге, соединяет точки на плоскости. Даже маленькая часть этой линии — это множество таких точек, каждая из которых отмечает прикосновение пишущего предмета к бумаге в данный момент времени. Поэтому считают, что любая геометрическая фигура состоит из точек. В геометрии вообще любое множество точек называют фигурой. Но тогда получается, что две точки — это тоже фигура, да и одна точка — фигура. На самом деле это так, ведь точка — это простейшая и неделимая фигура геометрии, можно сказать, её «атом». Как вся материя состоит из атомов, так и любая геометрическая фигура состоит из точек.

Правда, многие сложные фигуры на плоскости гораздо проще рисовать, если мысленно разделить их на более простые геометрические фигуры — отрезки, прямоугольники, спирали, окружности или овалы. Можно даже сказать, что такие фигуры состоят из более простых.

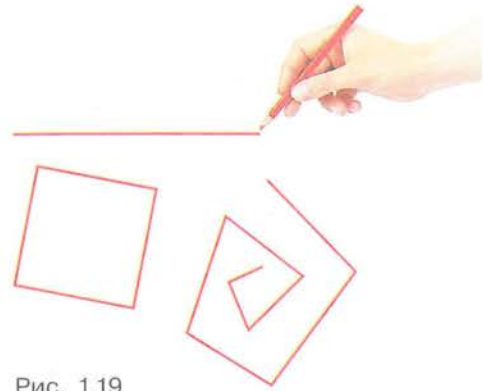


Рис. 1.19



Как вы думаете, почему слово «точка» образовалось от глагола «точить»?



УПРАЖНЕНИЯ

- 2 Посмотрите на рисунки в таблице. Попробуйте повторить каждый из них в тетради и скажите, какие простые геометрические фигуры вы в каждом случае использовали. Для проведения отрезков возьмите линейку, а для построения окружностей — циркуль. Только овал вам придётся нарисовать от руки — как ещё говорят, «на глазок».



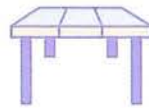
конверт



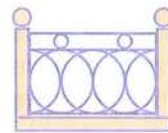
кружка



лампочка



стол



ограда



рожок



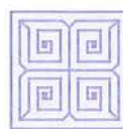
мышь



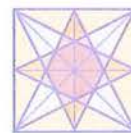
соты



цветок



узор



мозаика



2 квадрата

Рис. 1.20



ВОПРОСЫ

- 1 Из чего состоят все геометрические фигуры?
- 2 Какие простые геометрические фигуры вы знаете?
- 3 Как в геометрии определяют окружность?
- 4 Каким способом древние строители чертили на земле отрезки и окружности?
- 5 Какие геометрические фигуры служат математическими моделями натянутой верёвки, обода колеса?
- 6 В первом русском учебнике геометрии, изданном в 1709 г. под редакцией Петра I, есть такое определение: «***, или заострённый каравай, есть такой корпус, егоже базис, циркульно круглая плоскость есть, а наружная выпуклая плоскость онаго в верху башенно заостряется». Как вы думаете, какую фигуру так определяли?

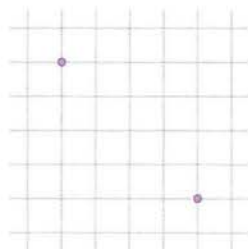


Рис. 1.21



УПРАЖНЕНИЯ

- 3 На бумаге в клетку отмечены две точки (рис. 1.21).
 - а Нарисуйте квадрат так, чтобы эти две точки были его противоположными вершинами.
 - б Постройте окружность, которая проходит через все вершины этого квадрата.
- 4 Постройте окружность, проходящую через три точки, показанные на рисунке 1.22.
- 5 Постройте окружность, проходящую через три точки, показанные на рисунке 1.23.
- 6 На рисунке 1.24, а показано, как все вершины квадрата можно друг за другом соединить тремя отрезками, не отрывая карандаша от бумаги. Проведите три отрезка через все вершины квадрата так, чтобы вернуться в исходную точку (1.24, б).

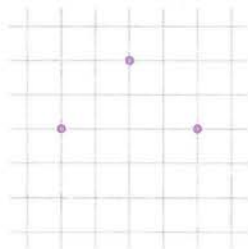


Рис. 1.22

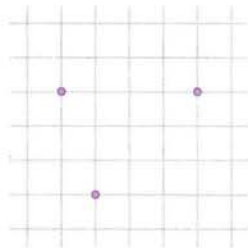


Рис. 1.23

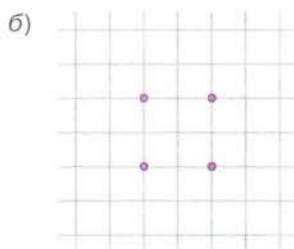
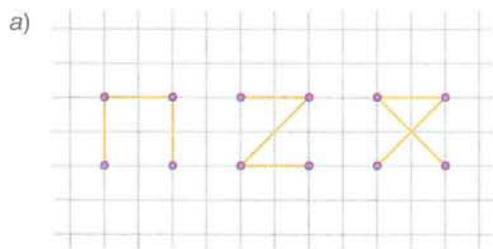


Рис. 1.24

Геометрические задачи

Решают ли на уроках геометрии задачи? Конечно, решают — и очень много! Скажем больше: вы уже это делали на уроках математики в пятом и шестом классах. Любая задача, где нужно найти площадь комнаты или длину забора, будет задачей по геометрии. Но не только: как выбрать самый короткий путь от школы до дома; как положить на стол шесть карандашей, чтобы каждый из них касался всех других; как разрезать пиццу на равные части; как повернуть зеркало, чтобы солнечный зайчик попал в нужную точку, — всё это тоже задачи по геометрии. Давайте вспомним, что из геометрии вы уже проходили на уроках математики раньше:

Периметр геометрической фигуры — это длина её границы или сумма длин всех её сторон.

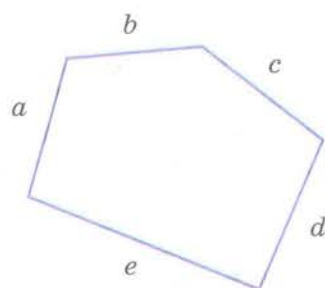
Длина забора, который окружает участок земли, — это тоже его периметр (рис. 1.25). Конечно, не у всех геометрических фигур существуют прямые стороны, но периметры таких «кривых» фигур мы пока считать не будем.

Также вы наверняка знаете, что у прямоугольника противоположные стороны равны, и что

Площадь прямоугольника S равна произведению двух его соседних сторон (рис. 1.26).

Всё остальное следует из здравого смысла и вашего практического опыта. Пусть, например, некоторую фигуру разрезали на части, площади которых вы знаете. Скажите: как теперь найти площадь всей фигуры? Конечно, нужно просто сложить площади всех её частей (рис. 1.27)!

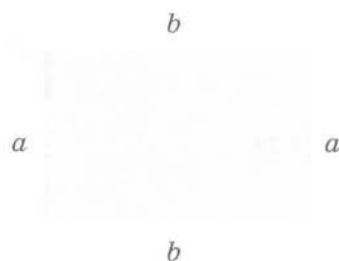
ПЕРИМЕТР



$$P = a + b + c + d + e$$

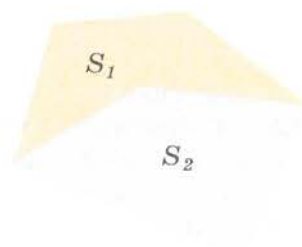
Рис. 1.25

ПЛОЩАДЬ



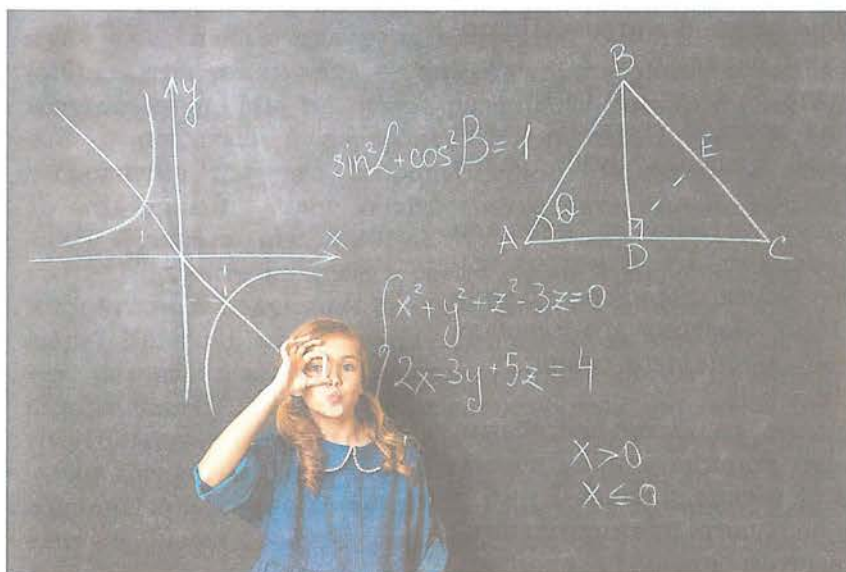
$$S = a \cdot b$$

Рис. 1.26



$$S = S_1 + S_2$$

Рис. 1.27





ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 1.1** На рисунке 1.28, *а* показан план городской квартиры, в которой есть три комнаты, кухня, ванная и коридор. На этом плане указаны размеры некоторых из этих помещений. Найдите на нём площадь: *а)* кухни; *б)* детской комнаты; *в)* спальни; *г)* коридора.

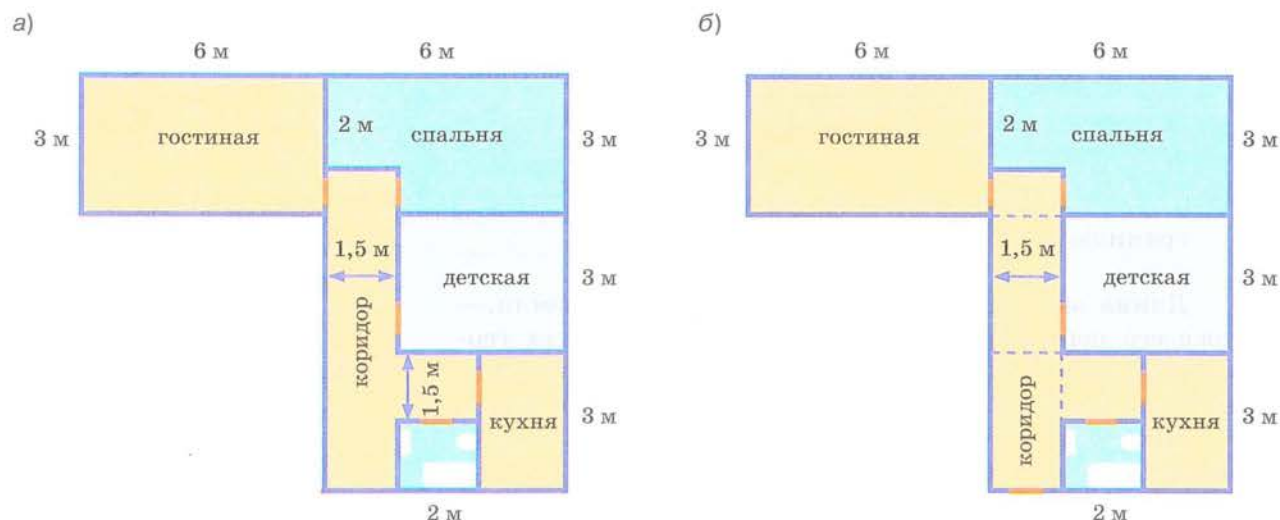


Рис. 1.28

РЕШЕНИЕ: *а)* Давайте на плане квартиры продолжим стены некоторых её комнат так, как это показано на рисунке 1.28, *б*. Тогда вся квартира окажется разбитой на прямоугольники. Легко заметить, что спальня, детская, кухня, коридор и ванная все вместе образуют один такой прямоугольник со сторонами 6 и 9 метров. Значит, сумма ширины кухни, ванной и коридора равна 6 метрам. Поэтому неизвестная нам сторона кухни равна: $6 - 2 - 1,5 = 2,5$ (м). Значит, её площадь равна $3 \cdot 2,5 = 7,5$ (м²).

б) Точно так же большая сторона детской комнаты равна $6 - 1,5 = 4,5$ (м). А значит, её площадь будет равна $4,5 \cdot 3 = 13,5$ (м²).

в) Чтобы найти площадь спальни, нужно из площади большого прямоугольника со сторонами 3 и 6 метров вычесть площадь попавшей в него части коридора. Длина этого «выступа» равна $3 - 2 = 1$ (м). Поэтому его площадь равна $1,5 \cdot 1 = 1,5$ (м²). Тогда площадь спальни равна $3 \cdot 6 - 1,5 = 16,5$ (м²).

г) Площадь коридора можно считать разными способами. Например, для начала найдём, что ширина ванной комнаты равна $3 - 1,5 = 1,5$ (м). Тогда её площадь равна $2 \cdot 1,5 = 3$ (м²). А теперь из площади большого прямоугольника со сторонами 6 и 9 метров вычтем площади спальни,

детской, кухни и ванной: $6 \cdot 9 - 16,5 - 13,5 - 7,5 - 3 = 13,5 \text{ (м}^2\text{)}$.

ОТВЕТ: площадь кухни равна $7,5 \text{ м}^2$, площадь детской — $13,5 \text{ м}^2$, площадь спальни — $16,5 \text{ м}^2$, площадь коридора — $13,5 \text{ м}^2$.

☆☆☆ **ПРИМЕР 1.2** Ваня разрезал лист ватмана на две прямоугольные части (рис. 1.29). Потом он нашёл, что периметры этих частей равны 80 и 90 см. Кроме того, он помнит, что периметр целого листа ватмана был равен 1 м. Найдите площадь этого листа.

РЕШЕНИЕ: Обозначим длину разреза буквой x . Поскольку Ваня разрезал лист ватмана на два прямоугольника, то стороны этих прямоугольников, противоположные линии разреза, тоже равны x . Теперь сложим периметры двух этих частей. Мы получим периметр целого листа ватмана плюс удвоенную длину разреза, то есть $80 + 90 = 100 + 2x$. Откуда $x = 35 \text{ см}$. Посмотрим на первый прямоугольник. Его периметр 80 см, а сумма двух противоположных сторон равна $2 \cdot 35 = 70 \text{ см}$. Значит, две другие его стороны в сумме дают $80 - 70 = 10 \text{ см}$. То есть каждая из них равна $10 : 2 = 5 \text{ см}$. Площадь этого прямоугольника равна $35 \cdot 5 = 175 \text{ см}^2$.

Точно так же найдём другие стороны второго прямоугольника. Получится $(90 - 70) : 2 = 10 \text{ см}$. Значит, его площадь равна $35 \cdot 10 = 350 \text{ см}^2$.

Чтобы найти площадь целого листа ватмана, нужно просто сложить площади двух его частей. То есть площадь целого листа равна $175 + 350 = 525 \text{ см}^2$.

ОТВЕТ: 525 см^2 .

☆☆☆ **ПРИМЕР 1.3** Как с помощью одной линейки нарисовать на клетчатой бумаге треугольник, площадь которого равна ровно трём клеткам?

РЕШЕНИЕ: С помощью линейки легко провести прямую через любые два узла клетчатой бумаги. Попробуем выбрать три таких узла — они и будут вершинами нашего треугольника. Мы не будем разбирать самый общий случай, а попытаемся построить нужный нам треугольник, расположив две его стороны прямо на линиях сетки. То есть один из углов такого треугольника будет прямым, как у квадрата (рис. 1.30, а).

Давайте впишем в сетку любой треугольник с прямым углом и подумаем: сколько клеток составляет его площадь? Конечно, можно заняться подсчётом количества клеток, которые в нём содержатся целиком, потом прибавлять к ним части клеток, которые полностью «не влезают» в треугольник, и так далее. Но мы пойдём другим путём: легко догадаться, что любой такой треугольник — это половинка прямоугольника! (Рис. 1.30, б). Например, нарисованный нами треугольник составляет ровно половину

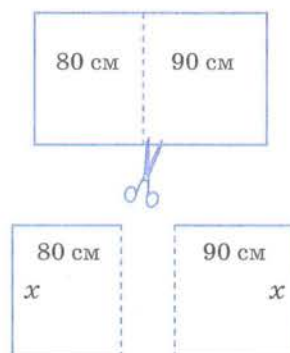


Рис. 1.29

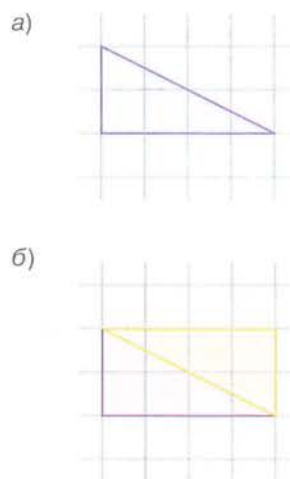


Рис. 1.30

от прямоугольника со сторонами в 2 и 4 клетки. Поэтому его площадь равна $(2 \cdot 4) : 2 = 4$ клетки. Видите, как просто! Дальше всё уже понятно: нужно нарисовать на клетчатой бумаге прямоугольник с площадью в 6 клеток и разделить его пополам диагональю. Сделать это можно тоже разными способами. Нужные нам треугольники отмечены на рисунках (рис. 1.31, а, б) фиолетовым цветом. Каждый из них имеет площадь, в точности равную трём клеткам.

☆☆☆ **ПРИМЕР 1.4** На свой день рождения Николай получил шоколадный торт, семь горящих свечей на котором образовывали букву «Н» так, как это показано на рисунке 1.32, а. Коля хочет разделить свой торт на куски так, чтобы на каждом из них было только по одной свечке. При этом он не хочет делать больше трёх прямых разрезов. Помогите Коле это сделать!

РЕШЕНИЕ: Легко убедиться, что тремя прямыми разрезами разделить торт больше, чем на семь частей не получится. Значит, в каждой из них должно гореть по одной свече. Давайте одну из этих частей сделаем треугольной формы и поместим в неё свечку, горящую в центре торта. Один из возможных способов нужного разрезания торта показан на рисунке 1.32, б.

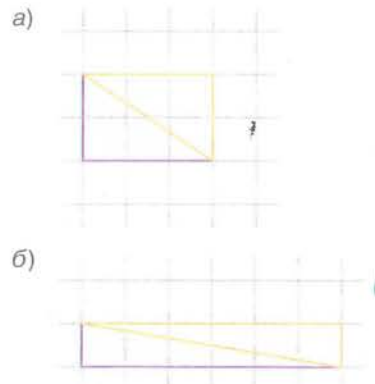


Рис. 1.31

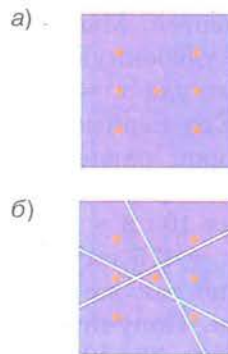


Рис. 1.32



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1.1 Перед вами план городской квартиры, в которой есть две жилые комнаты, кухня, туалет, ванная комната и коридор (рис. 1.33). На этом плане обозначены размеры некоторых из этих помещений.

☆☆☆ Найдите на нём площадь: а) большой комнаты, б) маленькой комнаты, в) кухни.

☆☆☆ Найдите площадь коридора.



Рис. 1.33



Рис. 1.34

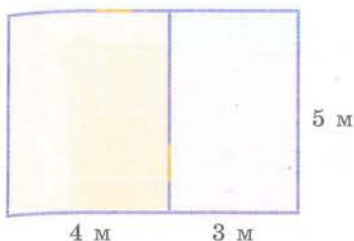


Рис. 1.35

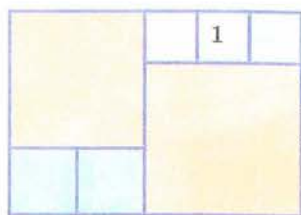


Рис. 1.36

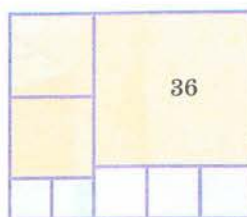


Рис. 1.37

1.2 План первого этажа загородного дома показан на рисунке 1.34. На этом плане обозначены размеры некоторых из его помещений.

☆☆☆ Найдите на нём площадь: а) гостиной, б) прихожей, в) котельной.

☆☆☆ Найдите ширину лестницы на второй этаж, если площадь кухни равна 17 м^2 .

1.3 ☆☆☆ В двух смежных комнатах квартиры делают ремонт. Их размеры показаны на рисунке 1.35, причём ширина каждой двери равна 1 метру. Сколько необходимо купить метров плинтуса, чтобы прибить его по периметру в этих комнатах?

1.4 ☆☆☆ Прямоугольник разрезали на семь квадратов так, как это показано на рисунке 1.36. Площадь одного из маленьких квадратов равна 1. Найдите площадь всего прямоугольника.

1.5 ☆☆☆ Прямоугольник разрезали на восемь квадратов так, как это показано на рисунке 1.37. Площадь одного из этих квадратов равна 36 м^2 . Найдите площадь всего прямоугольника.

1.6 ☆☆☆ Ваня разрезал лист ватмана на две прямоугольные части. Потом он нашёл, что периметры этих частей равны 70 и 90 см. Кроме того, он помнит, что длина большей стороны листа ватмана была равна 30 см (рис. 1.38). Найдите площадь этого листа.

1.7 ☆☆☆ Звено цепи имеет размеры, показанные на рисунке 1.39. На какую длину можно растянуть цепь из 10 таких звеньев?

1.8 ☆☆☆ У какой из двух фигур на рисунке 1.40 периметр больше?

1.9 ☆☆☆ Найдите периметр и площадь прямоугольной фигуры на рисунке 1.41.

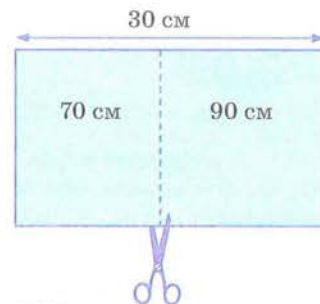


Рис. 1.38

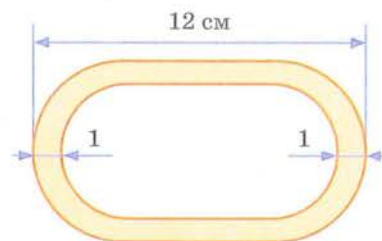


Рис. 1.39

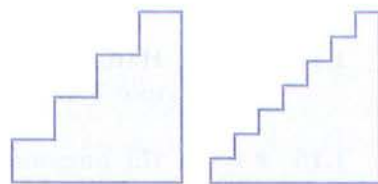


Рис. 1.40

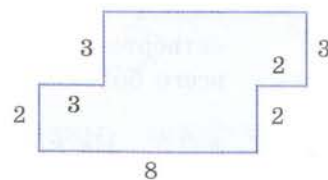


Рис. 1.41

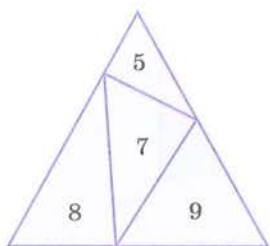


Рис. 1.42

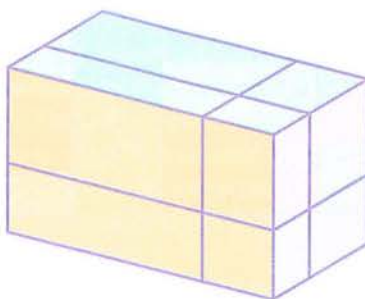


Рис. 1.43

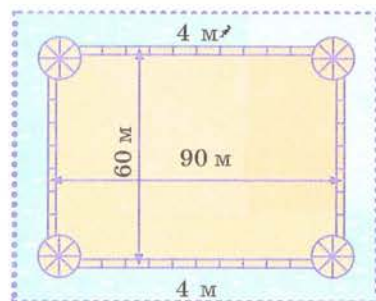


Рис. 1.44

1.10 ☆☆☆ На рисунке 1.42 указаны периметры всех четырех малых треугольников. Найдите периметр составленного из них большого треугольника.

1.11 ☆☆☆ Чтобы покрасить деревянный прямоугольный брусок, нужно 20 г краски. Брусок распилили в трёх направлениях (рис. 1.43). Сколько получилось частей, и сколько нужно краски, чтобы покрасить их со всех сторон?

1.12 ☆☆☆ Старинный замок на плане 1.44 имеет вид прямоугольника, стороны которого равны 60 и 90 м. Замок окружает ров шириной 4 метра, заполненный водой. По внешнему краю этого рва установили забор из заострённых сверху брёвен — частокол. Найдите длину этого частокола.

1.13 ☆☆☆ Перед вами план квадратного дома, внутри которого есть внутренний дворик — патио (рис. 1.45). Всего в доме четыре комнаты, периметры которых равны 20, 30, 40 и 50 м. Найдите длину одной стены этого дома.

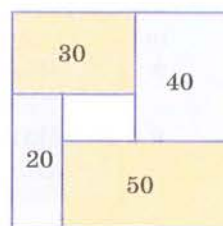


Рис. 1.45

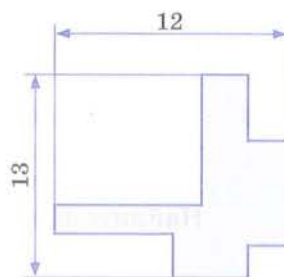


Рис. 1.46

1.14 ☆☆☆ Найдите периметр прямоугольной фигуры на рисунке 1.46.

1.15 ☆☆☆ На рисунке 1.47 внутри большого квадрата расположен крестик. Внутри крестика — малый квадрат площадью 1. Площадь крестика равна 17. Найдите площадь большого квадрата.

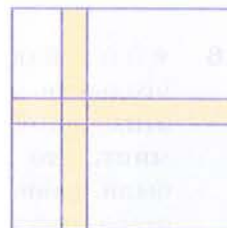


Рис. 1.47

1.16 ☆☆☆ На рисунке 1.48 известны периметры трёх малых прямоугольников. Найдите периметр четвёртого малого прямоугольника и периметр всего большого прямоугольника.

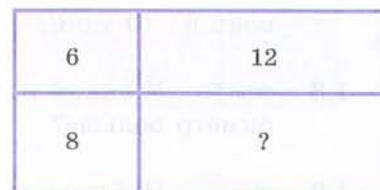


Рис. 1.48

1.17 ☆☆☆ На клетчатой бумаге нарисовали несколько фигур (рис. 1.49). Сколько клеток составляет площадь каждой из них?

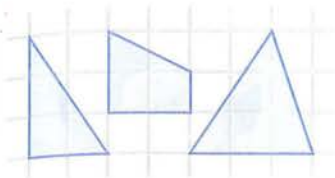


Рис. 1.49



Рис. 1.52

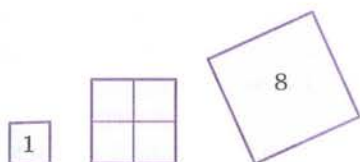


Рис. 1.53

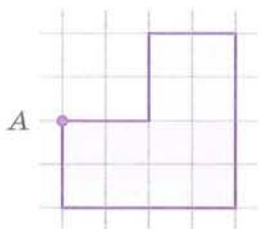


Рис. 1.54

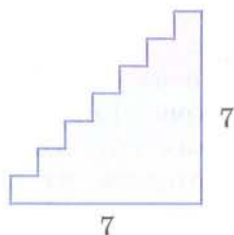


Рис. 1.55

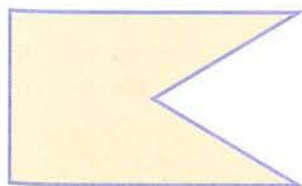


Рис. 1.56

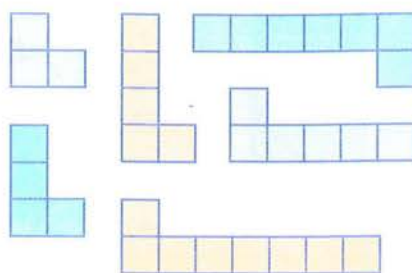


Рис. 1.50

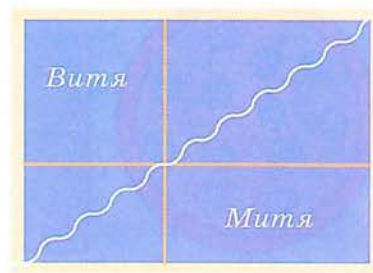


Рис. 1.51

1.18 ☆☆☆ На клетчатой бумаге нарисовали несколько фигур (рис. 1.52). Сколько клеток составляет площадь каждой из них?

1.19 ☆☆☆ Когда знаменитый философ Сократ объяснял геометрию рабу своего друга Менона, он просил его построить квадрат, в восемь раз больший другого по площади. А сможете ли вы построить квадрат с площадью в восемь клеток на клетчатой бумаге в своей тетради (рис. 1.53)?

1.20 ☆☆☆ В своей тетради Петя Угольников обвёл по клеточкам фигуру так, как это показано на рисунке 1.54. Он хочет провести через угол А этой фигуры прямую линию, которая разделит её площадь пополам. Помогите Пете это сделать.

1.21 ☆☆☆ Найдите площадь ступенчатой фигуры на рисунке 1.55. Все ступеньки квадратные и одинаковые.

1.22 ☆☆☆ Сложите из набора шести геометрических фигур, показанных на рисунке 1.50, один прямоугольник.

1.23 ☆☆☆ На свой день рождения близнецы Витя и Митя получили шоколадный торт прямоугольной формы, диагональ которого была проведена белой глазурью. Через точку на этой глазури их папа разрезал весь торт на четыре прямоугольных куса так, как это показано на рисунке 1.51. Близнецы терпеть не могут белой глазури, поэтому они взяли себе те два куска торта, на которых её больше не было. На каждом из этих кусков написано имя того мальчика, который его получил. Кому из близнецов досталось больше торта?

1.24 ☆☆☆ Проведя всего две прямые, разделите флажок на рисунке 1.56 на шесть частей.

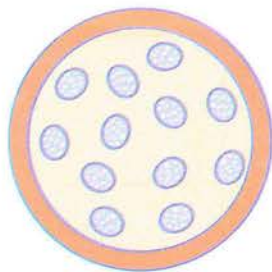


Рис. 1.57

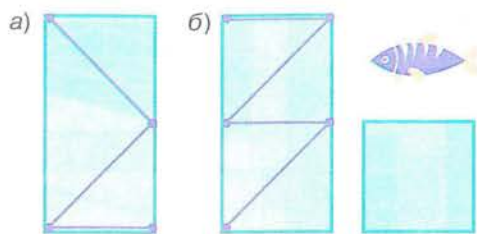


Рис. 1.58



Рис. 1.59

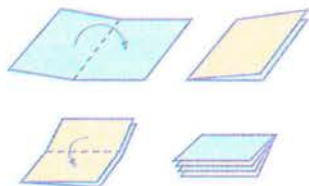


Рис. 1.60

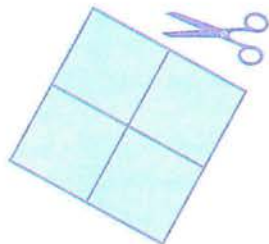


Рис. 1.61

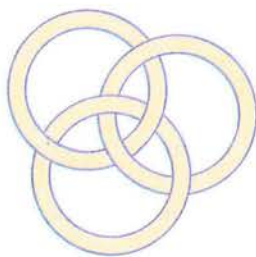


Рис. 1.62

1.25 ★★★ На день рождения к девочке Маргарите может прийти от четырёх до десяти человек. Она собирается испечь на всех одну большую круглую пиццу и потом разделить её на части, проведя только четыре прямых разреза (рис. 1.57). Сможет ли Маргарита это сделать в любом случае, если ей самой и каждому её гостю должно достаться ровно по одному (не обязательно равному) куску пиццы?

1.26 ★★★ Лист прямоугольной формы сложили пополам, а потом ещё раз пополам. Если теперь его разрезать ножницами по прямой линии, то он распадётся на несколько частей (рис. 1.60). Можете ли вы сказать, сколько будет частей? Сколько может быть разных вариантов? Попробуйте разобрать все возможные случаи.

1.27 ★★★ Как сложить квадратный лист бумаги со стороной в 2 клетки так, чтобы его можно было разделить на четыре равных квадрата одним разрезом ножниц (рис. 1.61)?

1.28 ★★★ Герб древнего венецианского рода Борромео состоит из трёх колец, которые зацеплены друг за друга так, что разрыв любого из них приводит к распадению сразу всех колец (рис. 1.62). Сделать такой герб из абсолютно жёстких круглых колец невозможно. Но его легко изготовить из гибкой проволоки или трёх замкнутых резинок. А вы попробуйте теперь по тому же принципу зацепить друг за друга четыре резиновых кольца!

1.29 ★★★ Если смотреть на аквариум спереди, то сиреневая рыбка проплыла, как показано на рисунке 1.58, а. А если справа — то как на рисунке 1.58, б. Нарисуйте вид на путь рыбки сверху.

1.30 ★★★ Деревянный куб покрасили со всех сторон и распилили на 27 одинаковых кубиков (рис. 1.59).

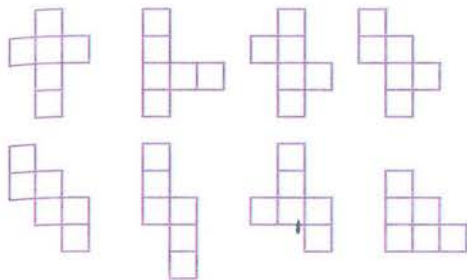


Рис. 1.63

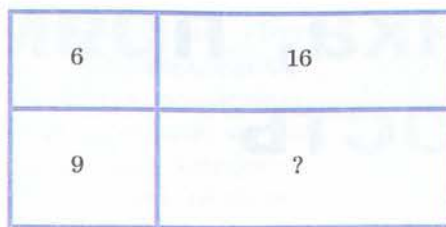


Рис. 1.64

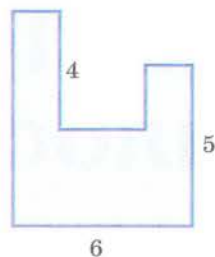


Рис. 1.65



Рис. 1.66

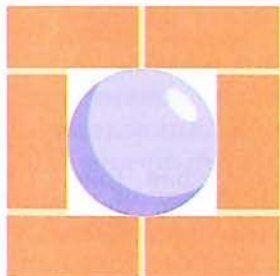


Рис. 1.67



Рис. 1.68

Сколько среди них имеют: а) одну, б) две, в) три окрашенные грани?

- 1.31 ★☆☆ Какие из показанных на рисунке 1.63 фигур являются развёртками куба? Вырежьте их из бумаги и покажите, как сделать из них куб.
- 1.32 ★☆☆ На парадную лестницу, высота которой равна 5 м, положили ковровую дорожку длины 17 м (рис. 1.66). Сколько ступеней у этой лестницы, если ширина каждой ступени равна 30 см?
- 1.33 ★☆☆ Труба камина в башне старинного замка с любой внешней стороны имеет размер 51 см. Каждый слой её кладки состоит из шести одинаковых кирпичей, уложенных так, как это показано на старинном чертеже 1.67. Профессор Сивилла утверждает, что её шар для прорицаний может пройти через дымоход этого камина, касаясь сразу всех его стенок. Скажите, каков диаметр магического шара, если толщина раствора между кирпичами кладки равна 1 см?
- 1.34 ★☆☆ Таня нарисовала по линиям сетки на клетчатой бумаге картину в виде чёрного прямоугольника, а потом заключила её в рамку шириной в 1 клетку. Площадь рамки оказалась в точности равна площади самой картины (рис. 1.68). Чему могла быть равна площадь картины?
- 1.35 ★☆☆ На рисунке 1.64 известны площади трёх малых прямоугольников. Найдите площадь четвёртого малого прямоугольника.
- 1.36 ★☆☆ Найдите периметр прямоугольной фигуры на рисунке 1.65.

§2 Точка, прямая, плоскость

Геометрия изучает свойства фигур на плоскости. Фигуры эти могут быть сложные и простые, а могут быть настолько простые, что их уже невозможно определить через другие фигуры. Такие фигуры называют **элементарными**. С их помощью описывают всё многообразие мира геометрии. К элементарным фигурам относят **точку, прямую и плоскость**.

Что такое точка?

Как мы уже с вами знаем, все фигуры в геометрии состоят из точек. А что такое точка, как её понимать? Каждому ясно, что точка — это что-то совсем маленькое, крошечное. Наверное, точку и увидеть невозможно. А как вы думаете, может ли быть точкой каждый из нас? Самое удивительное, что не только каждый из нас, но и школа, и целый город, да и вся наша планета может быть точкой.

Всё зависит от того, откуда на неё смотреть. Посмотрите на ночное небо: каждая звезда для нас выглядит светящейся точкой, хотя звёзды — это огромные огненные шары, большинство из которых размером во много раз превосходит нашу Землю. Просто они находятся так далеко, что их размеры не имеют для нас значения. Для нас важно только расположение звёзд на небосклоне.

Это фотография (рис. 2.1) нашего Солнца, сделанная телескопом со спутника



Рис. 2.1

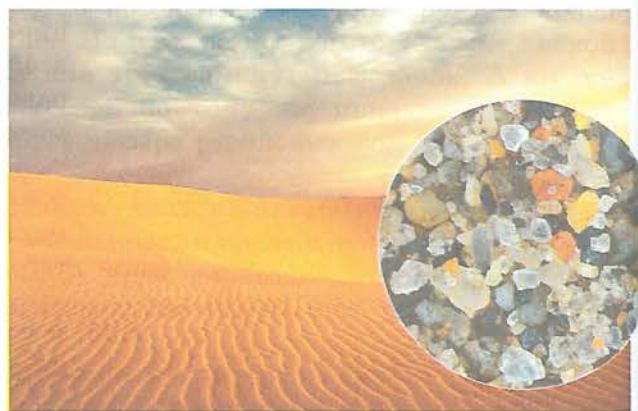


Рис. 2.2

Хотите знать, как древние учёные определяли точку? Великий Евклид в своих «Началах» написал так: «Точка — это то, что не имеет частей». Даже совсем маленький кружочек можно разделить на части, песчинка под микроскопом будет выглядеть камнем (рис. 2.2), который можно расколоть на меньшие куски, а точка даже под микроскопом не станет больше — мы не сумеем разглядеть её частей даже с большим увеличением. Таким образом, для нас:



Точка — это математическая модель предмета, размерами которого можно пренебречь.

Точки в геометрии мы будем изображать на бумаге как маленькие кружочки, но мысленно считать, что они не имеют размеров. Их обозначают большими заглавными буквами латинского алфавита, например: A , B , C , D (рис. 2.3).

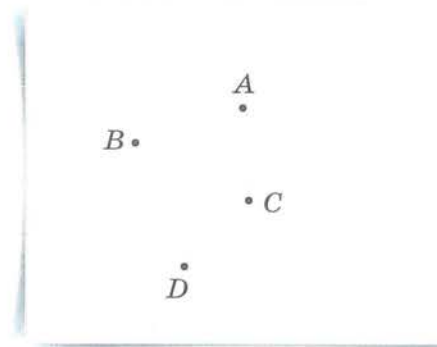


Рис. 2.3

Что такое прямая?

Следующая по важности после точки геометрическая фигура — это прямая линия, или просто **прямая**. Строго определить прямую линию совсем не так легко, как это кажется. Конечно, отрезок прямой можно начертить по линейке, но тогда возникает естественный вопрос: а что такое линейка, почему она прямая? И становится понятно, что ничего не понятно. Чем вообще прямая линия отличается от кривой?

Мы попросили ответить на этот вопрос ваших сверстников, ещё не располагающих тысячелетним опытом цивилизации. Вот что из этого получилось: прямая — это «бесконечный ряд точек, стоящих вплотную друг к другу в одном направлении», прямая «идёт всегда прямо, а кривая где-то заворачивает», прямая — это «линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам», прямая — это «линия, не имеющая ни одного угла или закругления». Правда, одно из этих наивных, но честных определений принадлежит знаменитому Евклиду. Попробуйте догадаться, какое именно. Конечно, мы не могли задать этот вопрос самому Евклиду — он жил больше 2000 лет назад. Но, видимо, даже он понимал прямую линию лишь интуитивно.

Давайте вспомним: чтобы получить отрезок прямой, древние строители всегда натягивали верёвку. Значит, прямая между двумя своими точками всегда понималась человеком как натянутая верёвка, была её математической моделью. А наблюдения за тем, как предметы отбрасывают свою тень, убеждали человека в том, что солнечные лучи также идут по прямым линиям. По той же причине и огонь маяков указывал кораблям верное направление.

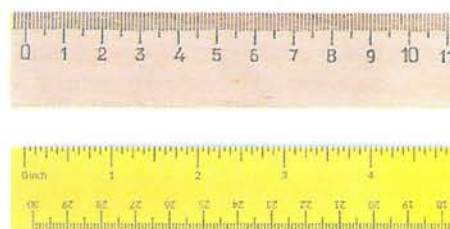


Рис. 2.4



Рис. 2.5

Рис. 2.6

То есть для человека



Прямая — это математическая модель натянутой нити, верёвки или луча света.

Конечно, в отличие от реальной верёвки, прямая линия бесконечна — мысленно её можно продолжать сколько угодно в любую сторону. Из опыта человек знал, что натянуть верёвку между двумя кольшками можно только одним способом. Но тогда и прямая линия через две точки должна проходить только одна. Это нам даёт первое свойство прямой линии, которое нельзя доказать, но с которым согласится каждый. Такие утверждения в математике называют **аксиомами**.



Первая аксиома прямой

Через любые две точки на плоскости проходит только одна прямая.



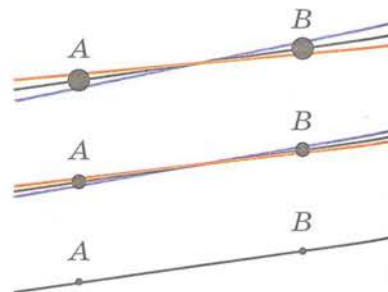
Рис. 2.7

Данная аксиома следует из человеческого опыта, именно её великий Евклид записал как первый постулат для построения всей геометрии.

Плотники, каменщики и столяры для проведения прямой до сих пор пользуются шнуром, который натирают углём или мелом. Шнур натягивают, а потом резко отпускают. На стене или на доске остаётся след шнура в виде отрезка прямой линии.

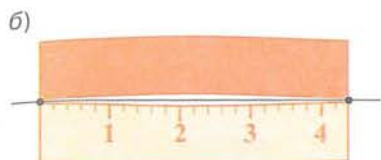
Две данные точки можно соединить множеством кривых линий, прямая же через них проходит только одна. Так и верёвка, которая лежит на полу и не натянута, может принимать какую угодно форму между своими концами и занимать множество положений. Когда же мы натянем верёвку, она сразу займёт единственное положение между двумя своими точками и будет иметь только одну форму — форму прямой линии.

Первое свойство прямой позволяет нам обозначать её по двум точкам, через которые она проходит. Например, прямая (AB) — это прямая, проведённая через две точки A и B . Посмотрите на рисунок 2.8: на нём вы видите две «жирные» точки, которые изображены как маленькие кружки. По линейке можно соединить эти кружки множеством



Прямая (AB)

Рис. 2.8



Проверка линейки

Рис. 2.9



Для того чтобы проверить на практике, перед вами прямая или нет, нужно приложить к ней линейку, натянуть вдоль этой линии нитку или пустить луч света. Прямая должна всюду идти по краю линейки, вдоль нитки или луча. Без этих приспособлений человеческий глаз может легко ошибаться. Посмотрите на рисунок 2.10.

Кажется невероятным, но на нём ни одной кривой линии!

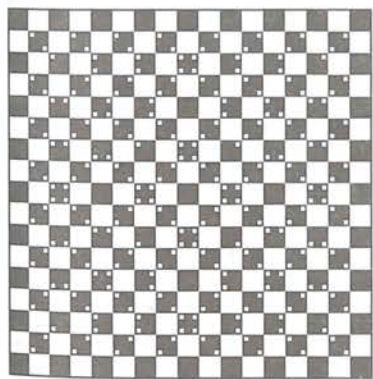


Рис. 2.10

прямых линий. Давайте теперь постепенно уменьшать радиус двух этих кружков так, чтобы они превратились в математические точки. Хорошо видно: в этом случае провести две прямые через них уже никак не получится.

Прямые линии обычно рисуют по линейке. А как проверить, что линейка правильная, то есть что она даст именно прямую? На этот счёт есть лёгкий практический способ. Надо взять на бумаге две любые точки и через них карандашом аккуратно провести линию по краю линейки. Затем перевернуть линейку другой стороной и снова провести через те же точки другую линию. Когда линейка сделана правильно, полученные две линии должны совпасть. Если линии различаются, то линейка неправильная (рис. 2.9, а, б). На чём основано это правило? Конечно, на первой аксиоме прямой!

Прямые в геометрии обозначают либо двумя точками, либо маленькими латинскими прописными буквами, например: a , b , c , d . Считают, что прямая проходит через данную точку, если эта точка принадлежит прямой. На рисунке 2.11, а показано, как прямая a проходит через точку A , а прямая b не проходит через точку B . А можно сказать, что точка A лежит на прямой a , а точка B не лежит на прямой b . Также говорят, что две прямые пересекаются в некоторой точке, если эта точка у них общая. На рисунке 2.11, б показано, как прямые a и b пересекаются в точке C .

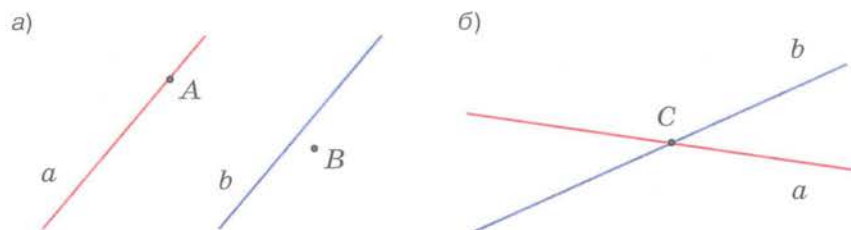


Рис. 2.11

«Провешивание» прямой

В своей практической жизни человек обычно пользуется короткой линейкой или куском верёвки. А что делать, если необходимо провести прямые линии на большие расстояния — сотни метров или даже километры? Как получить отрезок прямой линии, который больше длины вашей линейки? Такое построение каждый из вас наверняка делал не раз, если проводил прямую через две данные точки с помощью короткой линейки. Это очень просто: вначале нужно приложить линейку к точкам A и B , соединить их отрезком, потом взять на отрезке AB произвольную точку C — и сдвинуть туда линейку, приложив её уже

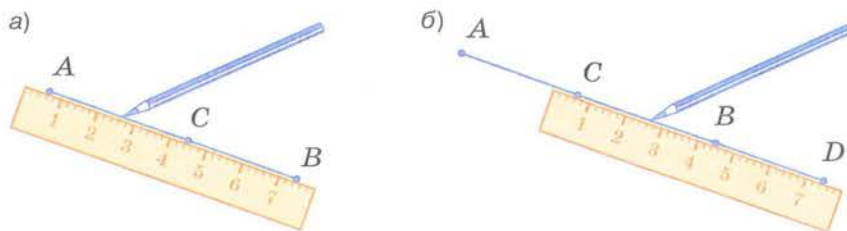


Рис. 2.12

к точкам B и C . Тогда по той же линейке можно будет провести отрезок CD , причём точка D окажется на этой же прямой, но уже на продолжении отрезка AB (рис. 2.12, а, б). Так можно поступать сколько угодно раз и получить отрезки любой длины на прямой AB .

Почему этот приём работает? А дело здесь опять в первой аксиоме прямой линии: через точки B и C можно провести лишь одну прямую. Можно сказать и по-другому: прямые AB и CD должны совпадать, поскольку они проходят через одни и те же две точки B и C . Именно об этом писал Евклид во втором постулате геометрии: «Отрезок прямой можно неограниченно продолжать в обе стороны».

Похожий способ используют для проведения прямой линии на местности — он называется «провешиванием» прямой. Им пользуются при разметке заборов, прокладке автомобильных дорог и линий электропередач. Данный метод основан на том, что луч света также распространяется по прямой линии. Как же это делают? Два человека устанавливают в нужных точках A и B столбы — вехи. Потом один из них ставит третью веху в точке C за вехой B так, чтобы при взгляде из точки A веха B её полностью закрывала. В этом случае веха C должна оказаться на одной прямой с вехами A и B , ведь луч света распространяется именно по прямой (рис. 2.13). Правда, профессиональные геодезисты для этого используют не просто человеческий глаз, а специальные приборы — дальномер или тахеометр, которым наводят луч лазера на конец вехи и потом фиксируют отражённый ею сигнал.

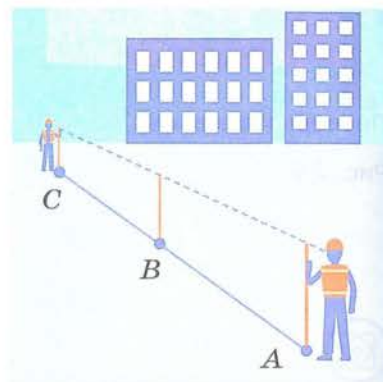


Рис. 2.13



Рис. 2.14

Что такое плоскость?

Посмотрите на гладь спокойного озера, на поверхность оконного стекла или зеркала. Все они дают нам представление о **плоскости**. Можно сказать, что:



Плоскость — это математическая модель ровной поверхности.

Но что значит «ровная» поверхность? Интуитивно поверхность для нас ровная, если на ней нет бугров, впадин и складок. Так, «ровное поле» отличается от гористой



Рис. 2.15



Лёд на озере Байкал образует ровную плоскость

Рис. 2.16



Проверка неровностей пола с помощью линейки-уровня

Рис. 2.17



Мебель, созданная человеком из ровных деталей

Рис. 2.18

местности, а смятая скатерть, лежащая на столе, — от самого стола. Если мы соединим две точки плоскости прямой линией, то полученная прямая целиком будет лежать в нашей плоскости. Так не произойдёт, если поверхность имеет кривизну или какую-то неровность. В этом вы легко убедитесь, если проткнёте спицей круглый арбуз, — спица войдёт в его мякоть и не будет лежать на поверхности арбуза (рис. 2.15). Значит, эта поверхность не плоская.

По той же самой причине и земной шар, на котором мы живём, тоже не является плоскостью: если бы люди захотели прорыть прямой туннель от Москвы до Петербурга, он прошёл бы на глубине 8 километров от её поверхности! Итак,



Поверхность считают **плоскостью**, если прямая, проходящая через любые две её точки, целиком лежит на этой поверхности.

На практике проверить, что поверхность плоская, очень легко. Достаточно приложить к ней линейку в разных направлениях и убедиться, что линейка нигде не отступает от самой поверхности (рис. 2.17).

Точка, прямая и плоскость являются **исходными**, или **основными, фигурами геометрии**. Через них определяются все остальные геометрические фигуры. Как вы уже знаете, точка, прямая и плоскость — это абстракции, математические модели объектов реального мира, с которыми человек постоянно имел дело на практике.

Первые три года в курсе геометрии мы с вами будем изучать свойства плоских геометрических фигур, то есть фигур, лежащих в одной плоскости. Этот раздел геометрии называется **планиметрией**.

Почему в дикой природе так мало прямых линий, а большинство зданий и предметов мебели, сделанных руками человека, состоят из прямых и плоскостей? Конечно, это вопрос философский. Но вполне возможно, что человеку было всегда проще из таких ровных или прямых частей возводить здания, строить мосты, создавать для себя столы и скамейки (рис. 2.18).



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Немного позже мы с вами объясним ещё одно важное, но также очевидное всем свойство прямой:



Свойство прямой линии

Прямая линия проходит по самому короткому пути между любыми двумя своими точками.

Если натянуть верёвку между двумя точками на плоскости, то она пойдёт по самому короткому пути между ними. А если натянуть её на поверхности шара, верёвка искривится. Из опыта все мы знаем, что натянутая верёвка должна лежать на прямой линии. Значит, прямые линии существуют не только на плоскости, но и на шаре. Правда, такие линии не являются прямыми в обычном смысле этого слова (рис. 2.19). В геометрии (да и в географии!) их называют **геодезическими**.

Геодезическую линию можно провести на любой поверхности — в гористой местности, на глобусе или даже на своём теле. Она представляет собой кратчайший маршрут между двумя точками на данной поверхности.

А знаете, что будет, если двигаться по поверхности земного шара всё время «прямо», то есть всегда идти по ней «кратчайшим путём»? В конце концов обязательно придёшь туда, откуда вышел. Это кажется удивительным, но на самом деле причина в том, что наша Земля — шар, и геодезические линии на ней — это окружности, наподобие известных вам меридианов. По геодезическим линиям идут корабли в океане и летают самолёты. Знаете, как без Интернета на обычном глобусе вычислить расстояние между двумя городами земного шара? Нужно просто натянуть нитку между этими городами на глобусе (рис. 2.20), потом приложить нитку к линейке, найти её длину и умножить на масштаб карты.



Рис. 2.19



Рис. 2.20



ВОПРОСЫ

- 1 Что такое точка?
- 2 Чем прямая отличается от кривой линии?
- 3 Какую аксиому прямой линии вы знаете?
- 4 Чем плоскость отличается от других поверхностей?

- 5 Что такое геодезические линии? Как выглядят такие линии на поверхности земного шара?



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Найдите на рисунке 2.21 а, б прямые линии.
- 2 Отметьте на листе бумаги две любые точки A и B . Проведите прямую (AB). Возьмите на том же листе точку C , которая не лежит на прямой (AB). Постройте прямые (AC) и (BC). Начертите теперь ещё одну прямую так, чтобы она пересекла три построенные вами прямые только в двух точках.
- 3 Лежат ли на одной прямой две линии (рис. 2.22)?
- 4 Отметьте на листе бумаги три точки A , B и C , которые не лежат на одной прямой. Проведите прямые через каждую пару этих точек. На сколько частей делят плоскость проведённые вами прямые?
- 5 Возьмите короткую линейку. Отметьте на её краю точки A и B . Соедините эти точки прямой линией. А теперь постройте точку C на этой прямой так, чтобы расстояние от неё до точки A было больше длины вашей линейки.
- 6 Постройте на листе бумаги три прямые, которые:
 - а) проходят через одну точку;
 - б) не имеют точек пересечения.
- 7 Нарисуйте три прямые так, чтобы у них было только две точки пересечения.
- 8 Нарисуйте пять прямых так, чтобы у них было всего пять точек пересечения.
- 9 Отметьте на листе своей тетради четыре точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Проведите через каждую пару этих точек прямую. Сколько получилось прямых? Сколько у этих прямых получилось точек пересечения?
- 10 С помощью глобуса, нитки и линейки вычислите наименьшее расстояние от Москвы до Нью-Йорка. Около каких островов Атлантического океана пролетают самолёты, когда следуют по самому короткому маршруту между этими городами?

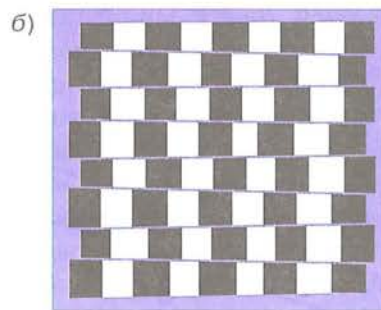
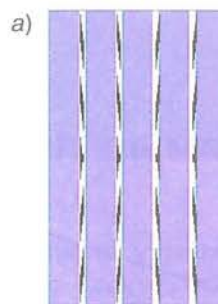


Рис. 2.21

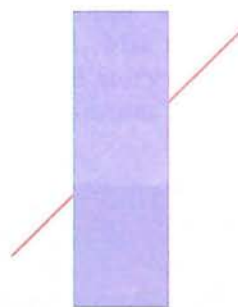


Рис. 2.22

§3 Две прямые на плоскости

Две прямые пересекаются или параллельны

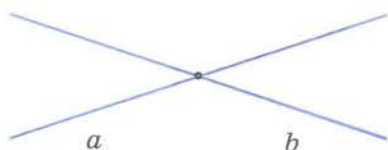


Рис. 3.1

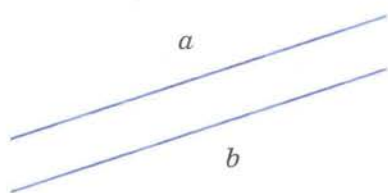


Рис. 3.2

Как на плоскости можно расположить две прямые линии? На рисунке 3.1 показаны две прямые, которые имеют только одну общую точку. В этом случае говорят, что две прямые пересекаются в этой точке.

На рисунке 3.2 показаны две прямые, которые вообще не имеют общих точек. В геометрии такие прямые называют **параллельными**. Конечно, изобразить параллельные прямые на листе бумаги можно лишь условно, ведь любой лист — это только часть плоскости, а сами прямые бесконечны. В жизни мы часто встречаемся с параллельностью. Говорят о параллельности улиц в городе, хотя улицы всегда где-то заканчиваются (рис. 3.3). Параллельны друг другу рельсы железной дороги (рис. 3.4), хотя рано или поздно любая дорога поворачивает... Параллельны противоположные края письменного стола или обыкновенной линейки. Даже в школе разные классы с одним номером называют параллельными. Что же имеют в виду, когда говорят о параллельности в повседневной жизни? Конечно, все мы считаем, что параллельные улицы или те же рельсы лежат на двух параллельных прямых. Другими



Параллельные улицы Манхэттена ночью

Рис. 3.3



Рис. 3.4

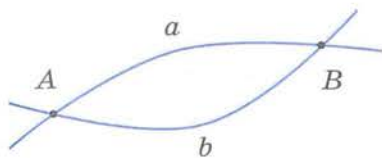
словами, они не пересекутся, даже если их продолжать до бесконечности. А если уж две прямые где-то пересекают друг друга, то их пересечением может быть только одна точка. Разве может быть как-то иначе? Это же очевидно! Мы запишем это как важное утверждение:



Две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

Только что мы с вами сформулировали утверждение. А откуда оно следует? Вы скажете: оно следует из нашего чертежа 3.5. На нём видно, что две прямые пересекаются только в одной точке или же параллельны. Очень хорошо. А могут ли две прямые на плоскости быть расположены совсем другим способом? Например, в городе Екатеринбурге есть улицы, которые пересекают друг друга два раза. Конечно, на плане этого города (рис. 3.6) они выглядят довольно «криво». Давайте поставим вопрос ребром: могут ли две прямые на плоскости пересекаться сразу в двух точках (рис. 3.7)? Такой вопрос обычно вызывает недоумение. На рисунке 3.5 показано, как это могло бы произойти. Правда, прямые линии на нём выглядят довольно странно. Скажите: а что может запретить прямой выглядеть так? Как строго объяснить или как доказать, что такого не может быть? Обратите внимание: мы с вами так и не дали чёткого определения прямой. Мы говорили только об её аксиоме. А раз так, то прямые могут выглядеть как угодно, главное — чтобы они подчинялись этой аксиоме.



Могут ли две прямые пересекаться в двух точках?

Рис. 3.5



Необычные улицы в Екатеринбурге

Рис. 3.6



Вот как могут «пересекаться» автострადы

Рис. 3.7

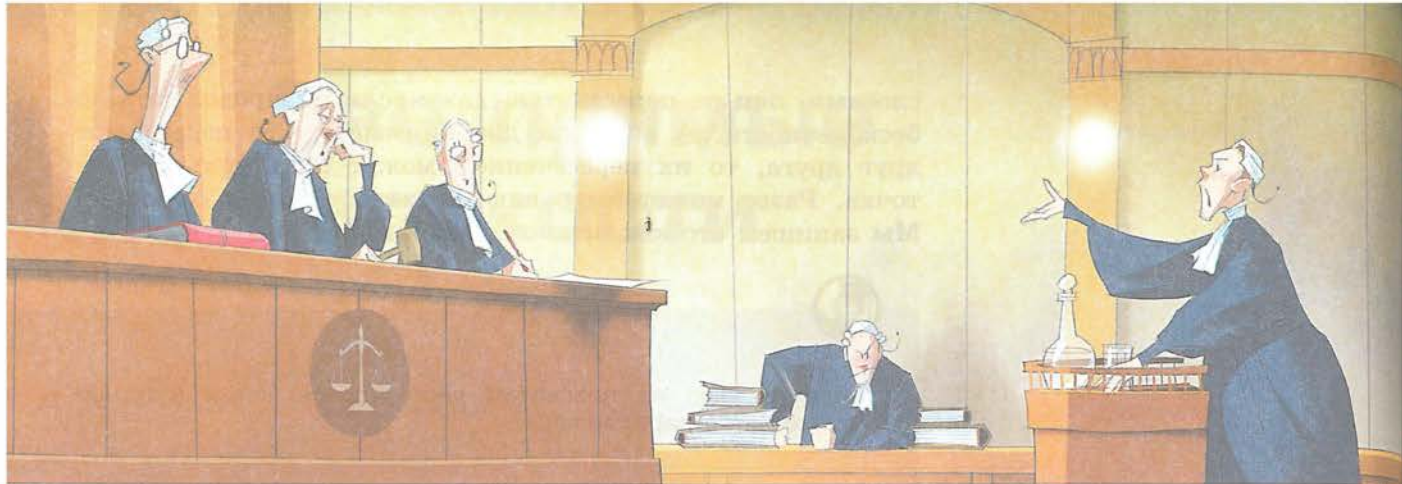


Рис. 3.8



Слово «аксиома» тоже возникло из древнегреческого языка, и на нём оно значило «достойное, общепринятое».

Итак, давайте попробуем строго доказать, что одна прямая не может пересекать другую более чем в одной точке. Посмотрите, какое рассуждение придумала для этого одна из учениц 7 класса. Вот её «доказательство»: «Пусть прямая a пересекает прямую b в точке A . Если бы она пересекала эту прямую ещё и в точке B , то должна была бы изменить своё направление на плоскости — изогнуться. Но тогда это уже не прямая линия, а кривая».

Является ли это рассуждение настоящим доказательством? Конечно же, нет! Данное рассуждение явно использует рисунок, то есть наше интуитивное представление о том, как должна выглядеть прямая. Давайте вспомним: меридианы на поверхности земного шара также играют роль прямых линий, однако они пересекаются в двух точках — на Северном и Южном полюсах нашей планеты! Значит, рисунок только помогает доказательству, но никак не может его заменить. Так же, как речь прокурора или адвоката на честном и открытом суде опирается на принятые в обществе законы, настоящее строгое доказательство должно опираться на утверждения, с которыми все соглашаются. Тогда такое доказательство убеждает всех. В геометрии существуют свои законы. В каком-то смысле они являются правилами игры в геометрию, а играть нужно по правилам. Такие законы в математике называют **аксиомами**.

Остальные утверждения, которые строго доказывают, опираясь на аксиомы, называются **теоремами** (рис. 3.9). На теоремы также можно опираться в дальнейших рассуждениях и доказательствах. Итак,



Аксиома — это утверждение, с которым все соглашаются без доказательства.

Чтобы построить строгое доказательство, опираться необходимо только на аксиомы или теоремы. Мы уже знаем одну из таких аксиом, которую предложил Евклид в своих «Началах». Звучит она так: **через любые две точки на плоскости можно провести только одну прямую**.



Рис. 3.9

Теперь давайте дадим строгое доказательство того, что две прямые могут пересекаться не больше чем в одной точке.



Теорема

Две прямые на плоскости могут пересекаться не более чем в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть какие-то две прямые a и b пересекаются больше чем в одной точке (рис. 3.10). Тогда у них есть по крайней мере две общие точки. Обозначим эти точки буквами A и B . Если точки A и B общие для наших прямых, то они лежат одновременно как на прямой a , так и на прямой b . Значит через точки A и B проходят две различные прямые — a и b . Но это запрещает первая аксиома прямой!

Таким образом, наше предположение о том, что две прямые могут пересекаться в двух точках, противоречит первому свойству прямой линии. Значит, такого не может быть. Доказательство завершено. В конце доказательства обычно пишут «что и требовалось доказать», или сокращенно «ч. т. д.».

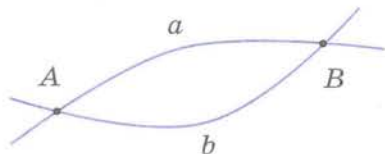


Рис. 3.10

Во всех старинных книгах по математике в конце доказательств на латыни писали так: q. e. d. Это сокращение латинского выражения quod erat demonstrandum. В переводе оно означает «что необходимо было показать». До сих пор такая традиция сохраняется в современной научной литературе на английском языке.

Проведённое нами доказательство называют доказательством «от противоположного» или «от противного». В таких доказательствах всегда исходят из того, что нужное нам утверждение неверно, а потом логически из этого получают противоречие с аксиомами или теоремами. Полученное противоречие и доказывает, что на самом деле нужное утверждение является верным.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Нарисуйте на листе белой бумаги две параллельные прямые (рис. 3.11). Через точку, лежащую между ними, проведите десять прямых, которые

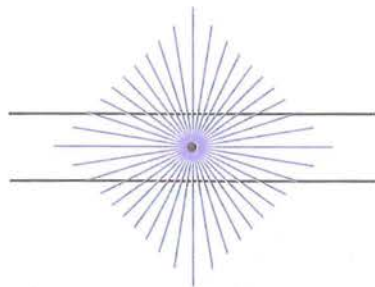


Рис. 3.11

пересекают данные параллельные прямые. Убедитесь, что зрительно параллельные прямые искажаются.

- 2 Нарисуйте на листе белой бумаги несколько параллельных прямых. Перечеркните эти прямые отрезками так, как это показано на рисунке 3.12. Убедитесь в том, что зрительно параллельность прямых при этом нарушается.
- 3 Найдите на рисунке 3.13 параллельные прямые. Какими буквами они обозначены?
- 4 Нарисуйте четыре прямые так, чтобы у них было всего пять точек пересечения. Обязательно ли среди них должны быть две параллельные?
- 5 Проведите через точку A на клетчатой бумаге прямую, параллельную прямой (BC) , показанной на рисунке 3.14.

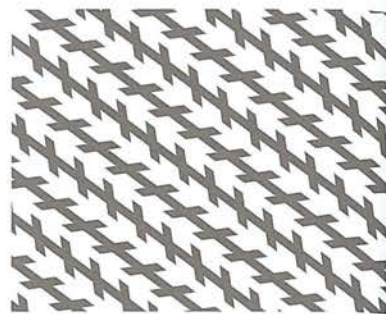


Рис. 3.12

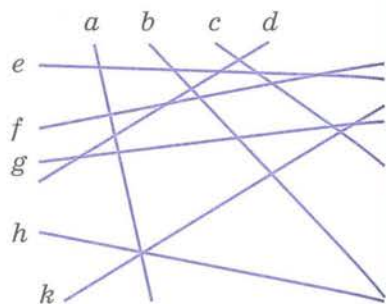


Рис. 3.13



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 3.1** На плоскости отметили 10 точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждую пару этих точек провели прямую. Докажите, что при этом получится ровно 45 прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Через каждую пару данных нам точек по свойству прямой линии можно провести только одну прямую. По условию никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой, поэтому все полученные прямые будут различны.

Любую из десяти точек можно соединить прямыми с девятью оставшимися точками. Значит, из каждой данной нам точки выходят ровно девять прямых (рис. 3.15). Тогда всего прямых должно быть $9 \cdot 10 = 90$.

На самом деле число проведённых прямых ровно в два раза меньше — ведь каждую из них мы считали два раза. Например, прямая, соединяющая точки A и B , будет посчитана один раз среди прямых, выходящих из точки A , а второй раз — среди прямых, выходящих из точки B . Таким образом, всего прямых будет проведено $90 : 2 = 45$. Ч. т. д.

☆☆☆ **ПРИМЕР 3.2** На плоскости отметили четыре точки. Через каждые две из них провели прямую. Сколько всего при этом могло получиться прямых?

РЕШЕНИЕ: Разберём различные случаи расположения точек на плоскости. Если все четыре точки лежат

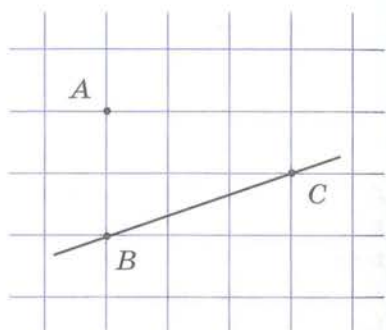


Рис. 3.14

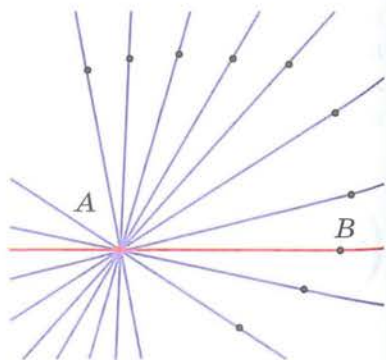


Рис. 3.15

на одной прямой, то данная прямая — единственная, которую можно провести через них (рис. 3.16, а).

Если на одной прямой лежат какие-то три точки, например точки A , B и C , а четвёртая точка D не лежит на этой прямой, то всего можно провести четыре прямые: (AD) , (BD) , (CD) и (AB) (рис. 3.16, б).

Наконец, остаётся случай, когда никакие три из наших точек не лежат на одной прямой. Тогда каждую пару из этих точек можно соединить своей прямой, а всего таких пар будет шесть (рис. 3.16, в). Значит, и различных прямых будет тоже шесть.

ОТВЕТ: Через четыре точки на плоскости в зависимости от их расположения всего можно провести 1, 4 или 6 прямых.

☆☆☆ **ПРИМЕР 3.3** На плоскости провели 10 прямых. В каком наибольшем числе точек могут пересекать друг друга эти прямые?

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим сначала только две прямые — на рисунке 3.17, а они проведены фиолетовым цветом. Эти прямые либо параллельны, либо пересекаются только в одной точке. То есть две прямые могут иметь не больше одной точки пересечения.

Проведём третью прямую — на рисунке 3.17, б она отмечена красным цветом. Красная прямая может пересекать каждую из двух фиолетовых прямых не больше чем в одной точке. Значит, красная прямая добавит не больше двух новых точек пересечения. Таким образом, три прямые на плоскости могут пересекать друг друга не более чем в $1 + 2 = 3$ точках.

Проведём теперь четвёртую прямую — на рисунке 3.17, в она отмечена голубым цветом. Голубая прямая может пересекать каждую из трёх уже имеющихся на чертеже прямых не больше чем в одной точке. Поэтому при её проведении возникнут самое большее три новые точки пересечения. То есть четыре прямые могут иметь не более $1 + 2 + 3 = 6$ точек пересечения.

Аналогично пятая прямая добавит максимум четыре новые точки пересечения, шестая — пять точек и т. д. Сколько же новых точек пересечения может появиться при проведении десятой прямой? Конечно же, не больше девяти новых точек, ведь она может пересечь каждую из уже проведённых девяти прямых.

Давайте теперь сложим все точки пересечения, которые мы получали при проведении прямых на каждом этапе. Всего мы получим не более чем

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 = 45$$

точек пересечения. Значит, десять прямых на плоскости могут пересекать друг друга не больше чем в 45 точках.

ОТВЕТ: 45 точек.

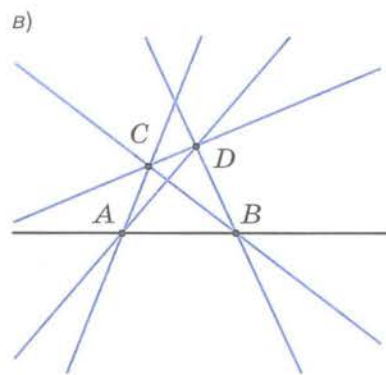
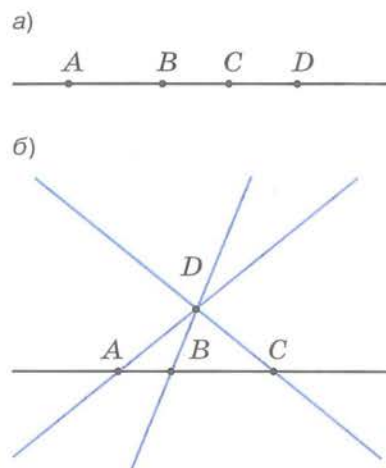


Рис. 3.16

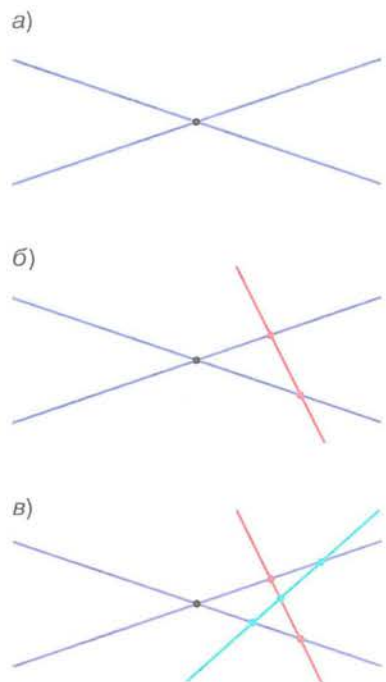


Рис. 3.17



ВОПРОСЫ

- 1 Какие прямые называются параллельными?
- 2 Сколько точек пересечения могут иметь две прямые?
- 3 Что такое аксиома? Чем от неё отличается теорема?
- 4 Чем доказательство отличается от правдоподобного рассуждения?
- 5 Что означает на латыни сокращение *q. e. d.*? Где его писали?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 3.1 ☆☆☆ На плоскости отметили 20 точек. Известно, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек провели прямую. Сколько всего получилось прямых?
- 3.2 ☆☆☆ Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?
- 3.3 ☆☆☆ Могут ли пять прямых пересекаться ровно в восьми точках?
- 3.4 ☆☆☆ Через шесть точек на плоскости провели несколько прямых, причём на каждой прямой лежит по три данные точки. Сколько провели прямых, если через каждую точку проходят ровно две из них?
- 3.5 ☆☆☆ В каком наибольшем числе точек могут пересекаться 20 прямых?
- 3.6 ☆☆☆ На плоскости провели 10 прямых, только две из которых параллельны. В скольких точках эти прямые пересекают друг друга, если никакие три из них не проходят через одну точку?
- 3.7 ☆☆☆ На плоскости взяли пять точек. Через все пары этих точек провели прямые. Сколько всего могло получиться прямых? Разберите все случаи.
- 3.8 ☆☆☆ В каком числе точек пересекают друг друга 10 прямых, если среди них нет параллельных и ровно три из них проходят через одну точку?

3.9 ★★★ Несколько прямых на плоскости пересекаются так, что через каждую точку их пересечения проходит ровно две прямые, а на каждой из этих прямых лежит ровно шесть точек пересечения и я .
Докажите, что таких прямых не меньше семи. Приведите пример таких прямых.



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Как вы думаете: верно ли, что через данную точку на плоскости можно провести сколько угодно прямых линий? С одной стороны, это очевидно. А с другой стороны — интересно знать, можно ли это строго доказать, то есть вывести из аксиом?

Давайте попробуем это сделать.



Теорема

Через данную точку плоскости можно провести любое число прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим данную точку буквой A (рис. 3.18). Если мы возьмём на плоскости любую другую точку B , то по первой аксиоме прямой линии через точки A и B можно провести единственную прямую (AB) . То есть одна прямая у нас уже есть. Возьмём теперь точку C так, чтобы она не лежала на прямой (AB) . По той же аксиоме через точки A и C мы можем построить вторую прямую (AC) . Вторая прямая будет отличаться от первой хотя бы потому, что она содержит точку C , которая не лежит на прямой (AB) . Понятно, что делать дальше. Нужно взять точку D так, чтобы она не лежала на первых двух прямых, и построить прямую (AD) . Так мы получим третью прямую, дальше аналогичным образом четвёртую, пятую и сколько угодно новых прямых. **Ч. т. д.**

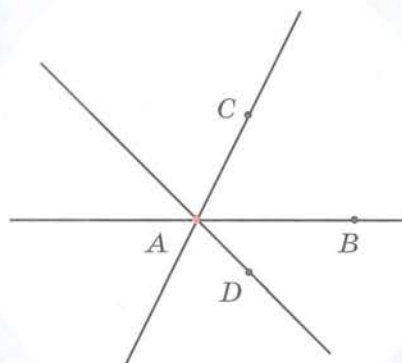


Рис. 3.18

Как вы думаете: завершено ли данное доказательство? Является ли оно полностью строгим? Может быть, в ходе данного рассуждения мы использовали не только известную вам аксиому прямой линии, но и сам чертёж? Если уж говорить о математической строгости, то в приве-

дённом только что доказательстве содержится несколько недочётов. Во-первых, откуда следует, что, проведя прямую (AB), мы всегда сможем взять точку C , которая на ней не лежит? В нашей аксиоме прямой об этом ничего не сказано. Конечно, это очевидно. Ведь прямая линия не может занимать всю плоскость — на ней должно остаться какое-то «свободное» место. Самое удивительное, что как раз это и невозможно доказать исходя из уже известных нам свойств прямой линии.

Поэтому в строгие курсы геометрии обычно добавляют ещё одну аксиому прямой:



Для любой прямой на плоскости всегда можно взять точку, которая лежит на этой прямой, и точку, которая не лежит на ней.

Кроме того, в данном доказательстве остался ещё один недостаток. Попробуйте сказать, в чем состоит этот недостаток и как провести доказательство без него. Для этого вам придётся принять без доказательства ещё одно очевидное утверждение, которого тоже не было у Евклида:



Между любыми двумя точками на прямой всегда можно взять ещё одну точку.



Давид Гильберт

Рис. 3.19

Такие аксиомы добавил Дэвид Гильберт (рис. 3.19) в свои «Основания геометрии» — первое совершенно строгое изложение древней теории, которое было им завершено в 1899 году.

§4 Отрезки и лучи

В жизни мы часто говорим об отрезках. В магазине можно попросить отрез ткани или какой-нибудь ленты (рис. 4.1). Наверное, вы уже слышали такие выражения как «отрезок пути», «отрезок времени» и даже «отрезок истории».

Кстати, после отмены крепостного права в России крестьяне получали наделы земли, которые тоже называли отрезками. Итак, для нас отрезок — это всегда некоторая часть чего-то длинного и протяжённого. В конечном счёте, под отрезком понимают то, что можно «отрезать» от прямой линии.



Рис. 4.1

Порядок точек на прямой

Давайте возьмём на прямой три любые точки. Каждому ясно, какая из этих точек находится между двумя другими точками. Понятие «лежать между» является для человека интуитивным. Попросите трёх человек сесть на одну скамейку — сразу станет понятно, кто из них сидит в середине, а кто с краю (рис. 4.2). А попробуйте посадить тех же трёх человек за круглый стол — и сказать это будет уже нельзя. Ведь каждый из троих за круглым столом имеет двух соседей, то есть сидит между двумя другими. Таким образом, мы с вами здесь обнаруживаем вторую аксиому прямой линии:



Рис. 4.2



Вторая аксиома прямой

Из трех точек, лежащих на одной прямой, только одна лежит между двумя другими.



Рис. 4.3

Эта аксиома показывает, что прямая не замкнута, как окружность или какая-либо другая кривая линия. На замкнутой кривой нельзя сказать, какая из трёх выбранных на ней точек «средняя» (рис. 4.4). Из трёх же точек на прямой линии всегда есть одна «средняя» точка.

Давайте отметим на прямой две точки A и B . Сколько существует точек, которые лежат между ними? Правильно — таких точек бесконечно много. Можно даже сказать, что все эти точки заполняют на прямой некоторый промежуток. Этот промежуток прямой линии, ограниченный с двух сторон точками A и B , и есть отрезок. Итак,



Отрезком AB называют все точки на прямой, лежащие между двумя её точками A и B .

Точки A и B называют **концами** отрезка, они также принадлежат отрезку (рис. 4.5). Отрезок AB обозначают так: $[AB]$ или $[BA]$.

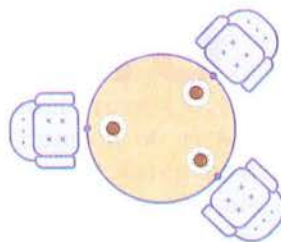
Если отметить на прямой любую точку, то она разделит прямую линию на две части — их называют **полупрямыми** или **лучами**. На рисунке 4.6 видно, как точка O делит прямую (AB) на два луча, которые обозначают так: $[OA]$ и $[OB]$. Точка O называется **началом** каждого из этих лучей.

Часто говорят, что луч образуют все точки прямой линии, которые лежат по одну сторону от данной её точки — начала луча. Но что может значить выражение «лежать по одну сторону», как его понимать? Здесь всё довольно просто: точки A и B лежат на прямой по одну сторону от точки O , если точка O не лежит между ними, то есть если она не принадлежит отрезку $[AB]$. Итак,



Лучом называют все точки на прямой, которые лежат по одну сторону от данной её точки.

Данная точка называется **началом** луча, она также принадлежит лучу. Чтобы задать луч, достаточно указать его начало и ещё хотя бы одну точку на нём.



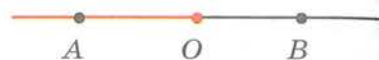
Каждая из трёх точек на окружности «лежит между» двумя другими

Рис. 4.4



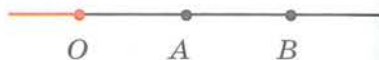
Отрезок $[AB]$

Рис. 4.5



Точка O делит прямую на лучи $[OA]$ и $[OB]$

Рис. 4.6



Точки A и B лежат на прямой «по одну сторону» от точки O

Рис. 4.7



Например, луч с началом в точке O и проходящий через точку A обозначают так: $[OA)$.

Полупрямые называют лучами не случайно: как вы помните, свет распространяется по прямой линии, но в отличие от неё имеет начало — источник, из которого исходит. Им может быть маяк на берегу, лампочка или звезда — светящаяся точка. Важно, что у луча есть начало, но нет конца — как и прямая, в геометрии луч бесконечен.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Отметьте в тетради четыре точки, не лежащие на одной прямой. Соедините каждые две из этих точек отрезком. Сколько всего получилось отрезков?
- 2 Поставьте четыре точки на одну прямую. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?
- 3 Возьмите на прямой три любые точки. Сколько всего получилось лучей с началами в этих трёх точках?
- 4 Нарисуйте три луча, которые пересекают друг друга в трёх точках.
- 5 Нарисуйте в своей тетради четыре точки и соедините их шестью отрезками так, чтобы эти отрезки больше не имели других общих точек (кроме этих четырёх).
- 6 Соедините шесть точек на плоскости девятью отрезками так, чтобы эти отрезки больше не имели других общих точек (отличных от данных шести).

Длина отрезка. Меры длины

Каждый современный человек знает, что длину всегда измеряют линейкой с делениями или рулеткой (рис. 4.8). Чтобы узнать размеры какого-то предмета, к нему обычно прикладывают линейку и смотрят, сколько в нём «уложится» сантиметров и миллиметров. Сантиметры и миллиметры — это сотые и тысячные доли метра — эталона длины, принятого в эпоху Великой французской революции. Во все века человек измерял предметы, сравнивая



Рис. 4.8

Не имели наши предки ни линейки, ни рулетки. Но могли предмет любой измерять самим собой.

Людмила Гринина

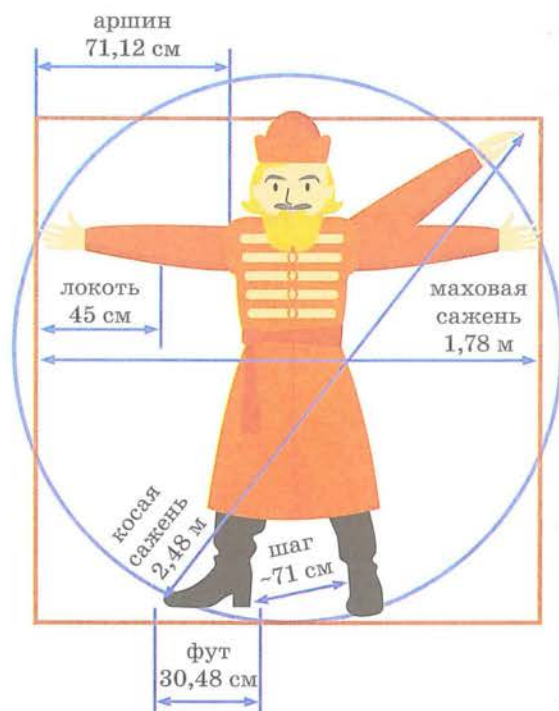


Рис. 4.9

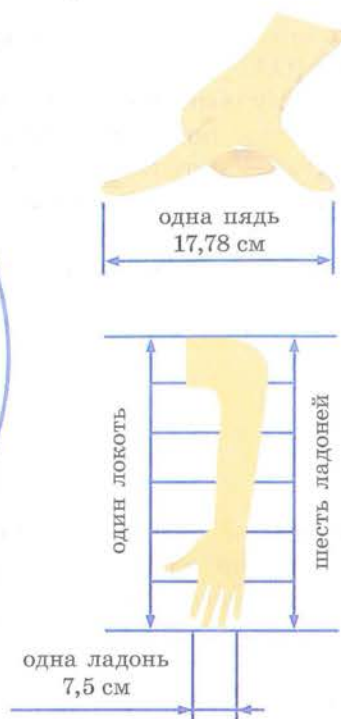


Рис. 4.10

их размеры с длиной какого-нибудь отрезка. Для этого годилось всё, что в прямом смысле попадало под руку: локоть, ладонь или палец. А мелкие предметы сравнивали с толщиной нити или волоса.

В каждой стране была своя система измерений: в Англии — футы и дюймы, в Германии — руты и клафтеры, в России — пяди, вершки и аршины (рис. 4.9). Разница в системах мер была очень неудобна: каждый раз приходилось помнить, что семь дюймов составляют четыре вершка, или вычислять, сколько футов умещается в одном аршине. Неудивительно, что все народы до сих пор говорят на своих языках, но достойно удивления то, что все они имели свои системы измерения. Например, в Англии один дюйм был равен ширине большого пальца взрослого мужчины, а в России один вершок равнялся длине верхней фаланги мужского указательного пальца. Изначально одна миля равнялась тысяче двойных шагов солдат римского легиона, но уже в XVIII веке в Европе можно было насчитать 46 различных сухопутных миль.

В настоящее время в большинстве стран мира принята единая система мер. Длину измеряют в метрах, сантиметрах и миллиметрах; большие расстояния — в километрах. В конечном счёте все отрезки сравнивают с одним эталонным отрезком — метром (рис. 4.11).

В революционной Франции 1789 год решили считать началом новой эры. Идеалами Великой революции стали Свобода, Равенство и Братство. Её идеологи провозгласили: свободный человек — мера всех вещей. Равенство



Один из публичных эталонов метра, выставленных на улицах Парижа. По нему горожане сверяли свои линейки

Рис. 4.11

всех людей предполагало единую меру, обязательную для всех. Законодательное собрание Парижа постановило, что необходимо определить новую единицу измерения. Для её разработки Академией наук была создана специальная комиссия, в состав которой вошли лучшие математики, физики и астрономы Франции. Комиссия занялась поисками основы для новой единой меры. Нужно было найти нечто постоянное, неизменное, что не зависело бы от произвола людей и могло служить единым метром. Один метр вначале думали принять равным длине нити маятника, который совершал один свой взмах за одну секунду. Но в 1791 году комиссия решила взять за константу окружность Земли — земной меридиан. Длину меридиана невозможно изменить, но поскольку она очень велика, то за единицу длины решено было принять одну сорокамиллионную часть меридиана. В 1792 году астрономы Жан Батист Жозеф Деламбер и Пьер Франсуа Андре Мешен взялись за измерения отрезка земного меридиана между городами Дюнкерк и Барселона. На это у них ушло несколько лет. В 1796 году Парижское Национальное собрание провозгласило введение новой и единственной метрической системы. Тогда и появился на свет первый в истории эталон метра. Он был отлит из платины и передан на хранение в Национальный архив Франции. Сейчас метр — это основная единица измерения длины в современной системе СИ. Учёные в конце XX века решили его уточнить и стали считать один метр равным длине пути, который проходит луч лазера за $\frac{1}{299\,792\,458}$ секунды. Можете быть уверены: сейчас метр вычислен с точностью до 0,00000002 мм, то есть до одной сотой ширины спирали ДНК!

Однако в Англии, США и Либерии до сих пор пользуются исторической системой мер, принятой ещё в X веке. Например, один **ярд** — это расстояние от кончика носа его величества короля Эдгара до конца среднего пальца вытянутой им в сторону руки. Один **фут** — это длина ступни английского джентельмена, и он равен приблизительно 30 см. Если говорить о размерах обуви, то один фут соответствует 48–49 европейскому размеру (рис. 4.10). Согласитесь, ступни у английских аристократов были немаленькие! До сих пор во многих странах (включая Россию) диаметры водопроводных труб или колёсных дисков автомобилей считают в дюймах, в них же измеряют длину гвоздей (рис. 4.12), толщину досок и даже диагонали мониторов компьютеров. Калибр стрелкового оружия считают в сотых долях дюйма. Например, 45-й калибр — это 0,45 дюйма. До революции на вооружении в российской армии была винтовка изобретения Сергея Мосина, которую ещё называли «трёхлинейкой» (рис. 4.13). Такое название она получила потому, что имела калибр, равный трём линиям, то есть трём десятым дюйма.

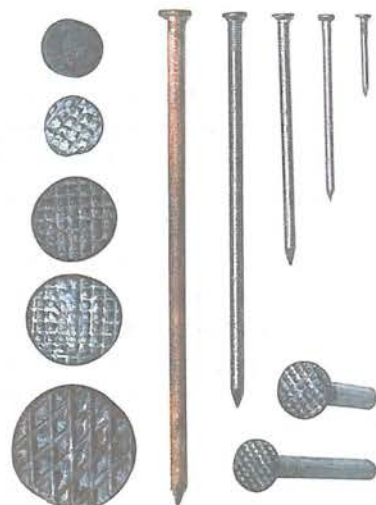


Рис. 4.12



Винтовка Мосина, или «трёхлинейка»

Рис. 4.13

Свойства отрезков

Как вы уже знаете, все отрезки состоят из точек. Но можно ли длину отрезка мерить числом находящихся на нём точек? Конечно, нет! Точки в геометрии настолько малы, что не имеют никаких размеров: на любом, пусть даже самом маленьком отрезке их всегда бесконечно много. В чем же тогда можно измерять отрезки? Правильно: отрезки можно мерить только другими отрезками! Для этого нужно выбрать единицу длины — **эталонный отрезок** и каждый раз считать, сколько раз выбранный эталон длины можно последовательно отложить на данном отрезке. Например, когда мы говорим, что длина карандаша равна 10 см, это значит, что отрезок в 1 см можно отложить вдоль карандаша ровно 10 раз. Если же выбранный эталон длины не укладывается целое число раз на данном отрезке, его делят на части (обычно на 10) и смотрят, сколько десятых частей эталона можно отложить на данном отрезке. Когда нужна ещё большая точность, нужный отрезок измеряют в сотых частях эталона и т. д.

Давайте теперь приложим карандаш к линейке с делениями и найдём его длину. На рисунке 4.14 видно, что длина карандаша равна примерно 9,3 см или 9 см и 3 мм. Почему примерно? Дело в том, что наверняка можно утверждать лишь то, что длина карандаша больше 9,3 см, но меньше 9,4 см. Для ещё большей точности его длину нужно мерить уже в десятых долях миллиметра (или сотых частях сантиметра) и пользоваться для этого **штангенциркулем**. Как это делают, вы можете прочитать в конце параграфа в разделе «Для тех, кто хочет знать больше». Итак,



Длина отрезка — это число, которое показывает, сколько раз единичный отрезок и его части можно последовательно отложить на данном отрезке.

Можно ли любой отрезок измерить данным эталоном? Бывают ли отрезки, длина которых отрицательна? Существуют ли отрезки любой длины? Если прямую палку разломать на две части и измерить длины этих частей, то как по ним найти длину всей палки? Каждый из вас уже знает ответы на все эти вопросы. Они следуют из человеческого опыта и являются основными свойствами длины отрезков. Мы их примем без доказательства, так же как аксиомы.



Рис. 4.14



Перед плаванием морякам желают «семь футов под килем», подразумевая под этим безопасное расстояние от нижней точки судна до морского дна (рис. 4.15). Чему равно это расстояние в сантиметрах?



Рис. 4.15



В повести Ивана Тургенева «Муму» сказано, что Герасим был «мужчина двенадцати вершков росту, сложенный богатырем».

Это противоречит здравому смыслу, так как вершок на Руси был равен примерно 4,5 см. Однако никакого противоречия здесь нет, поскольку рост взрослого человека в то время начинали считать от двух аршинов.

А теперь скажите: чему равен рост Герасима в сантиметрах?



Аксиомы отрезков

1 Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. За единицу длины можно принять любой отрезок (рис. 4.16, а).



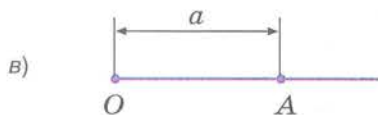
Эталон длины — любой отрезок $a > 0$

2 Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой своей точкой (рис. 4.16, б).



Для любой точки C на $[AB]$
 $AC + CB = AB$

3 На любом луче от его начала можно отложить отрезок любой длины и только одним способом (рис. 4.16, в).



На луче можно отложить отрезок любой длины $a > 0$

Рис. 4.16



УПРАЖНЕНИЯ

7 На зрительное восприятие человеком длины влияют многие факторы... На рисунке 4.17, а, б изображены фиолетовые и оранжевые отрезки. Равны ли два оранжевых отрезка на рисунке 4.17, в? Попробуйте догадаться в каждом случае, какой из этих отрезков длиннее другого. А потом проверьте себя с помощью линейки!

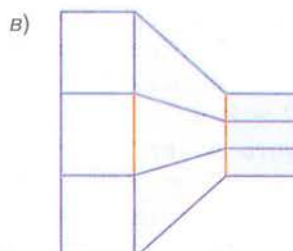
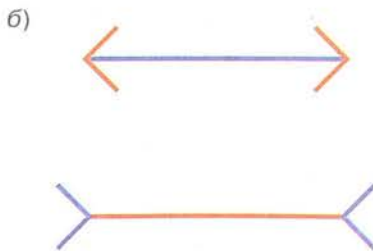
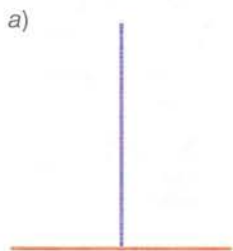


Рис. 4.17

- 8 Петя взял тетрадь в клетку и стал соединять на ней отрезками узлы сетки. Он утверждает, что один из его отрезков не идет по линиям сетки, а его длина равна 5 см (рис. 4.18). Можете ли вы тоже нарисовать такой отрезок?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 4.1** Про точки A , B и C известно, что $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Могут ли эти точки лежать на одной прямой?

РЕШЕНИЕ: Предположим, что точки A , B и C лежат на одной прямой. Тогда по аксиоме прямой какая-то одна из этих точек лежит на отрезке между двумя другими. Пусть точка B лежит на отрезке AC . По аксиоме отрезков в этом случае должно выполняться равенство $AB + BC = AC$. Но $2 + 3 \neq 4$.

Получили противоречие. Совершенно так же точка C не может лежать на отрезке AB и точка B — на отрезке AC .

ОТВЕТ: точки A , B и C не лежат на одной прямой.

☆☆☆ **ПРИМЕР 4.2** На отрезке AB взяли точки M и K так, что $AM : BM = 2 : 3$, $AK : BK = 11 : 9$. Найдите длину отрезка MK , если $AB = 10$ см.

РЕШЕНИЕ: Поскольку $AM : BM = 2 : 3$, то обозначим $AM = 2x$, $BM = 3x$ (рис. 4.19, а). Тогда по аксиоме отрезков $2x + 3x = 10$ см. Значит, $x = 2$ см, а $AM = 2x = 4$ см. Аналогично можно считать, что $AK = 11y$, $BK = 9y$ (рис. 4.19, б). Тогда $11y + 9y = 10$. Откуда $y = 0,5$ см и $AK = 5,5$ см. Значит,

$$MK = AK - AM = 5,5 \text{ см} - 4 \text{ см} = 1,5 \text{ см}.$$

ОТВЕТ: 1,5 см.

☆☆☆ **ПРИМЕР 4.3** Точки A , B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AC : BC = 1 : 3$, $AB = 12$ м. Чему может быть равна длина отрезка AC ? Разберите все случаи.

РЕШЕНИЕ: По аксиоме прямой одна из точек A , B и C лежит между двумя другими. Рассмотрим первый случай, когда точка C лежит на отрезке AB . Так как $AC : BC = 1 : 3$, обозначим $AC = x$, $BC = 3x$ (рис. 4.20, а). По свойству отрезков $AC + BC = AB$, то есть $x + 3x = 12$. Откуда $AC = 3$ м.

Пусть во втором случае точка A лежит между B и C . Тогда $AB + AC = BC$, и, значит, $12 + x = 3x$ (рис. 4.20, б). Откуда $AC = x = 6$ м.

В третьем случае точка B лежит на отрезке AC . Тогда должно быть $12 + 3z = z$. Получаем, что $AC = z =$

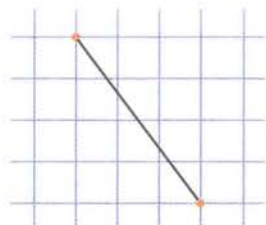


Рис. 4.18

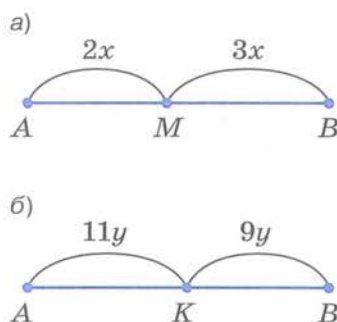


Рис. 4.19

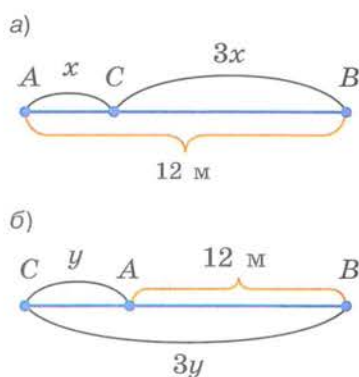


Рис. 4.20

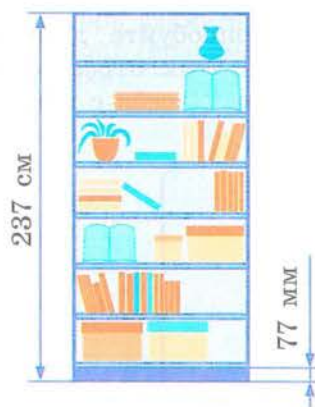


Рис. 4.21

$= -6$ м. Но это невозможно, поскольку длина любого отрезка положительна.

ОТВЕТ: длина AC может быть равна 3 м или 6 м.

☆☆☆ **ПРИМЕР 4.4** В магазине продаётся книжный стеллаж, сделанный из деревянных панелей толщиной 18 мм, в котором 6 полок. Общая высота стеллажа с подставкой равна 237 см, а высота подставки равна 77 мм (рис. 4.21). Найдите расстояние между полками стеллажа.

РЕШЕНИЕ: Чтобы получить высоту стеллажа нужно к высоте подставки прибавить семь расстояний между полками и толщину восьми деревянных панелей.

Обозначим расстояние между полками за x . Тогда получаем уравнение $7x + 18 \cdot 8 + 77 = 2370$. Откуда $x = 307$ мм.

ОТВЕТ: 307 мм.



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

4.1 ☆☆☆ Как выяснить на практике толщину листа из учебника геометрии? Больше она или меньше одной десятой миллиметра (рис. 4.22)?

4.2 ☆☆☆ На прямой отметили точки A, B, C, D в указанном порядке (рис. 4.23). Известно, что $AC = 5$ см, $BD = 6$ см, $AD = 7$ см. Найдите BC .

4.3 ☆☆☆ По периметру прямоугольного парка проложили две велосипедные дорожки (рис. 4.24). Найдите расстояние между дорожками, если одна из них на 1 км длиннее другой.

4.4 ☆☆☆ Подарочная коробочка имеет длину 35 см, ширину 25 см и высоту 40 см. Её перевязали крест-накрест лентой так, чтобы бантик был сверху (рис. 4.25). Однако Маша перевязала эту же коробку своим способом, и бантик у неё получился на другой стороне коробки. Маша утверждает, что на это у неё пошло меньше ленты. Сколько ленты могла сэкономить Маша?

4.5 ☆☆☆ Две точки разбивают отрезок, длина которого равна 10 см, на три части. Расстояние между серединами крайних из этих частей равно 8,5 см (рис. 4.26). Найдите длину среднего отрезка.

4.6 ☆☆☆ На старой линейке все деления стёрлись (рис. 4.27). Случайно уцелели лишь отметки 0 см,



Рис. 4.22



Рис. 4.23

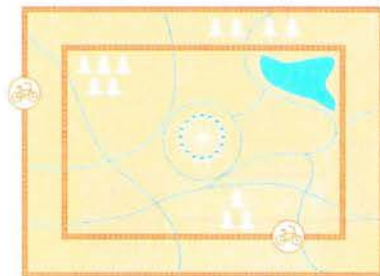


Рис. 4.24

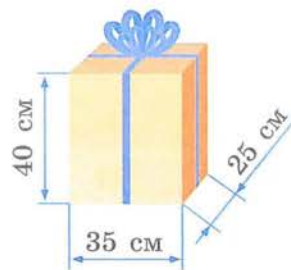


Рис. 4.25

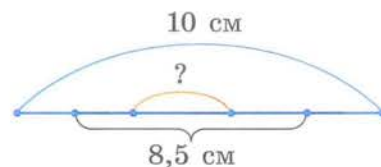


Рис. 4.26



Рис. 4.27



Рис. 4.28

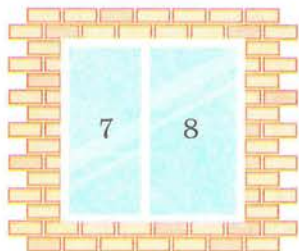


Рис. 4.29

а)



б)



Рис. 4.30

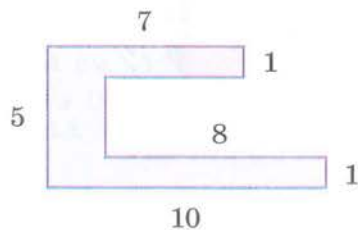


Рис. 4.31

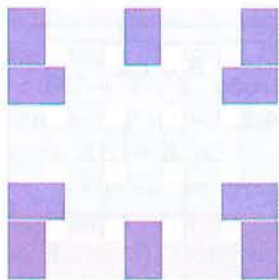


Рис. 4.32

5 см и 13 см. Как с помощью такой линейки отложить отрезок длины: а) 2 см; б) 1 см?

4.7 ☆☆☆ Длина отрезка AB равна 18 см. Точки C и E лежат на данном отрезке так, что $AC : CB = 3 : 5$, $AE : EB = 5 : 4$. Найдите CE (рис. 4.28).

4.8 ☆☆☆ Квадратный оконный проём образован двумя прямоугольными рамами. Внутри каждой из них написали число, равное периметру рамы (рис. 4.29). Найдите сторону квадрата оконного проёма.

4.9 ☆☆☆ Точки A , B , C и E лежат на одной прямой, причём известно, что $AC + BC = AB$, $AE + CE = AC$. Какая из данных точек лежит на отрезке BE ?

4.10 ☆☆☆ Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Известно, что $AD = 3$, $DC = 2$, $AC = 5$, $BD = 8$. Найдите AB .

4.11 ☆☆☆ Точки A , B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 10$, $AC : BC = 2 : 3$. Чему может быть равно AC ? Разберите все случаи (рис. 4.30).

4.12 ☆☆☆ Найдите периметр прямоугольной фигуры, показанной на рисунке 4.31.

4.13 ☆☆☆ Мастер выложил квадратную площадку со стороной 1 м прямоугольными плитками двух видов и квадратами так, как это показано на рисунке 4.32. Найдите сторону квадратов, если ширина двух других плиток равна 14 см.

4.14 ☆☆☆ Точки A , B , C , D в указанном порядке лежат на одной прямой (рис. 4.33). Сумма всех отрезков с концами в этих точках равна 10. Найдите AD , если $BC = 2$.

4.15 ☆☆☆ Квадратный оконный проём образован тремя прямоугольными рамами. Внутри каждой из них написали число, равное периметру рамы (рис. 4.34). Найдите, чему равна сторона квадрата всего оконного проёма.

4.16 ☆☆☆ Геометрически поясните, почему должно быть верно неравенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} < 1$ (рис. 4.35).

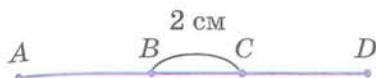


Рис. 4.33

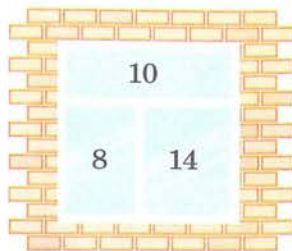


Рис. 4.34

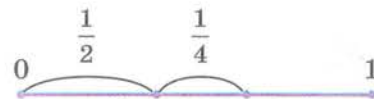


Рис. 4.35

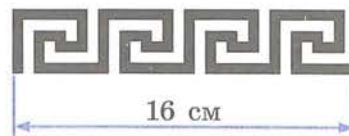


Рис. 4.36

- 4.17 ★★★ На рисунке 4.36 показан фрагмент древнегреческого орнамента, который называется «меандр». Нарисуйте такой же орнамент на клетчатой бумаге, взяв ширину его полосы равной 1 см. Из скольких клеток состоит вся извилистая линия меандра на рисунке, если показанный его фрагмент имеет длину 16 см?

- 4.18 ★★★ Комендант измерил периметры всех комнат в доме и написал их на плане 4.37. В одну комнату он не сумел попасть, зато обошёл дом кругом и нашёл, что его периметр равен 160 м. Чему равна толщина стен в доме, если она везде одинакова?

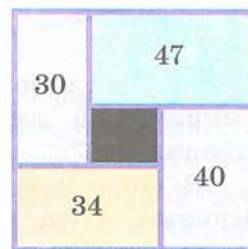


Рис. 4.37

- 4.19 ★★★ Четыре дома находятся на прямой дороге, причём в каждом живёт по одному человеку (рис. 4.38). Где на этой дороге нужно вырыть колодец, чтобы за водой всем вместе было ходить как можно меньше?

- 4.20 ★★★ Найдите периметр прямоугольной фигуры на рисунке 4.39.



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Измерения штангенциркулем

С помощью обычной линейки с делениями можно измерять предметы с точностью не более 1 мм. Для повседневной жизни этого достаточно, но при изготовлении деталей сложных механизмов — таких как механические часы, двигатели внутреннего сгорания или огнестрельное оружие — необходима гораздо большая точность. В этих случаях используют штангенциркуль. Впервые такие инструменты появились в Лондоне в самом конце XVIII века и назывались *vernier caliper* — раздвижной калибр. Примерно тогда на них появилась дополнительная шкала —

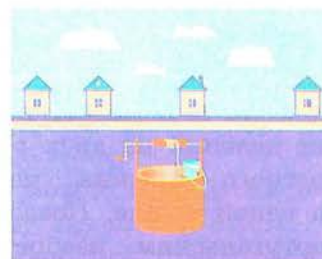


Рис. 4.38

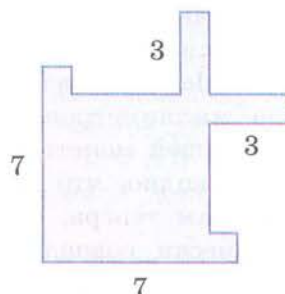
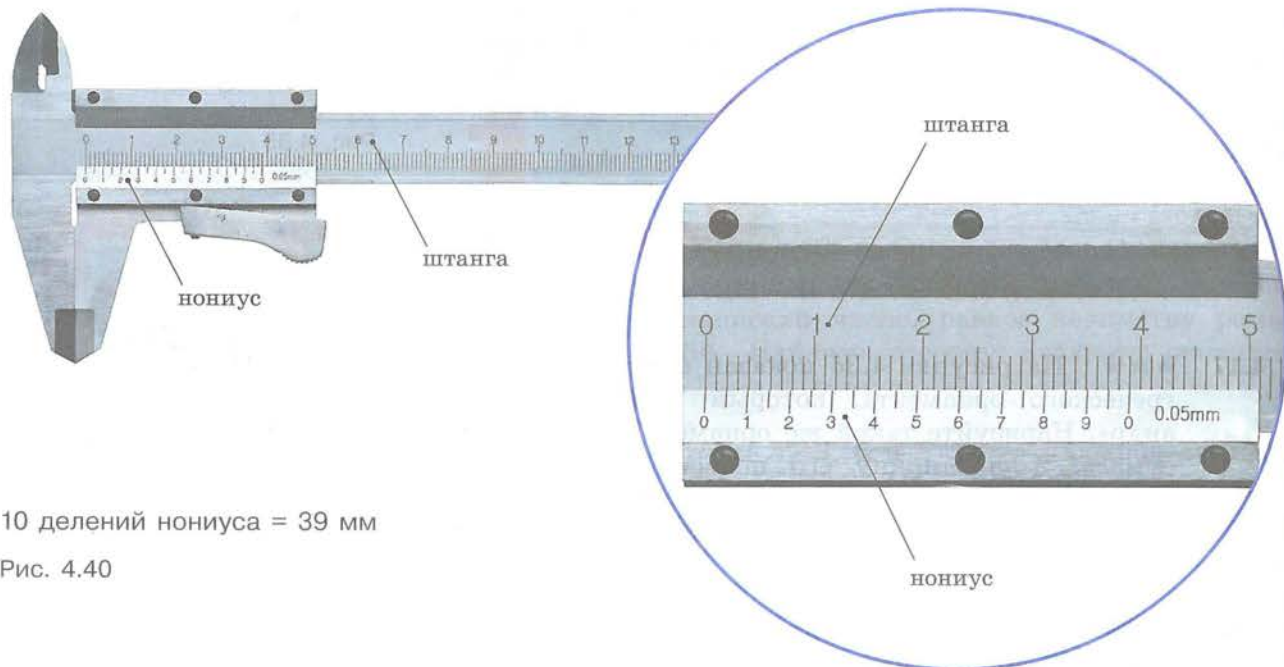


Рис. 4.39



10 делений нониуса = 39 мм

Рис. 4.40

нониус, которая и повышала точность проводимых измерений минимум в десять раз. Как устроен классический штангенциркуль?

В его основе лежит штанга — обычная линейка с делениями, идущими через 1 мм, и движущаяся по ней рамка, на которую нанесены ещё 10 специальных делений. Десять делений шкалы на подвижной рамке по длине совпадают с 39 делениями основной шкалы, расположенной на штанге (рис. 4.40). Такая дополнительная шкала называется Верньер или **нониус**. Впервые придумал использовать вторую шкалу для более точных измерений углов французский математик Пьер Вернье в 1631 году. Он заметил, что глаз человека гораздо точнее определяет совпадение делений на двух разных шкалах, чем положение конкретного деления между двумя другими делениями на одной шкале. Позже его прибор был усовершенствован португальским изобретателем Педро Нунишем, потому и получил второе своё название — нониус.

Давайте посмотрим, как работает штангенциркуль. Предположим, мы хотим более точно измерить диаметр какой-нибудь трубы или монеты. Зажмём её между губками штангенциркуля.

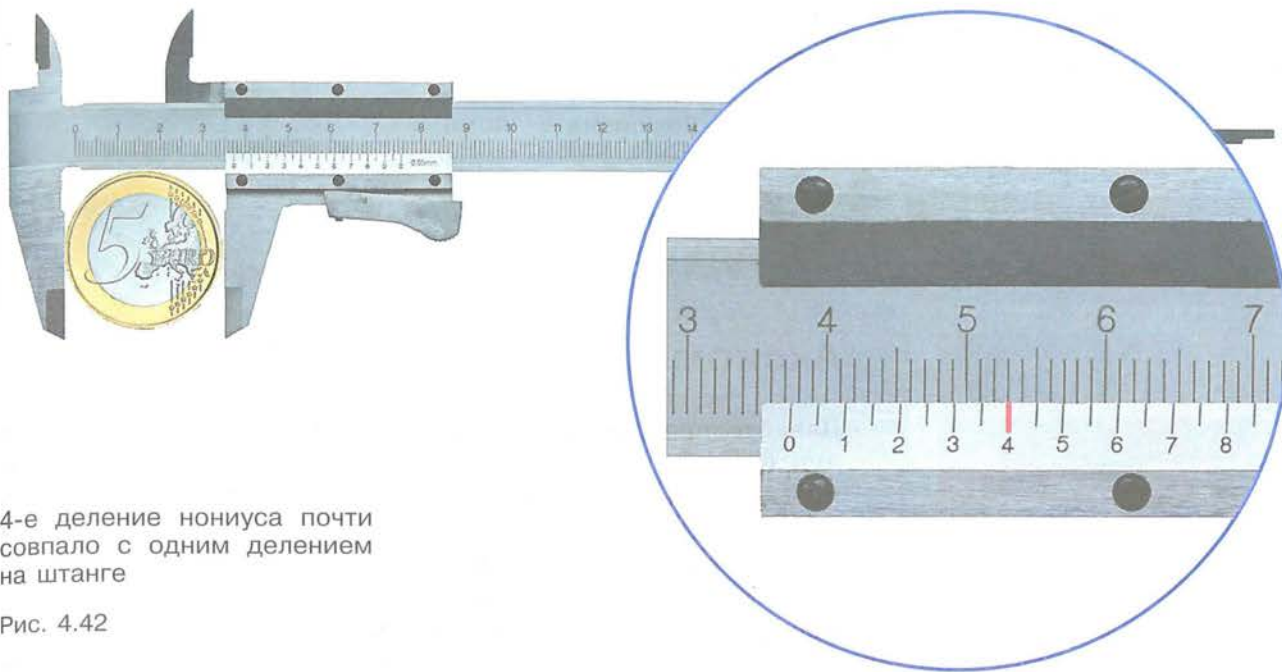
Первое деление шкалы нониуса покажет нам целое число миллиметров, которое приблизительно равно диаметру нашей монеты. На рисунке 4.42 это 37 мм. Правда, на глаз видно, что измеряемый диаметр немного больше. Посмотрим теперь, какое деление дополнительной шкалы практически совпадает с делением на штанге. В нашем случае это четвёртое деление нониуса — на рисунке оно отмечено красным цветом. Это деление отвечает за десятые



Про очень умного человека на Руси говорили, что он «семи пядей во лбу». А вы, пользуясь старинными мерами длины, можете сказать, сколько пядей в ширину была тогда грудь взрослого мужчины (рис. 4.41)?



Рис. 4.41



4-е деление нониуса почти совпало с одним делением на штанге

Рис. 4.42

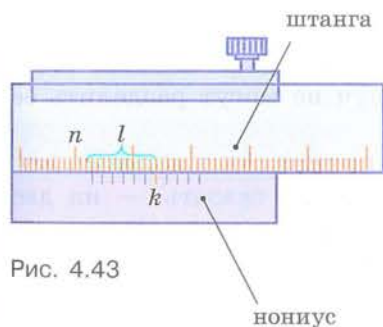


Рис. 4.43

доли миллиметра! То есть диаметр нашей монеты равен 37,4 мм. Видите, как просто! Но почему это работает?

Давайте разберёмся. Когда наш штангенциркуль находился в начальном нераздвинутом положении, десятое деление на нониусе совпадало с 39 делением на штанге. Значит, шаг нониуса равен 3,9 мм. На глаз сразу видно, что диаметр монеты больше 37 мм, но меньше 38 мм. Обозначим его за $37 + x$ (мм). Тогда положение красной риски на штанге относительно нуля будет равно $37 + x + 4 \cdot 3,9$ мм. С другой стороны, красная риска на штанге соответствует 53 мм. Значит, мы получаем такое уравнение: $37 + x + 4 \cdot 1,9 = 53$, откуда $x \approx 0,4$ мм, и диаметр монеты равен 37,4 мм. Ошибка измерения таким способом не может превышать 0,1 мм!

В общем случае рассуждать можно так. Пусть первое деление нониуса оказалось между делениями n и $n + 1$ на шкале штанги (рис. 4.43). Очевидно, что тогда размер измеряемой детали больше n мм, но меньше $n + 1$ мм. Обозначим его как $n + x$. Пусть теперь k -е деление рамки нониуса совпало с каким-то делением шкалы на неподвижной штанге. Если от первого до k -го деления нониуса находится примерно l делений штанги, то должно выполняться равенство $n + x + 3,9k = n + l$. Поскольку каждому делению нониуса соответствуют примерно четыре деления на штанге, то $l \approx 4k$. Значит, $n + x + 3,9 \cdot k \approx n + 4k$, откуда $x \approx 0,1 \cdot k$. Поэтому размер измеряемой детали равен $n + 0,1 \cdot k$ мм.

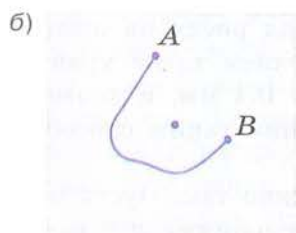
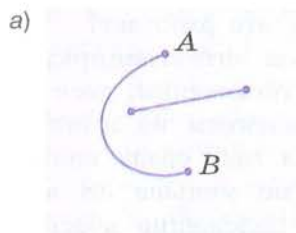
Для ещё более точных расчётов были изобретены штангенциркули с нониусом, на котором было 30 делений. Они давали точность уже до 0,05 мм.

§5 Полуплоскость

Аксиома полуплоскостей



Рис. 5.1



Отрезок и луч не разбивают плоскость на две части

Рис. 5.2

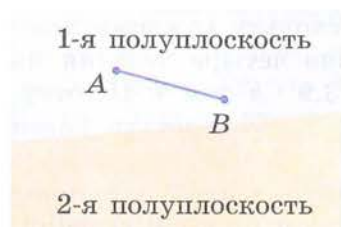


Рис. 5.3

Давайте проведём на плоскости какой-нибудь отрезок или луч (рис. 5.1). Как вы думаете: будут ли они делить всю плоскость на две части? Каждому ясно, что не будут. Ведь разные части плоскости — это как разные страны или же государства на карте мира. Обычно их закрашивают разными цветами (рис. 5.4). Отрезок или луч были бы тогда границей между этими странами. Но если начать раскрашивать каждую из этих стран своим цветом, ничего не получится. Почему так? Чтобы это понять, давайте представим, что мы с вами из одного города в другой проехали по дороге и нигде не встретили государственную границу. Что это может означать? Только одно: оба наших города находятся в одной и той же стране. Совершенно так же и на плоскости любые две точки можно соединить линией (или дорогой) так, чтобы она не пересекала данного отрезка или луча (рис. 5.2). Но тогда эти точки должны быть обязательно одного цвета, принадлежать одной части плоскости. Значит, и вся плоскость должна иметь один цвет. Получается, что ни отрезок, ни луч не могут разделить её на две разные части.

Наоборот, очевидно, что прямая линия делит всю плоскость именно на две части, можно сказать — на две половины. Эти части так и называют **полуплоскостями**. Причём любые две точки в одной полуплоскости всегда



Рис. 5.4

можно соединить «прямой дорогой» или обычным отрезком так, чтобы он не пересекал данную прямую (рис. 5.3). Это свойство не доказывают и считают его ещё одной аксиомой — аксиомой полуплоскостей.



Аксиома полуплоскостей

Любая прямая делит всю плоскость на две полуплоскости.

Если концы отрезка не лежат на этой прямой и находятся в одной полуплоскости, то отрезок не пересечёт данную прямую.

Если же концы отрезка лежат в разных полуплоскостях, то он пересекает прямую.

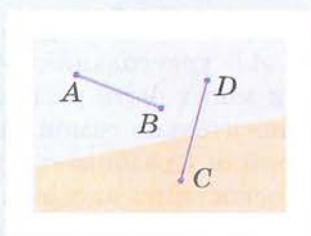


Рис. 5.5

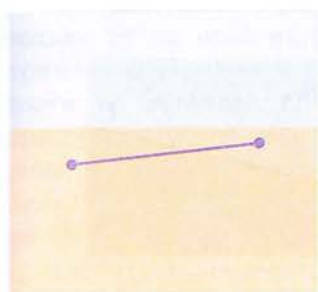


Рис. 5.6

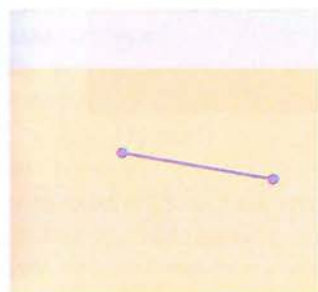


Рис. 5.7

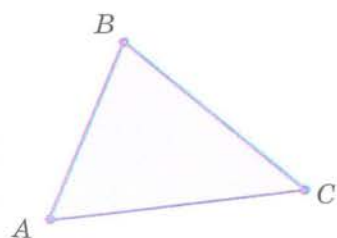


Рис. 5.8

Так же как и другие аксиомы прямой, аксиома полуплоскостей позволяет отличить прямую от других линий. В самом деле, если бы прямая имела любую «неровность», какие-то «выступы» или «зигзаги», то это сразу нарушало бы аксиому полуплоскостей. На рисунках 5.6 и 5.7 видно, что в этих случаях всегда можно найти отрезок с концами в одной «полуплоскости», который пересекал бы данную «прямую». Но тогда нарушалась бы и аксиома полуплоскостей.

Прямая пересекает треугольник

Как в геометрии используют аксиому полуплоскостей? Она очень удобна для доказательств некоторых «очевидных» утверждений и для решения задач. Давайте рассмотрим это на примере.

Возьмите три точки, которые не лежат на одной прямой, соедините их между собой тремя отрезками — и вы получите **треугольник** (рис. 5.8). Три данные точки называют **вершинами** треугольника, а отрезки между ними — его **сторонами**. А теперь попробуйте провести прямую линию так, чтобы она не проходила через вершины этого треугольника, но пересекала только одну его сторону. Сделав несколько попыток, вы быстро убедитесь в том, что это невозможно: как только прямая пересекает одну сторону треугольника, она сразу же «стремится» пересечь и вторую его сторону. В 1882 году немецкий математик Мориц Паш обнаружил данный факт и заметил, что его нельзя вывести из аксиом, которые были у Евклида. Мы же с вами докажем его, пользуясь аксиомой полуплоскостей. Поэтому будем называть теоремой.



Теорема

Если прямая не проходит через вершины треугольника и пересекает одну его сторону, то она обязана пересечь ещё одну сторону треугольника (рис. 5.9, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть прямая l пересекает сторону AB треугольника ABC . Давайте посмотрим, как могут быть расположены точки A , B и C относительно самой прямой l .

Прямая l разбивает всю плоскость на две полуплоскости по аксиоме. Так как по условию теоремы она пересекает отрезок AB , то концы этого отрезка (точки A и B) должны лежать по разные стороны от прямой l , то есть находиться в разных от неё полуплоскостях (рис. 5.9, б).

Третья вершина треугольника (точка C) не может лежать на данной прямой по условию теоремы.

Значит, она лежит в одной из этих двух полуплоскостей. Но тогда могут быть только две возможности: либо точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A , либо же точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B . В первом случае отрезок BC обязан пересекать прямую l по аксиоме полуплоскостей (рис. 5.9, в), так как его концы лежат по разные стороны от этой прямой. Тогда прямая l пересекает стороны AB и BC нашего треугольника.

Во втором случае точки A и C будут лежать по разные стороны от прямой, и тогда по аксиоме полуплоскостей уже отрезок AC пересечет l (рис. 5.9, г). Получится, что в этом случае прямая l будет пересекать стороны AB и AC треугольника ABC .

Теорема доказана.

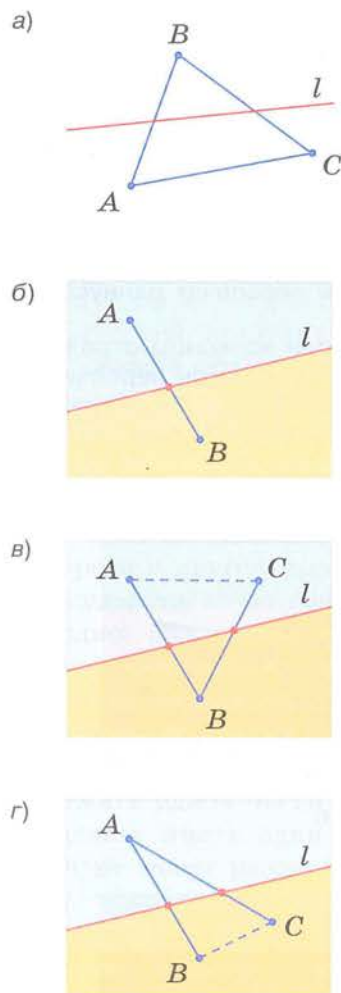


Рис. 5.9



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 5.1** Десять точек на плоскости попарно соединили отрезками. Прямая линия не проходит ни через одну из этих точек. а) Может ли она пересекать ровно 21 из этих отрезков? б) Может ли она пересекать ровно 20 из этих отрезков?

РЕШЕНИЕ: Для ответа на вопрос пункта (а) данной задачи достаточно привести нужный пример. Он показан на рисунке 5.10. Но даже на нём совсем не легко подсчитать, сколько отрезков пересекает наша прямая, поскольку в любом случае она проходит очень близко от точек пересечения некоторых отрезков между собой.

б) В одном из предыдущих параграфов мы с вами уже вычислили, что всего между 10 точками будет проведено ровно 45 отрезков. Но сколько из них может пересечь одна прямая линия? Попробуйте провести такую прямую, чтобы она пересекла ровно 10 отрезков. У вас ничего не получится, как бы вы ни старались. Точно так же никак не выходит пересечь ровно 11 или 12 отрезков. Но почему? В чём здесь дело? Более того, если ваши попытки не увенчались успехом, это ещё не значит, что решение вообще невозможно. Прямая может проходить на плоскости любым количеством способов, и перебрать их все никогда не получится. Поэтому необходимо провести доказательство того, что это в принципе невозможно.

Давайте рассуждать строго. Мы будем считать только те из всех наших 45 отрезков, которые пересекают прямую l . Прямая l разбивает плоскость на две полуплоскости по аксиоме. Отрезок только тогда будет пересекать прямую l , когда его концы лежат по разные стороны от этой прямой, то есть в разных от неё полуплоскостях. Если все 10 точек лежат в одной полуплоскости, то по той же аксиоме ни один отрезок не пересечёт прямую.

Пусть теперь одна из точек лежит по одну сторону от прямой l , а девять других находятся в другой полуплоскости (рис. 5.11). Ясно, что все девять отрезков, которые соединяют данную точку с девятью точками в другой полуплоскости, пересекут прямую l по аксиоме. А все остальные отрезки по той же аксиоме не будут её пересекать. То есть в этом случае прямая l будет пересекать ровно 9 отрезков.

Пускай теперь в одной полуплоскости относительно прямой l находятся только две из наших точек, а остальные 8 точек тогда будут лежать по другую от неё сторону. Обозначим две эти точки буквами A и B . Ясно, что все восемь отрезков, соединяющих точку A с точками в другой полуплоскости, пересекут прямую l . Столько же отрезков, пересекающих нашу прямую, будет выходить из точки B . Остальные отрезки не будут пересекать прямую, так как их концы находятся от неё в одной полуплоскости. Таким образом, всего прямую l будет пересекать ровно 16 отрезков (рис. 5.12). Случай, когда по одну сторону от прямой находятся 3 точки, а остальные 7 лежат в другой полуплоскости, был показан в пункте (а). Там прямая l пересекала 21 отрезок.

Чтобы разобрать все остальные случаи, будет удобнее составить таблицу. Пусть по одну сторону от прямой l

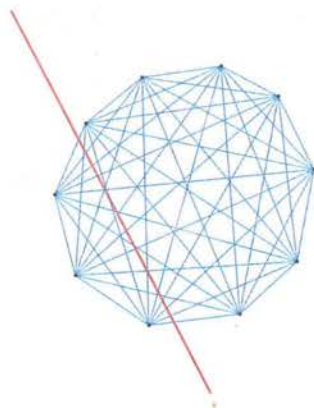
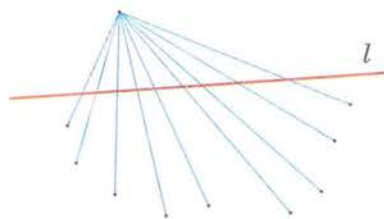
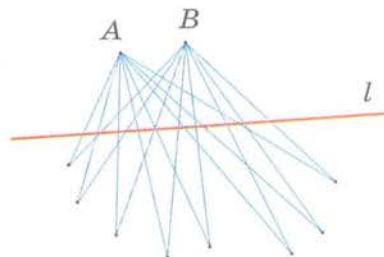


Рис. 5.10



Прямая l пересекает ровно 9 отрезков

Рис. 5.11



Прямая l пересекает ровно 16 отрезков

Рис. 5.12

лежит m точек, а по другую — n точек. Сколько отрезков тогда пересекут прямую? Давайте считать: из каждой точки в одной полуплоскости выходит ровно n отрезков, пересекающих нашу прямую, а всего таких точек m . Значит, общее число всех таких отрезков, которые пересекут прямую, равно $m \cdot n$. Давайте теперь заполним таблицу:

1-я полуплоскость	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2-я полуплоскость	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Всего пересечений	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0

Мы разобрали все возможные случаи. Значит, прямая линия не может пересекать ровно 20 отрезков. Теперь это доказано.



ВОПРОСЫ

- 1 Что такое полуплоскость? В чём состоит аксиома полуплоскостей?
- 2 Что такое треугольник?
- 3 Сколько сторон треугольника может пересекать прямая, если она не проходит через его вершины?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 5.1 ☆☆☆ Отрезки AB , BC и CE пересекают данную прямую, а их концы не лежат на ней. Пересекает ли эту прямую отрезок AE ?
- 5.2 ☆☆☆ Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на четыре части. В двух из них, отмеченных на рисунке 5.13, взяли произвольные точки A и B . Всегда ли отрезок AB будет пересекать обе прямые? Как вы это объясните?
- 5.3 ☆☆☆ На плоскости отметили 11 точек и попарно соединили их отрезками. Прямая не проходит ни через одну из этих точек. Какое наибольшее число полученных отрезков она может пересекать?

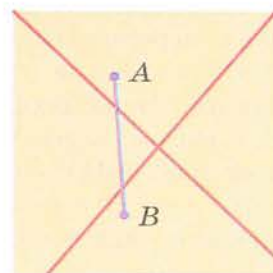


Рис. 5.13

5.4 ☆☆☆ На плоскости отметили несколько точек и попарно соединили их отрезками. Провели прямую, которая не проходит ни через одну из этих точек. Оказалось, что она пересекла ровно 21 отрезок. Сколько отрезков не пересекла эта прямая? Будьте внимательны: у задачи может быть несколько решений!

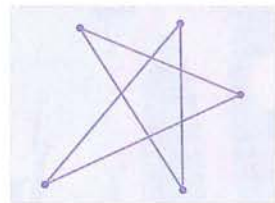


Рис. 5.14

5.5 ☆☆☆ Пятиугольная звезда состоит из пяти отрезков, которые соединяют пять её вершин так, как это показано на рисунке (рис. 5.14). Проведите прямую, которая пересечёт все эти пять отрезков. Можно ли провести прямую так, чтобы она не проходила через вершины этой звезды?

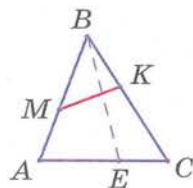


Рис. 5.15

5.6 ☆☆☆ На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяли произвольные точки M , K и E (рис. 5.15). Докажите, что отрезок BE обязательно пересечёт прямую MK .

5.7 ☆☆☆ Отец оставил в наследство трём сыновьям квадратный участок земли. Каждый из них на этом участке построил себе дом и калитку в заборе — на рисунке 5.16 калитка и дом каждого сына отмечены одной цифрой. Два брата построили свои дома на некотором расстоянии от забора, а третий брат — вплотную к нему. Потом братья перессорились друг с другом и решили проложить дорожки от своих калиток к домам так, чтобы эти дорожки нигде не пересекались. Смогут ли они это сделать? Как изменился бы ответ этой задачи, если бы вплотную к забору свой дом построил бы не третий, а второй брат?

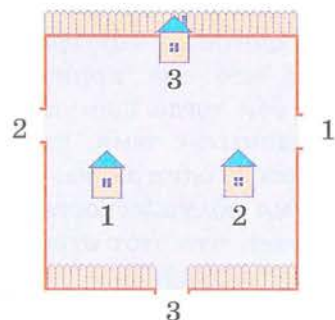


Рис. 5.16



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Что происходит на границе?

Как вы уже знаете, прямая линия делит всю плоскость на две полуплоскости. Она служит границей данных полуплоскостей. Но принадлежит ли двум этим полуплоскостям их общая граница? Такой вопрос не столь прост, каким он кажется на первый взгляд. Например, в современном мире на границе между двумя соседними государствами обычно лежит «ничейная» полоса земли. А если граница проходит по морю, то там находятся

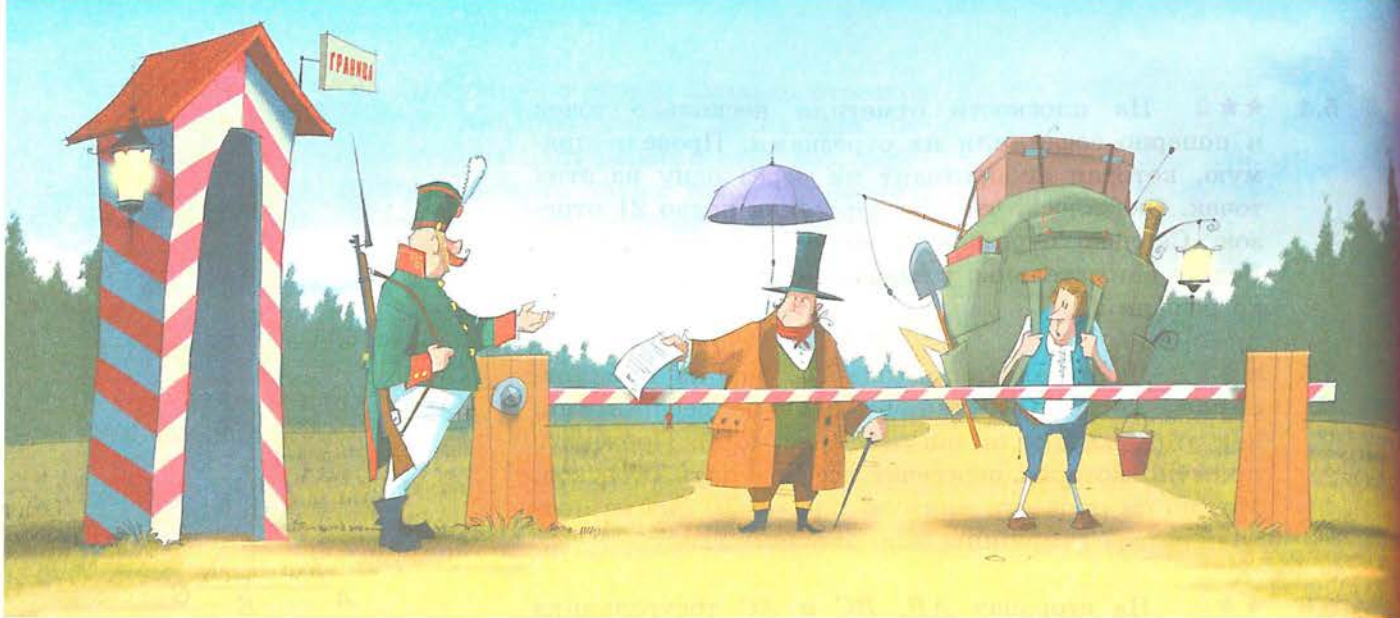


Рис. 5.17

«нейтральные воды». В геометрии также считают, что граница между полуплоскостями не принадлежит этим полуплоскостям, она как будто «ничья». Конечно, можно было бы считать, что граница между плоскостями общая, то есть что она принадлежит сразу двум полуплоскостям. Но как тогда поступать с «нарушителями государственной границы», с теми, кто пересёк эту границу? Посмотрите на отрезок, один конец которого находится на границе между двумя полуплоскостями (рис. 5.18). Здравый смысл подсказывает, что этот отрезок всё ещё лежит по одну сторону от этой прямой, ведь его концы находятся в одной полуплоскости. С формальной же точки зрения данный отрезок лежит в разных полуплоскостях, ведь он уже пересёк границу. Поэтому границу между плоскостями не относят к самим полуплоскостям.

Разделять плоскость на части может не только прямая. Если любая другая линия делит плоскость на несколько частей, то эти части называют **геометрическими областями**. Разделяющая их линия — граница между ними. Как понять, что две точки находятся в одной геометрической области? Только одним способом: нужно связать их непрерывной «дорогой» так, чтобы она не пересекла границу. Тогда от одной точки до другой можно будет «проехать по дороге», а значит, эти две точки находятся в одной «стране», принадлежат одной области (рис. 5.19). Такое свойство точек в одной геометрической области математики называют **связностью**. Например, если на плоскости из одной точки провести два луча, то они тоже разделят всю плоскость на две области. В каждой из этих областей любые две точки можно соединить, или связать, между собой непрерывной линией, которая не пересечёт данные лучи. А если начать соединять точки из разных областей, то обязательно пересечёшь границу между ними.

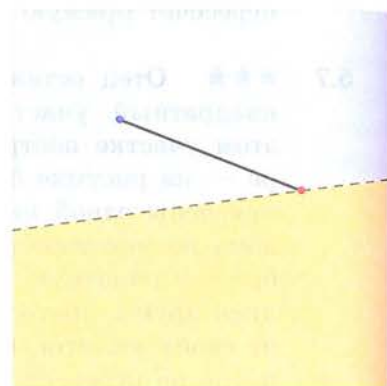
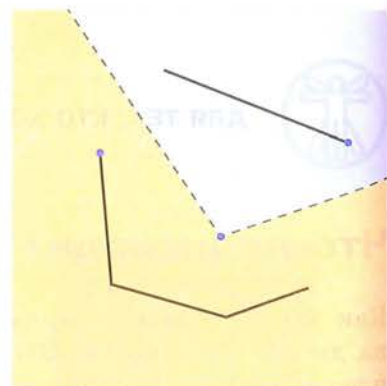


Рис. 5.18



Два луча с общим началом делят плоскость на две области

Рис. 5.19

2

Углы и многоугольники

§6 Углы

§7 Ломаная и многоугольники

§8 Выпуклые фигуры



§6 Углы

Угол

Каждый человек знает, что такое угол. Угол может быть у дома, у стола или у комнаты. Об угол можно удариться или даже за него заглянуть. Иногда маленьких детей родители вообще ставят «в угол» в качестве наказания... Корабль может идти под углом к ветру, и это называется галс. Дорога может подниматься под углом в гору, и тогда говорят, что она имеет наклон (рис. 6.2). Конечно, во всех этих случаях речь идёт о различных углах, в том числе и об углах в трёхмерном пространстве. А что такое угол с точки зрения геометрии на плоскости? Как его можно определить?

Удивительно, но не любой взрослый человек может ответить на этот вопрос сразу правильно. Иногда можно услышать такие ответы: «Угол — это резкий перелом прямой линии» или «Угол — это наклон двух прямых в данной точке» и так далее. Конечно, такие образные «определения» нам с вами никак не подходят. Ведь в них остаётся непонятным, что такое перелом прямой линии или даже её наклон.

Вместо этого давайте просто посмотрим, из чего же состоит любой угол. Мы увидим одну точку и два различных луча, которые из неё выходят. Таким образом,



Геометрический угол¹ — это фигура на плоскости, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки.

Данная точка называется **вершиной** угла, а два выходящих из неё луча — **сторонами** угла.

Углы обычно задают тремя буквами: одна из них обозначает его вершину, а две другие — точки на сторонах. Важно, что при такой записи вершину угла всегда пишут средней. Например, угол BAC с вершиной A обозначают так: $\angle BAC$ (рис. 6.3).

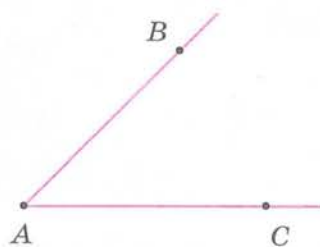
Вы можете спросить: «Будут ли образовывать угол два луча, если они выходят из одной точки, но лежат на одной прямой?» Конечно, такие лучи тоже образуют угол — его называют **развёрнутым** (рис. 6.4).



Рис. 6.1



Рис. 6.2



Угол $\angle BAC$

Рис. 6.3

¹ Далее геометрический угол везде мы будем называть просто углом.



Значит, угол называется **развёрнутым**, если его стороны лежат на одной прямой.

Так же как и прямая линия, геометрический угол делит всю плоскость на две части. Если рассмотреть угол вместе с одной из этих частей плоскости, мы получим так называемый **плоский угол**. Значит, вместе с обычным углом на плоскости всегда образуются два плоских угла — они показаны разными цветами на рис. 6.5. Итак,



Плоский угол — это геометрический угол вместе с одной из двух частей, на которые он разбивает всю плоскость.

Если две прямые пересекаются, то они образуют несколько пар углов, по-разному расположенных по отношению друг к другу. Давайте разберём эти случаи.

Когда два угла имеют общую сторону, а другие их стороны лежат на одной прямой, то такие углы называют **смежными** (рис. 6.6). Видно, что два смежных плоских угла вместе заполняют одну полуплоскость. Таким образом,



Углы называют **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие лежат на одной прямой.

Кроме того, при пересечении двух прямых линий образуются углы, которые не имеют общих сторон. Евклид называл их «углы через вершину». Сейчас их называют **вертикальными** (рис. 6.7). Свое название вертикальные углы получили благодаря буквальному переводу латинского слова *vertex*, что означает «вершина». Таким образом,



Углы считают **вертикальными**, если стороны одного из них дополняют стороны другого до двух прямых линий.

При пересечении двух прямых образуется несколько пар как смежных, так и вертикальных углов.

Измерение углов

Как и отрезки, плоские углы также измеряют по отношению к некоторому эталону — специально для этого выбранному углу. В качестве эталона обычно берут угол в 1°

(1 градус), который составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого

угла. Выходит, что развёрнутый угол равен 180° просто по определению. На практике величину измеряемого угла находят с помощью знакомого уже вам **транспортира**. Обычно он представляет собой половину круга, окружность



Развёрнутый угол

Рис. 6.4

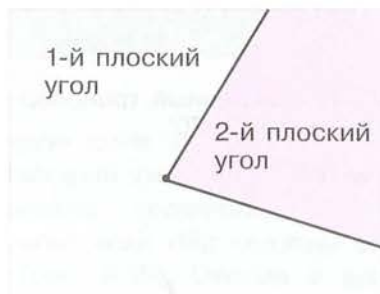
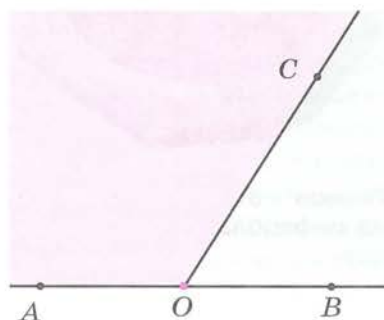
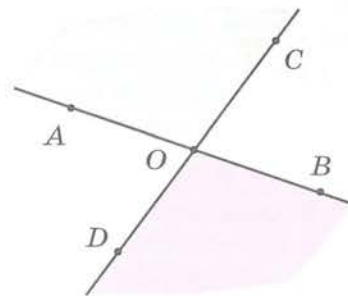


Рис. 6.5



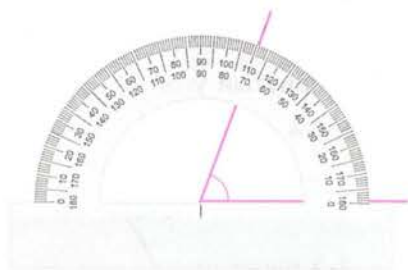
Смежные углы AOC и BOC

Рис. 6.6



Вертикальные углы AOC и BOD

Рис. 6.7



Угол, измеренный транспортиром, равен 70°

Рис. 6.8



Гномон отбрасывает тень на циферблат солнечных часов

Рис. 6.9

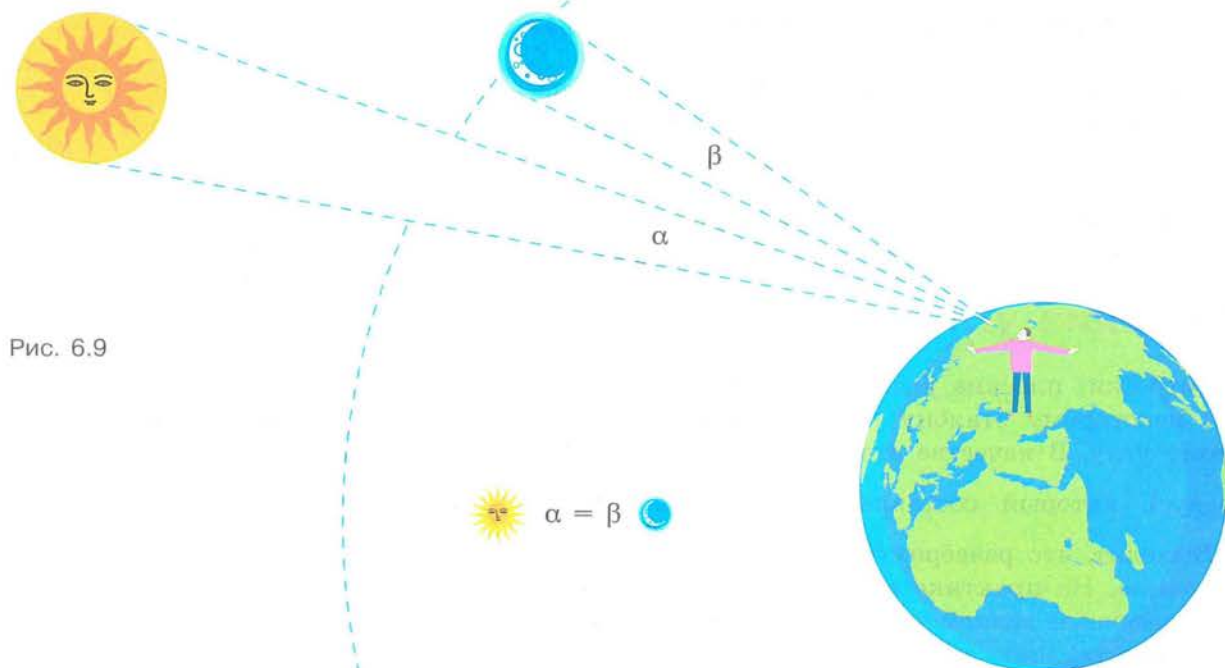


Рис. 6.9

которого поделена на 180 равных частей. Чтобы измерить нужный нам угол, его вершину помещают в центр этого круга, одну сторону угла совмещают с линейкой транспортира (проходящей через отметку 0°) и смотрят, на каком делении пересечёт его шкалу вторая сторона данного угла (рис. 6.8). То есть величина угла показывает, сколько эталонных углов (или их частей) можно последовательно отложить внутри данного угла, другими словами — сколько он составляет градусов.

Вам кажется, что угол в 1° слишком мал? Но примерно под этим углом видит человек одним глазом мизинец своей вытянутой руки. А Солнце и Луна видны глазом вообще под углом в половину градуса! Получается, что Солнце и Луну можно закрыть мизинцем своей руки! Но будьте осторожны: на Солнце нельзя смотреть без защитных тёмных очков: это очень опасно. Бельгийский ученый Жозеф Плато, который исследовал физиологию зрения человека в конце XIX века, неотрывно глядел на Солнце в течение 25 секунд и ослеп до конца жизни.

Почему же развернутый угол делят не на 100, а на 180 градусов? На этот вопрос нет однозначного ответа. Но скорее всего, он тоже связан с солнцем. По одной из версий, жрецы Древнего Вавилона придумали считать

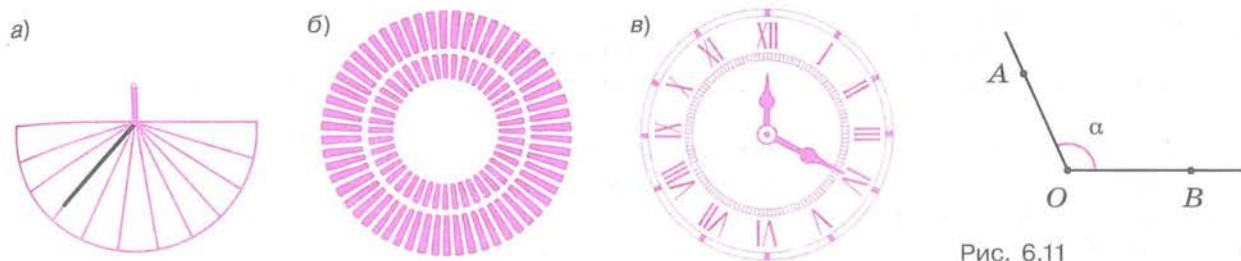


Рис. 6.10

Рис. 6.11

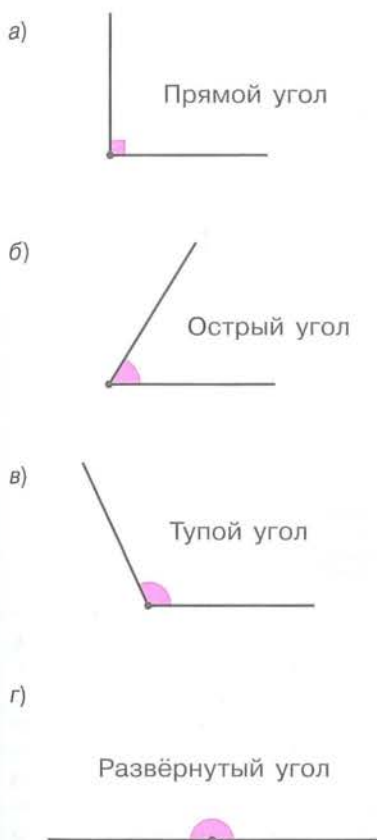


Рис. 6.12

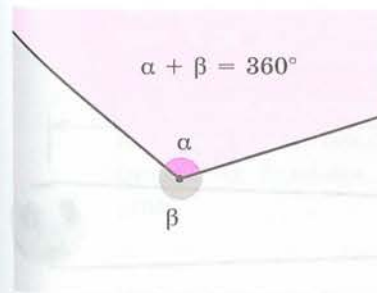


Рис. 6.13

время по положению тени, которую днём отбрасывал специальный столб или прут, называемый **гномон**, на круг с делениями — циферблат древних солнечных часов (рис. 6.9). Они заметили, что за один день «бог солнца» совершает примерно 180 «шагов» (рис. 6.10). Отсюда и возникло деление половины круга на 180, а всего круга — на 360 частей. Интересно, что само слово «градус» в переводе с латыни тоже значит «шаг».

По другой версии, один год у жителей Древнего Вавилона состоял из 360 дней, а число 60 было у них священным. Существует гипотеза, что это число было выбрано ими не случайно: ведь это первое число, которое можно нацело разделить на 2, 3, 4 и 5. Поэтому все вычисления в Древнем Вавилоне были связаны с числом 60, то есть они использовали так называемую шестидесятеричную систему счисления. Эта система сохранилась до наших дней, все мы по ней до сих пор считаем время: один час состоит из 60 минут, а одна минута — из 60 секунд. Да и циферблат часов остался тем же: это круг, который поделен на 60 равных частей (рис. 6.10, в).

Величину угла называют его **градусной мерой**. Часто градусные меры углов обозначают буквами греческого алфавита: α , β , γ , δ и т. д. На чертеже их ставят прямо внутри плоского угла, а для наглядности две его стороны около вершины соединяют дугой окружности. Например, запись $\angle AOB = \alpha$ просто означает, что величина угла AOB равна α градусам (рис. 6.11). Угол, величина которого равна 90° , называют **прямым** углом и на чертеже обозначают маленьким квадратиком, вписанным в этот угол (рис. 6.12, а). Если величина угла меньше 90° , то его называют **острым** углом (рис. 6.12, б), а если больше 90° — угол называют **тупым** (рис. 6.12, в).

Напомним, что величину развёрнутого угла считают равной 180° . Считать её можно в любой полуплоскости относительно прямой, на которой лежат стороны этого угла. Если же сложить величины двух плоских развёрнутых углов с общими сторонами, то получится $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$. Те же 360° мы получим, если сложим величины двух любых плоских углов, у которых совпадают стороны и которые вместе заполняют всю плоскость (рис. 6.13).



Луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам (то есть на два угла равной величины), называется **биссектрисой** (рис. 6.14).

Слово «биссектриса» буквально означает «рассекающая надвое». Начинается оно с приставки «би-», как и другие известные вам слова: бинокль, бисквит, бином, бис и так далее. Дело здесь в том, что в латинском языке приставка «би-» всё удваивает.

Как мы уже говорили, при пересечении двух прямых линий возникает несколько углов. Какой из них считать «углом наклона» двух прямых между собой? В геометрии



Углом между двумя прямыми называют наименьший из тех углов, которые образуются между ними (рис. 6.15).

Если угол между двумя прямыми равен 90° , то их называют **перпендикулярными**. В этом случае все углы, которые образуются при их пересечении, равны 90° . Перпендикулярность прямых a и b записывают так: $a \perp b$ (рис. 6.16).

Аксиомы углов

Так же как и для отрезков, при измерении углов легко заметить их очевидные свойства, которые мы примем без доказательства, как аксиомы. Очевидно, что любой плоский угол можно измерить транспортиром, то есть сказать, сколько приблизительно он составляет градусов.

Когда величина угла не равна целому числу градусов, считают его меньшие доли. Для этого один градус делят на 60 равных частей — **угловых минут**, а каждую угловую минуту на 60 ещё меньших **угловых секунд** и т. д. Угловые минуты обозначают наклонным штрихом, который пишут над их числом справа. А угловые секунды обозначают двумя такими штрихами. Например, средний угловой размер Луны (угол, под которым она видна с Земли) равен $31' 05''$, а для Солнца он составляет $31' 59''$.

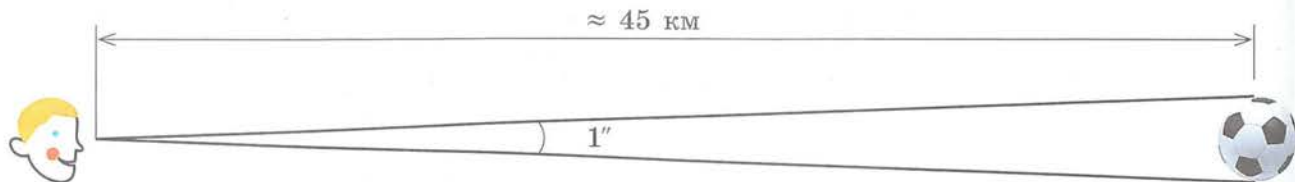


Рис. 6.17

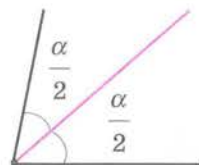


Рис. 6.14

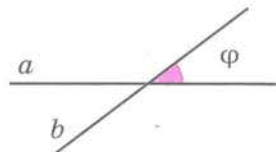


Рис. 6.15



Рис. 6.16



Все планеты Солнечной системы мы видим под углом, меньшим одной угловой минуты. Угловые же величины видимых звёзд вообще составляют сотые доли секунды. Представьте себе, что одна угловая секунда соответствует углу, под которым теоретически можно было бы увидеть футбольный мяч с расстояния в 45 километров (рис. 6.17)... Попробуйте-ка его разглядеть!

Мы же с вами примем без доказательства, что любой плоский угол при желании можно было бы измерить сколь угодно точно, а значит, существует некоторое положительное число, равное его настоящей величине. А то, что все развернутые углы равны 180° , — просто традиция, идущая ещё от Древнего Вавилона.

Давайте теперь посмотрим, что будет, если плоский угол разделить лучом на два меньших угла. Пусть величины этих меньших углов равны, например, 40° и 50° . Какова будет величина всего угла? Очевидно, что она будет равна $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$. А то, что в общем случае нужно складывать градусные меры углов, на которые луч делит данный нам угол, мы примем без доказательства.

Ну и последнее. Если посмотреть на биссектрису любого угла, то сразу видно, что к ней с двух сторон прилегают одинаковые углы. То есть угол с заданной градусной мерой можно отложить от одного луча в две разные полуплоскости. А какие углы можно откладывать от данного луча в одну из этих полуплоскостей? Мы примем за очевидное, что отложить можно любой угол, величина которого меньше 180° , ведь иначе он просто не поместится в эту полуплоскость! Итак, мы готовы сформулировать три аксиомы углов:



- 1 Может ли величина плоского угла быть больше 180° ?
- 2 Чему равна сумма величин двух смежных углов?
- 3 Сколько пар смежных углов получается при пересечении двух прямых?
- 4 Сколько угловых секунд в одном градусе?

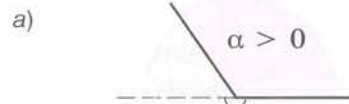


Аксиомы углов

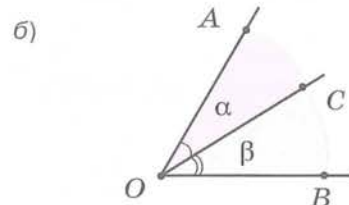
- 1 Каждый плоский угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Любой развернутый угол равен 180° по определению (рис. 6.18, а).

- 2 Градусная мера плоского угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится любым лучом, выходящим из его вершины (рис. 6.18, б).

Из данной аксиомы следует, что когда несколько лучей делят плоский угол на меньшие углы, сумма их величин равна величине исходного угла.



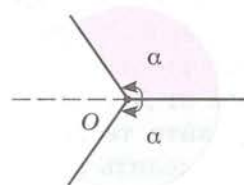
Развёрнутый угол равен 180°



Для любого луча OC
 $\angle AOB = \alpha + \beta$

Рис. 6.18

- 3 От любого луча в заданную от него полуплоскость можно отложить угол с данной градусной мерой, меньшей 180° , и только одним способом (рис. 6.19).



От данного луча в любую из полуплоскостей можно отложить угол $\alpha \leq 180^\circ$

Рис. 6.19

Пришло время доказать первую теорему об углах, которую сформулировал ещё мудрец Фалес. Звучит она так: вертикальные углы имеют одинаковую величину. Можно сказать проще: вертикальные углы равны.



Теорема о вертикальных углах

Вертикальные углы равны (рис. 6.20, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим вертикальные углы AOC и BOD , которые получаются при пересечении двух прямых AB и CD (рис. 6.20, б). Пусть они имеют градусные меры α и β , а величина угла COB равна γ . Поскольку углы AOC и BOC смежные по определению, то сумма их величин равна величине развёрнутого угла, то есть $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Совершенно также углы BOD и COB являются смежными. Значит, $\beta + \gamma = 180^\circ$. Но тогда должно выполняться равенство $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Из него очевидно следует, что $\alpha = \beta$.

Что и требовалось доказать.

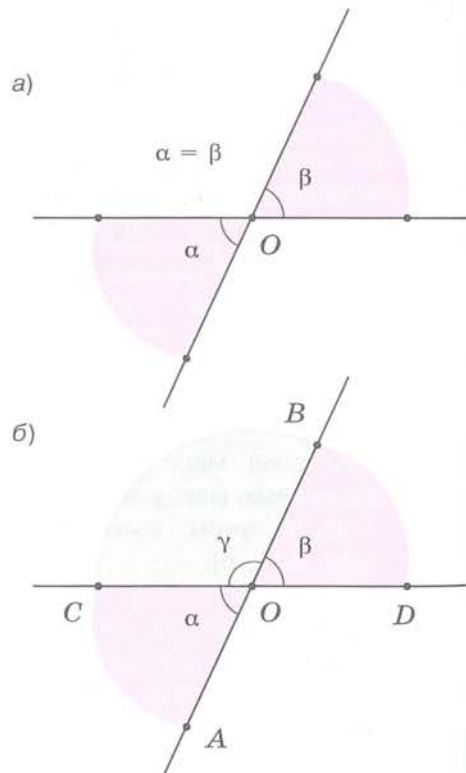


Рис. 6.20



ВОПРОСЫ

- 1 Что такое геометрический угол? Какой угол называется развёрнутым?
- 2 Что такое плоский угол? Чем он отличается от геометрического угла?
- 3 Какие углы называются смежными?
- 4 Какие углы называют вертикальными? Почему возникло такое название? В чем состоит теорема о вертикальных углах?
- 5 Что такое биссектриса угла? Какие ещё слова начинаются с приставки «би-»?
- 6 Что считается углом между двумя прямыми? Как называются прямые, угол между которыми равен 90° ?
- 7 Какая система счисления использовалась в Древнем Вавилоне? Где она используется до сих пор? Что такое гномон и циферблат?
- 8 Какие аксиомы углов вы знаете?
- 9 Что такое угловой градус, минута и секунда?



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Нарисуйте любой треугольник. Проверьте с помощью транспортира, что один из его углов не превосходит 60° .
- 2 На клетчатой бумаге нарисовали четырёхугольник. Попробуйте определить «на глаз», какой из его углов прямой, какой острый, а какой тупой. Потом проверьте себя с помощью транспортира (рис. 6.21).
- 3 Нарисуйте треугольник. С помощью линейки и транспортира проверьте, что напротив самой длинной его стороны лежит самый большой угол.
- 4 У вас есть карандаш и клочок бумаги без ровного края. Как без линейки и транспортира, только складывая бумагу, получить на ней прямой угол? А можно ли так получить угол в 45° ?
- 5 На клетчатой бумаге показан угол ABC (рис. 6.22). Измерьте его с помощью транспортира. Больше он или меньше 60° ?

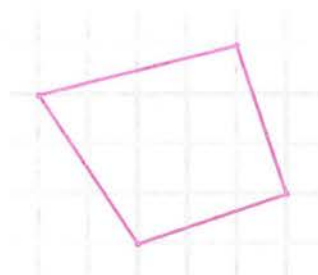


Рис. 6.21

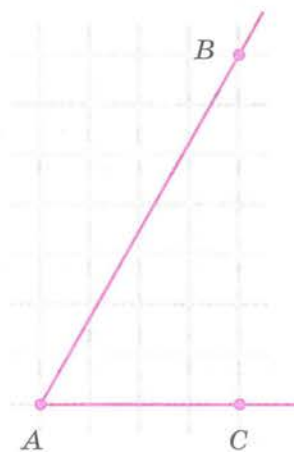


Рис. 6.22



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 6.1** Часы показывают 10:30. Найдите угол между их стрелками (рис. 6.23, а).

РЕШЕНИЕ: Как известно, циферблат часов разделен на 12 равных частей. За один час минутная стрелка проходит полный круг, то есть поворачивается на угол 360° . Часовая же стрелка за один час сдвигается всего на одно деление, то есть проходит $1/12$ часть циферблата. Значит, за 1 час она повернется на угол $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Поскольку движение часовой стрелки можно считать равномерным, за половину часа она должна повернуться на половину этого угла, то есть на 15° . В половину одиннадцатого между стрелками часов будет четыре целых деления циферблата и ровно половина ещё одного деления, то есть угол между ними будет равен $4 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 135^\circ$ (рис. 6.23, б).

ОТВЕТ: 135° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 6.2** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

РЕШЕНИЕ: Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O и образуют вертикальные углы AOC и BOD . Нужно доказать, что их биссектрисы OE и OF лежат на одной прямой. По теореме вертикальные углы AOC и BOD имеют одинаковую величину, обозначим её буквой α . Величину угла BOC обозначим β (рис. 6.24, а). Так как углы AOC и BOC смежные, то $\alpha + \beta = 180^\circ$. Так как биссектриса делит угол пополам, то углы EOC и FOB равны $\frac{\alpha}{2}$. Давайте найдём величину угла EOF между этими биссектрисами: $\angle EOF = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \beta = 180^\circ$. То есть угол EOF развернутый, значит, и биссектрисы OE и OF лежат на одной прямой (рис. 6.24, б).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 6.3** Прямая проходит через вершину прямого угла. Его стороны образуют с ней два острых угла. Чему может быть равен угол между биссектрисами двух этих острых углов?

РЕШЕНИЕ: Обозначим данный прямой угол как AOB , и пусть прямая CD проходит через его вершину. Возможны два принципиально разных случая: либо эта прямая больше не имеет с данным плоским углом общих точек, либо разбивает его на два меньших угла.

Рассмотрим вначале первый случай. Обозначим величины нужных нам острых углов AOC и BOD как α и β . Поскольку угол COD развернутый, то должно выполняться равенство: $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. Откуда $\alpha + \beta = 90^\circ$. В этом

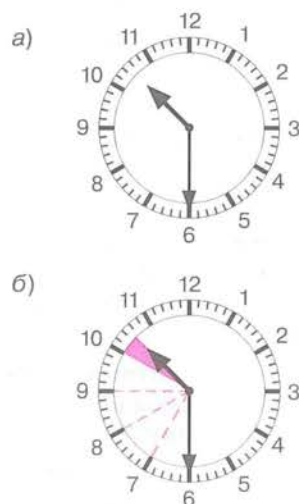


Рис. 6.23

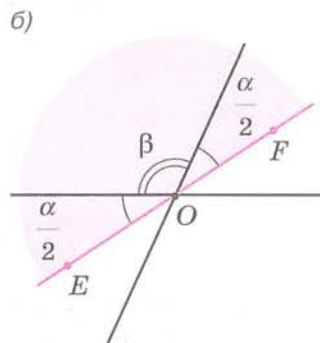
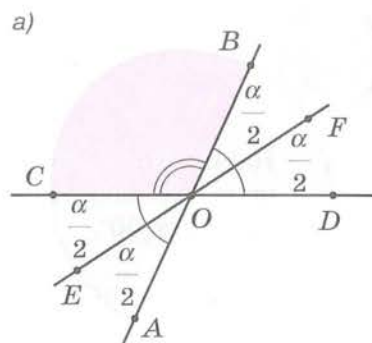


Рис. 6.24

случае биссектрисы углов AOC и BOD образуют угол EOF , который равен $\frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ (рис. 6.25, а).

Во втором случае прямая разбивает данный нам прямой угол на два острых угла, величины которых равны α и β . По основному свойству углов должно быть $\alpha + \beta = 90^\circ$. Тогда угол EOF между биссектрисами этих углов будет равен $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (рис. 6.25, б).

ОТВЕТ: 45° или 135° .

★★★ ПРИМЕР 6.4 На фотографии Спасской башни Московского Кремля запечатлён момент времени между шестью и семью часами, когда стрелки курантов совпадают (рис. 6.26, а). Найдите точное время этого совпадения. Если бы на этих курантах была ещё секундная стрелка, сколько бы она показала секунд? На какой угол в этот момент времени отклонятся стрелки от вертикали?

РЕШЕНИЕ: За один час минутная стрелка поворачивается на 360° . Значит, за одну минуту она поворачивается на $360^\circ : 60 = 6^\circ$. Часовая же стрелка курантов за 1 час проходит одно деление циферблата, то есть поворачивается на 30° . Значит, за 1 минуту она повернется всего на $30^\circ : 60 = 0,5^\circ$. То есть за одну минуту минутная стрелка «догоняет» часовую на $5,5^\circ$. Давайте начнём следить за движением наших стрелок ровно в половину седьмого, то есть в 6 часов 30 минут. В этот момент часовая стрелка на циферблате стоит точно посередине между 6 и 7 часами и образует с минутной стрелкой угол в 15° (рис. 6.26, б). Через сколько минут после половины седьмого её «догонит» минутная стрелка? Чтобы это найти, нужно разделить 15° на «скорость сближения» стрелок в минуту, то есть на $5,5^\circ$. Значит, стрелки совпадут ровно через $15 : 5,5 = 30 : 11 = 2\frac{9}{11}$ минут после половины седьмого, то есть точное время их совпадения равно 6 часов $32\frac{9}{11}$ минут. Давайте переведём $\frac{9}{11}$ минуты в секунды: $\frac{9}{11}$ мин = $\frac{9 \cdot 60}{11}$ с ≈ 49 секунд. Таким образом, с точностью до секунды стрелки совпадут в 6 часов 32 минуты и 49 секунд. Поскольку в 6:30 минутная стрелка была в вертикальном положении, а за 1 минуту она поворачивается на 6° , то через 2 минуты она отклонится от вертикали на угол, равный

$$6^\circ \cdot \frac{30}{11} = \frac{180^\circ}{11} = \left(16 + \frac{4}{11}\right)^\circ = 16^\circ 21' 49''.$$

ОТВЕТ: стрелки совпадут в 6 часов 32 минуты 49 секунд. Угол их отклонения от вертикали равен $16^\circ 21' 49''$.

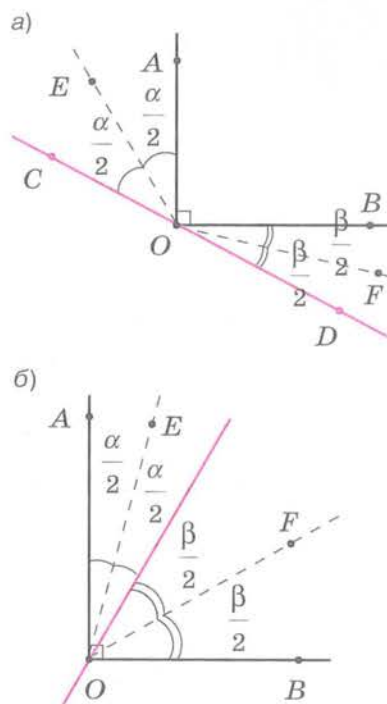


Рис. 6.25

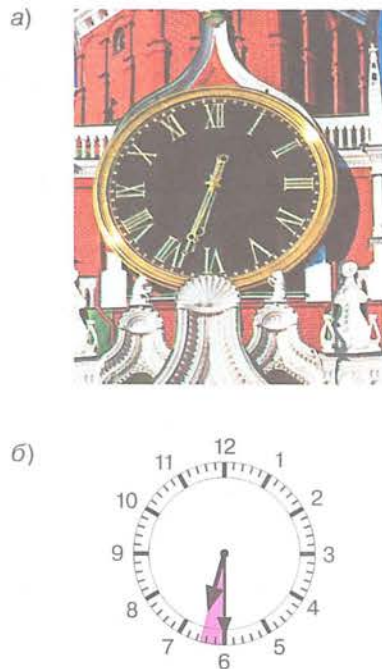


Рис. 6.26



ЗАДАЧИ

- 6.1 ☆☆☆ Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите величину меньшего из этих углов.
- 6.2 ☆☆☆ Докажите, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны друг другу.
- 6.3 ☆☆☆ Два угла, величины которых 20° и 50° , имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать две другие их стороны? (Все углы считайте меньше развёрнутого.)
- 6.4 ☆☆☆ Почему из точки, лежащей на прямой, можно провести к ней только один перпендикуляр (рис. 6.27)?
- 6.5 ☆☆☆ В вершине угла, равного 70° , восстановлены перпендикуляры к его сторонам. Найдите угол между этими перпендикулярами (рис. 6.28).
- 6.6 ☆☆☆ Пять прямых пересекаются в одной точке так, что отмеченные на рисунке углы равны. Найдите величину отмеченных углов (рис. 6.29).
- 6.7 ☆☆☆ Три луча выходят из одной точки и образуют три угла, каждый из которых меньше развёрнутого. Величина одного из них равна 100° (рис. 6.30). Найдите угол между биссектрисами двух других углов. Внимание: у задачи может быть несколько решений!
- 6.8 ☆☆☆ Из точки O в указанном порядке выходят лучи OA , OB , OC и OD (рис. 6.31). Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180° . Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.
- 6.9 ☆☆☆ Лист бумаги перегнули по прямой линии и «сложили» так, как показано на рис. 6.32. Один из получившихся углов оказался равен 50° . Найдите другой угол.
- 6.10 ☆☆☆ Найдите угол между часовой и минутной стрелками:
а) в 9 часов 30 минут (рис. 6.33, а);
б) в 10 часов 40 минут (рис. 6.33, б).



Рис. 6.27

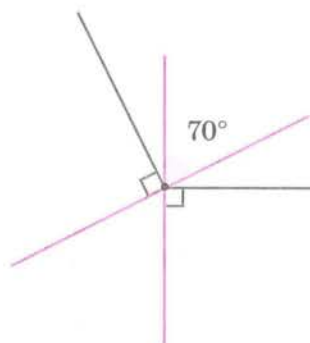


Рис. 6.28

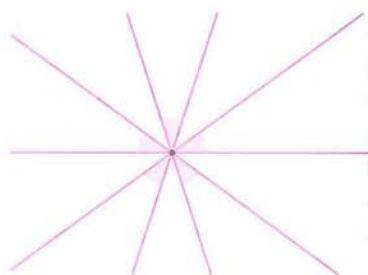


Рис. 6.29

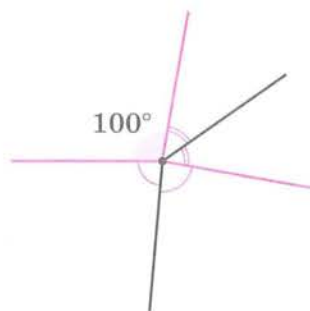


Рис. 6.30

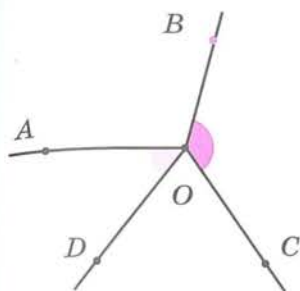


Рис. 6.31

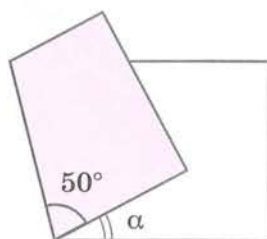


Рис. 6.32

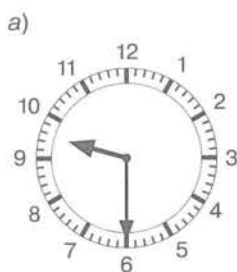
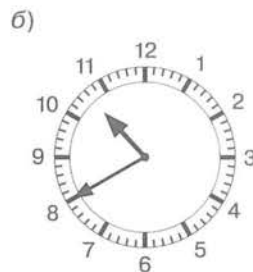


Рис. 6.33



6.11 ★★★ Найдите первый момент времени после 9:00, когда стрелки часов образуют угол в 156° .

6.12 ★★★ Первый раз после 9:00 часовая и минутная стрелки исправных часов лежат на одной прямой (рис. 6.34). Что в этот момент показывает секундная стрелка?

6.13 ★★★ В некоторый момент времени Аня измерила угол между часовой и минутной стрелками своих часов (рис. 6.35). Ровно через один час она снова измерила угол между стрелками. Угол оказался таким же. Каким мог быть этот угол? (Разберите все возможные случаи.)

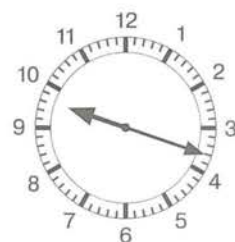


Рис. 6.34

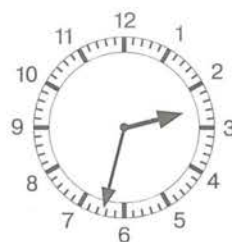


Рис. 6.35



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

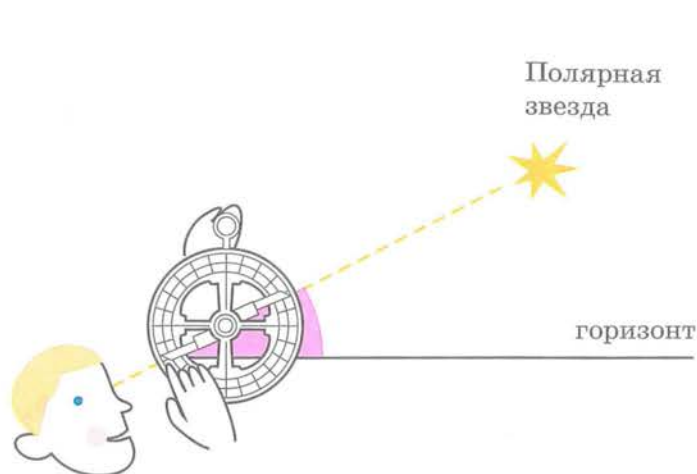
Астролябия

Как древние мореплаватели определяли своё положение на поверхности Земли? Не имея *GPS* и современного навигатора, как они в открытом океане понимали, на какой географической широте и какой долготе находится их судно? Это был далеко не праздный вопрос, ведь вплоть до XVIII века многие острова и архипелаги теряли и открывали по несколько раз, а капитаны не могли вернуться туда, где уже побывали... Далекие морские экспедиции были очень опасны — часто из них просто никто не возвращался. Для определения широты, на которой находилось судно в океане, ещё со времен античности применяли астролябию. Слово это означает «хватающая звёзды». Астролябия состояла из круглого латунного диска со шкалой, как у транспортира, и поворачивающейся вокруг его центра прямой планки — алидады (рис. 6.36). На концах алидады были проделаны маленькие отверстия —



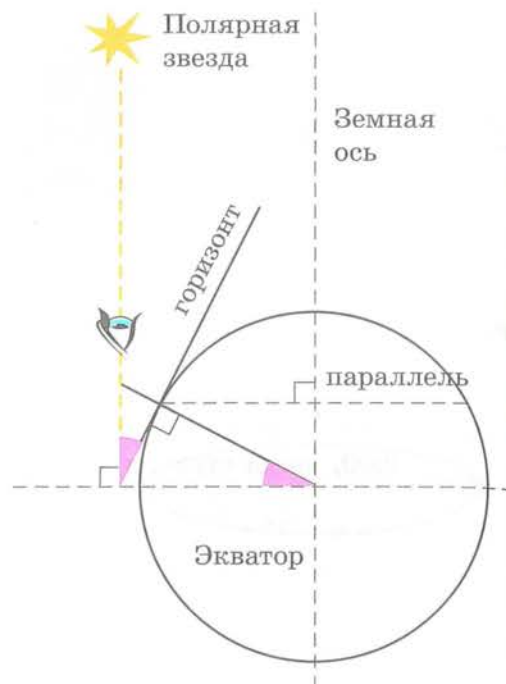
Морская астролябия

Рис. 6.36



Угол, под которым видна над горизонтом Полярная звезда, равен углу широты наблюдателя

Рис. 6.37



Полярная звезда указывает на полюс мира

Рис. 6.38

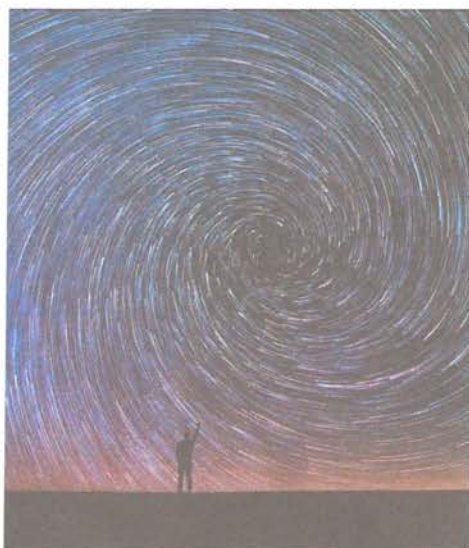


Рис. 6.39

диоптры, через которые смотрели на звёзды. Астролябию подвешивали за кольцо, ее диск оказывался в вертикальном положении, и тогда через отверстия в обоих диоптрах необходимо было увидеть **Полярную звезду**. В этот момент положение алидады на диске показывало угол, под которым над горизонтом видна Полярная звезда из данного места (рис. 6.37). Этот угол и давал географическую широту или ту параллель, где находился корабль в Северном полушарии Земли.

Почему это работало? Дело в том, что вот уже 1500 лет Полярная звезда «висит» прямо над Северным полюсом нашей планеты, то есть направление на неё практически совпадает с направлением земной оси (рис. 6.38). Астрономы называют это место на небосводе полюсом мира. Если фотоаппарат закрепить на штативе и сделать им снимок ночного неба с выдержкой в несколько часов, то звёзды на нём опишут круги, а в их центре будет находиться Полярная звезда (рис. 6.39). Многие народы называли ее «небесным колом» или «северным гвоздём». Эвенки называли Полярную звезду «дырой в небе», а хакасы более поэтично — «привязанным конём». В любом случае эта звезда всегда указывала людям направление на север.

Говорят, что астролябию изобрел кто-то из древних греков: либо астроном Евдокс, либо знаменитый математик Аполлоний. Потом ее усовершенствовала женщина-математик, астроном и философ Гипатия, которая была растерза-



Астролябия с тимпаном

Рис. 6.40



Астролябия эпохи Возрождения

Рис. 6.41

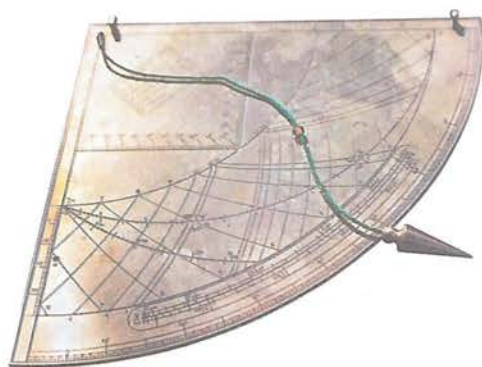
на толпой религиозных фанатиков в Александрии в 415 году нашей эры. После её смерти многие ученые бежали из Александрии, солнце античной науки закатилось, и астролябия на много веков была «забыта» Европой. Правда, ею продолжали пользоваться в Византии и арабском мире, с её помощью определяли широту и сверяли время: днём его измеряли солнечными часами, а ночью — водяными или песочными. Астролябия позволяла производить сверку этих часов. Для этого необходимо было днём наблюдать высоту Солнца, а ночью — одну из ярких звёзд, нанесённых на специальный диск, или «паук», астролябии. «Паук» совмещали с ещё одним ее диском — тимпаном (рис. 6.40), на котором помещалась карта звёздного неба данной местности.

Только в XII веке через средневековую Испанию астролябия снова вернулась в Европу. Она стала необычайно популярна в эпоху Возрождения, снова была усовершенствована, и лучшие мастера изготавливали астролябии как произведения искусства (рис. 6.41). С помощью астролябии можно было не только определить географическую широту, координаты звёзд и Солнца, но и находить направления на многие города (особенно на Мекку) и вычислять фазы Луны. То есть астролябия была как бы средневековым «компьютером». Даже городские часы кафедральных соборов Европы долгое время делали в форме астролябий (рис. 6.42).



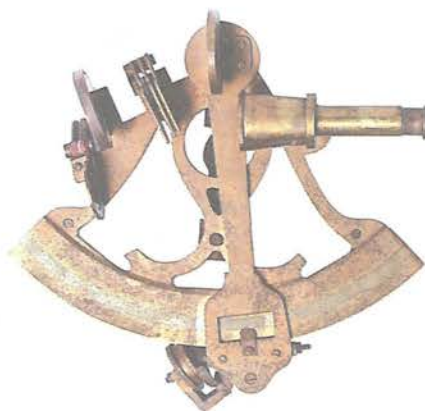
Городские часы в Праге сделаны в виде астролябии

Рис. 6.42



Переносной квадрант

Рис. 6.43



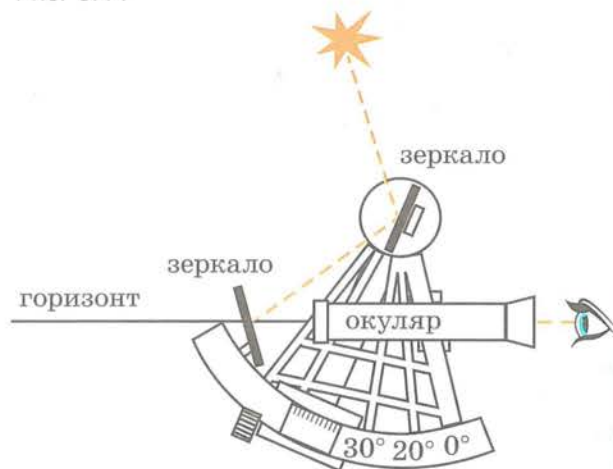
Переносной секстант

Рис. 6.44



Принцип работы квадранта

Рис. 6.45



Принцип работы секстанта

Рис. 6.46

Позже астролябию заменили на **квадрант** (рис. 6.43) и **секстант** (рис. 6.44), которые представляли собой одну четвёртую или же одну шестую полного круга. Диоптры квадранта располагались на краю его прямой рамы, а положение отвеса на шкале круга показывало угол звезды над горизонтом (рис. 6.45). Квадрант давал большую точность, чем астролябия, потому что имел гораздо большие размеры и более совершенные винты для регулировки (рис. 6.47).

Секстант изобрёл Исаак Ньютон в 1699 году. В нём с помощью отражения от зеркала свет звезды (или Солнца) попадал на второе зеркало, половина которого была прозрачна, что позволяло совмещать в одном окуляре горизонт и звезду одновременно (рис. 6.46). Это приводило к ещё большей точности наблюдений. Сейчас для точного измерения углов используют **теодолит**, ошибка которого составляет всего несколько угловых секунд.



Рис. 6.47

§7 Ломаная и многоугольник

Ломаная

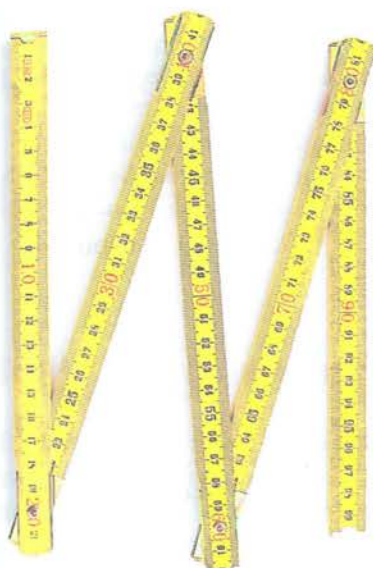


Рис. 7.1

Интуитивно ломаная линия отличается от гладкой или плавной линии тем, что она состоит из прямых участков и резко меняет своё направление при переходе от каждого такого участка к следующему.

То есть ломаную можно представить себе как цепь отрезков или звеньев, которые идут друг за другом, но не лежат на одной прямой. Форму ломаной имеет «складной метр» (рис. 7.1) или многие диаграммы, где точки графика для наглядности также соединяют отрезками (рис. 7.2). По ломаным траекториям движутся мельчайшие частицы, находящиеся в жидкости, благодаря постоянным ударам о них молекул этой жидкости. Такое явление было открыто Джоном Броуном в 1827 году и с тех пор называется броуновским движением (рис. 7.3).

Чтобы определить ломаную, на плоскости нужно взять несколько точек и по очереди — одну за другой — соединить их отрезками. Данные отрезки будут **звеньями** ломаной, а указанные точки — её **вершинами**. Образно можно сказать, что в каждой своей вершине ломаная резко меняет «своё направление». Вершины ломаной обычно обозначают заглавными буквами и пишут их в порядке следования друг за другом.

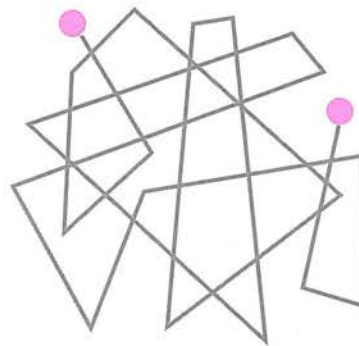


Само название «ломаная» отражает суть этого слова — оно образовано от глагола «ломать». Если прямую палку надломить в нескольких местах, она превратится в ломаную линию.



Диаграмма индекса фондового рынка США в 1929 году

Рис. 7.2



Броуновское движение частицы в жидкости

Рис. 7.3

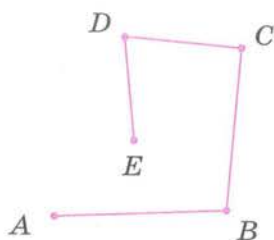


Рис. 7.4

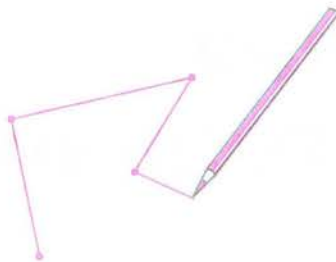


Рис. 7.5

Например, на рисунке 7.4 показана ломаная $ABCDE$, которая состоит из четырех отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DE]$. Эту же ломаную при желании можно обозначить и в «обратном порядке» как $EDCBA$. Две такие записи по сути обозначают одну и ту же геометрическую фигуру, которую можно нарисовать «одним росчерком», то есть не отрывая карандаша от бумаги (рис. 7.5). Важно только, чтобы соседние звенья ломаной никогда не лежали на одной прямой, ведь иначе их можно будет «начертить» как один отрезок. Итак, мы с вами готовы дать определение:



Ломаной называется фигура, состоящая из отрезков, которые друг за другом соединяют точки на плоскости, причём её соседние отрезки не лежат на одной прямой.

Данные точки называются **вершинами** ломаной, а соединяющие их отрезки — **звеньями** ломаной (рис. 7.6, а).

Ломаную обычно обозначают последовательностью её вершин. Например: ломаная $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$ или более коротко $A_1A_2...A_{10}$ (рис. 7.6, б).

Длиной ломаной называют сумму длин всех её звеньев.

Считать ли ломаной фигуру, состоящую всего из одного отрезка? Этот вопрос кажется странным, ведь у отрезка нет никакого «излома». Однако под наше определение подходит и один отрезок. А как вы думаете: сколько ломаных соединяет две данные точки A и B ? Очевидно, что есть только одна такая ломаная — это отрезок AB . Его можно нарисовать карандашом, соединив точку A с точкой B , или же наоборот — точку B соединить с точкой A (рис. 7.7). В любом случае у вас получится одно и то же.

Давайте возьмём любую ломаную и нарисуем её в обратном порядке — от последней её вершины к первой. Получится ли у нас другая фигура? Конечно же нет! Ведь набор отрезков, из которого состояла сама ломаная, при этом не изменится, поменяется только обозначение её вершин. Поэтому мы с вами и будем считать, что ломаные $A_1A_2...A_n$ и $A_nA_{n-1}...A_2A_1$, нарисованные с «разных концов», описывают одну и ту же геометрическую фигуру.

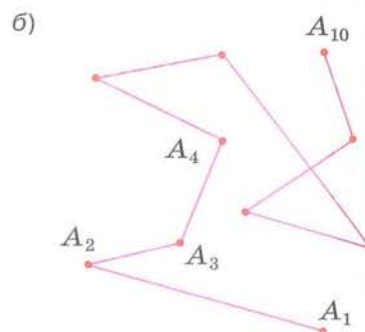
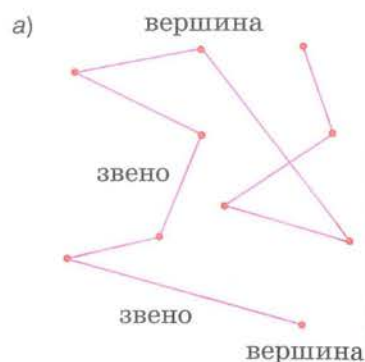


Рис. 7.6

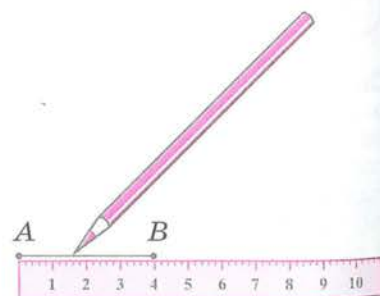


Рис. 7.7



Если первая вершина у ломаной совпадает с последней, то она называется **замкнутой** (рис. 7.8). Все остальные ломаные называют **незамкнутыми**.

Кроме того, в геометрии различают **простые** и **непростые** ломаные. Они показаны на рисунках 7.9, 7.10. Попробуйте сами догадаться, чем отличаются простые ломаные от всех других. Наверняка вы уже заметили, что все непростые ломаные имеют самопересечения, то есть некоторые их звенья пересекаются в точках, отличных от их вершин. Но это ещё не все. У простых ломаных из каждой вершины выходит не больше двух звеньев, а у непростых ломаных так бывает не всегда. Встречаются даже случаи, когда вершины непростой ломаной вообще нельзя последовательно пронумеровать, не повторяя какую-то вершину. Попробуйте отыскать такие ломаные на рисунке. Итак,

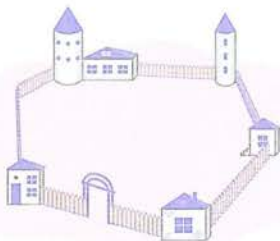


Ломаная называется **простой**, если из каждой её вершины выходит не более двух звеньев и все её звенья не имеют общих точек, отличных от вершин (рис. 7.9).

Многоугольник

В жизни все мы имеем дело с многоугольниками. Но что такое многоугольник? Из названия следует, что у него должно быть «много углов». Например, треугольник должен иметь три угла, четырехугольник — четыре, пятиугольник — пять углов и так далее. Но как расположены все эти углы и какую они образуют фигуру? На самом деле все очень просто: представьте себе, что вы хотите окружить участок земли забором. Вначале в углах вы укрепите опорные столбы, а потом уже между ними повесите перекладины (рис. 7.11, а). Полученный забор и будет многоугольником. Правда, в отличие от забора многоугольник состоит не из досок, а из отрезков, причём соседние его отрезки никогда не лежат на одной прямой (рис. 7.11, б).

а)



б)

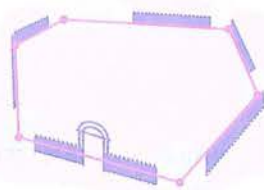
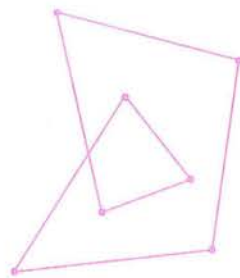
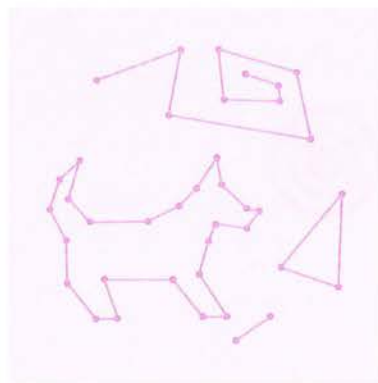


Рис. 7.11



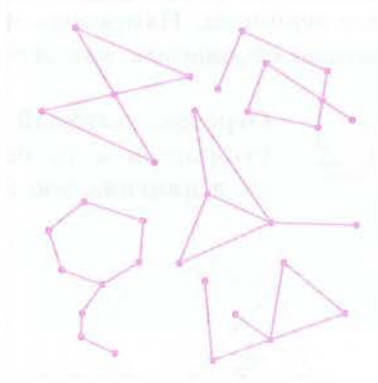
Замкнутая ломаная

Рис. 7.8



Простые ломаные

Рис. 7.9



Непростые ломаные

Рис. 7.10

Надо сказать, что соседние столбы заборов часто ставят по одной линии, но это связано лишь со сложностью изготовления слишком длинных секций забора. У многоугольника же соседние его стороны никогда не идут по одной прямой. А на геометрическом языке это определение будет звучать так:



Многоугольником называется простая замкнутая ломаная (рис. 7.12).

Вершины такой ломаной называют **вершинами** многоугольника, а звенья — его **сторонами**.

Многоугольник обозначают последовательной записью его вершин, причём начинать такую запись можно с любой из них.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Найдите многоугольники на рисунке 7.13.

Легко заметить, что количество сторон у многоугольника всегда равно количеству его вершин. Обозначать вершины многоугольника буквами нужно всегда по порядку — так, чтобы в полученной записи соседние буквы обязательно были концами одной стороны многоугольника. А вот начинать обозначать многоугольник можно с любой его вершины. Например, четырёхугольник на рисунке 7.14 можно обозначить как $ABCD$, $BCDA$, $DABC$ и так далее.



Отрезок, который соединяет две вершины многоугольника и не совпадает с его стороной, называется **диагональю** (рис. 7.15).

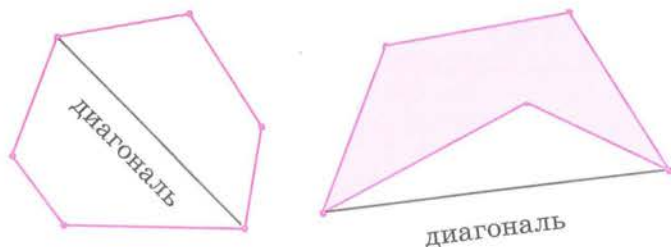


Рис. 7.15

Слово «диагональ» тоже пришло к нам из греческого языка, и означает оно «идущая через углы». Ведь по-гречески «диа-» значит «через», а «гония» — это угол. От этого угла, а вернее, от его корня «гон» появилось из-



Рис. 7.12

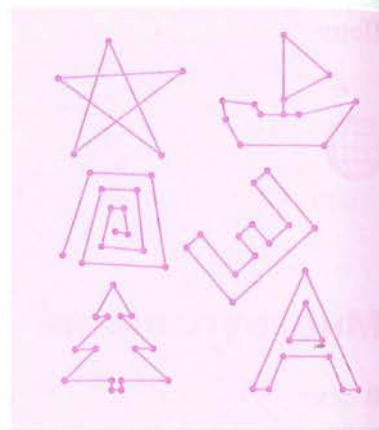


Рис. 7.13

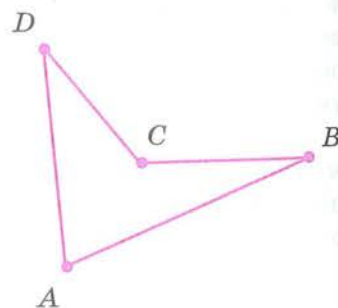


Рис. 7.14

вестное слово **тригонометрия**, потому что изначально тригонометрией называли науку об измерении треугольника. Ведь треугольник древние греки называли «тригон». Четырёхугольник у них назывался «тетрагон», а пятиугольник — «пентагон».

Многоугольники можно встретить и в живой природе. На рисунке 7.16 показан фрагмент крыла стрекозы под увеличением. Его стяжки образуют почти геометрические многоугольники. Здесь можно найти четырёхугольники, пятиугольники, шестиугольники и даже несколько семиугольников. Сколько вы нашли шестиугольников?



УПРАЖНЕНИЯ

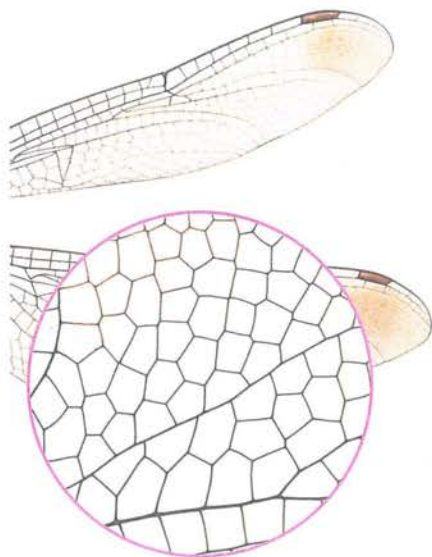


Рис. 7.16

- 2 На рисунке 7.17 изображен пятиугольник. Проведите все диагонали этого пятиугольника. Сколько всего у него получится диагоналей?
- 3 Соедините шесть точек на рисунке 7.18 так, чтобы образовался шестиугольник. Проведите все диагонали этого шестиугольника. Сколько всего получится диагоналей?
- 4 Соедините четыре точки на рисунке 7.19 разными ломаными так, чтобы получилось три различных четырёхугольника.
- 5 Нарисуйте пятиугольник, у которого все вершины лежат на двух пересекающихся прямых (рис. 7.20).
- 6 Нарисуйте многоугольник, две стороны которого лежат на данной прямой (рис. 7.21).
- 7 Нарисуйте многоугольник, две диагонали которого лежат на данной прямой (рис. 7.22).



Рис. 7.17



Рис. 7.18



Рис. 7.19

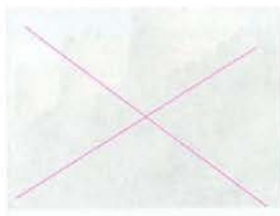


Рис. 7.20

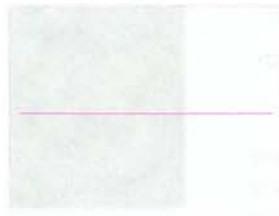


Рис. 7.21

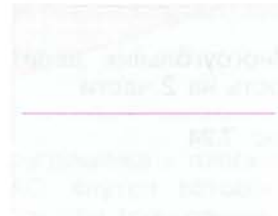


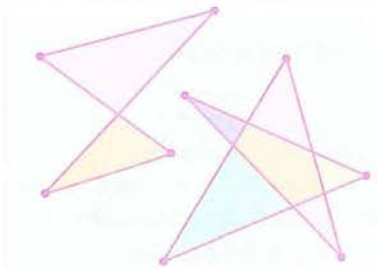
Рис. 7.22

Плоский многоугольник



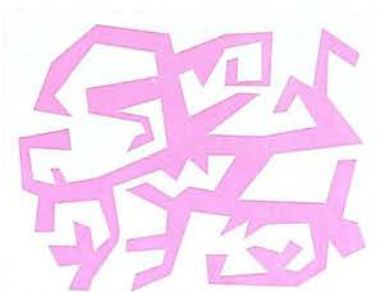
Рис. 7.23

а)



Самопересекающиеся ломаные делят плоскость больше чем на 2 части

б)



Многоугольник делит плоскость на 2 части

Рис. 7.24

Так же, как прямая линия или геометрический угол, многоугольник делит всю плоскость на две части. Это совершенно естественно: ведь если какой-то участок окружить забором, то эта часть земли должна находиться внутри забора, а всё остальное — снаружи. Тем не менее для многоугольников очень сложной формы это вовсе не так очевидно. На рисунке 7.23 показан один такой многоугольник, похожий на лабиринт, и чёрная точка. Сможете ли вы сразу сказать, где находится чёрная точка: внутри этого многоугольника или вне его? Подумайте: как это можно было бы определить?

В отличие от непростых замкнутых ломаных, многоугольник всегда делит плоскость ровно на две части (рис. 7.24, а, б). Однако это утверждение уже не аксиома — его можно доказать. Правда, доказательство это сложное и здесь мы его приводить не будем.

Одну из двух частей, на которые многоугольник делит всю плоскость, называют его **внутренней областью**, а другую часть — **внешней**. Но как отличить внутреннюю область от внешней? Вы можете сказать, что это глупый вопрос. Ведь внутренняя область — это та, которая находится у многоугольника внутри, а внешняя — это та, что лежит снаружи от него. Хорошо, но тогда попробуйте объяснить, что такое «внутри» или «снаружи»!

Например, если человек сидит в крепости, логично предположить, что он находится внутри этой крепости. Однако если тот же человек будет обладать абстрактным мышлением, он может предположить, что в данной крепости оказался весь остальной мир, а он как раз гуляет около её бастионов (рис. 7.25)!

И математики просто договорились считать внешней областью многоугольника ту из двух областей, которая содержит в себе хотя бы одну прямую линию, то есть ту, которая бесконечна (рис. 7.26). Ведь внутри многоугольника целиком поместить прямую линию никак не получится.



Рис. 7.25

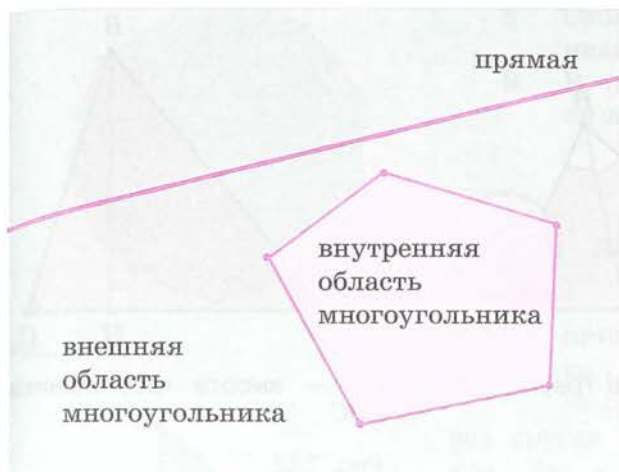


Рис. 7.26



Рис. 7.27

Если многоугольник нарисовать на бумаге, а потом вырезать его из этой бумаги ножницами, то получится многоугольник вместе с куском плоскости или с его внутренней областью (рис. 7.27). Такую фигуру называют **плоским многоугольником**. Итак,



Плоским многоугольником называется простая замкнутая ломаная вместе со своей внутренней областью.

Элементы треугольника

Треугольник является простейшим многоугольником. Изучение всех остальных многоугольников, да и вообще любых геометрических фигур в конце концов сводится к рассмотрению треугольников. Вы уже знаете, что треугольник образует простая замкнутая ломаная, которая состоит из трех звеньев. Поэтому треугольник имеет всего три вершины, три стороны и три угла. Все они называются элементами треугольника. Например, вершинами треугольника ABC будут точки A , B и C , которые не лежат на одной прямой, а его сторонами — отрезки AB , BC и AC (рис. 7.28). При каждой вершине треугольника образуется угол между двумя лучами, на которых лежат его стороны (рис. 7.29). Треугольник ABC имеет три таких плоских угла BAC , ABC и BCA , каждый из которых содержит в себе данный треугольник.

Кроме вершин, сторон и углов к элементам треугольника относят и некоторые отрезки, связанные с треугольником. Самые важные из них — это **медиана**, **биссектриса** и **высота** треугольника. Все их можно провести из каждой его вершины.

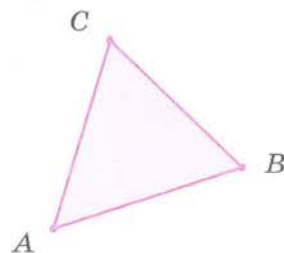
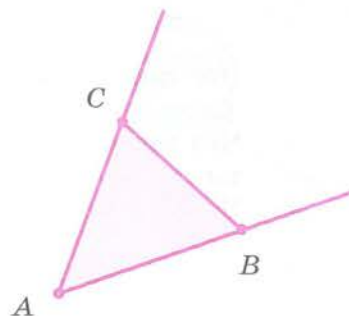
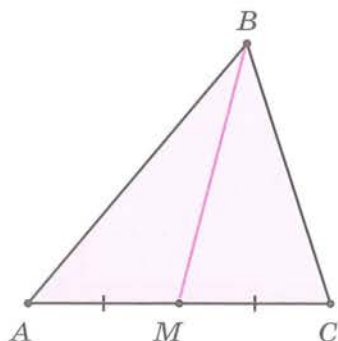


Рис. 7.28



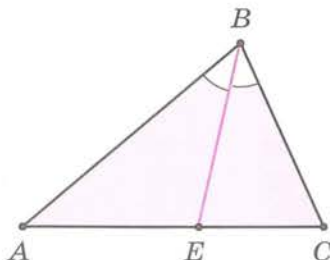
Угол треугольника — плоский угол BAC , внутри которого находится сам треугольник

Рис. 7.29



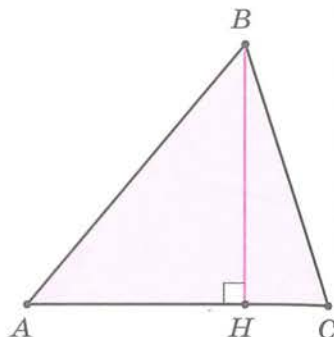
BM — медиана треугольника ABC

Рис. 7.30



BE — биссектриса треугольника ABC

Рис. 7.31



BH — высота треугольника ABC

Рис. 7.32



Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника и середину его противоположной стороны (рис. 7.30).

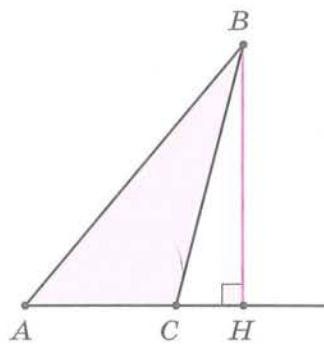


Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины этого угла до пересечения с противоположной стороной (рис. 7.31).



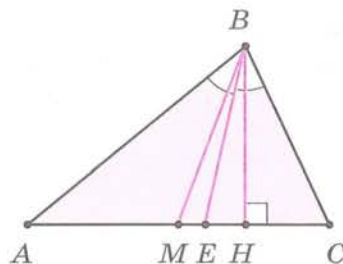
Высотой треугольника называется перпендикуляр¹, проведённый из его вершины к противоположной стороне или её продолжению (рис. 7.32).

Медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины произвольного треугольника, чаще всего не совпадают (рис. 7.34).



Высота BH падает на продолжение стороны

Рис. 7.33



Медиана, биссектриса и высота проведены из одной вершины треугольника

Рис. 7.34



ВОПРОСЫ

- 1 Что такое ломаная? Как называются её элементы?
- 2 Какие ломаные называют простыми?
- 3 Что такое многоугольник? Какие вы знаете элементы многоугольника?
- 4 Что называют медианой треугольника?
- 5 Что называется высотой треугольника?
- 6 На сколько частей делит плоскость многоугольник? Что такое плоский многоугольник?
- 7 Как определяют внутреннюю и внешнюю область многоугольника?

¹ Перпендикуляром из точки к прямой линии называют отрезок, соединяющий данную точку с точкой на этой прямой и образующий с ней угол 90° .



Рис. 7.35

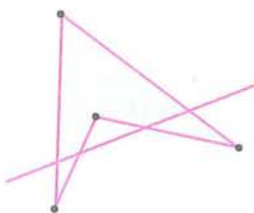


Рис. 7.36

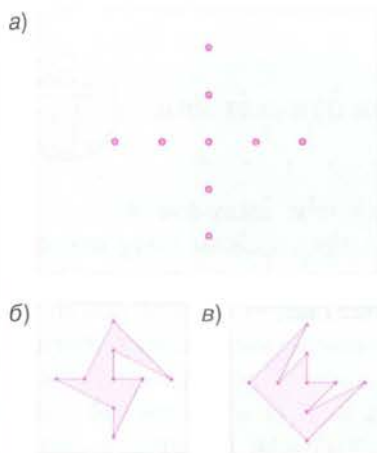


Рис. 7.37

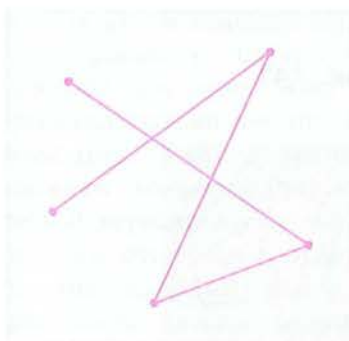


Рис. 7.38

- 8 Сколько всего в треугольнике можно провести медиан?
- 9 В каком случае высота треугольника падает на продолжение его стороны?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 7.1** Сколько всего диагоналей у двадцатиугольника (рис. 7.35)?

РЕШЕНИЕ: Из одной вершины двадцатиугольника во все другие его вершины можно провести ровно 19 отрезков. Два из них — стороны нашего двадцатиугольника. Значит, остальные отрезки — это его диагонали. То есть из каждой вершины двадцатиугольника выходит ровно 17 диагоналей. Если мы умножим 17 на 20, то получим в два раза больше диагоналей, чем есть у двадцатиугольника, так как каждую его диагональ мы будем считать два раза. Значит, настоящее число диагоналей двадцатиугольника равно $\frac{17 \cdot 20}{2} = 170$.

ОТВЕТ: 170.

☆☆☆ **ПРИМЕР 7.2** Прямая линия не проходит через вершины: а) четырёхугольника; б) пятиугольника. Может ли она пересекать все его стороны?

РЕШЕНИЕ: а) Может. Нужный пример показан на рисунке 7.36.

б) Не может. Если бы это было возможно, то концы каждой стороны пятиугольника находились бы в разных полуплоскостях относительно этой прямой, и тогда по разные стороны от неё было бы одинаковое число его вершин. А число 5 — нечётное. Противоречие.

☆☆☆ **ПРИМЕР 7.3** Соедините девять точек на рисунке 7.37, а отрезками так, чтобы получился многоугольник. Не забудьте, что соседние стороны многоугольников не должны лежать на одной прямой!

РЕШЕНИЕ: Примеры возможных многоугольников показаны на рисунках 7.37, б и 7.37, в.

☆☆☆ **ПРИМЕР 7.4** Сколько существует незамкнутых ломаных, которые соединяют пять красных точек на рисунке 7.38? Через каждую точку ломаная может проходить только один раз.

РЕШЕНИЕ: Поскольку через каждую красную точку ломаная по условию должна проходить только один раз, у всех таких ломаных должно быть ровно 5 вершин и 4 звена. Давайте попробуем нарисовать одну такую

ломаную (рис. 7.39). Первой её вершиной может быть любая из пяти данных нам точек, то есть её можно выбрать пятью способами. Обозначим первую вершину буквой A_1 . Первое звено ломаной, выходящее из этой вершины, можно провести четырьмя способами. Обозначим его A_1A_2 . Второе её звено, выходящее из точки A_2 , можно провести уже тремя способами, поскольку точки A_1 и A_2 мы уже использовали. Обозначим его как A_2A_3 . Для выбора третьего звена A_3A_4 остается всего два способа, а четвёртое звено A_4A_5 придётся провести однозначно. Значит, всего для таких ломаных мы получим $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ вариантов. При этом ломаные $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_5A_4A_3A_2A_1$ мы считали разными, а по нашему определению это одна и та же фигура. То есть настоящее число ломаных должно быть в два раза меньше, поэтому оно равно 60.

ОТВЕТ: 60 ломаных.

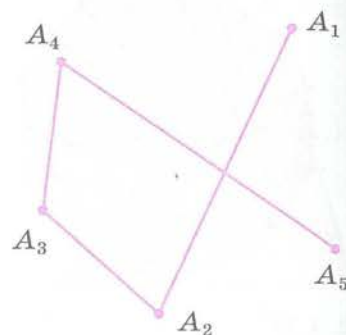


Рис. 7.39



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 7.1 ☆☆☆ У простой ломаной 10 вершин. Сколько у неё может быть звеньев?
- 7.2 ☆☆☆ Какие цифры индекса (рис. 7.40) являются простыми ломаными?
- 7.3 ☆☆☆ Нарисуйте замкнутую ломаную из шести звеньев, которая каждое своё звено пересекает ровно один раз.
- 7.4 ☆☆☆ Нарисуйте замкнутую ломаную из семи звеньев, которая каждое своё звено пересекает ровно два раза.
- 7.5 ☆☆☆ Соедините 16 точек на рисунке 7.41 отрезками так, чтобы получился многоугольник (не забудьте, что у многоугольника соседние стороны не лежат на одной прямой!).
- 7.6 ☆☆☆ Соедините 13 точек на рисунке 7.42 отрезками так, чтобы получился многоугольник.



Рис. 7.40



Рис. 7.41



Рис. 7.42

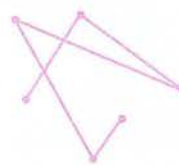


Рис. 7.43

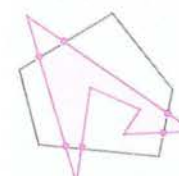


Рис. 7.44

7.7 ☆☆☆ Могут ли четыре данные точки на плоскости быть вершинами разных четырёхугольников?

7.8 ☆☆☆ Разрежьте квадрат на два пятиугольника, периметры которых равны.

7.9 ☆☆☆ Нарисуйте десятиугольник, все стороны которого лежат на пяти прямых.

7.10 ☆☆☆ Нарисуйте двенадцатиугольник, все стороны которого лежат на шести прямых.

7.11 ☆☆☆ У многоугольника всего 20 диагоналей. Сколько у него сторон?

7.12 ☆☆☆ Число диагоналей многоугольника в 4 раза больше числа его сторон. Сколько у него вершин?

7.13 ☆☆☆ а) Сколько всего существует незамкнутых ломаных, соединяющих данные 6 точек на рисунке 7.43? б) Сколько всего существует таких замкнутых ломаных?

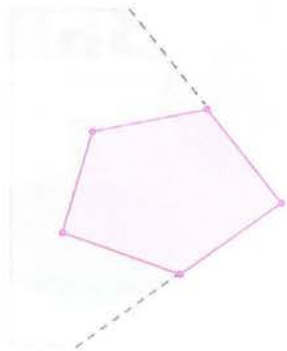


Рис. 7.45

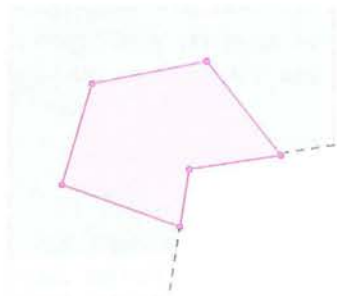


Рис. 7.46



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

А всё-таки что такое угол многоугольника? Ясно, что это угол между двумя его сторонами при одной вершине. Но, как вы помните, любые два луча, которые выходят из одной точки, образуют два плоских угла. Какой из них считать углом многоугольника при этой вершине? При всей своей очевидности, вопрос этот не так уж прост. Разумно было бы выбрать тот из двух плоских углов при этой вершине, в котором находится сам многоугольник. Для многоугольников, показанных на рисунках 7.45 и 7.46, это именно так. Но на рисунке 7.47 показан многоугольник, который полностью не содержится ни в одном из двух плоских углов при его вершине. Как же тогда поступить?

Давайте нарисуем маленький круг с центром в данной вершине многоугольника — такой, чтобы он пересекал только две его стороны, выходящие из этой вершины (рис. 7.48). В математике такой маленький кружок называют «окрестностью» данной точки. В «окрестности» нужной вершины уже легко понять, какой из углов между данными сторонами будет углом нашего многоугольника. Это тот плоский угол, часть которого внутри малой окрестности данной вершины попадает во внутреннюю область многоугольника.

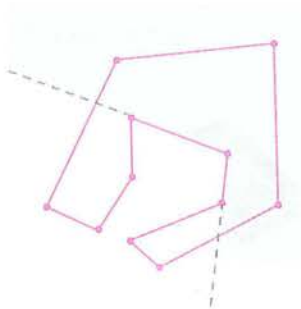


Рис. 7.47

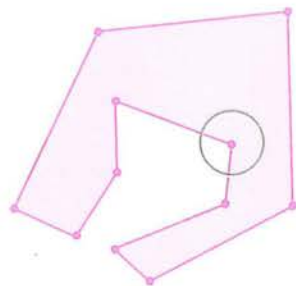


Рис. 7.48

§8 Выпуклые фигуры

Вы уже знаете, что такое ломаная и плоский многоугольник. Но существуют и другие фигуры, у которых вообще нет сторон или углов, такие как круг или овал. Помните, что любая геометрическая фигура состоит из точек? Это значит, что отрезок и прямая, плоский угол или даже одна точка тоже являются фигурами.

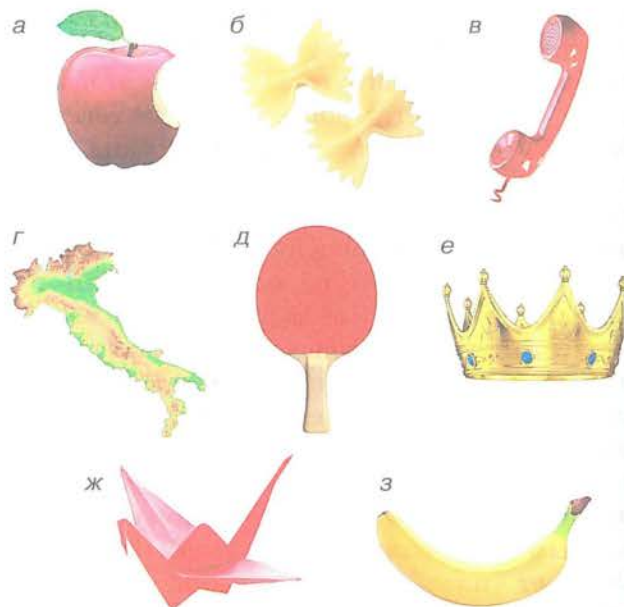
В этом параграфе мы будем говорить о форме всевозможных геометрических фигур и научимся разделять их на два типа: выпуклые и невыпуклые. Во многих случаях сделать это нам помогает интуиция. Мы же с вами строго определим вначале плоский выпуклый многоугольник, а уже потом дадим общее определение произвольной выпуклой фигуры.

На рисунке 8.1 показаны различные объекты окружающего нас мира. Попробуйте догадаться, что есть общего у фигур слева и что отличает их от фигур справа. Постарайтесь не обращать внимание на цвет или материал, из которого созданы эти объекты.



Фигуры слева

Рис. 8.1



Фигуры справа



ВОПРОСЫ

- 1 Изобразите в своей тетради каждый объект в виде плоской геометрической фигуры. Чем теперь будут отличаться фигуры слева от фигур справа?
- 2 Опираясь на здравый смысл и свою фантазию, попробуйте сказать, какие из нарисованных вами плоских фигур можно назвать **выпуклыми**.

Слово **выпуклый** происходит от глагола «пучить» или «выпучить» в значении «вздувать, надуть». В обычной жизни мы можем сказать «выпуклая ваза» (рис. 8.2) или «выпуклое зеркало» (рис. 8.3). Даже «пучина морская» тоже происходит от него. Мы используем слово «выпуклый», когда говорим о форме, которая кажется нам шарообразной, «выпирающей во все стороны», а также для описания деталей некоторых предметов, которые «выступают наружу» с их поверхности. Таковы, например, классический барельеф (рис. 8.4) или азбука для слепых (рис. 8.5). А в переносном смысле слово «выпуклый» используют в выражении «выпуклый образ», когда что-нибудь яркое и выразительное остаётся в нашем сознании после чтения интересной книги, стихотворения или просмотра запоминающегося фильма.

Часто говорят, что предмет выпуклый, если у него нет никаких вмятин или вогнутостей. Конечно, если начать разглядывать любой предмет под микроскопом, на его поверхности всегда можно обнаружить какие-то царапины и неровности. Каждому известно, что на Земле есть горы и моря, впадины и возвышенности. Но из космоса нашу планету можно считать просто шаром (рис. 8.6). С научной точки зрения такие различия не имеют значения. Ведь мы говорим о выпуклой форме предмета тогда, когда рассматриваем упрощённую модель реального тела. Именно с такими моделями обычно имеет дело любая наука.



Рис. 8.2



Выпуклое зеркало

Рис. 8.3



Барельеф

Рис. 8.4



Азбука Брайля для слепых

Рис. 8.5



Рис. 8.6

Выпуклый многоугольник

Мы начнем с плоских многоугольных фигур — уже знакомых вам многоугольников. В отличие от круга или овала, формы многоугольников проще изучать и определять. Давайте нарисуем несколько различных плоских многоугольников (рис. 8.7). Не будем принимать во внимание количество их сторон или вершин. Можете вы сказать, чем по своей форме одни из этих многоугольников отличаются от других? Наверняка вы заметили, что некоторые из них имеют «вогнутые» углы с величиной больше 180° . Эти же многоугольники имеют и «внешние» диагонали, которые «выходят» из внутренней области самого многоугольника и не содержатся в нём полностью. Наличие таких «вогнутых» углов и «внешних» диагоналей характерно для невыпуклых многоугольников (рис. 8.8).

Наоборот, все другие многоугольники на рис. 8.8 имеют углы меньше 180° и целиком содержат все свои диагонали (проверьте!). Именно это является свойством выпуклых многоугольников.

Давайте пока запишем наше наблюдение как:



Свойство выпуклых плоских многоугольников

Все углы выпуклого плоского многоугольника меньше 180° , и все его диагонали целиком находятся в этом многоугольнике.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Найдите все выпуклые плоские многоугольники на рисунке 8.7.
- 2 Нарисуйте пятиугольник, у которого три диагонали проходят снаружи. Будет ли такой пятиугольник выпуклым?
- 3 Приведите пример семиугольника, который не содержит целиком 5 своих диагоналей.

Давайте мысленно изготовим камень в виде многоугольника, все углы которого меньше 180° . А теперь столкнём этот камень с вершины «горы» по прямому склону (рис. 8.9). Камень покатится вниз и будет

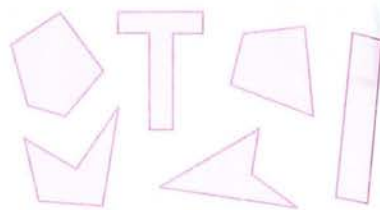
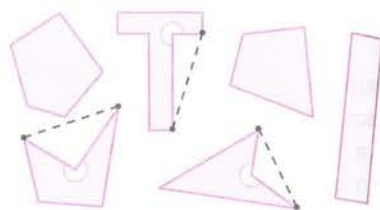


Рис. 8.7



«Вогнутые» углы и «внешние» диагонали невыпуклых многоугольников

Рис. 8.8

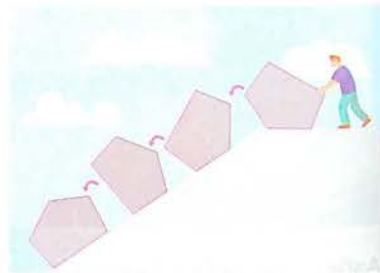


Рис. 8.9

ложиться на склон по очереди всеми своими сторонами. При этом он «ударится» о гору каждым своим углом. Если же у камня хотя бы один угол будет больше 180° , то он не сможет им коснуться склона горы и лечь на него каждой своей стороной (рис. 8.10). Скажем так: одни плоские многоугольники можно «прокатить» по прямой линии каждой своей стороной, а другие нет. Или же другими словами: многоугольники одного вида всегда можно «положить» на прямую любой их стороной, а многоугольники другого вида — не всегда. Как раз это и отличает выпуклые многоугольники от невыпуклых. Теперь мы с вами можем записать это как определение:



Многоугольник называют **выпуклым**, если он целиком лежит в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через любую его сторону.

Из такого определения сразу же следует, что многоугольник с «вогнутым» углом, который больше 180° , будет невыпуклым (рис. 8.11). Ведь он не может лежать в одной полуплоскости относительно прямой, по которой проходит сторона этого угла, — такой его угол просто нельзя поместить в одну полуплоскость!

Да и сам этот угол, если он больше развёрнутого, будет невыпуклой фигурой: положить его на «склон горы» невозможно ни одной стороной. По той же причине и многоугольник с таким углом должен иметь хотя бы одну «внешнюю» диагональ. Она будет соединять концы двух его сторон, которые выходят из вершины этого невыпуклого угла (рис. 8.12).



УПРАЖНЕНИЯ

- 4 Объясните, что плоский прямоугольник должен быть выпуклой фигурой.
- 5 Как вы объясните, что треугольник может быть только выпуклым?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 8.1** Разрежьте пятиконечную звезду на пять выпуклых фигур.

РЕШЕНИЕ: Мы приведём два способа. Первым способом (рис. 8.13) звезда разрезается на пять выпуклых



Рис. 8.10

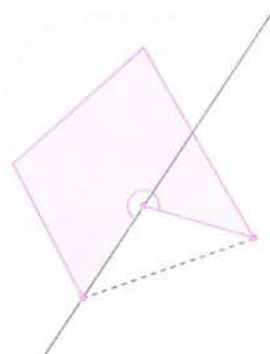


Рис. 8.11



Невыпуклый угол

Рис. 8.12



Рис. 8.13

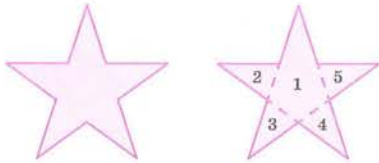


Рис. 8.14

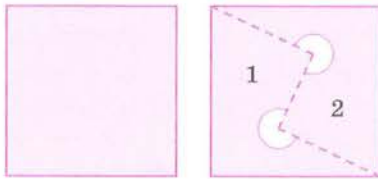


Рис. 8.15

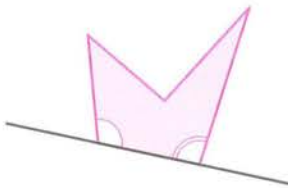


Рис. 8.16

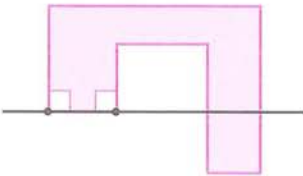


Рис. 8.17



Рис. 8.18



Рис. 8.19



Рис. 8.20

четырёхугольников. Вторым — на один четырёхугольник и четыре треугольника (рис. 8.14).

☆☆☆ **ПРИМЕР 8.2** Разрежьте квадрат на два невыпуклых пятиугольника (рис. 8.15).

РЕШЕНИЕ: Проведём ломаный разрез в виде «зигзага» от левой верхней вершины квадрата до правой нижней, как показано на схеме справа. Две части, на которые окажется разрезан квадрат, будут невыпуклыми пятиугольниками, поскольку у каждого из них есть невыпуклый угол.

☆☆☆ **ПРИМЕР 8.3** К стороне плоского многоугольника прилегают два его угла, каждый из которых меньше 180° (рис. 8.16). Верно ли, что этот плоский многоугольник можно «положить на прямую» данной стороной? То есть обязательно ли данный плоский многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через данную его сторону?

РЕШЕНИЕ: Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно либо доказать, что в любом случае многоугольник будет лежать в одной полуплоскости относительно данной прямой либо привести опровергающий это контрпример. Мы приведём контрпример — он показан на рисунке 8.17. Значит, данное утверждение неверно.

Контрпримером в математике называют частный случай общего утверждения, для которого оно не является верным. То есть контрпример всегда опровергает общее утверждение. Возьмём хотя бы такое утверждение: нет такого слова в русском языке, в котором было бы пять согласных звуков подряд. Это утверждение не является верным. Приведите для него контрпример.



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 8.1 ☆☆☆ Разрежьте треугольник на три выпуклых четырёхугольника (рис. 8.18).
- 8.2 ☆☆☆ Разрежьте квадрат на два невыпуклых шестиугольника (рис. 8.19).
- 8.3 ☆☆☆ Разрежьте пятиконечную звезду на четыре выпуклых многоугольника (рис. 8.20).
- 8.4 ☆☆☆ Разрежьте квадрат на выпуклые пятиугольники (рис. 8.19).

Выпуклая фигура

Давайте теперь поговорим о произвольных геометрических фигурах. Вы уже умеете отличать выпуклые многоугольники от невыпуклых. А как отличить выпуклую фигуру от невыпуклой, если у неё нет прямых сторон или вообще нет углов? Рассмотрим некоторые плоские геометрические фигуры, которые не являются многоугольниками. Какие из них вам кажутся выпуклыми и почему (рис. 8.21)?

Для того чтобы дать общее понятие выпуклой фигуры, давайте вспомним, каким свойством обладали диагонали плоских выпуклых многоугольников: они целиком принадлежали этим многоугольникам. Оказывается, данное свойство верно не только для диагоналей, но и вообще для всех отрезков, которые соединяют любые точки такого многоугольника. Помните, что выпуклый многоугольник целиком лежит в одной полуплоскости относительно каждой своей стороны? Значит, в той же полуплоскости лежат и все его точки. Тогда любой отрезок AB , соединяющий эти точки, не пересечёт данную сторону многоугольника. Но точно так же он не пересечёт и любую другую его сторону. Значит, отрезок AB не сможет выйти за пределы самого многоугольника ни одной своей точкой. Ведь иначе он пересекал бы одну из его сторон. А этого не может быть. Поэтому любой такой отрезок целиком принадлежит ему (рис. 8.22).

Конечно, не у каждой фигуры вообще есть стороны, углы или диагонали. Но вместо них по аналогии с выпуклым многоугольником давайте рассматривать отрезки, которые соединяют две любые точки данной фигуры. Если какой-нибудь из таких отрезков даже частично окажется вне фигуры, то это будет означать, что у фигуры есть «вогнутость» и что она невыпуклая. Если же все такие отрезки будут принадлежать самой фигуре, то фигура будет выпуклой. Сформулируем это в виде общего определения.



Плоская фигура называется выпуклой, если любой отрезок, соединяющий две её точки, полностью лежит внутри фигуры.

С помощью такого определения очень удобно объяснять, почему данная фигура невыпуклая. Для этого достаточно найти хотя бы один отрезок, соединяющий две её точки, который выходит за границы самой фигуры.

А вот для доказательства того, что фигура выпукла, обычно приходится проводить более сложные рассуждения. Ведь по общему определению для такого доказательства нужно перебрать все отрезки, соединяющие точки данной фигуры. А это невозможно. На самом деле даже очевидная выпуклость круга требует отдельного внимания. К этому вопросу мы вернемся в § 20.

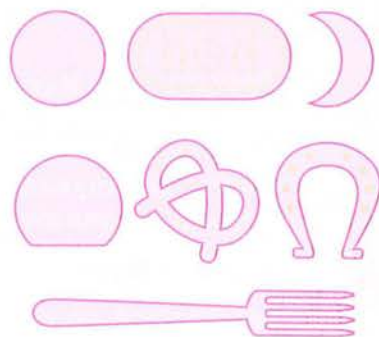


Рис. 8.21

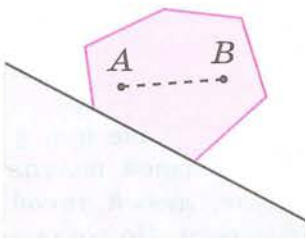
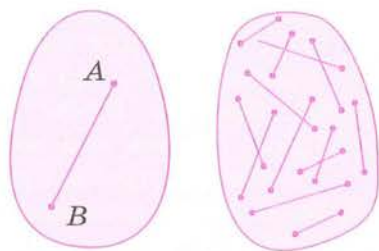
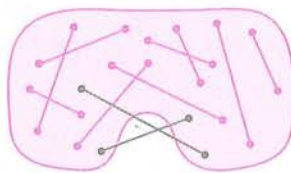


Рис. 8.22



Выпуклая фигура



Невыпуклая фигура

Рис. 8.23



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 8.4** Какие из фигур на рисунке 8.24 а, б, в являются выпуклыми, а какие невыпуклыми и почему?

РЕШЕНИЕ: а) Первая фигура, напоминающая по форме грушу, невыпуклая, поскольку можно провести отрезок, который соединяет две её точки, но целиком не проходит внутри неё (рис. 8.24, г).

б) Вторая фигура в форме английского ключа является невыпуклой по той же причине (рис. 8.24, д).

в) Третья фигура является выпуклой, поскольку это многоугольник, у которого все плоские углы меньше 180° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 8.5** Докажите, что полуплоскость является выпуклой фигурой.

РЕШЕНИЕ: Докажем, что любой отрезок, который соединяет две точки в одной полуплоскости, целиком лежит в ней (рис. 8.25).

По аксиоме (см. § 6) любой отрезок, соединяющий две точки в одной полуплоскости, не пересекает её границы. Значит, любой такой отрезок целиком лежит в этой полуплоскости. Но тогда полуплоскость является выпуклой фигурой по определению.



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Интересно, что общее определение выпуклой фигуры годится не только для выпуклых многоугольников или других плоских фигур, но и для линейных фигур, которые не имеют площади. Какие это фигуры? Например, это луч и прямая, отрезок или ломаная.

Любой отрезок будет выпуклой фигурой по определению. В самом деле, если на отрезке AB взять любые две точки M и N , то отрезок MN будет целиком принадлежать отрезку AB (рис. 8.26). А вот ломаная, напротив, будет невыпуклой. Легко видеть на рисунке, что достаточно взять пару точек на соседних её звеньях и соединяющий эти точки отрезок не будет принадлежать самой ломаной (рис. 8.27).

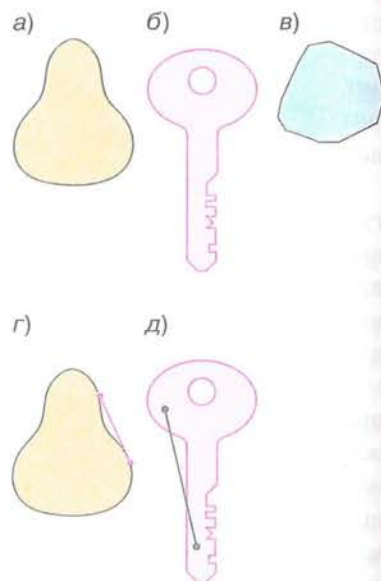


Рис. 8.24

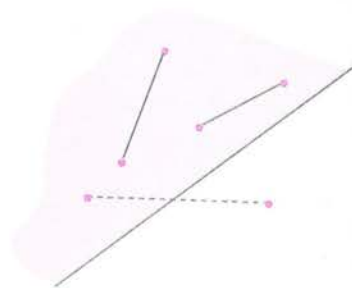


Рис. 8.25



Рис. 8.26



Рис. 8.27

3

Равенство фигур

- §9 Равные фигуры
- §10 Признаки равенства
треугольников
- §11 Симметрия и равнобедренный
треугольник
- §12 Третий признак равенства
треугольников



§9 Равные фигуры

Одинаковые фигуры вокруг нас

Люди уже давно научились создавать одинаковые вещи и предметы. Например, очень трудно отличить друг от друга две монеты одного достоинства и года чеканки, книги из одного тиража или автомобили одной серии выпуска. Даже костюмы, сшитые по одной мерке, или обыкновенные стулья могут отличаться по цвету, но быть одинаковыми по форме и размерам.

В природе такое встречается нечасто. Например, в горах трудно найти два абсолютно одинаковых камня, а любые два дерева в лесу всегда отличаются расположением своих веток. И всё-таки даже в природе мы видим иногда практически одинаковые вещи. Одинаковы лепестки на цветке ромашки, совершенно неотличимы друг от друга два крыла бабочки. У одинаковых фигур совпадают и форма, и размеры. Если совпадает что-то одно, фигуры могут оказаться различными. Кафельный пол на рисунке 9.5 выложен квадратными плитками. Но ведь одинаковыми все эти плитки назвать нельзя, поскольку стороны у них разные.

Или другой пример: размеры телевизора или монитора компьютера часто определяют длиной его диагонали. Однако экраны двух мониторов с одинаковой длиной диагонали часто имеют разную форму (рис. 9.6). То же можно сказать и об обуви. Каждый носит ботинки определённого размера, но ведь их модели могут сильно отличаться, в том числе по форме колодки и своему внешнему виду.



Рис. 9.1

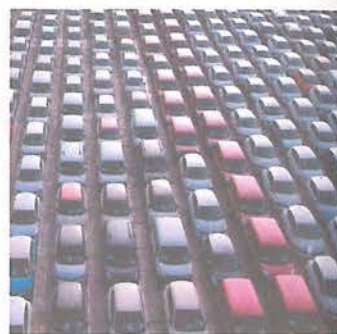


Рис. 9.2

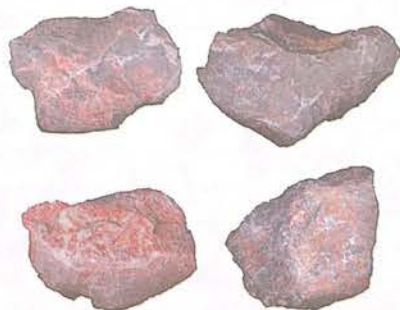


Рис. 9.3



Рис. 9.4



Рис. 9.5

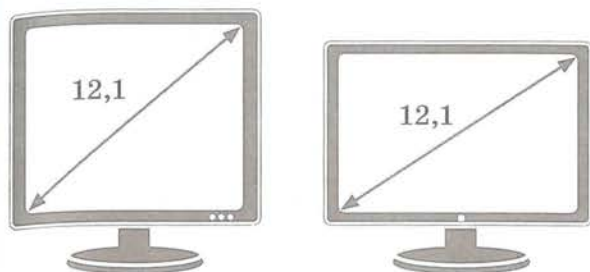


Рис. 9.6

Как вы знаете, размеры земельных участков определяют по их площади. Но участки равной площади также могут иметь разную форму (рис. 9.7). Необходимость создавать одинаковые по форме и размерам вещи возникает повсеместно. Конечно, на практике это может достигаться с некоторой точностью. Два предмета одежды могут немного отличаться, даже если они сшиты по одной выкройке. А вот шестерёнки часов нужно делать гораздо точнее, иначе сложный механизм не будет работать (рис. 9.8). Стоит ли говорить о телескопах и космических спутниках!

Знание геометрии помогает человеку создавать одинаковые предметы, детали для точных механизмов, делать копии различных вещей. Иногда копию удаётся сделать механическим способом — так на заводе с помощью прессы штампуют одинаковые детали, раньше так печатали книги, да и сейчас ставят одинаковые печати на документы (рис. 9.10). Точную копию предмета может дать и плоское зеркало: не случайно все мы его используем, чтобы видеть там своё отражение (рис. 9.9). Но многие вещи невозможно повторить механически. Невозможно сделать отпечаток футбольного поля или без расчётов построить ровно такое же здание школы. Человеку бывает необходимо сначала изготовить предмет определённой формы и размера, а уже потом повторять его. А для этого ему нужно уметь строить фигуры, которые бы совпадали по форме и размерам. В геометрии их называют равными. Понятие равенства фигур очень важно для понимания всего курса геометрии Евклида. Можно даже сказать, без него не было бы и самой геометрии!



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Какие вы можете назвать одинаковые по форме и размеру предметы на кухне своего дома? Назовите равные друг другу детали автомобиля. Есть ли равные предметы в вашем школьном кабинете? Какие это предметы?

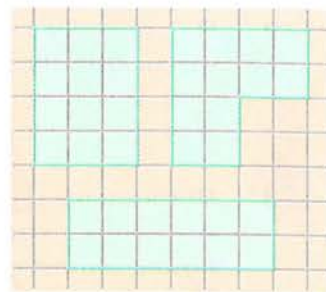


Рис. 9.7



Рис. 9.8



Рис. 9.9



Рис. 9.10

- 2 На рисунке 9.11 изображено несколько фигур. Среди них имеются пары фигур, равных между собой. Найдите все такие пары. Сколько таких пар? Для каких фигур не найдётся пары?
- 3 Представим себе, что мы хотим закрыть дырки в паркете, которые показаны на рисунке 9.12, а. Какие заплатки для этого подойдут (рис. 9.12, б)? Каждая заплатка на рисунке отмечена цифрой, а дырка — буквой.
- Напишите для каждой буквы, какая ей соответствует цифра.
 - Для какой дырки потребуется сразу две заплатки из данного набора? Перерисуйте её в тетрадь и покажите, как положить эти две заплатки.
 - Может быть, вы заметили, что при укладывании некоторых заплат в нужные дырки вам пришлось их перевернуть «другой стороной»? Какие это заплатки?
- 4 На рисунке 9.13 изображён треугольник.
- Нарисуйте равный ему треугольник так, чтобы отрезок 1 был одной из сторон этого треугольника.
 - Нарисуйте ещё один такой же треугольник так, чтобы отрезок 2 был одной из сторон этого треугольника.

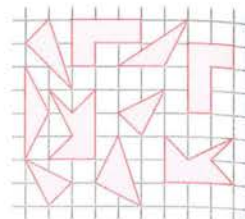


Рис. 9.11

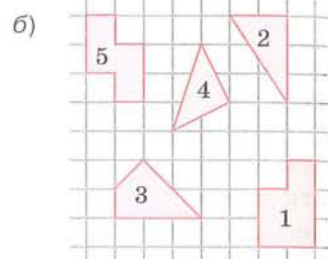
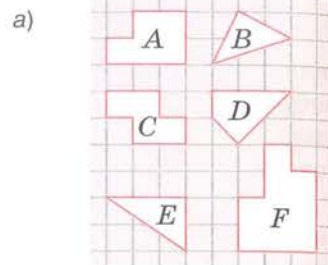


Рис. 9.12

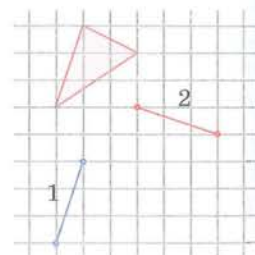


Рис. 9.13

Понятие равенства геометрических фигур

Итак, две фигуры считают равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали. Добиться такого совпадения не просто: для этого, возможно, одну из фигур придётся повернуть или даже перевернуть «другой стороной» (рис. 9.14). На плоскости такой «переворот» совершает зеркальная симметрия (рис. 9.15).

Посмотрите, как треугольник A совмещается с треугольником B на рисунке 9.16. Вначале мы сдвигаем треугольник A , как будто он вырезан из картона, по плоскости стола, совмещаем одну его вершину с нужной вершиной треугольника B , потом поворачиваем треугольник A вокруг этой вершины и уже тогда добиваемся полного совпадения с треугольником B .

На рисунке 9.17 показано как совмещаются треугольники C и D . Вначале мы зеркально отражаем треугольник C — переворачиваем его «другой стороной». Потом сдвигаем «перевернутый» треугольник C_1 так, чтобы совместить его вершину с нужной вершиной треугольника D . Наконец, поворачиваем треугольник C_1 вокруг этой вер-

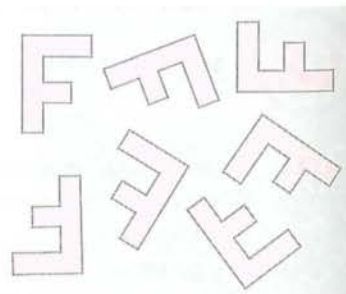


Рис. 9.14

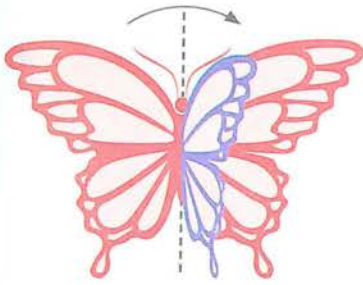


Рис. 9.15

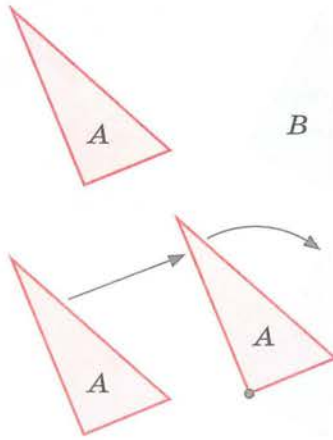


Рис. 9.16

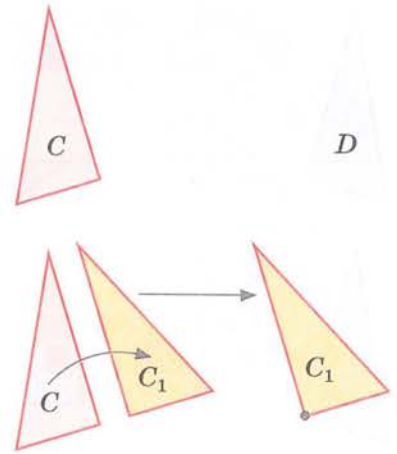


Рис. 9.17

шины и добиваемся полного совпадения его с треугольником D . Получается, что две фигуры на плоскости равны тогда, когда одну из них можно с помощью различных движений наложить на другую фигуру так, чтобы они полностью совпали. Итак:

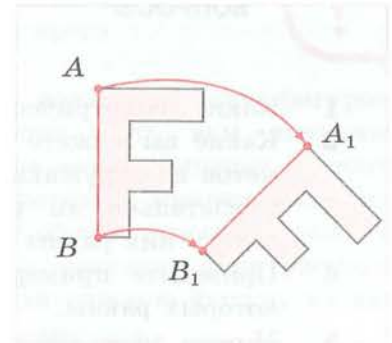


Геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить друг с другом так, чтобы они совпали каждой своей точкой.

Понятно, что если фигуру перемещают как единое целое, то размеры фигуры и взаимное расположение её частей остаются теми же. При движении у фигуры не могут измениться длины сторон, величины углов, не меняются расстояния между любыми её вершинами. Если мы с помощью движения полностью совместим две фигуры, то совместятся друг с другом все их соответствующие стороны, углы, и вообще каждая точка одной фигуры совпадёт с некоторой точкой другой фигуры.

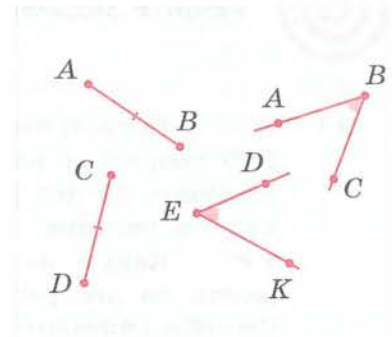
Представим себе, что мы совместили две равные фигуры. Те их точки, которые при этом будут совпадать, мы будем называть **соответственными** (рис. 9.18). Соответственные вершины многоугольников часто обозначают одной буквой, но с разными индексами. Например, A_1 и A_2 , B_1 и B_2 . Понятно, что расстояния между всеми парами соответственных точек в равных фигурах тоже будут равны, например $A_1B_1 = A_2B_2$.

Каждому понятно, что равные отрезки должны быть одинаковой длины. Но верно ли, что одинаковые по длине отрезки можно совместить друг с другом? В геометрии принимают без доказательства, что это так. То есть равные по длине отрезки равны и как геометрические фигуры. Аналогично считают равными два угла с одинаковой градусной мерой (рис. 9.19).



Расстояния между соответственными точками равных фигур равны

Рис. 9.18



Отрезки AB и CD равны, углы ABC и DEK равны

Рис. 9.19

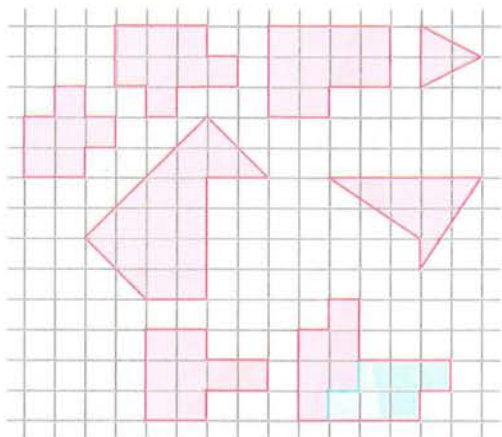


Рис. 9.20



ВОПРОСЫ

- 1 Какие геометрические фигуры называют равными?
- 2 Какие вы можете привести примеры равных предметов из окружающего мира?
- 3 Обязательно ли равны ли два прямоугольника, если у них равны диагонали?
- 4 Приведите пример двух разных фигур, площади которых равны.
- 5 Можно ли из двух равных фигур сложить различные фигуры?
- 6 От двух равных фигур отрезали по равной фигуре. Верно ли, что оставшиеся фигуры будут обязательно равны?
- 7 Равны ли две любые прямые или два луча как геометрические фигуры?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 9.1 ★☆☆ Посмотрите, как одну из фигур на рисунке 9.20 разрезали на две равные части. Попробуйте разрезать на две равные части остальные фигуры на этом рисунке.
- ★☆☆ Какую из этих фигур вы могли бы разрезать на две равные части разными способами? Способы считаются разными, если части, полученные от разных способов, не равны друг другу.
- 9.2 ★☆☆ На рисунке 9.21, а показаны три геометрические фигуры. Дорисуйте контуры на рисунке

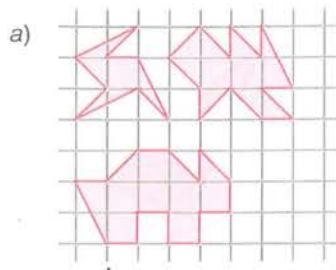


Рис. 9.21

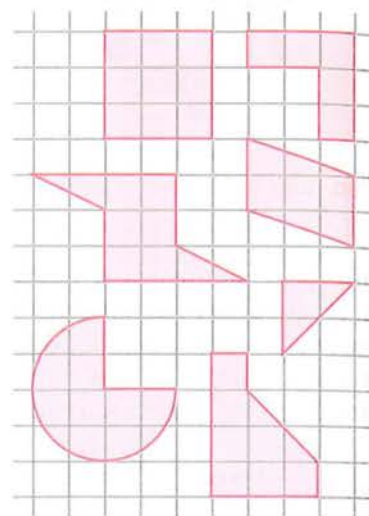
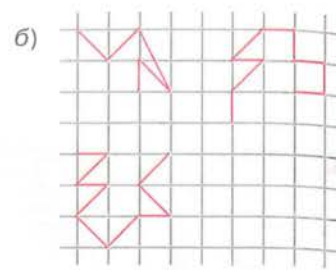


Рис. 9.22

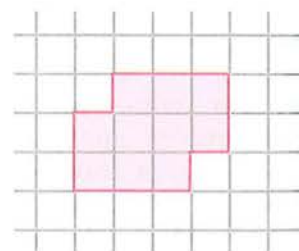


Рис. 9.23

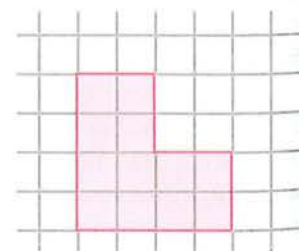


Рис. 9.24

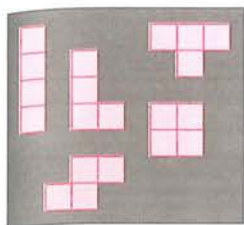


Рис. 9.25

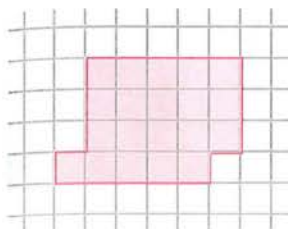


Рис. 9.26

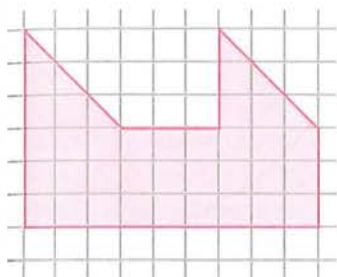


Рис. 9.27

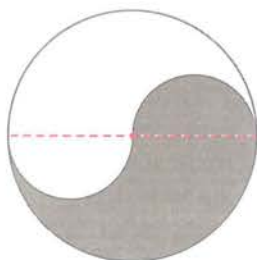


Рис. 9.28



Рис. 9.29

9.21, б так, чтобы на нём получились точно такие же фигуры.

- 9.3 ★☆☆ Каждую из фигур, изображённых на рисунке 9.22, разрежьте на две равные части.

★☆☆ Какие из данных фигур можно разрезать на две равные части двумя разными способами? Перерисуйте найденные фигуры в свою тетрадь и покажите эти способы.

- 9.4 ★☆☆ На рисунке 9.23 изображён восьмиугольник. Разрежьте его на два равных
а) шестиугольника; б) пятиугольника; в) десятиугольника.

- 9.5 ★☆☆ Разрежьте показанный на рисунке 9.24 шестиугольник на две равные части;
★☆☆ на четыре равные части.

- 9.6 ★☆☆ На рисунке 9.25 показаны пять фигурок тетрамино, которые могут быть вам знакомы по игре «Тетрис». Каждая такая фигурка состоит из четырёх равных квадратов, причем соседние квадратики всегда имеют общую сторону. Сложите из фигур тетрамино поле, показанное на рисунке 9.26. При заполнении поля каждую фигуру из набора используйте только один раз.

- 9.7 ★☆☆ Можно ли сделать по указанному правилу ещё одну фигурку из четырёх равных квадратов так, чтобы она не была равна ни одной из фигурок набора?

- 9.8 ★☆☆ Разрежьте фигуру, показанную на рисунке 9.27, на две равные части.

- 9.9 ★☆☆ Символ китайской философии Инь-Ян состоит из двух равных фигур (чёрной и белой), которые вместе составляют один круг. Общая их граница образована двумя полуокружностями, центры которых находятся на диаметре круга (рис. 9.28). Разрежьте белую часть Инь-Ян на две равные фигуры. Как одну из них можно их совместить с другой?

- 9.10 ★☆☆ Фигура на рисунке 9.29 состоит из четырёх равных отрезков и дуги окружности. Углы между ее соседними отрезками равны 90° . Разрежьте данную фигуру на две равные части. Как одну из них можно совместить с другой?



Мы с вами определили равные геометрические фигуры как те, которые можно полностью совместить друг с другом. Причём все пары точек, которые совпадут при этом совмещении, мы назвали соответственными. Но что означает само понятие совмещение, как его понимать?

Если какая-то фигура движется как твёрдый предмет и сохраняет свою форму, то расстояния между любыми её точками не меняются. Напротив, мягкий кусок пластилина легко изменяет форму: сделанный из него куб можно скатать в шарик, из комка глины можно даже вылепить вазу (рис. 9.30). Значит, и расстояния между точками такого предмета, сделанного из мягкого материала, можно изменять. С твёрдым предметом такого сделать нельзя. При движении любой фигуры каждая её точка движется вместе с фигурой и тоже меняет своё положение на плоскости. Пусть фигура, как твёрдый предмет, из одного места плоскости была перемещена в другое. Математики говорят, что тогда каждой точке A_1 первой фигуры будет соответствовать точка A_2 второй фигуры, точке B_1 — точка B_2 и т. д. (рис. 9.31). Если при этом расстояние между точками A_1 и B_1 первой фигуры всегда будет равно расстоянию между точками A_2 и B_2 второй фигуры, то такое соответствие между точками двух фигур называют **изометрией**¹, а способ совмещения этих фигур — **движением**. Таким образом:



Рис. 9.30

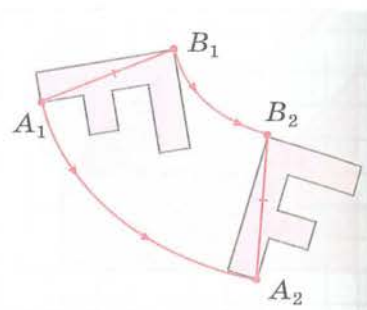


Рис. 9.31



Одна фигура переходит в другую **движением**, если можно найти соответствие между всеми точками этих фигур, которое не меняет расстояний между ними.



Итак, фигуры в геометрии называют **равными**, если существует движение, которое переводит одну из них в другую.

Здесь необходимо добавить следующее. Две равные фигуры не всегда возможно совместить физически, как материальные предметы. Наверняка вы обратили внимание на то, что при совмещении фигур на плоскости иногда нам приходилось их переворачивать «другой стороной». Сделать это можно, только выйдя из самой плоскости в трёхмерное пространство.

А как физически совместить правую и левую двери автомобиля, правый и левый ботинки, да и просто обе ваши руки (рис. 9.32)? Или всё же их не нужно считать равными друг другу? Каждый человек интуитивно понимает, что правая и левая двери автомобиля, обе наши



Рис. 9.32



Рис. 9.33

руки, да и ботинки на ногах равны между собой как фигуры. И равны они потому, что в этих фигурах одинаковы расстояния между всеми парами соответственных точек (рис. 9.33). Это и называется **изометрией**. Для физического совмещения правой и левой перчаток одну из них пришлось бы вывернуть наизнанку. А для совмещения тех же дверей автомобиля пришлось бы выйти в следующее измерение пространства. Равные фигуры в трёхмерном пространстве не обязательно совмещать физически. Это можно сделать мысленно или абстрактно.

Подойдите к любому плоскому зеркалу: оно меняет вашу правую руку на левую и то же самое делает с ботинками. Зеркало даёт нам представление о симметрии пространства, поэтому данную симметрию и называют **зеркальной**. С помощью симметрии мы также можем мысленно совмещать равные предметы, ведь она не может изменить расстояния между точками фигур, а только меняет эти точки местами.

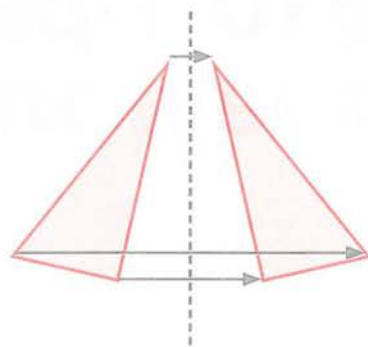
Интересно, что всех видов движений не так много, как это кажется. Когда мы с вами совмещали два треугольника на рис. 9.17, нам для этого понадобилось зеркально отразить один из них (перевернуть его «другой стороной»), потом сдвинуть и повернуть. На языке геометрии эти движения называются **осевой симметрией**, **параллельным переносом** и **поворотом вокруг точки**. Можно доказать, что любое перемещение фигуры на плоскости представляется как последовательность этих трёх движений.

Данная теорема была доказана в 1830 г. французским геометром Мишелем Шалем (рис. 9.34) и называется **теорема Шаля**.

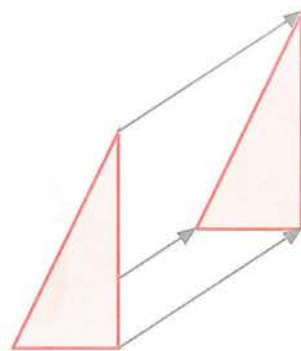


Мишель Шаль

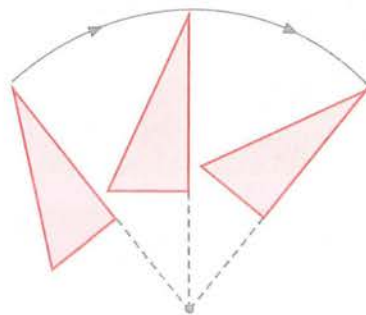
Рис. 9.34



Зеркальная симметрия



Параллельный перенос



Поворот вокруг точки

Виды движений фигур на плоскости

Рис. 9.35

¹ В переводе с древнегреческого языка слово «изометрия» означает «равноразмерность».

§10 Признаки равенства треугольников

Что такое признаки равенства?



Рис. 10.1

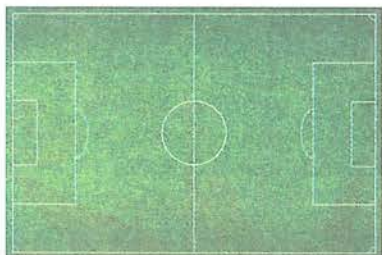


Рис. 10.2

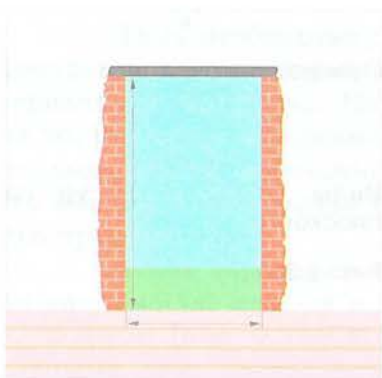


Рис. 10.3

В предыдущем параграфе мы с вами говорили о равенстве геометрических фигур. Давайте вспомним, что геометрические фигуры равны, если можно движением одну из них полностью совместить с другой. Но как применять это правило на практике? Неужели каждый раз придётся их накладывать друг на друга и пытаться физически совмещать! Хорошо ещё, если фигуры можно вырезать из бумаги, а как быть, если они нарисованы на стене (рис. 10.1) или просто очень больших размеров? Посмотрите на футбольное поле: две его половины должны быть абсолютно одинаковыми, но как бы вы их совместили (рис. 10.2)? Сделать это можно только мысленно, проведя рассуждение или доказательство.

Возьмём другой пример. Перед тем как поставить в доме новую дверь, замерщик измеряет высоту и ширину дверного проёма (рис. 10.3), потом по ним изготавливают нужную дверь, и тогда уже её ставят на своё место. Так же и портной снимает нужные мерки с человека, чтобы изготовить одежду по его фигуре. То есть на практике всегда берут какие-то характеристики предмета, по которым однозначно определяют его размеры и форму. Набор таких параметров в геометрии называется **признаком фигуры**.

Впрочем, признаки есть не только в геометрии. «Усы, лапы и хвост — вот мои документы!» — говорил персонаж известного мультфильма кот Матроскин. В биологии тоже существуют признаки растений и животных, а в медицине — признаки заболеваний.

Под признаком в биологии понимают набор каких-то качеств или особых свойств, по которым однозначно можно определить конкретный вид живых организмов. Подумайте, как бы вы сформулировали, например, признаки слона (рис. 10.4)? А знаете ли вы самый известный признак класса насекомых (рис. 10.5)? Как бы вы его сформулировали, глядя на приведённый рисунок? Какие вы знаете признаки простуды? Обычно их называют симптомами.

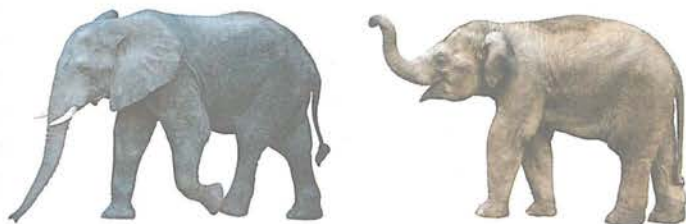


Рис. 10.4



Рис. 10.5

Равенство двух многоугольников

Вернёмся к признакам равенства фигур. В общем случае сформулировать их довольно сложно. Однако для многоугольников существует простое правило. Вы знаете, что два многоугольника равны, если их можно совместить. Но тогда у них должны совпасть все стороны и все углы — потому их и называют соответственными. Оказывается, верно и обратное: если каждой стороне и каждому углу одного многоугольника соответствуют равные им сторона и угол другого, то такие многоугольники можно будет совместить. Мы сформулируем это правило как признак равенства многоугольников, но пока примем его без доказательства.



1 Является ли наличие иголок и шишек на дереве признаком ёлки?

2 Назовите признаки или приметы грозы.



Признак равенства многоугольников

Если у двух многоугольников равны все их соответственные стороны и углы, то такие многоугольники равны.

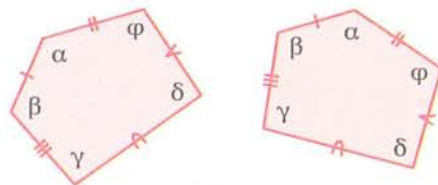


Рис. 10.6

С помощью данного признака легко проверить равенство оранжевых или равенство красных фигур на рисунке 10.7. В самом деле, на клетчатой бумаге без линейки и транспортира можно найти у каждой пары этих фигур все их равные соответствующие стороны, а также убедиться в равенстве углов между этими сторонами (сделайте это!). В то же время для проверки равенства фиолетовых треугольников по нашему признаку на этом рисунке не хватает данных. Без измерительных инструментов на нём мы не можем утверждать, что у фиолетовых треугольников равны их острые углы и стороны, соединяющие вершины этих углов. Если бы мы могли вырезать данные треуголь-

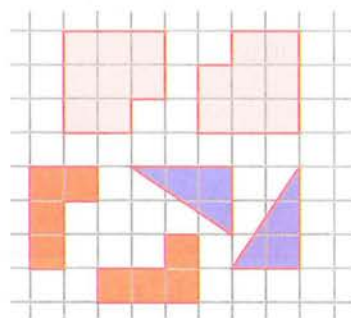


Рис. 10.7

ники из бумаги и совместить, мы убедились бы в их равенстве. Но делать это не обязательно. Достаточно проверить равенство лишь некоторых элементов у двух треугольников, и тогда остальные их элементы тоже будут равны. Для этого нам и понадобятся признаки равенства треугольников, которые мы сформулируем чуть позже.

Какие элементы определяют треугольник?

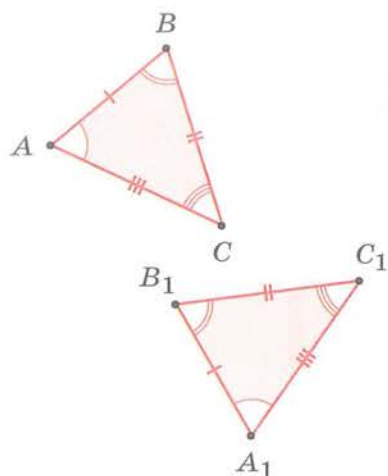
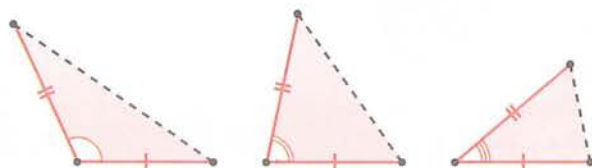


Рис. 10.8

Если у двух треугольников равны все их соответствующие стороны и углы, то по нашему признаку (пока не доказанному!) такие треугольники должны быть равны. Три стороны и три угла — это шесть элементов треугольника (рис. 10.8). Можно ли обойтись меньшим числом соответственно равных элементов, чтобы проверить равенство треугольников? Сколько вообще элементов могут однозначно определить треугольник?

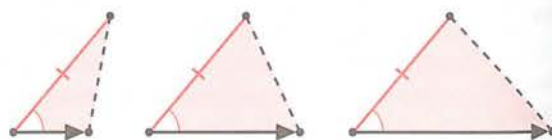
Вначале попробуем проверить, не будет ли достаточно двух равных элементов. Это могут быть две стороны, два угла или один угол и одна сторона треугольника.

Зафиксируем длины двух его сторон и будем менять угол между ними. Как можно видеть на рисунке 10.9, мы легко можем получить сколько угодно различных треугольников с этими элементами. Значит, только две стороны ещё не определяют треугольник. Теперь зафиксируем одну сторону треугольника и один его угол, прилежащий к этой стороне. Если мы будем изменять вторую сторону треугольника (рис. 10.10), то опять получим бесконечно много треугольников с данными элементами.



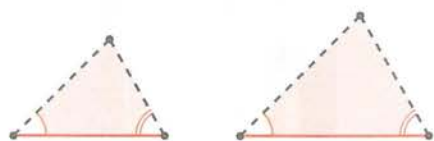
Две стороны и угол не определяют треугольник

Рис. 10.9



Одна сторона и угол не определяют треугольник

Рис. 10.10



Два угла не определяют треугольник

Рис. 10.11



Один угол и противоположная от него сторона не определяют треугольник

Рис. 10.12

Так же легко показать, что только два угла не могут однозначно определить треугольник. В самом деле, если задать два его угла и начать менять сторону между их вершинами (рис. 10.11), то можем получить сколько угодно разных треугольников.

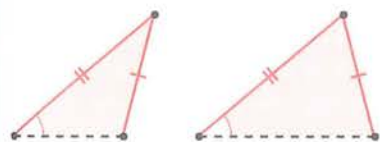
Аналогично легко проверить, что только одна сторона треугольника и один лежащий против неё угол не могут однозначно определить треугольник (рис. 10.12).



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Покажите, что существуют сколько угодно треугольников, у которых неизменны одна сторона и противоположный от неё угол (рис. 10.12).

Итак, только двух элементов недостаточно для определения треугольника. Возьмём теперь три его элемента. Пусть это будут две стороны и один угол треугольника, противоположный одной из этих сторон (рис. 10.13). Оказывается, набор таких элементов опять не может однозначно определить треугольник. Посмотрите на рисунок 10.14: на нём показаны различные треугольники ABC_1 и ABC_2 , у которых совпадает сторона AB , есть один и тот же угол A , который лежит против равных сторон BC_1 и BC_2 .



Два разных треугольника имеют две равные стороны и угол, который лежит против одной из них

Рис. 10.13

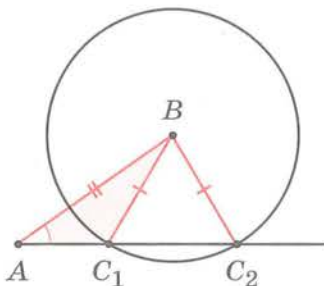
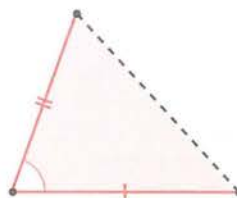


Рис. 10.14

Первый признак равенства треугольников

Зафиксируем теперь две стороны треугольника и угол между ними (рис. 10.15). Интуитивно такая конструкция сразу становится «жёсткой», то есть уже не может менять свою форму. Что это значит? Как раз то, что больше нет двух разных треугольников с данными элементами. То есть та-



Фиксируем две стороны и угол между ними

Рис. 10.15

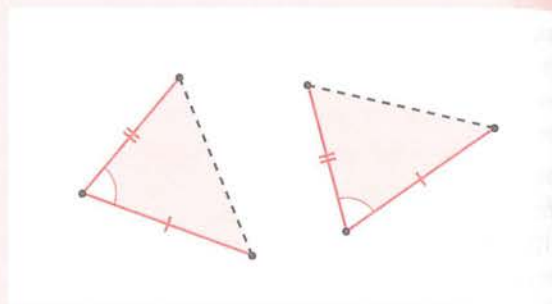
кой набор равных элементов однозначно определяет треугольник, а поэтому будет признаком их равенства! Правда, данное рассуждение ещё не является доказательством. Чтобы оно им стало, нужно строго показать, что два треугольника с таким набором одинаковых элементов можно совместить движением.

Итак, мы готовы сформулировать первый признак равенства треугольников.



Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом треугольнике, то такие треугольники равны.



Треугольники равны по первому признаку

Рис. 10.16

Если мы докажем этот признак, то без измерительных инструментов сможем утверждать, что у фиолетовых треугольников на клетчатой бумаге (рис. 10.7) равны все соответствующие элементы. Ведь такие треугольники будут равны по первому признаку равенства треугольников.

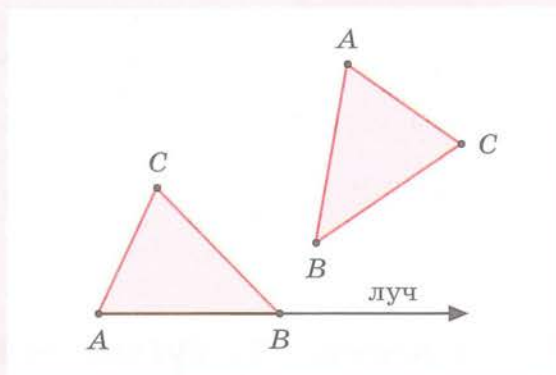
Как же доказать первый признак равенства треугольников? Очевидно, необходимо провести общее рассуждение и строго показать, что треугольники с двумя равными сторонами и углом между ними можно всегда совместить друг с другом. Давайте вспомним, что геометрические фигуры считаются равными, если существует **движение** плоскости, которое переводит одну из них в другую. Напомним, что движение сохраняет расстояния между всеми точками фигуры, а сама фигура при этом перемещается как единое целое.

Из опыта мы знаем, что треугольник можно перемещать на плоскости как угодно, можно даже перевернуть его «другой стороной», как будто он вырезан из бумаги. Это очевидно, но все-таки как это доказать? Оказывается — никак не докажешь. Это еще одна аксиома, которую называют **аксиомой движения плоскости**. Обычно её формулируют так:



Аксиома движения

Любой треугольник можно движением приложить к данному лучу так, что первая его вершина совпадёт с началом луча, вторая будет лежать на луче, а третья окажется в нужной полуплоскости от прямой, на которой лежит луч.



Прикладываем треугольник к лучу нужным нам образом

Рис. 10.17

Теперь мы с вами готовы доказать

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть у нас есть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы A и A_1 равны, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Попробуем мысленно совместить эти треугольники. Вначале приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к лучу AB так, чтобы вершина A_1 совпадала с началом луча — точкой A , вершина B_1 лежала на луче, а вершина C_1 оказалась по ту же сторону от прямой AB , что и вершина C (рис. 10.19). Сделать так можно по аксиоме движения плоскости. Так как по условию $AB = A_1B_1$, то вершины B и B_1 обязательно совпадут (рис. 10.20), иначе от точки A на луче AB можно было бы отложить отрезок данной длины двумя способами. Это запрещено аксиомой откладывания отрезков.

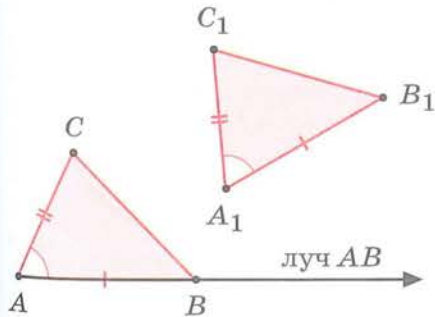


Рис. 10.18

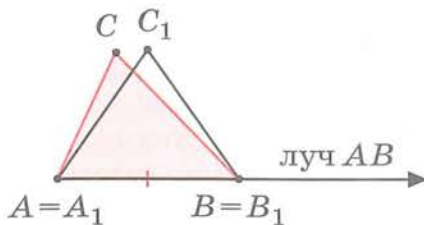


Рис. 10.19

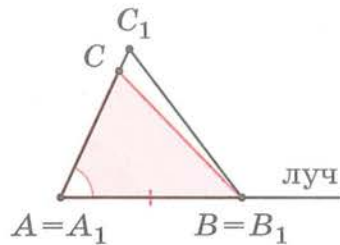


Рис. 10.20

По условию углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны и отложены от луча AB в одну полуплоскость, поэтому луч A_1C_1 совпадёт с лучом AC . Иначе нарушалась бы аксиома откладывания углов (рис. 10.20).

Значит, точка C_1 лежит на луче AC . Поскольку $AC = A_1C_1$, то точки C_1 и C должны совпасть по аксиоме откладывания отрезков на луче (рис. 10.21). Таким образом, мы смогли совместить все три вершины данных нам треугольников, а при этом, очевидно, совместятся все их стороны и углы. Значит, эти треугольники равны.

Что и требовалось доказать.

Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Возьмём теперь лист бумаги и нарисуем на нём любые два отрезка и один угол. Пусть длины этих отрезков равны a и b , а величина угла равна α (рис. 10.22, а). Попробуем теперь нарисовать (или построить) треугольник, у которого две стороны равнялись бы двум этим отрезкам, а угол между ними оказался бы равен α . Мы с вами будем использовать только линейку и циркуль, как это делали древние греки.

Поставим ножку циркуля в точку O — вершину данного нам угла и проведём окружность с радиусом, равным a . Точку пересечения этой окружности с одной стороной угла обозначим буквой A . Аналогично проведём окружность с центром в точке O и радиусом, равным b . Точку её пересечения со второй стороной угла обозначим буквой B . Так циркулем откладывают нужные отрезки на данных лучах. Теперь с помощью линейки соединим точки A и B отрезком. Треугольник OAB построен — он имеет нужные две стороны и нужный угол между ними (рис. 10.22, б).

Как видно, сделанное построение привело нас только к одному треугольнику при условии, что данные нам отрезки a и b мы откладывали на соответствующих сторонах нашего угла. А если отложить эти отрезки на других сторонах угла, получим ли мы другой треугольник? На самом деле нет. Посмотрите на рисунок 10.22, в: на нём показаны два построенных таким образом треугольника AOB и A_1OB_1 . Но ведь они и должны быть равны как раз по первому признаку равенства треугольников!

Замечание: важно, что известный угол лежит между данными нам сторонами. Если бы он находился не между ними, мы смогли бы построить два различных треугольника с этими элементами. Как это сделать, было показано на рисунке 10.14.

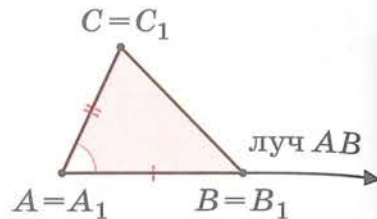
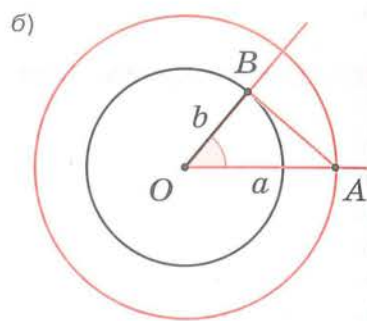


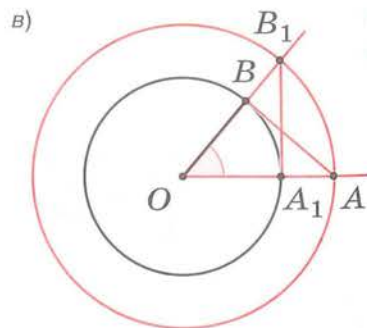
Рис. 10.21



Даны две стороны и угол треугольника



Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними



Треугольники OAB и OA_1B_1 равны по первому признаку

Рис. 10.22

Второй признак равенства треугольников

Давайте зафиксируем одну сторону треугольника и два его угла, прилежащих к этой стороне (рис. 10.23). Попробуем теперь начертить треугольник с такими элементами.

Возьмём данную нам сторону треугольника и транспортиром из её концов в одну полуплоскость проведём два луча так, чтобы они образовывали с этой стороной нужные нам углы (рис. 10.24).

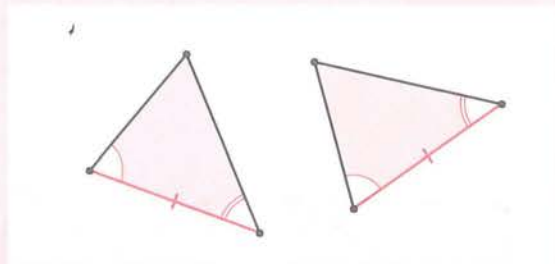
Полученные лучи пересекутся в единственной точке. Это и будет третья вершина треугольника. То есть треугольник можно однозначно определить по этим трём его элементам.

Это даёт нам



Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла в одном треугольнике соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам в другом треугольнике, то такие треугольники равны.



Треугольники равны по второму признаку

Рис. 10.25

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть мы имеем треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых угол A равен углу A_1 , сторона AB равна стороне A_1B_1 и углы B и B_1 равны. Попробуем совместить эти треугольники. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к лучу AB так, чтобы вершина A_1 совпала с точкой A , вершина B_1 лежала на луче, а вершина C_1 оказалась с той же стороны от прямой AB , что и вершина C (рис. 10.26, а). Сделать это можно по аксиоме движения плоскости.

Так как по условию $AB = A_1B_1$, то точки B_1 и B совпадут по аксиоме откладывания отрезков. Так как угол $B_1A_1C_1$ равен углу BAC , то по аксиоме откладывания углов луч A_1C_1 совпадёт с лучом AC (рис. 10.26, б). Аналогично луч B_1C_1 совпадёт с лучом BC . Но тогда совпадут также точки C и C_1 , поскольку лучи AC и BC пересекаются



Фиксируем одну сторону треугольника и два прилежащих к ней угла

Рис. 10.23

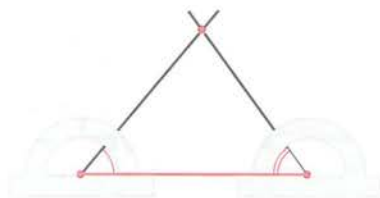


Рис. 10.24

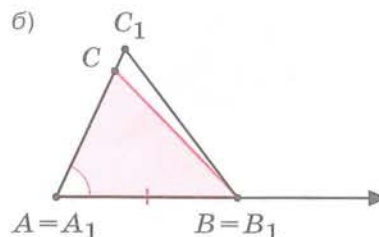
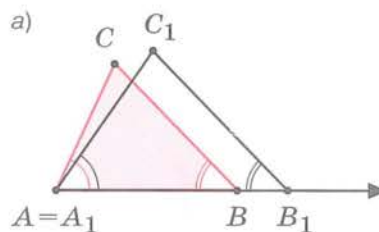


Рис. 10.26

ся только в одной точке. Значит, совместятся все три вершины треугольников (рис. 10.27). То есть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Что и требовалось доказать.



УПРАЖНЕНИЯ

- 2 Найдите на рисунке 10.28 пары равных треугольников и докажите их равенство. На чертежах равные отрезки обозначены одинаковыми штрихами, а равные углы — одинаковыми дугами.

Указание: у двух треугольников на приведённых рисунках может быть общая сторона или же общий угол. В этих случаях логично считают, что у таких треугольников совпадающие стороны (или углы) одинаковы, так как каждый отрезок или каждый угол равен сам себе. Общая сторона у двух треугольников обозначается значком $\sim$.

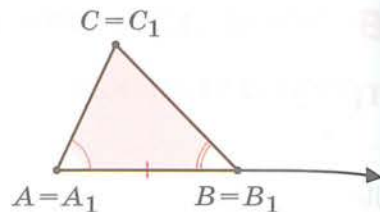


Рис. 10.27

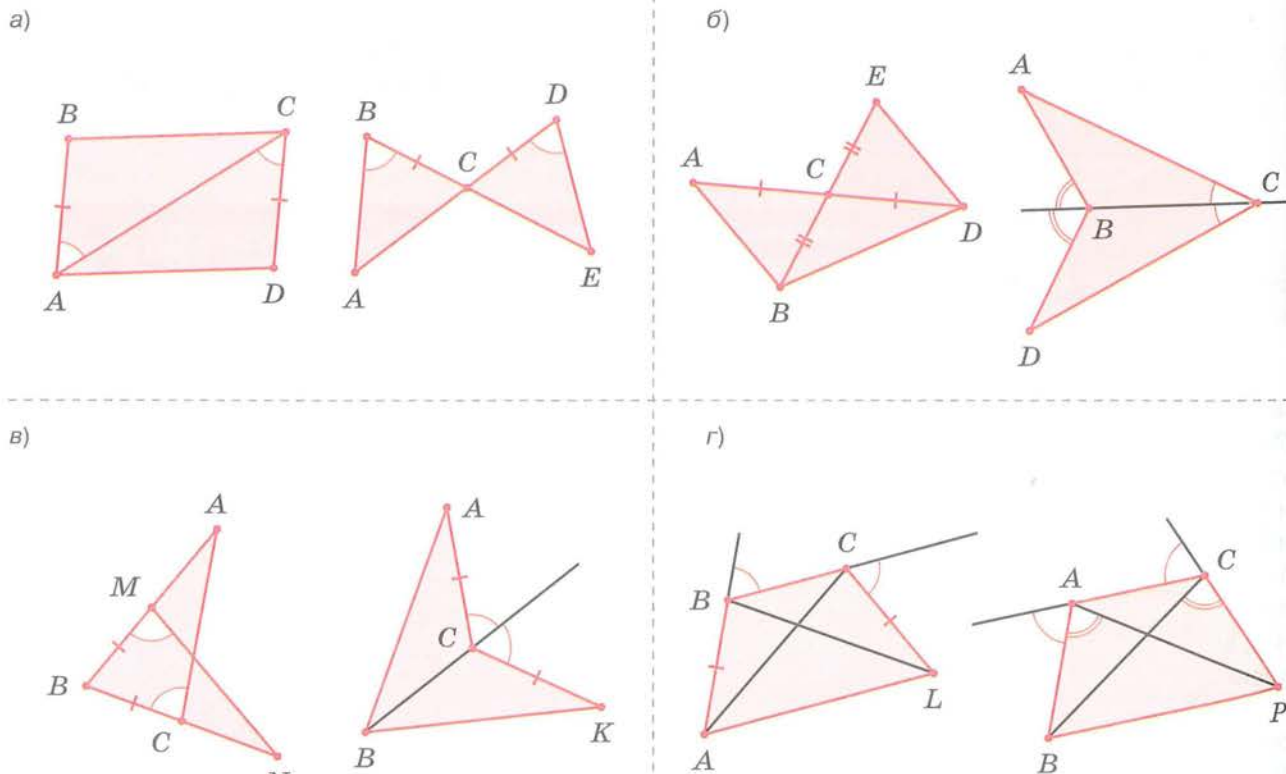


Рис. 10.28

3 Соедините отрезками нужные точки на рисунке 10.29 и найдите на них равные треугольники. На рисунке 10.29 равные отрезки обозначены одинаковыми штрихами, равные углы — одинаковыми дугами.

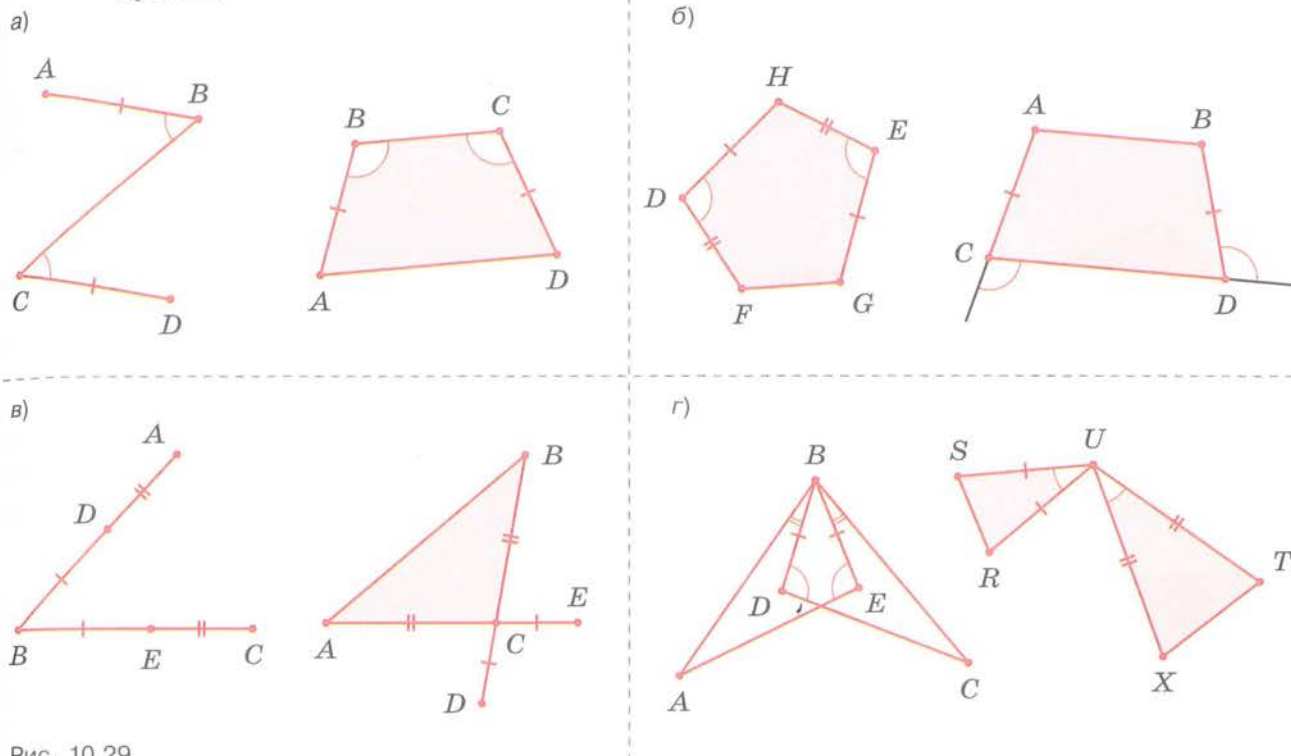


Рис. 10.29



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ ПРИМЕР 10.1 Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ образует равные углы с его сторонами AB и CD . Известно, что $AB = CD$ (рис. 10.30, а). Докажите, что $BC = AD$.

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим треугольники ABD и CBD . У них есть по две равные стороны: AB и CD равны по условию, а сторона BD общая. Между соответственно равными сторонами в этих треугольниках лежат равные углы ABD и CDB (рис. 10.30, б). Значит, треугольники ABD и CBD равны по первому признаку. Так как стороны BC и AD в этих треугольниках соответственные, то они равны. Значит, $BC = AD$.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ ПРИМЕР 10.2 В треугольнике ABC равны стороны AB и BC . Точки M и K — середины этих сторон. Докажите, что $AK = CM$ (рис. 10.31, а).

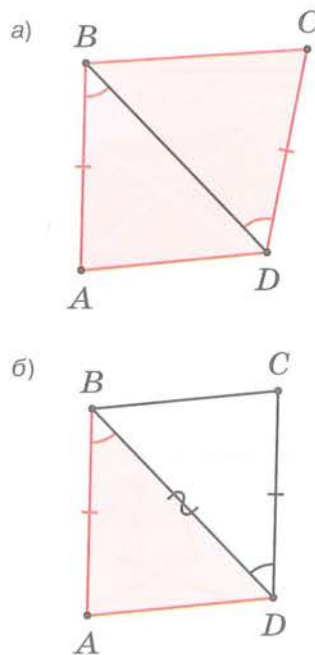


Рис. 10.30

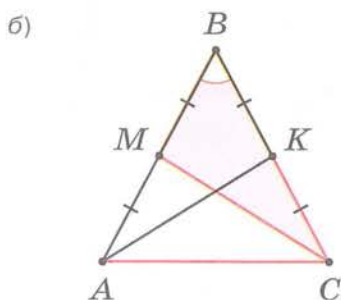
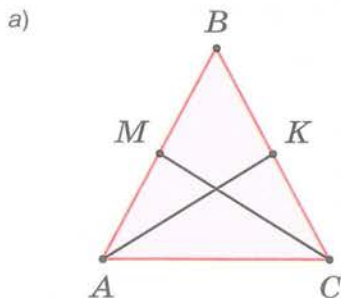


Рис. 10.31

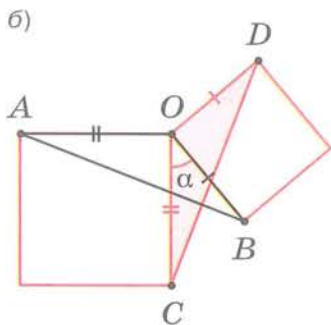
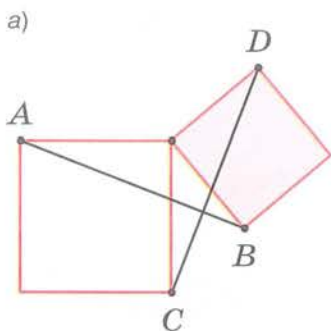


Рис. 10.32

РЕШЕНИЕ: Отрезки AM , BM , BK и CK равны как половины равных отрезков AB и BC . Поэтому на рис. 10.31, б отмечены одинаковыми штрихами. Теперь рассмотрим треугольники ABK и CBM . У них равны по две стороны: $AB = BC$, $BK = BM$. Кроме того, равны углы ABK и CBM между этими сторонами, так как они совпадают с углом ABC (он общий для двух треугольников).

Значит, треугольники ABK и CBM равны по первому признаку. Отрезки AK и CM — соответственные стороны этих треугольников (они лежат против общего угла ABC). Следовательно, $AK = CM$.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ ПРИМЕР 10.3 Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отрезки AB и CD равны (рис. 10.32, а).

РЕШЕНИЕ: Обозначим общую вершину квадратов точкой O (рис. 10.32, б).

Все стороны у квадрата равны по определению, а углы прямые. Пусть величина угла COB между сторонами квадратов равна α . Рассмотрим треугольники AOB и COD . У них равны по две стороны: $AO = CO$, $BO = DO$. Кроме того, углы AOB и COD равны $90^\circ + \alpha$.

Значит, треугольники AOB и COD равны по первому признаку. Стороны AB и CD у них соответственные, поэтому $AB = CD$.

Что и требовалось доказать.



ВОПРОСЫ

- 1 Какой вы знаете признак равенства многоугольников?
- 2 Какие вы знаете признаки в биологии и медицине?
- 3 Должны ли треугольники быть равными, если у них есть два равных угла?
- 4 Как построить треугольник по двум его сторонам и углу между ними? Сколько разных треугольников можно построить с этими элементами?
- 5 Как построить треугольник по двум его сторонам и углу, лежащему против одной из них? Сколько разных треугольников можно построить с этими элементами?
- 6 Две стороны и угол между ними в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом. Верно ли, что у этих треугольников равны и другие углы?
- 7 Два угла и одна сторона в одном треугольнике равны двум углам и одной стороне другого. Верно ли, что такие треугольники обязательно равны?

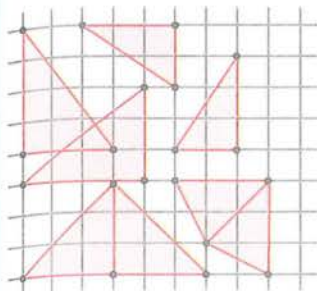


Рис. 10.33

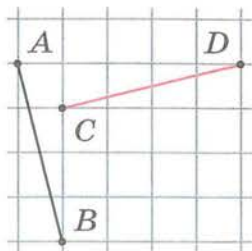


Рис. 10.34



Рис. 10.35

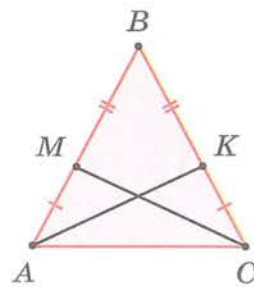


Рис. 10.36



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

10.1 ★☆☆ Сколько пар равных треугольников на рисунке 10.33? По какому признаку можно утверждать, что они равны?

10.2 ★☆☆ На клетчатой бумаге нарисовали отрезки AB и CD так, как показано на рисунке 10.34. Докажите, что они равны (все клетки на бумаге считаем квадратами).

10.3 ★☆☆ Все стороны и все углы пятиугольника равны (рис. 10.35). Докажите, что равны все его диагонали.

10.4 ★☆☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM = CK$, $BM = BK$ (рис. 10.36). Докажите, что $AK = CM$.

10.5 ★☆☆ Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 10.37). Известно, что $AO = OD$, $BO = OC$. Докажите, что угол ABC равен углу BCD .

10.6 ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит углы BAD и BCD пополам (рис. 10.38). Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

10.7 ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CAD = \angle ADB$ (рис. 10.39). Докажите, что $AB = CD$.

10.8 ★☆☆ На сторонах угла с вершиной B отложили равные отрезки BA и BC . Внутри угла ABC взяли точки E и K так, что угол ABK равен углу CBE , а угол BAE равен углу BCK (рис. 10.40). Докажите, что $BE = BK$.

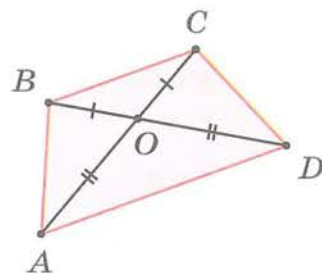


Рис. 10.37

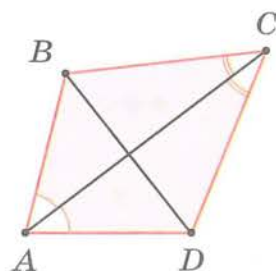


Рис. 10.38

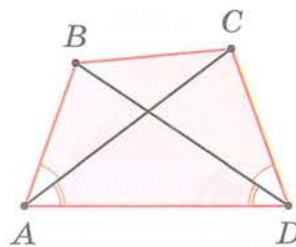


Рис. 10.39

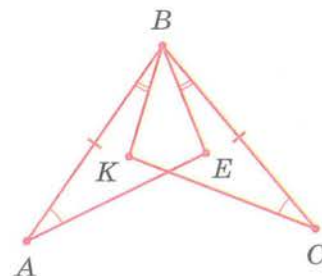


Рис. 10.40

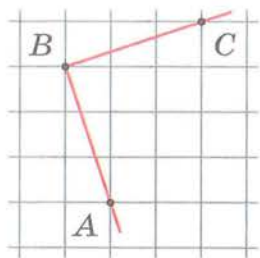


Рис. 10.41



Рис. 10.42

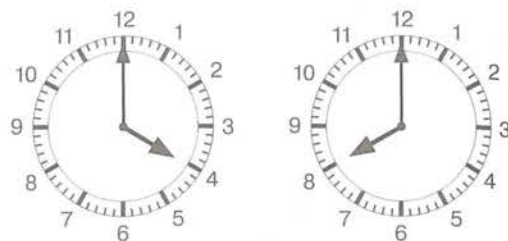


Рис. 10.43

10.9 ★☆☆ Докажите, что угол ABC на рисунке 10.41 равен 90° .

10.10 ★☆☆ Разрежьте квадрат на две неравные части, из которых можно потом сложить треугольник (рис. 10.42).

10.11 ★☆☆ Докажите, что расстояние между концами часовой и минутной стрелок на механических часах в 16:00 и 20:00 одинаковы.

★☆☆ В какой первый момент времени после 16:00 расстояние между концами стрелок будет таким же (рис. 10.43)?

10.12 ★☆☆ У двух выпуклых четырёхугольников соответственно равны три стороны и два угла между этими сторонами (рис. 10.44). Докажите, что у них равны и четвёртые стороны.

10.13 ★☆☆ А можете ли вы привести пример двух не равных друг другу невыпуклых четырёхугольников с тем же условием?

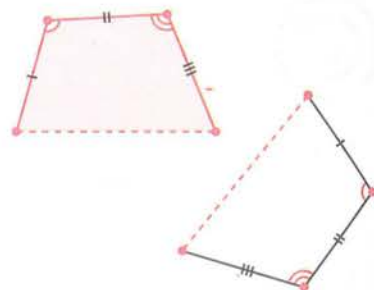


Рис. 10.44



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Как же доказать признак равенства многоугольников, о котором мы с вами говорили в начале этого параграфа? Очевидно, для этого нам необходимо мысленно совместить эти многоугольники так, чтобы они совпали каждой своей точкой (рис. 10.45). Мы сделаем это, используя **признаки равенства треугольников**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть все соответствующие стороны у двух многоугольников равны и соответственно равны все углы между этими

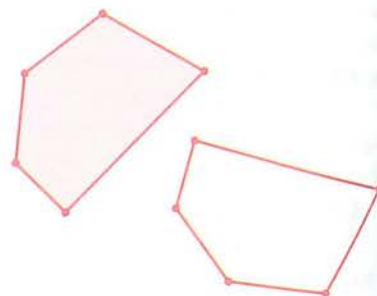


Рис. 10.45

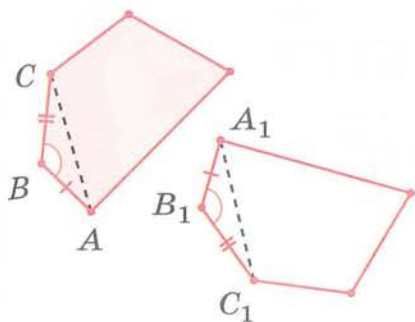


Рис. 10.46

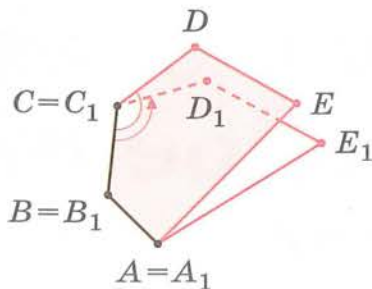


Рис. 10.47

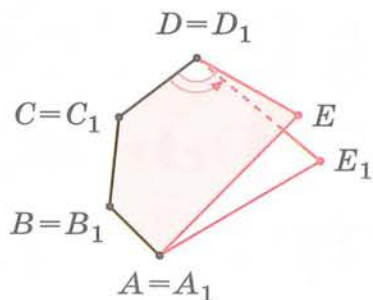


Рис. 10.48

сторонами. Давайте возьмём два их равных угла и обозначим их буквами B и B_1 (рис. 10.46). По условию из этих вершин должны выходить соответственно равные стороны наших многоугольников. Обозначим их AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 . По условию $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку, поскольку равны две их стороны и угол между ними. Но это значит, что такие треугольники можно совместить.

Давайте расположим два наших многоугольника на плоскости так, чтобы треугольник ABC совместился с треугольником $A_1B_1C_1$ (рис. 10.47). Посмотрим, совместятся ли при этом другие вершины и стороны этих многоугольников. По условию два угла при вершинах C и C_1 наших многоугольников равны. От луча BC эти углы отложены в одну полуплоскость, поэтому лучи CD и C_1D_1 должны совпасть по аксиоме откладывания углов. Кроме того, стороны CD и C_1D_1 у многоугольников равны, поэтому вершина D_1 должна совпасть с вершиной D по аксиоме откладывания отрезков (рис. 10.48). Таким образом, мы видим, что совмещение сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ привело к совмещению сторон CD и C_1D_1 наших многоугольников. Точно так же легко доказать, что совместятся стороны DE и D_1E_1 многоугольников, а потом все их вершины и все стороны. То есть эти многоугольники будут равны.

Что и требовалось доказать.

Замечание: для того чтобы совместить два треугольника, достаточно совместить три их вершины. Оказывается, что для многоугольников это правило работает не всегда. Посмотрите на рисунок 10.49: на нём изображены два различных пятиугольника, которые мы легко можем совместить всеми пятью вершинами. Как вам кажется, в чём здесь дело? Попробуйте нарисовать два аналогичных четырёхугольника.

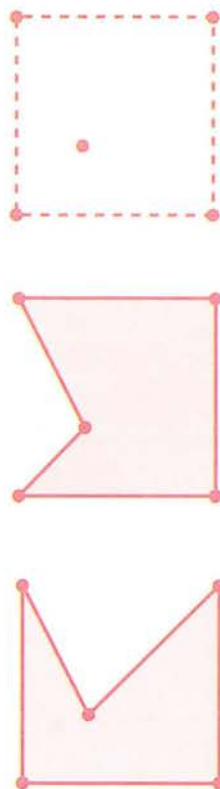
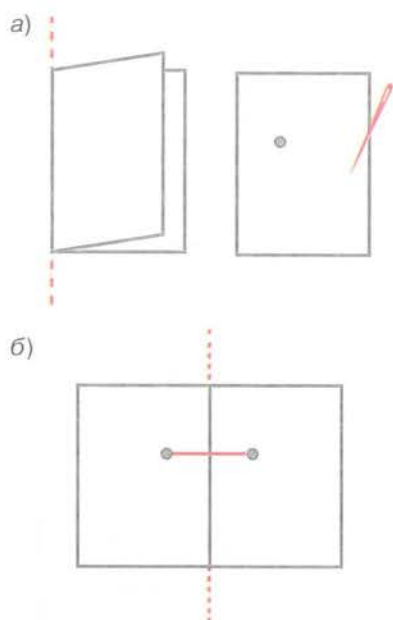


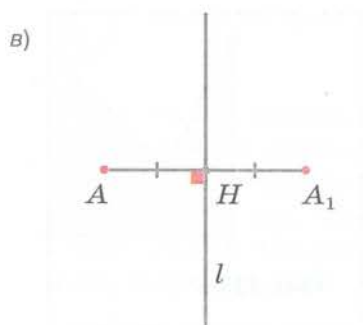
Рис. 10.49

§11 Осевая симметрия и равнобедренный треугольник

Осевая симметрия



Точки прокола находятся на равных расстояниях от сгиба бумаги



Точки A и A_1 симметричны относительно прямой l

Рис. 11.1

Сложите обычный лист бумаги по прямой линии и проколите его иголкой (рис. 11.1, а). Если теперь снова развернуть его на плоскость, то точки прокола будут находиться по разные стороны от линии сгиба и на равных расстояниях от неё (рис. 11.1, б). Такие точки называют **симметричными относительно прямой**.

Любой точке A , которая не лежит на данной прямой l , таким образом можно найти пару — симметричную ей точку A_1 : для этого нужно из точки A на прямую l опустить перпендикуляр AH и продолжить полученный отрезок на свою длину. Все точки на самой прямой l не имеют пары: при симметрии относительно этой прямой они совпадают сами с собой (рис. 11.1, в). Прямую l называют **осью симметрии**, а саму симметрию — **осевой**. Симметрию относительно прямой l обозначают так: S_l .

Осевую симметрию можно встретить в живой природе. Симметричны крылья бабочки, панцирь жука или тельце стрекозы, да и все насекомые обладают явной осью симметрии (рис. 11.2).

В то же время листья деревьев обычно немного не-симметричны (рис. 11.4), то же самое можно сказать и о строении млекопитающих. Например, правая и левая

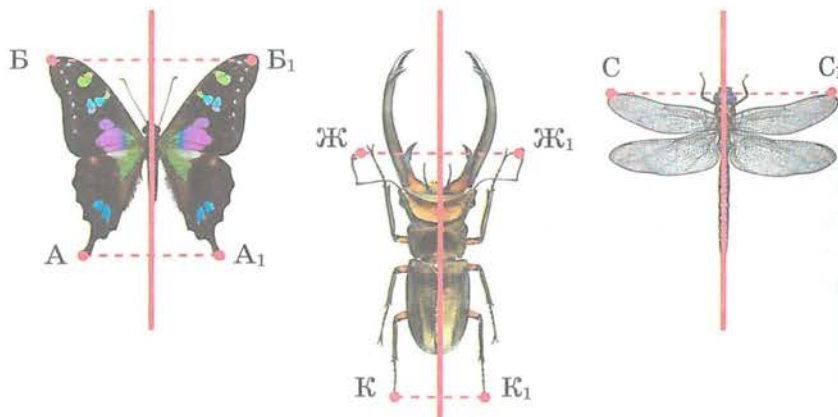


Рис. 11.2



Портреты, составленные из правых и левых половин лица человека, отличаются друг от друга

Рис. 11.3

половины лица человека всегда отличаются. Чтобы в этом убедиться, нужно симметрично «дополнить» каждую из этих «половинок» до целого лица и потом сравнить с оригиналом (рис. 11.3). Говорят, что иногда даже родные матери по этим изображениям не могли узнать своего ребёнка.

Свойство осевой симметрии

Пусть точки A и A_1 симметричны относительно прямой l . Тогда любая точка M на прямой l всегда находится на одинаковых расстояниях от точек A и A_1 , то есть $AM = A_1M$. В таких случаях говорят, что точка M **равноудалена** от точек A и A_1 (рис. 11.5).

Доказать это очень просто: достаточно заметить, что треугольники AMH и A_1MH равны по первому признаку, ведь сторона MH у них общая, $AH = A_1H$, а углы AHM и A_1HM прямые. Отсюда и следует, что $AM = A_1M$.



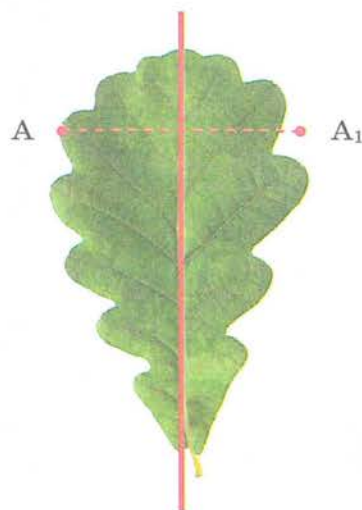
Прямую l называют **серединным перпендикуляром** к отрезку AA_1 , поскольку он проходит через середину этого отрезка и образует с ним угол 90° .

Мы с вами только что доказали его главное свойство: **все точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от концов этого отрезка**.

Давайте теперь возьмём любые две точки A и B и отразим их относительно прямой l . Полученные точки обозначим буквами A_1 и B_1 .

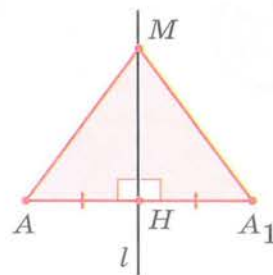
Оказывается, что отрезок AB всегда будет равен отрезку A_1B_1 , то есть при симметрии относительно прямой линии отрезки сохраняют свою длину.

Это можно сформулировать как важное свойство осевой симметрии.



Листья деревьев не обладают полной симметрией

Рис. 11.4



Для любой точки M на прямой l $MA = MA_1$

Рис. 11.5



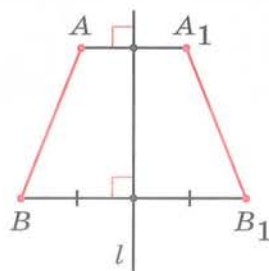
Свойство осевой симметрии

Осевая симметрия сохраняет длины отрезков.

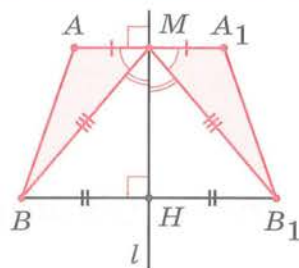
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим вначале случай, когда точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой l . Так как точки A и A_1 симметричны относительно l , то отрезок AA_1 образует с этой прямой угол 90° , и при этом $AM = A_1M$. Поскольку точки B и B_1 также симметричны относительно прямой l , то отрезок BB_1 тоже образует с ней угол 90° и $BH = B_1H$. Треугольники BHM и B_1HM равны по первому признаку, поэтому $BM = B_1M$, а угол BMH равен углу B_1MH . Обозначим величину этих углов буквой α . Тогда углы AMB и A_1MB_1 равны $90^\circ - \alpha$. Рассмотрим теперь треугольники ABM и A_1B_1M .

Они равны по первому признаку, поскольку $AM = A_1M$, $BM = B_1M$, а угол AMB равен углу A_1MB_1 . Значит, и другие их стороны соответственно равны, то есть $AB = A_1B_1$.

Что и требовалось доказать.



Для любых точек A и B $AB = A_1B_1$



Случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от прямой l , разберите самостоятельно.



УПРАЖНЕНИЯ

1. Какая фигура должна быть следующей в приведённом ряду на рисунке 11.6?
2. Нарисуйте фигуру, симметричную показанной на рисунке 11.7 относительно горизонтальной прямой. Какое слово у вас получилось?
3. Какие фигуры нужно нарисовать на местах, отмеченных точками на рисунке 11.8, чтобы при симметрии получился осмысленный текст? Как расположить ось этой симметрии?



Рис. 11.6



Рис. 11.7



Рис. 11.8



Рис. 11.9

- 4 Какую фигуру нужно поставить вместо точки и как расположить прямую, чтобы при симметрии относительно неё на рисунке 11.9 получилось осмысленное слово?
- 5 На рисунке 11.10 есть пары фигур, симметричных друг другу относительно некоторых прямых. Найдите все такие пары. Запишите в своей тетради номера фигур каждой такой пары. Сколько всего этих пар? Относительно какой прямой симметрична каждая пара фигур?
- 6 Повторите в своей тетради рисунок 11.11 и отметьте на нём точки, симметричные точкам A и B относительно показанной прямой.
- 7 Как, складывая бумагу, без линейки и транспортира получить угол в $22^\circ 30'$?
- 8 Как сложить несколько раз лист бумаги, чтобы потом одним прямым разрезом сделать в нём квадратную дыру (рис. 11.12)?

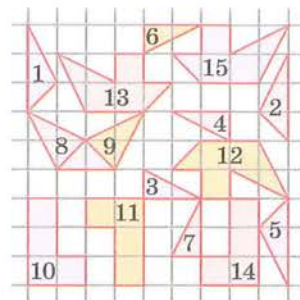


Рис. 11.10

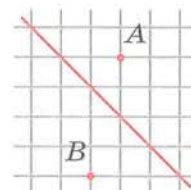


Рис. 11.11



Рис. 11.12

Равнобедренный треугольник



Треугольник называется **равнобедренным**, если он имеет две равные стороны.

Эти равные стороны называют **боковыми**, а третью сторону — **основанием треугольника** (рис. 11.13). Равнобедренные треугольники изучал ещё великий мудрец Фалес, он же первый доказал свойства и признаки таких треугольников. Грани египетских пирамид (рис. 11.14), фронтоны античных храмов (рис. 11.15) — всё это треугольники, у которых есть две равные стороны. Изучая окружность, также не пройти мимо равнобедренного треугольника, ведь он сразу возникает, если соединить две её точки с центром (рис. 11.16). Как мы с вами увидим, равнобедренный треугольник является симметричной фигурой, то есть он

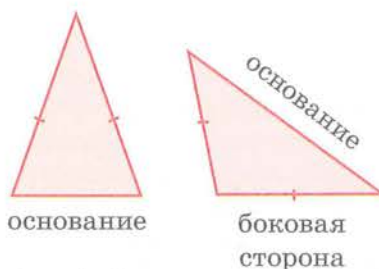


Рис. 11.13



Рис. 11.14



Рис. 11.15

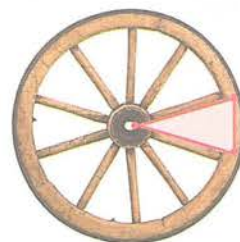


Рис. 11.16

имеет ось симметрии, при отражении от которой каждая его точка переходит в точку того же треугольника. А теперь давайте назовём главные его свойства:



Свойства равнобедренного треугольника

- 1 Углы при основании равнобедренного треугольника равны (рис. 11.17, а).
- 2 Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию равнобедренного треугольника, совпадают (рис. 11.17, б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим треугольник ABC , у которого равны стороны AB и BC . Проведём биссектрису угла ABC между этими сторонами: пусть она пересекает основание AC треугольника в точке M . Треугольники ABM и CBM равны по первому признаку, так как сторона BM у них общая, $AB = BC$, а углы ABM и CBM равны. Значит, углы при вершинах A и C этих треугольников должны быть равны (рис. 11.17, в).

Первое свойство доказано.

Докажем второе свойство. Из равенства тех же треугольников ABM и CBM следует, что равны их стороны AM и CM , то есть точка M является серединой стороны AC . Значит, в треугольнике ABC биссектриса BM совпадает с медианой. Кроме того, у этих треугольников должны равняться углы AMB и CMB . Обозначим их величиной α . Поскольку они смежные, то сумма таких углов равна 180° , то есть $2\alpha = 180^\circ$. Отсюда получаем, что $\alpha = 90^\circ$. То есть проведённая нами биссектриса перпендикулярна основанию треугольника и совпадает с его высотой (рис. 11.17, г).

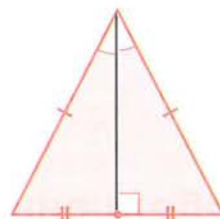
Второе свойство доказано.

Обратите внимание: точки A и C оказались симметричны относительно прямой BM . Если сделать симметрию относительно этой прямой, то вершина B нашего треугольника останется на месте, а вершины A и C перейдут друг в друга, как будто «поменяются местами». При этом сам треугольник совпадёт со своим отражением относительно данной прямой. Значит, прямая BM является осью симметрии треугольника ABC .

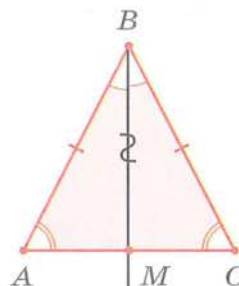
а)



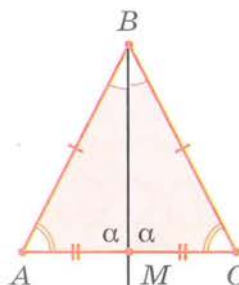
б)



в)



г)



Прямая BM — ось симметрии треугольника

Рис. 11.17

Симметричные фигуры

Если при симметрии относительно некоторой прямой каждая точка геометрической фигуры переходит в точку той же фигуры, то говорят, что данная фигура имеет **ось симметрии**. Симметричны фасады многих классических зданий (рис. 11.19, а), розы витражей в готических соборах (рис. 11.19, б), форма автомобилей (рис. 11.19, в), правый и левый ботинки. Некоторые фигуры имеют только одну ось симметрии, другие — несколько таких осей. Например, квадрат имеет 4 оси симметрии: две из них проходят через середины его противоположных сторон, а ещё две идут по диагоналям (рис. 11.18, а). Если согнуть бумажный квадрат вдоль каждой из этих прямых, то его «половинки» совпадут (рис. 11.18, б, в).

На принципе симметрии основан способ вырезания новогодних снежинок из бумаги: лист бумаги складывают несколько раз, из полученного треугольника вырезают красивый узор, а потом снова разворачивают лист на плоскость (рис. 11.19, г). Каждое сложение бумаги даёт симметрию относительно линии своего сгиба, поэтому вырезанный из треугольника узор многократно повторяется и образует ажурную снежинку.

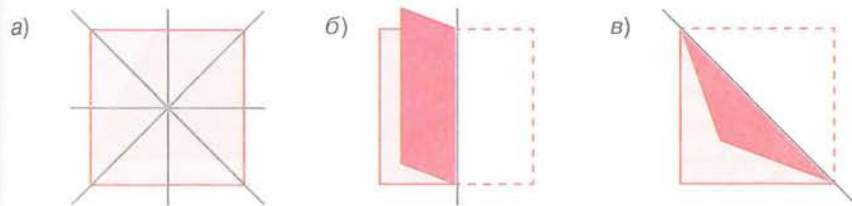


Рис. 11.18

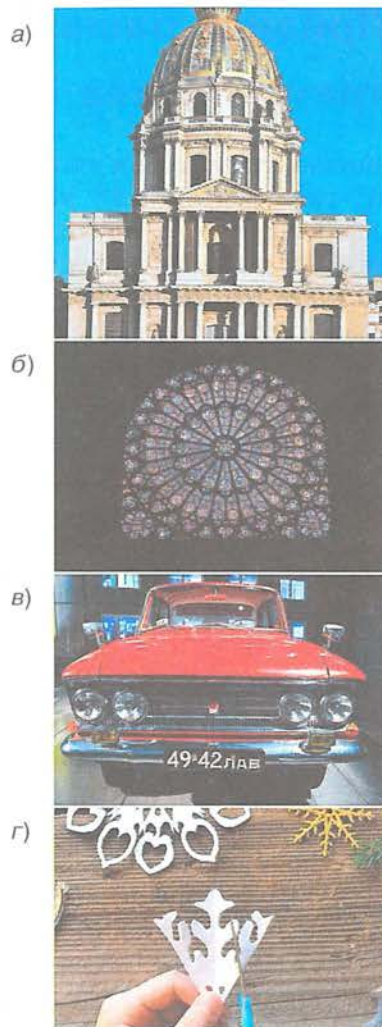


Рис. 11.19



УПРАЖНЕНИЯ

- 9 На рисунке 11.20 показано несколько геометрических фигур. Каждая из них симметрична. Изобразите эти фигуры в своей тетради и поставьте внутри каждой фигуры число, равное числу её симметрий. Одна из этих фигур имеет бесконечно много осей симметрии. Какая это фигура?
- 10 Листок бумаги согнули три раза и получили равнобедренный треугольник. Из него вырезали фигуру так, как показано на рисунке 11.21. Изобразите в своей тетради снежинку, которая получится, если этот листок потом снова развернуть на плоскость.

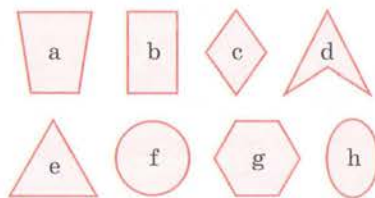


Рис. 11.20

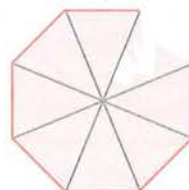


Рис. 11.21

Признак равнобедренного треугольника

Можно ли, измеряя только углы треугольника, понять, что он равнобедренный? Мы с вами знаем, что по свойству равнобедренного треугольника у него должны быть два равных угла. Но существуют ли ещё треугольники, у которых есть равные углы, а длины всех сторон различны? Например, четырёхугольники такие бывают. Мы же с вами выясним, что треугольников таких нет.

В этом и заключается признак равнобедренного треугольника. Звучит он так:



Признак равнобедренного треугольника

Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть в треугольнике ABC равны углы при вершинах A и C . Через середину его стороны AC под прямым углом к этой стороне проведём прямую — серединный перпендикуляр. Мы уже знаем, что в равнобедренном треугольнике такой перпендикуляр к основанию AC должен проходить через вершину B . Давайте предположим, что наш треугольник не является равнобедренным, и получим противоречие.

Итак, мы будем рассуждать «от противоположного».

Пусть серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника не проходит через его вершину B .

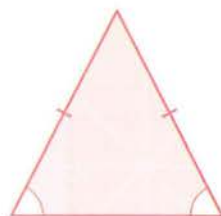
Тогда он должен пересекать ещё одну сторону этого треугольника: либо его сторону AB , либо сторону BC .

Пусть он пересекает сторону AB в точке K . Треугольники AKM и CKM равны по первому признаку, поэтому их углы KAM и KCM равны α . По условию в треугольнике ABC равны углы при его вершинах A и C . Поэтому угол ACB также равен α . Но этот угол должен быть больше α , поскольку он содержит в себе угол ACK . Мы получили противоречие.

Полученное противоречие показывает, что серединный перпендикуляр не может пересекать сторону AB треугольника ABC . Точно так же легко доказать, что он не может пересекать его сторону BC . Значит, остаётся только одно: этот перпендикуляр обязан проходить через вершину B треугольника. Но тогда треугольник ABC должен быть равнобедренным.

Что и требовалось доказать.

а)



б)

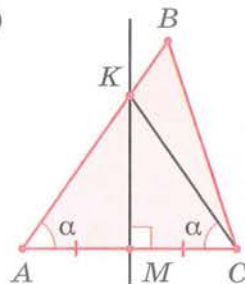


Рис. 11.22



Рис. 11.23

Прямые и обратные утверждения

Вы наверняка заметили, что только что доказанный нами признак равнобедренного треугольника очень похож на его свойство, только сформулирован он как бы «задом наперёд». Так оно и есть, поскольку свойство фигуры и её признак — всегда взаимно обратные утверждения. Их ещё называют **прямой** и **обратной** теоремами.

А что такое вообще теоремы? В математике так называют утверждения, в правильности которых люди убеждаются путём строгих логических рассуждений или доказательств. Каждую теорему можно сформулировать так, чтобы она состояла из двух частей: из условия и заключения. Условие обычно начинается со слова «если», а заключение — со слова «то». Например, теорема о вертикальных углах в этой форме будет звучать так: «Если углы вертикальные, то они равны». В следующей таблице показаны примеры математических теорем, представленных в форме условия и заключения.

Условие	Заключение
Если два угла вертикальные,	то они равны между собой.
Если треугольник равнобедренный,	то два его угла равны.
Если два угла треугольника равны,	то этот треугольник равнобедренный.
Если сумма цифр числа делится на 3,	то само это число делится на 3.

Последняя теорема вам, скорее всего, известна из арифметики. Значит, и там существуют теоремы. А если в теореме условие и заключение поменять местами, то получится

утверждение, обратное к данной теореме. Такое утверждение, если оно окажется верным, логично назвать **обратной** теоремой. В следующей таблице приведены несколько теорем и обратных к ним утверждений.

Обратите внимание: не все обратные утверждения являются верными!

Теорема	Обратное утверждение
Если два угла вертикальные, то они равны.	Если два угла равны, то они вертикальные.
Против равных сторон в треугольнике лежат равные углы.	Против равных углов в треугольнике лежат равные стороны.
Если число делится на 3, то сумма его цифр тоже делится на 3.	Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.
У двух равных треугольников все углы соответственно равны.	Если все углы двух треугольников соответственно равны, то треугольники равны.
У двух равных треугольников все стороны соответственно равны.	Если все стороны двух треугольников соответственно равны, то треугольники равны.

Если прямая теорема верна, то обратное к ней утверждение верно не всегда. Как вы думаете: какие из обратных утверждений в приведённой выше таблице верны, то есть какие из них являются обратными теоремами?



УПРАЖНЕНИЕ

11 Напишите утверждения, обратные к данным:

- а Если начинается дождь, то человек открывает зонт.
- б Если два числа чётные, то их сумма тоже чётное число.
- в Равнобедренный треугольник имеет ось симметрии.
- г Квадрат — это четырёхугольник, у которого все углы прямые.
- д Каждый семиклассник занимается геометрией.

Верны ли все эти обратные утверждения?

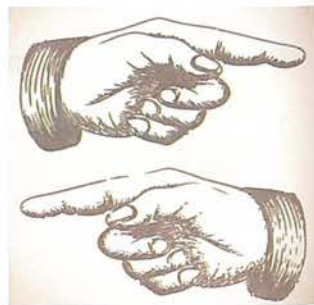


Рис. 11.24



ВОПРОСЫ

- 1 Какие точки называют симметричными относительно прямой линии?
- 2 Какое свойство осевой симметрии вы знаете?
- 3 Что такое серединный перпендикуляр к отрезку? Какое его свойство вы знаете?
- 4 Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?
- 5 Какие свойства равнобедренного треугольника вы знаете?
- 6 Какая фигура называется симметричной относительно прямой? Может ли одна фигура иметь сразу несколько осей симметрии?
- 7 В чём состоит признак равнобедренного треугольника? Чем он отличается от его свойства?
- 8 Из каких двух частей состоит каждая теорема? Покажите на примере теоремы о вертикальных углах, в чём состоят эти части.
- 9 Приведите пример прямого и обратного утверждений так, чтобы одно из них было верно, а другое — нет.

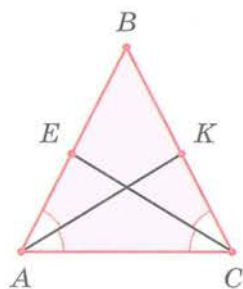


Рис. 11.25

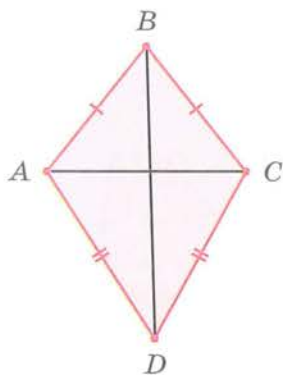


Рис. 11.26



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 11.1** Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны биссектрисы, проведённые к его боковым сторонам.

РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольнике ABC стороны AB и BC равны, CE и AK — биссектрисы треугольника, проведённые к этим сторонам (рис. 11.25). По свойству равнобедренного треугольника его углы при вершинах A и C равны, значит, равны и половины этих углов, то есть угол KAC равен углу ACE . Треугольники AEC и AKC равны по второму признаку, так как сторона AC у них общая, угол CAK равен углу ACE , а угол EAC равен углу KCA . Значит, $AK = CE$ как соответственные стороны равных треугольников.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 11.2** Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что у него $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что диагонали такого четырёхугольника перпендикулярны друг другу (рис. 11.26).

РЕШЕНИЕ: Треугольник ABC равнобедренный, поэтому угол BAC равен углу BCA . Обозначим их величину

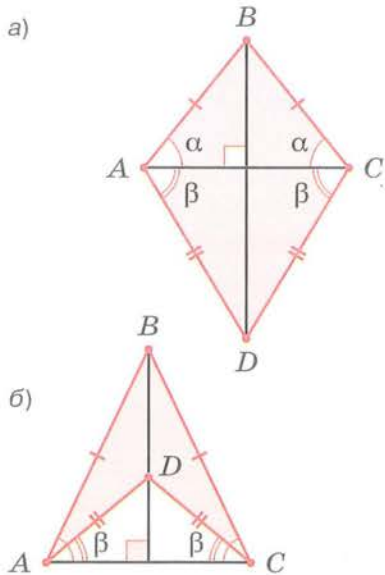


Рис. 11.27

буквой α . Точно так же треугольник ADC равнобедренный, поэтому углы ACD и CAD равны β . В задаче может быть два различных случая: либо четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, либо невыпуклый.

Рассмотрим вначале первый случай. Тогда углы BAD и BCD равны $\alpha + \beta$. Значит, треугольники ABD и CBD равны по первому признаку. Поэтому их углы ABD и CBD равны, то есть диагональ BD лежит на биссектрисе угла ABC . Но в равнобедренном треугольнике ABC биссектриса к его основанию совпадает с высотой. Поэтому диагональ BD перпендикулярна диагонали AC (рис. 11.27, а).

Во втором случае, когда четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый, углы BAD и BCD равны $\alpha - \beta$. Отсюда также следует, что треугольники ABD и CBD равны и диагональ BD лежит на биссектрисе угла ABC . Поэтому в равнобедренном треугольнике ABC она совпадёт с высотой, то есть прямая BD перпендикулярна прямой AC (рис. 11.27, б).

Что и требовалось доказать.

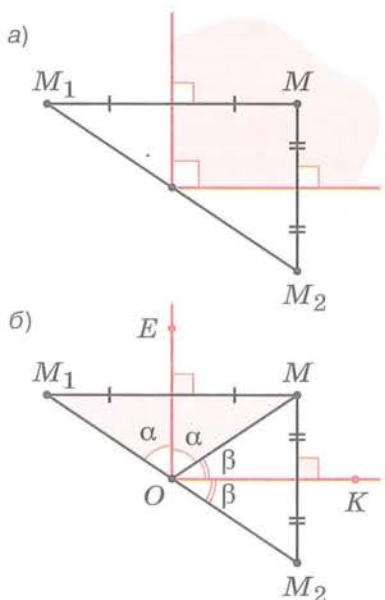


Рис. 11.28

☆☆☆ **ПРИМЕР 11.3** Внутри прямого угла взяли любую точку M . Её отразили симметрично относительно сторон этого угла и получили точки M_1 и M_2 . Докажите, что вершина угла лежит на середине отрезка M_1M_2 (рис. 11.28, а).

РЕШЕНИЕ: Обозначим данный нам прямой угол $ЕОК$. Треугольники $МOM_1$ и $МOM_2$ равнобедренные, так как в них высота совпадает с медианой, и поэтому лучи OE и OK являются биссектрисами их углов. Пусть углы $ЕOM$ и $КОМ$ равны α и β . Поскольку угол $ЕОК$ прямой, то по аксиоме углов должно быть $\alpha + \beta = 90^\circ$. Но тогда угол $М_1OM_2$ равен $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$. То есть точка O лежит на отрезке M_1M_2 . Кроме того, $OM_1 = OM = OM_2$, поэтому $OM_1 = OM_2$, значит, точка O — середина отрезка M_1M_2 (рис. 11.28, б).

Что и требовалось доказать.



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

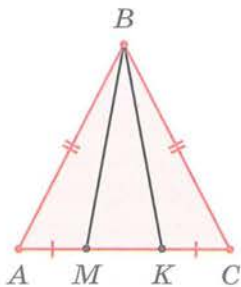


Рис. 11.29

11.1 ☆☆☆ Найдите пары равных треугольников на рисунке 11.29. По какому признаку можно утверждать, что они равны?

11.2 ☆☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ угол ABC равен углу ADC , $BC = CD$. Докажите, что его диагонали перпендикулярны друг другу (рис. 11.30).

11.3 ☆☆☆ Докажите, что биссектриса угла является его осью симметрии (рис. 11.31).

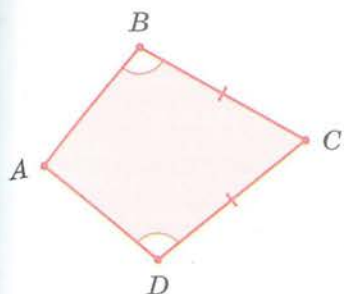


Рис. 11.30

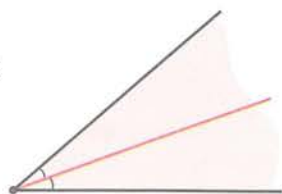


Рис. 11.31

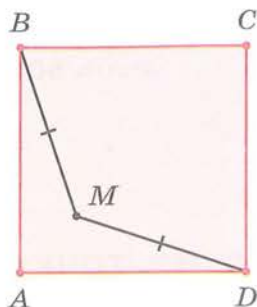


Рис. 11.32

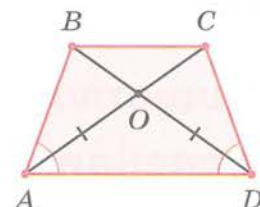


Рис. 11.33

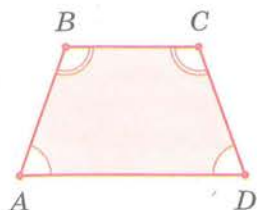


Рис. 11.34

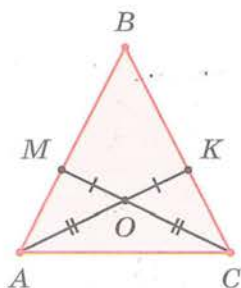


Рис. 11.35

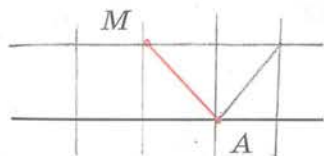


Рис. 11.36

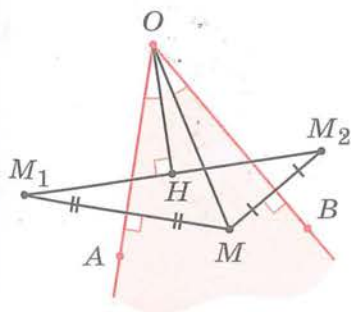


Рис. 11.37

11.4 ★☆☆ В квадрате $ABCD$ взяли точку M так, что $BM = DM$. Докажите, что точка M лежит на диагонали квадрата (рис. 11.32).

11.5 ★☆☆ Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 11.33). Известно, что угол BAD равен углу ADC , $AO = OD$. Докажите, что $AB = CD$.

11.6 ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ угол A равен углу D , а угол B равен углу C , причём прямые AB и CD не параллельны (рис. 11.34). Докажите, что $AB = CD$.

11.7 ★☆☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K . Отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Оказалось, что $AO = CO$, $MO = KO$ (рис. 11.35). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

11.8 ★☆☆ Точка M не лежит на прямой. Её соединили отрезком с некоторой точкой A на этой прямой так, что отрезок AM не перпендикулярен данной прямой (рис. 11.36). Докажите, что на этой прямой можно найти ещё ровно одну точку на таком же расстоянии от точки M .

11.9 ★☆☆ Сколько осей симметрии у двух пересекающихся прямых?

11.10 ★★★ Точку M симметрично отразили относительно сторон угла AOB и получили точки M_1 и M_2 . На отрезок M_1M_2 из точки O опустили перпендикуляр OH (рис. 11.37). Докажите, что углы AOH и BOH равны.

ТЫ БУДЕШЬ ПЛАКАТЬ
НА ЭТОЙ СТРАНИЦЕ



Существование перпендикуляра из точки

Наше знакомство с осевой симметрией мы начали со сложения листа бумаги. Это наглядно и очень просто: при сложении листа вдоль прямой линии для каждой точки на одной его половине (то есть в одной полуплоскости) однозначно находится точка на другой половине листа (в другой полуплоскости). Эти точки будут симметричными друг другу относительно данной прямой. Хорошо, но как всё это следует из уже принятых нами аксиом? Может быть, нам необходимо добавить ещё одну аксиому геометрии, аксиому «сложения листа бумаги»?

Откуда следует, что для любой точки на плоскости найдётся симметричная ей точка? Вы можете справедливо сказать, что про это написано в самом начале нашего параграфа: нужно просто из точки A на прямую l опустить перпендикуляр $АН$ и продолжить полученный отрезок на свою длину... Так и получится точка A_1 , симметричная точке A относительно прямой l . Всё так и есть, и особенно хорошо то, что вы читали этот параграф с самого начала!

Но всё-таки остаётся ещё один последний вопрос: почему из точки A на прямую l в принципе можно опустить перпендикуляр? Следует ли его существование из аксиом или не следует? Мы с вами сейчас убедимся, что сама возможность опустить перпендикуляр из точки на данную прямую следует из аксиом, принятых нами раньше. То есть это можно доказать.



Теорема

Из любой точки плоскости на данную прямую можно опустить перпендикуляр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть точка A не лежит на прямой l . Возьмём на этой прямой любую точку B и проведём отрезок AB . Если прямая AB случайно образует с прямой l угол 90° , то нам повезло — мы нашли нужный перпендикуляр. В противном случае между лучом BA и прямой l возникнут не равные друг другу смежные углы, один из которых будет острым. Допустим, что угол ABC острый и равен α (рис. 11.38).

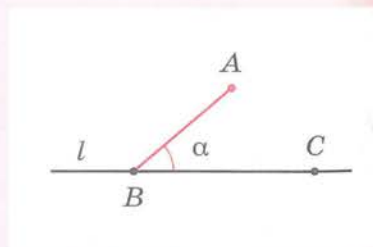


Рис. 11.38

От луча BC в другой полуплоскости всегда можно отложить угол, равный α . Это следует из аксиомы откладывания углов. Обозначим этот угол CBD (рис. 11.39).

Теперь на луче BD отложим отрезок $BA_1 = BA$. Это тоже можно всегда сделать по аксиоме откладывания отрезков. Точки A и A_1 находятся по разные стороны от прямой l , поэтому отрезок AA_1 должен пересечь эту прямую в некоторой точке H . Получаем, что треугольник ABA_1 равнобедренный, причём луч BC является его биссектрисой. Но по свойству равнобедренного треугольника биссектриса, проведённая к его основанию, совпадает с высотой и медианой. Тогда прямая AA_1 образует с прямой l угол 90° , то есть является искомым перпендикуляром. Что и требовалось доказать.

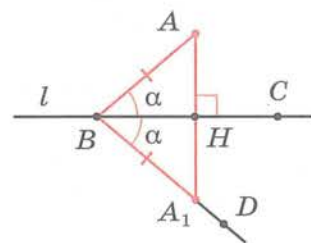


Рис. 11.39

Симметрия в архитектуре

Слово «симметрия» на языке древних греков означало, со-размерность, то есть правильность отношений. Симметричны античные храмы, египетские пирамиды, архитектура европейского классицизма (рис. 11.40, 11.41), регулярные садовые парки во Франции (рис. 11.42). В естественном ландшафте симметрия обычно не встречается. Поэтому там, где мы её наблюдаем, она всегда указывает на наличие порядка, наведённого самим человеком. В Европе слова «симметричный» и «красивый» когда-то были почти синонимами, показывали ясность плана, равновесие и единство частей целого. Любое крупное государство всегда стремилось в архитектуре создавать симметричные формы: дворцы и храмы, правительственные здания, зик-



Собор св. Павла в Лондоне

Рис. 11.40



Арка генерального штаба в Санкт-Петербурге

Рис. 11.41



Регулярный парк в Версале

Рис. 11.42



Министерство иностранных дел в Москве

Рис. 11.43



Замок в городе Осака

Рис. 11.44



Японский сад камней

Рис. 11.45



Рис. 11.46

кураты и пирамиды. Они символизировали собой прочность и стабильность самой власти, можно сказать, её не-сокрушимость (рис. 11.43). Кроме того, монументальные сооружения так в принципе проще было строить: попробуйте-ка возвести высокую башню несимметрично — она может рухнуть.

В то же время, например, культура Японии сложилась под сильным влиянием буддизма с его представлением о мимолётности красоты и отсутствии полной симметрии в окружающем мире. Традиционный японский дом имеет несимметричный план (рис. 11.44), таков же и японский сад (рис. 11.45). «В симметрии нет жизни», — говорят японцы. Хотя это не помешало им в XVII и XVIII веках усердно заниматься классической геометрией. В этот период храмовым искусством геометрических задач Сангаку увлекались многие японцы — монахи, крестьяне и самураи.

В последнее время с появлением новых материалов и развитием компьютерного моделирования появилась возможность возводить огромные устойчивые здания, не обладающие никакой симметрией. Таковы, например, современные небоскрёбы во многих странах Азии (рис. 11.46).

§12 Третий признак равенства треугольников

Треугольник — жёсткая фигура

Если две доски сбить одним гвоздём, то их можно свободно поворачивать друг относительно друга, то есть менять угол между ними. Если же взять четыре доски и закрепить их между собой четырьмя гвоздями, то получится деревянный «четырёхугольник» (рис. 12.4, а). На опыте легко убедиться, что эта конструкция будет «подвижной», то есть может менять свою форму. Достаточно потянуть такой «четырёхугольник» за две его противоположные вершины, и он сразу начнёт двигаться, меняя все свои углы (рис. 12.4, б). Давайте возьмём теперь три доски и тремя гвоздями собьём их между собой. Полученный деревянный «треугольник» сразу станет «жёстким», то есть его форму невозможно будет изменить, даже приложив силу (рис. 12.4, в). Почему так происходит? Дело в том, что из одних и тех же четырёх отрезков можно составить сколько угодно разных четырёхугольников, а треугольник с данными тремя сторонами может быть только один. Поэтому говорят, что треугольник — это **жёсткая фигура**, то есть три его стороны однозначно определяют все его углы.

Человек давно заметил, что три доски, сбитые в треугольник, дают жёсткую конструкцию. А если необходимо сделать жёсткий четырёхугольник, то нужно прибить ещё одну доску по его диагонали (рис. 12.4, г). Тогда этот четырёхугольник будет состоять из двух жёстких треугольников и поэтому сам обретёт жёсткость. Вот почему на заборе, калитке или двери, сбитой из досок, есть поперечная перекладина, прибитая наискосок, так сказать, по диагонали (рис. 12.1). Она придаёт жёсткость всей конструкции, не позволяет ей «складываться». Принцип жёсткого треугольника необходим при установке стропил на крыше дома (рис. 12.2), перекрытий железнодорожного моста (рис. 12.3).



Рис. 12.1



Рис. 12.2



Рис. 12.3

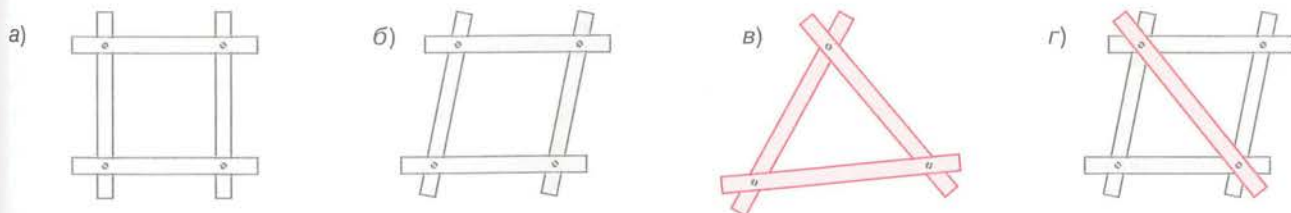


Рис. 12.4

Даже строительные козлы сколачивают так, иначе они упадут под тяжестью человека. Из жёстких треугольников можно собирать и более сложные инженерные конструкции, которые будут сохранять свою форму (рис. 12.5, 12.6).

Третий признак равенства треугольников

И всё же: почему из трех данных досок можно скотить только один треугольник? Это кажется настолько очевидным, что похоже на аксиому. Тем не менее данное утверждение не аксиома, а теорема. То есть его можно строго доказать. Давайте рассуждать вместе: если все углы треугольника однозначно определяются по длинам трёх его сторон, то тогда все треугольники, которые можно составить из одних и тех же отрезков, должны быть равны между собой. В этом и заключается важная теорема, которая совершенно логично называется



Рис. 12.5



Рис. 12.6



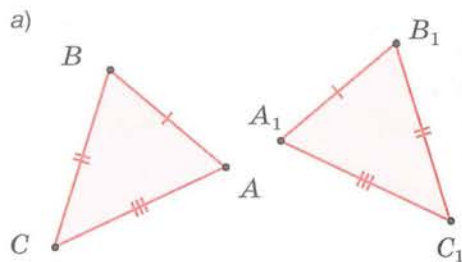
Третий признак равенства треугольников

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, то такие треугольники равны (рис. 12.7, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны все стороны. Докажем, что эти треугольники равны. Поскольку длины сторон AC и A_1C_1 одинаковы, совместим их так, чтобы вершина A совпала с вершиной A_1 , а вершина C — с вершиной C_1 . При этом по аксиоме треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ всегда можно расположить в разных полуплоскостях относительно прямой AC .

Давайте теперь соединим точки B и B_1 отрезком. Здесь может возникнуть три разных случая: либо отрезок BB_1 будет пересекать сторону AC , либо он не пересечёт её, либо пройдёт через один из концов отрезка AC . Пусть вначале отрезок BB_1 пересекает сторону AC . Треугольник ABB_1 равнобедренный, поэтому углы при его основании BB_1 равны. Обозначим их величину α . Треугольник CBV_1 тоже равнобедренный, значит, его углы при том же основании равны β (рис. 12.7, б).



$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

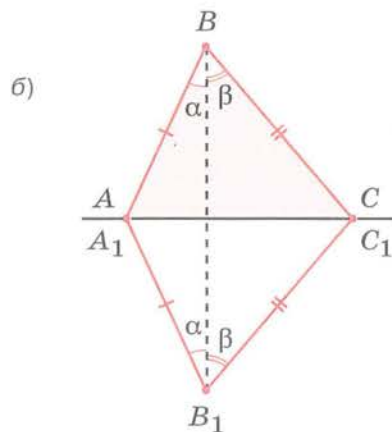


Рис. 12.7

Но тогда величина углов ABC и $A_1B_1C_1$ одинакова и равна $\alpha + \beta$. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по первому признаку, поскольку имеют две соответственно равные стороны и угол между ними.

Второй случай показан на рисунке 12.8, а. Здесь будут те же равнобедренные треугольники ABB_1 и CBV_1 с углами α и β при их основаниях, величина углов ABC и $A_1B_1C_1$ окажется также одинакова и будет равна $\beta - \alpha$ или $\alpha - \beta$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут равны по тому же первому признаку равенства.

Пусть в последнем случае отрезок BB_1 проходит прямо через вершину A . Тогда мы получим только один равнобедренный треугольник CBV_1 , углы при основании которого равны (рис. 12.8, б). Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ опять будут равны по двум сторонам и углу между ними. Точно так же разбирается случай, когда отрезок BB_1 проходит через точку C .

Теорема доказана.

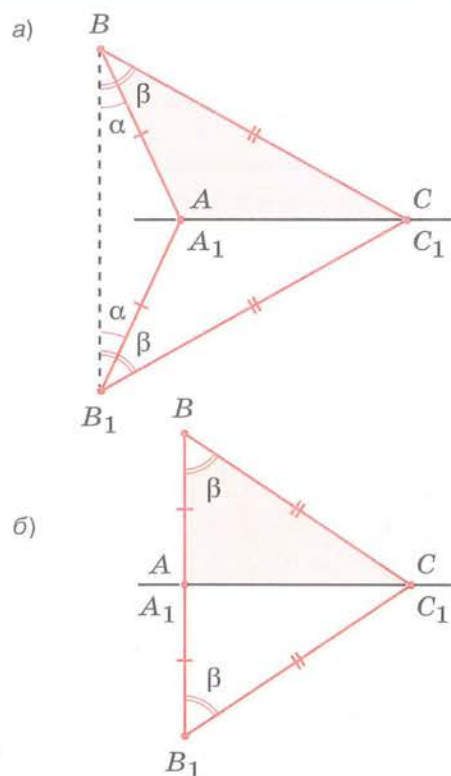


Рис. 12.8

Построение треугольника по трём сторонам

Предположим, что на листе бумаги нарисованы три отрезка и требуется построить треугольник, стороны которого равны трём этим отрезкам (рис. 12.9). Как это сделать? Для этого мы с вами будем, как и древние греки, пользоваться всего двумя классическими инструментами — циркулем и линейкой. Циркулем можно рисовать окружности с необходимым нам радиусом, а линейкой соединять отрезком любые две точки на плоскости.

Пусть длины трёх данных нам отрезков равны a , b и c . Давайте построим треугольник ABC на отрезке с длиной c , концы которого обозначим буквами A и B . Для этого нам необходимо построить третью вершину C этого треугольника, которая должна быть на расстоянии a от точки B и одновременно на расстоянии b от точки A . Вот здесь нам и потребуется циркуль. Ведь циркулем рисуют окружности, а окружность как раз и состоит из всех точек плоскости, которые лежат на одинаковом расстоянии от её центра. Поэтому мы берём циркуль, разводим его концы

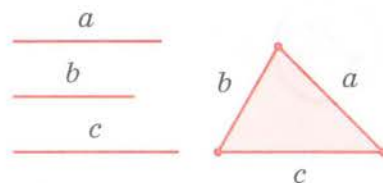


Рис. 12.9

на длину отрезка b и рисуем окружность с центром в точке A и радиусом b . Точно так же циркулем проводим вторую окружность с центром в точке B и радиусом a . Нужная нам точка C должна находиться на пересечении этих двух окружностей. Остаётся по линейке соединить точку C отрезками с точками A и B , и треугольник ABC построен. Его стороны в точности равны данным нам отрезкам a , b и c . Как можно увидеть из рисунка 12.10, две построенные нами окружности пересекаются в двух точках C и C_1 . Какую же точку следует тогда брать? Ответ — любую из них. Оба треугольника ABC и ABC_1 нам подходят, ведь их стороны равны нужным нам отрезкам a , b и c . Более того, эти треугольники должны быть равны между собой по третьему признаку равенства треугольников.

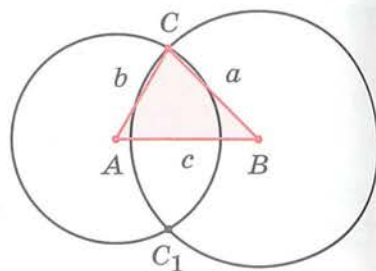


Рис. 12.10



ВОПРОСЫ

- 1 Почему треугольник называют жёсткой фигурой?
- 2 Почему инженерные конструкции часто состоят из треугольников?
- 3 В чём заключается третий признак равенства треугольников?
- 4 Какая аксиома была использована при доказательстве третьего признака равенства треугольников?
- 5 Почему третий признак равенства треугольников проходят после равнобедренного треугольника?
- 6 Как циркулем и линейкой построить треугольник по длинам трёх его сторон?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 12.1** Противоположные стороны выпуклого четырёхугольника попарно равны (рис. 12.11, а). Докажите, что его противоположные углы также равны.

РЕШЕНИЕ: Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне CD , а сторона BC равна стороне AD . Мы докажем, что углы при его вершинах B и D равны. Проведём диагональ AC этого четырёхугольника. Она разобьёт его на треугольники ABC и ADC . Эти треугольники равны по третьему признаку, поскольку $AB = CD$, $BC = AD$, а сторона AC у них общая (рис. 12.11, б). Значит, углы ABC и ADC в этих треугольниках соответственно равны. Точно так же можно доказать, что равны углы при вершинах A и C этого четырёхугольника.

Что и требовалось доказать.

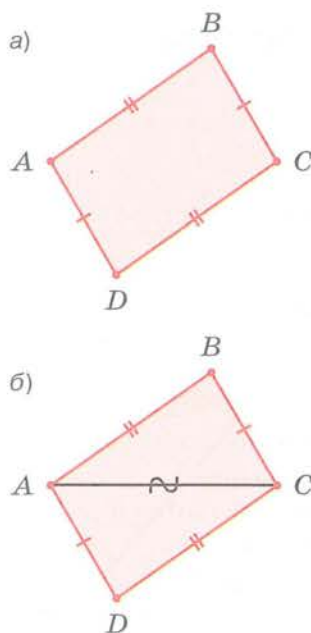


Рис. 12.11

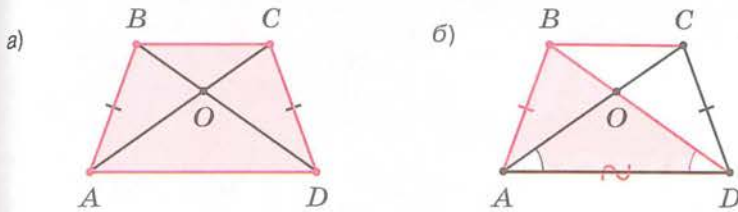


Рис. 12.12

☆☆☆ **ПРИМЕР 12.2** В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Его диагонали тоже равны и пересекаются в точке O . Докажите, что $AO = DO$ (рис. 12.12, а).

РЕШЕНИЕ: Заметим, что треугольник ABD равен треугольнику ACD по третьему признаку. В самом деле, у них $AB = CD$, $BD = AC$, а сторона AD — общая. Значит, их углы ADB и DAC соответственно равны (рис. 12.12, б). Но угол ADB совпадает с углом ADO , а угол DAC совпадает с углом DAO . Получается, что в треугольнике AOD равны два угла при стороне AD , то есть он равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Но тогда $AO = DO$.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 12.3** На клетчатой бумаге взяли точки A , B , C , D и E так, как это показано на рисунке. Докажите, что угол ACB равен углу DCE (рис. 12.13, а).

РЕШЕНИЕ: Отметим точку T на отрезке CE (рис. 12.13, б). Покажем, что треугольники ABC и DTC равны по трём сторонам. Очевидно, что $AB = TD$. Треугольники ACM и CKD равны по первому признаку, поэтому $AC = CD$. Кроме того, из равенства треугольников BCH и TCH следует, что $BC = CT$. Значит, у треугольников ABC и DTC равны все стороны, а сами треугольники равны по третьему признаку. Поэтому их углы ACB и DCT соответственно равны.

Что и требовалось доказать.

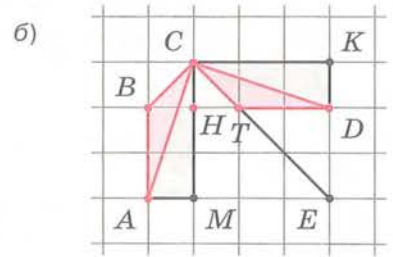
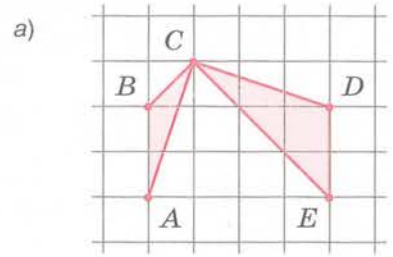


Рис. 12.13

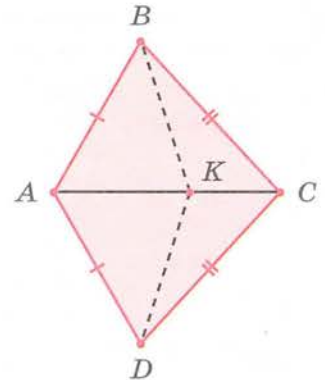


Рис. 12.14



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

12.1 ☆☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне AD , а сторона BC равна стороне CD . На его диагонали AC взяли произвольную точку K (рис. 12.14). Докажите, что $BK = DK$.

12.2 ☆☆☆ Все стороны выпуклого шестиугольника равны. Внутри него оказалась точка, которая находится на одинаковых расстояниях от всех его вершин (рис. 12.15). Докажите, что все углы этого шестиугольника тоже равны.



Рис. 12.15

12.3 ☆☆☆ У пятиугольника равны все стороны. Кроме того, все его диагонали равны между собой (рис. 12.16). Докажите, что все углы этого пятиугольника равны.

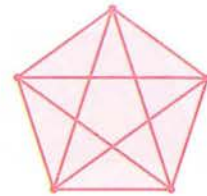


Рис. 12.16

12.4 ☆☆☆ Окружность пересекает стороны угла в четырёх точках. Оказалось, что две из них находятся на равном расстоянии от его вершины (рис. 12.17). Докажите, что центр этой окружности лежит на биссектрисе данного угла.

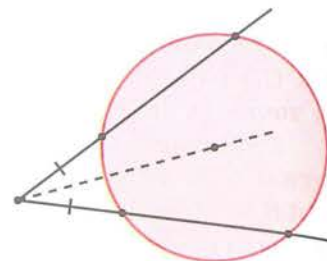


Рис. 12.17

12.6 ☆☆☆ В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагональ AC равна диагонали CE , диагональ AD равна диагонали BE , а также равны стороны BC и CD (рис. 12.19). Докажите, что его стороны AB и DE тоже равны.

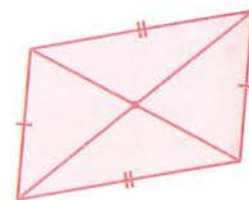


Рис. 12.18

12.7 ☆☆☆ Равны ли треугольники ABC и PQR , изображённые на рисунке 12.20?

12.8 ☆☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Кроме того, внутри него существует такая точка O , что $AO = OD$, $BO = CO$ (рис. 12.21). Докажите, что диагонали этого четырёхугольника равны.

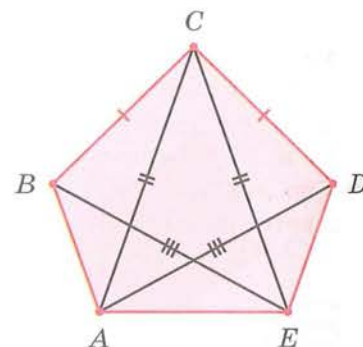


Рис. 12.19

12.9 ☆☆☆ На клетчатой бумаге взяли точки A, B, C, D и E так, как это показано на рисунке 12.22. Докажите, что угол ACB равен углу DCE .

12.10 ☆☆☆ Все стороны и одна диагональ первого четырёхугольника соответственно равны сторонам и диагонали второго. Докажите, что другие диагонали этих четырёхугольников тоже равны.

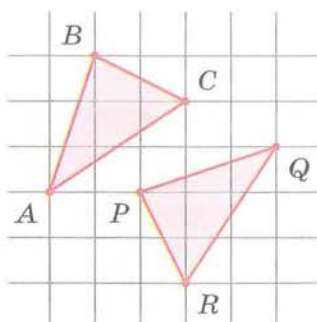


Рис. 12.20

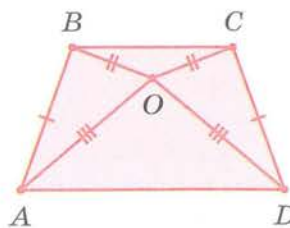


Рис. 12.21

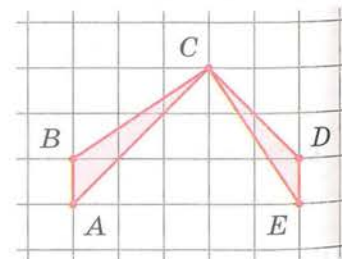


Рис. 12.22

4

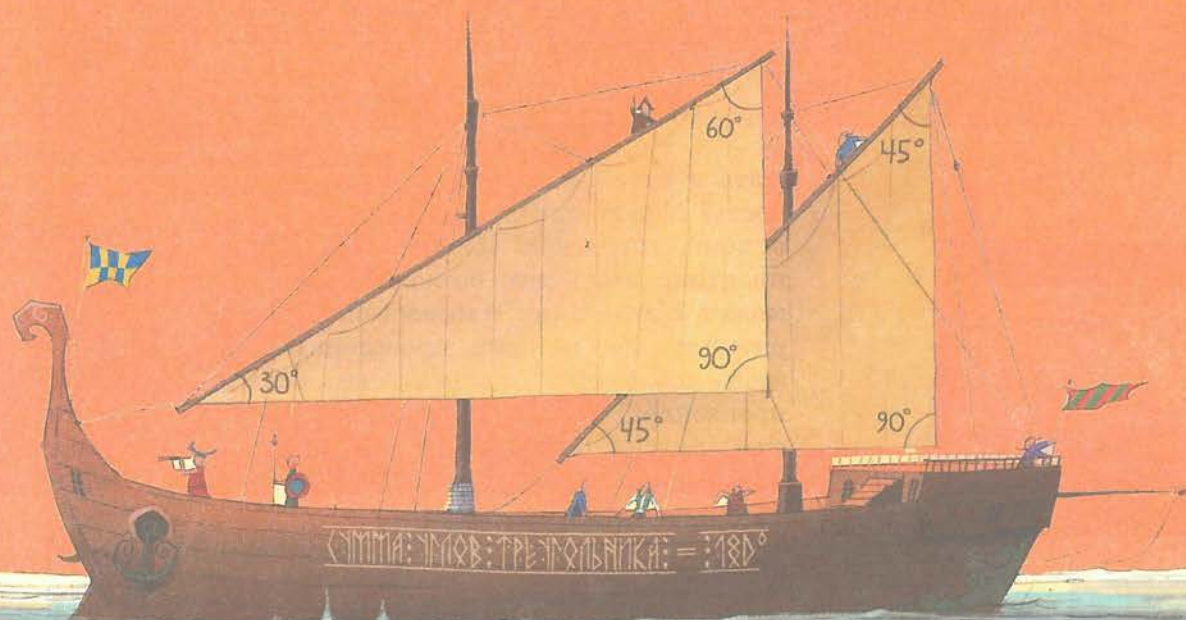
Сумма углов треугольника

§13 Параллельные прямые

§14 Сумма углов треугольника

§15 Расчёт углов в равных
треугольниках

§16 Прямоугольный треугольник



§13 Параллельные прямые



Рис. 13.1

Параллельные прямые

Помните ли вы, что такое параллельные прямые? В конце двадцатого века по телевизору можно было услышать забавную рекламу бытовой техники: «Параллельные прямые не пересекаются — доказано Евклидом. Надежная бытовая техника существует — доказано фирмой Z». У человека образованного такая реклама могла вызвать только улыбку. Ведь параллельные прямые не могут пересекаться просто по своему определению.

Давайте вспомним: на плоскости две различные прямые либо пересекаются только в одной точке, либо вообще не пересекают друг друга. Тогда их и называют **параллельными**. Итак:



Две различные прямые на плоскости называют **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Слово **параллельные** с древнегреческого языка переводится как «идущие рядом». А вот как длинно и тяжело определял параллельные прямые сам Евклид: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются». Почему же Евклид так подробно дал это простое определение? Начнём с того, что слово «прямая» обозначало у Евклида обычный отрезок. Вот почему его нужно было мысленно продолжать в ту или другую сторону. Кроме того, для древних учёных само существование параллельных прямых было далеко не очевидным.

По определению параллельные прямые должны лежать в одной плоскости. Но где на Земле взять эту плоскость? Можно сделать плоский стол, ровный каменный пол в доме, городскую площадь, в конце концов. Но где на практике взять всю бесконечную плоскость? На Земле не может быть таких плоскостей. А раз так, то как проверить, что две прямые, проведённые на маленьком кусочке этой плоскости, никогда не пересекутся? Вдруг это произойдёт через 100 километров от нашего чертежа или ещё дальше? Конечно, Евклид не стал бы доказывать того, что параллельные прямые не пересекаются. Но он придумал





секущая

Односторонние углы

Рис. 13.2



секущая

Накрест лежащие углы

Рис. 13.3



секущая

Соответственные углы

Рис. 13.4



Отличить накрест лежащие и односторонние углы от других совсем не трудно — их стороны, которые лежат на секущей, всегда содержат её отрезок между двумя данными прямыми.

мал, как проверить, что две данные прямые никогда не пересекутся, даже если их продолжать до бесконечности. Теорема об этом называется **признаком параллельности двух прямых**.

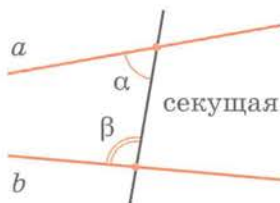
Для того чтобы кратко сформулировать этот признак, нам с вами необходимо будет ввести несколько новых обозначений. Предположим, что две данные прямые пересекла некоторая третья прямая. Тогда эту прямую для краткости называют просто секущей. Секущая с двумя данными нам прямыми образует всего восемь углов. Пару углов, которые лежат по одну сторону от этой секущей так, как это показано на рисунке 13.2, называют **односторонними** углами. Другую пару углов на рисунке 13.3, которые лежат уже по разные стороны от секущей, называют **накрест лежащими** углами. Всего же при пересечении двух прямых и секущей образуется две пары односторонних и две пары накрест лежащих углов. А ещё одну пару углов, которые тоже лежат по одну сторону от секущей, называют **соответственными**. Эти углы показаны на рисунке 13.4.

Теперь уже мы готовы сформулировать первый признак параллельности двух прямых.



Первый признак параллельности прямых

Если секущая образует с двумя прямыми односторонние углы, сумма которых равна 180° , то эти прямые параллельны.



Если $\alpha + \beta = 180^\circ$, то $a \parallel b$

Рис. 13.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть секущая пересекла прямые a и b в точках A и B и образовала с ними односторонние углы α и β , причём $\alpha + \beta = 180^\circ$. Угол, смежный с углом β , будет равен $180^\circ - \beta = \alpha$ (рис. 13.6, а). Также угол, смежный с углом α , равен β . Значит, с двух сторон от секущей мы имеем одинаковые углы α и β .

Мы докажем, что прямые a и b не могут пересекаться. Будем рассуждать от противоположного. Предположим, что прямые a и b не параллельны, значит, они пересекаются в некоторой точке C . Тогда по одну сторону от секущей обязательно образуется треугольник ABC , два угла которого равны α и β (рис. 13.6, б).

Давайте в другой полуплоскости от луча BA отложим угол, равный α , и потом на этом луче отложим отрезок $BC_1 = AC$ (рис. 13.6, в). Сделать это можно по аксиомам откладывания отрезков и углов. Тогда треугольники ABC_1 и ABC будут равны по первому признаку (рис. 13.6, г). Значит, угол BAC_1 должен быть равен β . Получается, что углы SAC_1 и SBC_1 развёрнутые, поскольку величина каждого из них равна $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Но тогда точки C , A и C_1 должны лежать на одной прямой. И то же самое можно сказать и про точки C , B и C_1 . Получается, что через точки C и C_1 проходят две различные прямые (рис. 13.6, д). А это невозможно по аксиоме прямой линии. Мы получили противоречие с аксиомой. А раз так, то наше предположение о пересечении прямых a и b в некоторой точке C неверно. Поэтому такой точки не может быть. То есть прямые a и b параллельны.

Что и требовалось доказать.

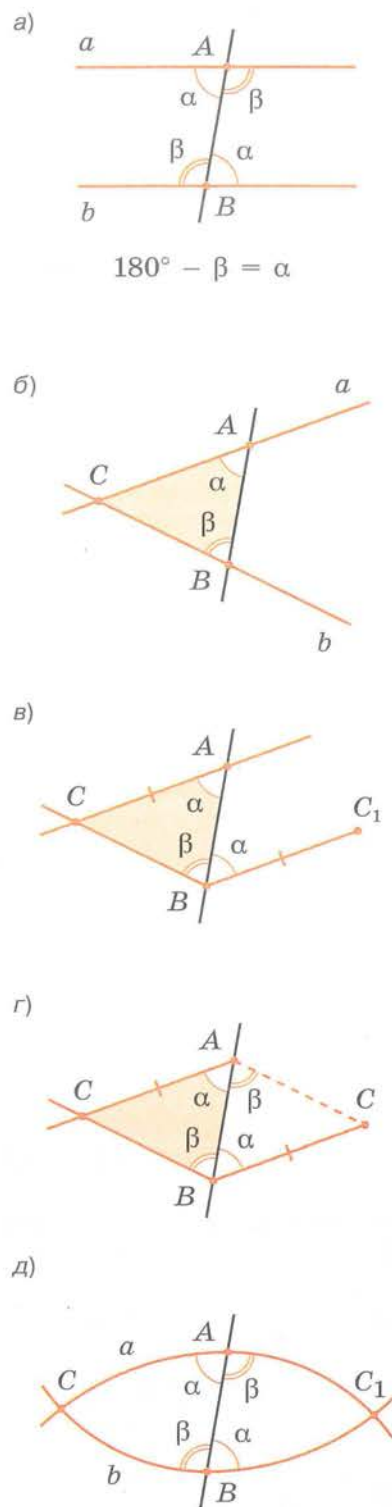


Рис. 13.6

Итак, первый признак параллельности двух прямых доказан. Мы с вами сформулировали его так же, как Евклид, через сумму односторонних углов при секущей. Однако часто в рассуждениях удобно использовать и другие его формы. Мы приведём здесь две самые известные из них:



Первый признак параллельности прямых

Другие формулировки

- 1 Если секущая образует с двумя прямыми равные накрест лежащие углы, то эти прямые параллельны.

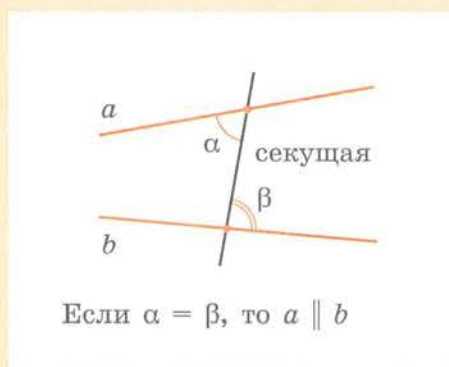


Рис. 13.7

- 2 Если соответственные углы при двух прямых и секущей равны, то эти прямые параллельны.

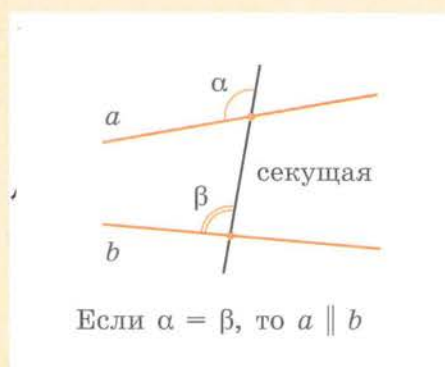
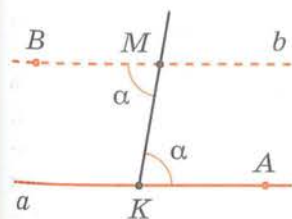


Рис. 13.8



УПРАЖНЕНИЕ

- 1 Покажите, что две другие формы первого признака параллельных равнозначны ему.



Существование параллельной прямой через точку M

Рис. 13.9

Так почему же через точку, которая не лежит на данной прямой, всегда можно провести параллельную ей прямую? Теперь понять это уже легко. Пусть точка M не лежит на прямой a. Возьмём на этой прямой любую точку K и соединим её отрезком с точкой M. Если на данной прямой взять любую другую точку A, то образуется угол AKM с некоторой величиной α . По аксиоме углов от луча KM в другую полуплоскость всегда можно отложить угол KMB с той же величиной α . Тогда прямые BM и AK должны быть параллельны по первому признаку, поскольку при секущей MK равны накрест лежащие углы (рис. 13.9). Зна-

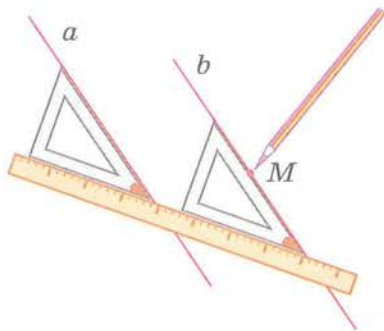


Рис. 13.10

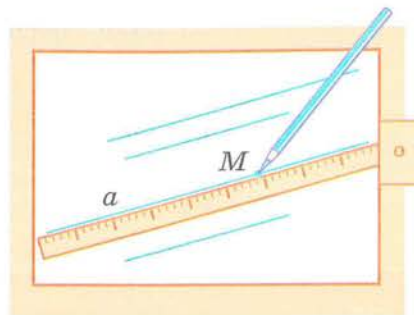


Рис. 13.11

чит, прямая BM параллельна прямой a . То есть такая прямая существует.

Существует множество практических способов для проведения параллельных прямых с помощью различных инструментов. Давайте посмотрим, как с помощью линейки и чертёжного угольника можно проводить прямые, параллельные данной. Чтобы провести через точку M прямую, параллельную прямой a , нужно приложить к этой прямой чертёжный угольник, а к нему — линейку так, как это показано на рисунке (рис. 13.10). Потом необходимо сдвигать угольник вдоль этой линейки, пока точка M не окажется на той его стороне, которая была приложена к прямой a . Вдоль этой стороны и проводят нужную прямую b . Прямые a и b будут параллельны по первому признаку, поскольку образуют с линейкой равные соответственные углы.

Похожим способом параллельные прямые можно проводить с помощью чертёжной рейсшины (рис. 13.11).

Аксиома параллельных

Среди всех аксиом Евклида была одна, которая две тысячи лет не давала покоя множеству математиков. Её называли «пятном на сочинениях Евклида» и пытались доказать как теорему, то есть вывести из других его аксиом. В списке геометрических постулатов Евклида это был его последний, так называемый пятый постулат.

Дело в том, что эта аксиома не была так очевидна, как другие, и сложно формулировалась. Видимо, сам Евклид это понимал и старался как можно позже начать пользоваться пятым постулатом в изложении своей теории. Так что же это была за аксиома? Давайте вначале приведём её формулировку, данную самим Евклидом: «Если прямая, падающая на две прямые, образует по одну сторону внутренние углы, в сумме меньшие двух прямых углов, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где расположены данные углы». На современный язык это можно перевести так:



Евклид

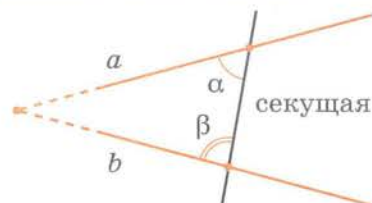
Рис. 13.12



Аксиома параллельных

Формулировка Евклида

Если секущая образует с двумя прямыми внутренние односторонние углы, сумма которых меньше 180° , то эти прямые пересекутся в той полуплоскости, где расположены данные углы.



Если $\alpha + \beta < 180^\circ$, то a не параллельна b

Рис. 13.13

В такой формулировке ясно, что аксиома параллельных — это утверждение, которое является противоположным к признаку параллельных прямых. Скорее всего, Евклид сам пытался его доказать, не смог этого сделать и оставил в виде аксиомы. Многие математики «доказывали» пятый постулат Евклида, но в их доказательствах всегда потом находили ошибки. Каждый раз оказывалось, что в ходе очередного «доказательства» незаметно был использован какой-то совершенно очевидный факт, которого тем не менее нет в списке аксиом Евклида. А значит, с математической точки зрения это доказательство незаконно.

Со временем накопился целый список из таких очевидных утверждений, каждое из которых может заменить собой аксиому параллельных прямых. В конце данного параграфа вы можете найти несколько утверждений из этого списка. Но самое известное из них мы приведём сейчас. Оно принадлежит греческому математику Проклу, который работал в Александрии в IV веке нашей эры. Вот как оно звучит:



Аксиома параллельных

Современная формулировка

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.



Только одна прямая

Рис. 13.14



Рис. 13.15

Такая формулировка аксиомы параллельных теперь считается общепринятой. Она очевидна, легко запоминается и на первый взгляд никак не связана со старинной формулировкой, данной Евклидом. Мы же с вами сейчас убедимся, что оба этих утверждения говорят об одном и том же.

Действительно, пусть две прямые с одной стороны от секущей образовали внутренние углы, сумма которых равна 180° (рис. 13.15, а). Тогда, как вы знаете, эти прямые должны быть параллельны по первому признаку. Но легко заметить, что с другой стороны от секущей сумма внутренних углов при этих прямых также должна быть равна 180° . Проведём через точку M пересечения секущей с одной из наших параллельных прямых любую другую прямую — на рисунке 13.15, б она показана чёрным цветом. Посмотрите: либо с одной, либо с другой стороны от секущей новая прямая со второй из параллельных будет образовывать углы, сумма которых будет меньше 180° . Тогда она обязана пересечь вторую из этих параллельных прямых по знаменитому пятому постулату Евклида. Значит, через точку M нельзя провести больше ни одной прямой параллельно данной. То есть такая прямая единственная. Так мы с вами убедились, что из старинной формулировки Евклида следует общепринятая.



УПРАЖНЕНИЕ

- 2 Покажите, что из современной формулировки аксиомы параллельных прямых следует пятый постулат Евклида.

А что вытекает из знаменитого пятого постулата Евклида, зачем он вообще нужен? Коротко ответить можно так: данная аксиома определяет «плоскую» геометрию, у которой нет никакой «кривизны». Из этой аксиомы также следует, что сумма углов любого треугольника на плоскости одинакова и равна 180° . Но чтобы доказать это исключительно важное свойство плоскости, вначале нам потребуется доказать свойство параллельных прямых.



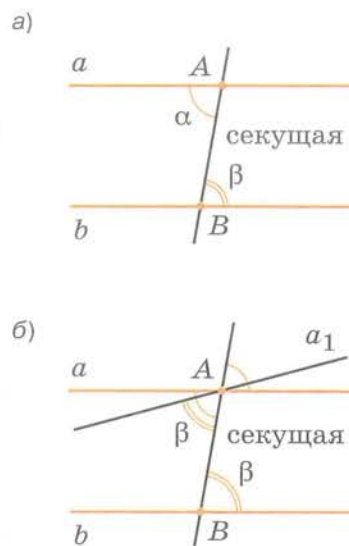
Первое свойство параллельных прямых

Если две прямые параллельны, то любая секущая образует с ними равные накрест лежащие углы (рис. 13.16, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть прямые a и b параллельны и некоторая секущая пересекает их в точках A и B . Будем опять рассуждать от противоположного: допустим, что эта секущая образует с прямыми a и b накрест лежащие углы α и β , которые не равны друг другу. Пусть, например, $\alpha > \beta$. Проведём через точку A ещё одну прямую a_1 так, чтобы угол между ней и прямой AB был в точности равен β (рис. 13.16, б). Тогда прямые a_1 и b должны быть параллельны по признаку, поскольку секущая AB образует с ними равные накрест лежащие углы. Но тогда получается, что через точку A , кроме прямой a , проходит ещё одна прямая a_1 , также параллельная прямой b . А вот это уже противоречит аксиоме параллельных. Полученное противоречие и показывает, что накрест лежащие углы при двух параллельных и секущей всегда должны быть равными.

Что и требовалось доказать.



Если $a \parallel b$, то $\alpha = \beta$

Рис. 13.16

Как и в случае с признаком, у данного свойства параллельных тоже есть другие формы. Все они являются утверждениями, обратными к своим признакам. Вот как они звучат:



Первое свойство параллельных прямых

Другие формулировки

- 1 Если две прямые параллельны, то сумма внутренних односторонних углов при любой секущей равна 180° .
- 2 Если две прямые параллельны, то при любой секущей соответственные углы равны.



УПРАЖНЕНИЕ

- 3 Нарисуйте нужные чертежи и покажите, что две другие формы свойства параллельных равнозначны первому их свойству.

Транзитивность параллельности



Транзитивность
параллельности

Рис. 13.17

Возьмём две параллельные прямые. Давайте проведем третью прямую параллельно одной из них. Будет ли она параллельна второй прямой? Конечно, — скажете вы, — это же очевидно, то есть в прямом смысле слова видно нашими глазами!

Но как вы уже знаете, в геометрии все очевидные вещи либо вообще берут на веру и тогда их называют аксиомами, либо строго доказывают. В данном случае мы имеем дело с утверждением о параллельности прямых линий, которую называют **транзитивностью**. И мы с вами его докажем. Что такое транзитивность? Объяснить это проще всего на примерах. Предположим, в вашем классе есть два ученика, которые с вами сейчас одного роста. Можно ли утверждать, что их рост одинаковый? Конечно, можно! — скажете вы. Вот это и есть транзитивность. То же самое можно сказать о размере вашей обуви или, допустим, цвете ваших волос. Можно даже сказать, что совпадение роста двух учеников передаётся от одного из них к другому через вас. Вы являетесь как бы посредником при передаче этого равенства между двумя другими учениками. Вообще любое отношение равенства, очевидно, должно обладать **транзитивностью**.

Или возьмём другой пример. Предположим, что вы ростом немного выше Пети, зато Ваня выше вас на целую голову. Верно ли, что Ваня тогда будет выше Пети? А как же может быть иначе? — скажете вы. Всё правильно. Дело в том, что такое понятие, как «быть больше», тоже обладает свойством транзитивности. Это нам с вами подсказывает наш человеческий опыт.



Слово «транзитивность» образовалось от латинского глагола *transit*, что означает «проходить» или «передавать». «*Sic transit gloria mundi*» — эта фраза на древней латыни вот уже две тысячи лет гласит: «Так проходит мирская слава!»



Рис. 13.18



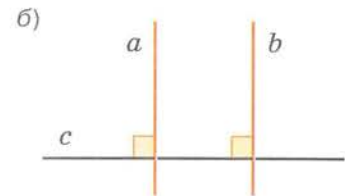
УПРАЖНЕНИЕ

- 4 В арифметике тоже есть транзитивность. Проиллюстрируйте её на примере делимости целых чисел.

Однако далеко не все отношения между объектами или даже людьми обладают транзитивностью. Если вы дружите с двумя ребятами, то они вовсе не обязаны дружить между собой. Два ваших друга могут даже не знать один о другом. Значит, отношение дружбы не обладает транзитивностью (рис. 13.19, а). То же самое можно сказать про вражду или знакомство. Конечно, в геометрии тоже есть такие примеры. Если две прямые одновременно перпендикулярны к третьей прямой, то между собой эти прямые вовсе не будут перпендикулярны — они будут параллельны. Значит, отношение перпендикулярности двух прямых тоже не обладает транзитивностью (рис. 13.19, б). А вот параллельность различных прямых обладает транзитивностью, то есть передаётся через «посредника» — третью прямую. Давайте теперь сформулируем это строго



Дружба не обладает транзитивностью



Перпендикулярность прямых не обладает транзитивностью

Рис. 13.19



Транзитивность параллельности прямых

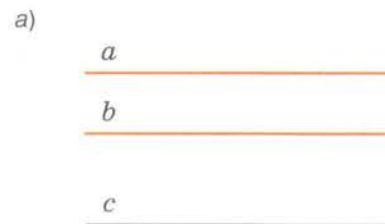
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть прямые a и b одновременно параллельны некоторой прямой c . Мы докажем, что прямые a и b должны быть параллельны между собой. Будем рассуждать от противного. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они по определению должны пересекаться в некоторой точке M (рис. 13.20, б).

Посмотрите на получившийся чертёж внимательно — вы ничего не замечаете? На нём через одну точку M проходят сразу две прямые, параллельные прямой c ! То есть это противоречит аксиоме параллельных. Значит, наличие самой точки M пересечения прямых a и b противоречит аксиоме. Получается, что такой точки нет, то есть прямые a и b должны быть параллельны между собой.

Что и требовалось доказать.



Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$

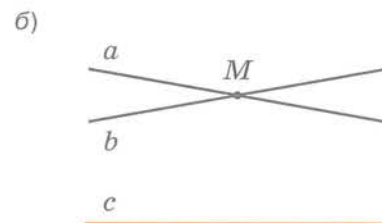


Рис. 13.20



Мы только что с вами доказали транзитивность параллельности прямых, опираясь на пятый постулат Евклида. Если же принять транзитивность параллельности прямых без доказательства, как аксиому, то из него можно легко получить аксиому параллельных.



УПРАЖНЕНИЕ

- 5 Докажите, что из транзитивности параллельности прямых следует пятый постулат Евклида.

Получается, что пятый постулат Евклида и транзитивность параллельности прямых — это одно и то же. То есть каждое из этих утверждений можно вывести из другого. Математики в таких случаях говорят, что такие утверждения равнозначны или **эквивалентны**. В конце параграфа вы можете найти другие утверждения, которые также эквивалентны знаменитому пятому постулату Евклида. Любое из них определяет плоскую геометрию Евклида, где через одну точку можно провести не больше одной прямой, параллельной данной.



УПРАЖНЕНИЕ

- 6 Найдите неизвестные углы на рисунках 13.21, $a-i$. На каждом из них параллельные прямые обозначены стрелочками.

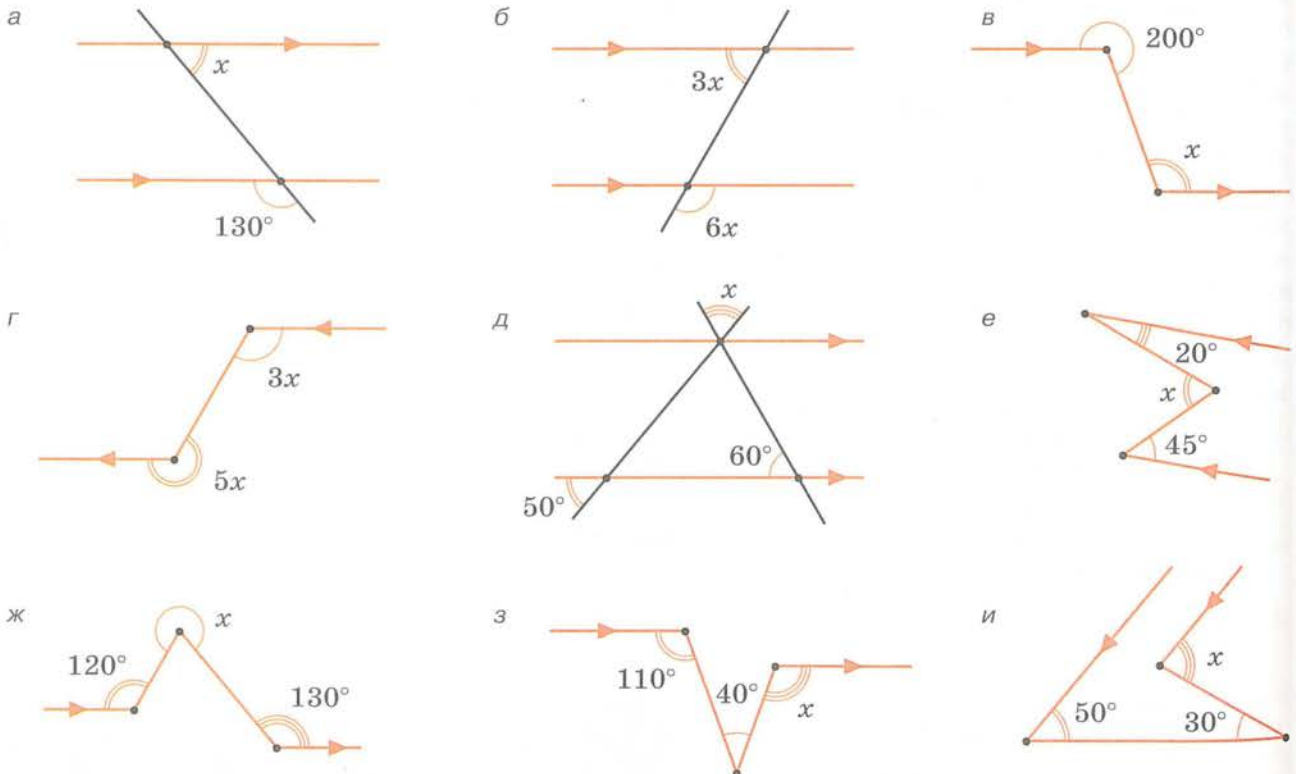


Рис. 13.21

Свойство полосы

На что похожа пара параллельных прямых? Конечно, она похожа на рельсы поезда, на лыжню, двойную сплошную линию на дороге или следы от колёс проехавшей телеги. Древние греки думали так же — не зря они называли такие прямые «идущими рядом». Правда, подобное сравнение будет уместным, только когда поезд или та же телега сами движутся по прямой линии. А на что похожа часть плоскости, расположенная между параллельными прямыми? Конечно же, на бесконечную полосу. С похожими полосами, только конечной длины, все мы имеем дело в жизни: любая лента, тесьма или ковровая дорожка, разложенные на плоскость, дадут нам такую полосу.

Каждый человек по опыту знает, что противоположные края у ленты или ковровой дорожки параллельны, а её ширина всюду одинакова. Вот только почему это так? Давайте вспомним, как вообще измеряют ширину полосы. Обычно перпендикулярно к её краю прикладывают линейку и смотрят, какой отрезок этой линейки окажется внутри полосы. Длину данного отрезка и считают расстоянием между краями полосы или её шириной.

Можно, конечно, свернуть ленту в рулон и измерить высоту полученного цилиндра (рис. 13.24). Будет то же самое. Только почему ширина любой полосы всюду одинакова? А дело в том, что с этим связано ещё одно важное свойство параллельных прямых.



Рис. 13.22



Рис. 13.23

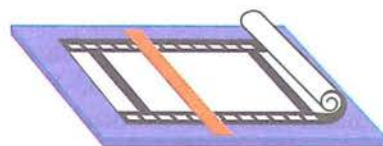


Рис. 13.24



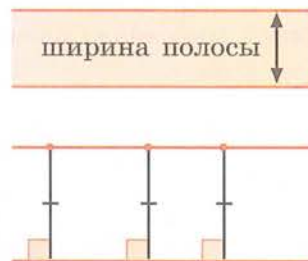
Второе свойство параллельных прямых

Длина перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой линии на параллельную ей прямую, постоянна.

Длину такого перпендикуляра называют расстоянием между параллельными прямыми или шириной полосы между ними.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Возьмём две параллельные прямые и на одной из них отметим две произвольные точки A и B . Опустим из них перпендикуляры AA_1 и BB_1 на параллельную прямую (рис. 13.25). Мы докажем, что $AA_1 = BB_1$. Для этого проведём отрезок A_1B и рассмотрим треугольники AA_1B и A_1BB_1 . Прямые AA_1 и BB_1 одновременно перпендикулярны одной прямой, поэтому должны быть парал-



лельны друг другу по первому признаку параллельных. Значит, по первому свойству параллельности они образуют с секущей A_1B равные накрест лежащие углы AA_1B и B_1BA_1 . А так как сами прямые AB и A_1B_1 параллельны по условию, то они тоже образуют с секущей A_1B равные накрест лежащие углы ABA_1 и B_1A_1B . Но тогда треугольники AA_1B и A_1BB_1 должны быть равны по второму признаку, поскольку имеют общую сторону A_1B и два прилегающих к ней равных угла. Поэтому $AA_1 = BB_1$. Таким образом, длина перпендикуляра, опущенного из любой точки B нашей прямой на параллельную ей прямую, равна отрезку AA_1 , то есть она постоянна.

Что и требовалось доказать.

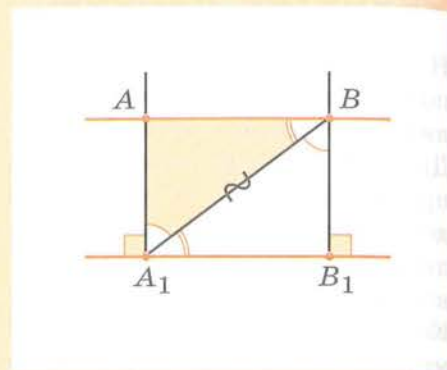


Рис. 13.25

Знаете, как плотники или строители проводят параллельные линии? Наивно думать, что для этого они каждый раз проводят секущую прямую и откладывают от неё равные накрест лежащие углы. На практике это было бы слишком сложно. Вспомните, как у вас дома вешают обыкновенные полки. Чтобы полка висела горизонтально, она должна быть параллельна полу — иначе предметы с неё будут падать (рис. 13.26). А как проще всего добиться этой параллельности? Все правильно: точки крепления полки к стене нужно отметить на одинаковой высоте над полом, тогда ваша полка будет висеть «прямо», а не «криво». Расстояние до пола обычно вычисляют по длине отвеса или перпендикуляра к нижнему краю стены.

Знаете, почему так делают? Это простое правило связано с ещё одним признаком параллельных прямых, с которым мы сейчас познакомимся.

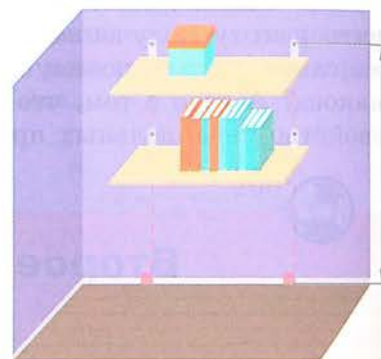


Рис. 13.26



Второй признак параллельных прямых

Если две точки одной прямой лежат по одну сторону от другой прямой и находятся на одинаковых расстояниях от неё, то эти две прямые параллельны.

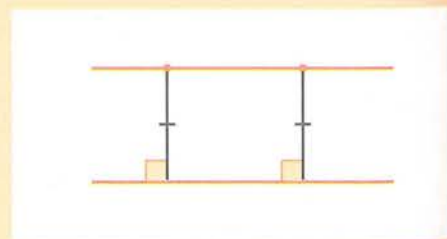


Рис. 13.27

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Напомним, что расстоянием от точки до прямой считают длину перпендикуляра, опущенного из неё на эту прямую l (рис. 13.28, а).

Пусть точки A и B находятся с одной стороны от прямой l на равных от неё расстояниях.

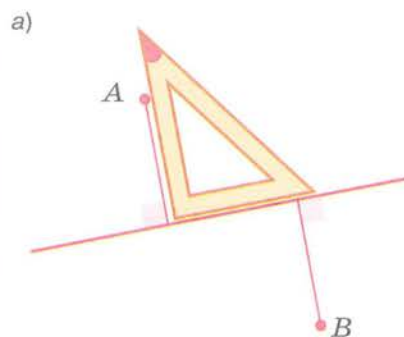
Итак, пусть AA_1 и BB_1 — два перпендикуляра, проведённых из точек A и B к прямой l . По условию они равны, то есть $AA_1 = BB_1$. Мы докажем, что прямые AB и l параллельны. Для этого проведём отрезок A_1B и рассмотрим треугольники AA_1B и A_1BB_1 . Так как прямые AA_1 и BB_1 одновременно перпендикулярны прямой l , то они должны быть параллельны друг другу по признаку. Тогда по первому свойству параллельных они образуют с секущей A_1B равные накрест лежащие углы AA_1B и B_1BA_1 . Значит, треугольники AA_1B и A_1BB_1 будут равны по первому признаку, поскольку $AA_1 = BB_1$, сторона A_1B у них общая, а углы между этими сторонами равны. Поэтому в этих треугольниках равны углы ABA_1 и BA_1B_1 (рис. 13.28, б). Но эти углы — накрест лежащие при прямых AB , l и секущей. Значит, прямая AB должна быть параллельна прямой l по первому признаку параллельных.

Что и требовалось доказать.

Давайте теперь с одной стороны от прямой l возьмём три любые точки, расстояние от которых до этой прямой одинаково. Будут ли все эти точки лежать на одной прямой? Конечно, — скажете вы, — как же может быть по-другому? Так оно и есть, а связано это опять с аксиомой параллельных. В самом деле, если расстояния от точек A , B и C до прямой l равны, то прямые AB и BC должны быть параллельны прямой l по второму признаку. Но по аксиоме параллельных через точку B можно провести только одну прямую, параллельную l (рис. 13.28, в). Поэтому прямые AB и BC должны совпасть. А это значит, что точка C лежит на прямой AB . Поскольку точка C была выбрана нами произвольно, то:

Все точки, расположенные по одну сторону от данной прямой и находящиеся от неё на одинаковом расстоянии, образуют прямую, параллельную прямой l .

В данной полуплоскости относительно прямой l других таких точек нет.



Расстояние от точки до прямой

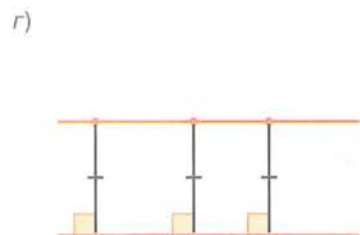
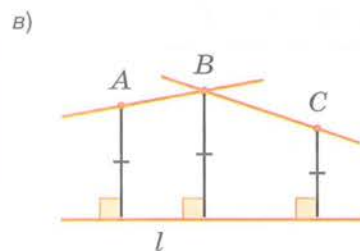
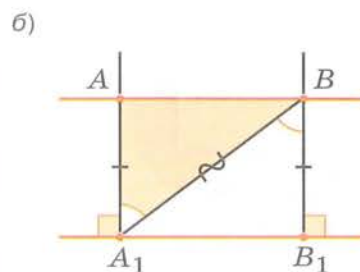


Рис. 13.28

Расстояние от точки до прямой — это длина самого короткого из отрезков, которым можно соединить данную точку с точками прямой линии. Через несколько параграфов мы с вами строго докажем, что самый короткий из этих отрезков — это перпендикуляр, опущенный из данной точки на прямую.



УПРАЖНЕНИЯ

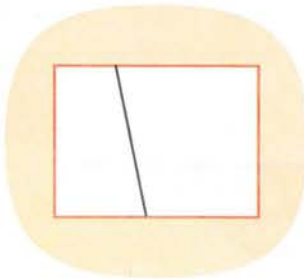


Рис. 13.29

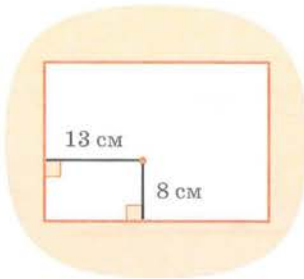


Рис. 13.30

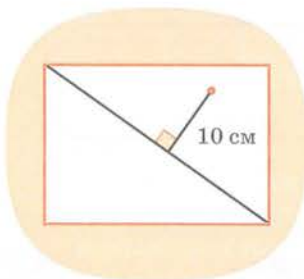


Рис. 13.31

- 7 Натяните в комнате две нитки так, чтобы они были параллельны.
- 8 На листе бумаги проведите прямую линию, не параллельную краям листа. Без циркуля и линейки, только складывая эту бумагу, получите на ней прямую, параллельную нарисованной (рис. 13.29).
- 9 С помощью листа бумаги формата А4 изготовьте квадрат со стороной 21 см. Постройте в нем точку так, чтобы расстояния от неё до сторон квадрата были равны 8 см и 13 см (рис. 13.30). Верно ли, что эта точка лежит на диагонали квадрата?
- 10 Возьмите лист бумаги формата А4. Проведите диагональ этого прямоугольника. А теперь постройте на этом листе все точки на расстоянии 10 см от данной диагонали (рис. 13.31).



ВОПРОСЫ

- 1 Какие прямые называют параллельными?
- 2 Какие вы знаете признаки параллельных прямых?
- 3 Что называется расстоянием от точки до прямой?
- 4 Как Евклид формулировал свой пятый постулат?
- 5 Как звучит общепринятая формулировка аксиомы параллельных прямых?
- 6 Что такое транзитивность параллельности прямых?
- 7 Где расположены все точки, находящиеся по одну сторону от прямой на равном от неё расстоянии?
- 8 Какие вы знаете геометрические отношения, которые не обладают транзитивностью?
- 9 Какие вы знаете отношения «из жизни», которые не обладают транзитивностью?

- 10 На чём основан практический способ проведения параллельных прямых с помощью чертёжной рейшины?
- 11 Две точки одной прямой находятся на равных расстояниях от другой прямой. Обязательно ли эти прямые параллельны?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 13.1** Прямая пересекает две параллельные в точках A и B . Биссектрисы двух смежных углов с вершиной в точке B при одной из этих прямых пересекают другую параллельную прямую в точках C и E . Докажите, что $AC = AE$.

РЕШЕНИЕ: Угол ACB равен углу MBC , поскольку они накрест лежащие при двух параллельных и секущей BC . Поэтому углы ACB и ABC равны. Значит, треугольник ABC равнобедренный по признаку, то есть $AC = AB$. Также легко доказать, что и треугольник ABE тоже равнобедренный. Поэтому $AE = AB$. Таким образом, $AC = AE$. Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 13.2** В пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB и DE параллельны, а углы ABC и CDE равны 100° и 120° соответственно. Найдите величину угла BCD .

РЕШЕНИЕ: Проведём через точку C прямую CF параллельно прямым AB и DE . Тогда углы ABC и BCF будут односторонними при параллельных AB и CF и секущей BC . Поэтому их сумма должна быть равна 180° . Значит, угол BCF равен $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Также получим, что угол DCF равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Таким образом, искомым углом BCD равен $80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$.

Ответ: 140° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 13.3** К каждой стороне неразвёрнутого угла провели перпендикулярную прямую. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются.

РЕШЕНИЕ: Давайте рассуждать от противоположного. Предположим, что два перпендикуляра, проведённых к сторонам данного угла ABC , не пересекаются. Тогда они должны быть параллельны. Нарисуем их как две параллельные прямые k и l . Прямая AB перпендикулярна прямой k , поэтому по первому свойству параллельных она должна быть также перпендикулярна и прямой l . Но прямая BC также перпендикулярна прямой l по условию. Тогда по признаку параллельности прямые AB и BC должны быть параллельны. Но эти прямые имеют общую точку B , чего не может быть по определению. Мы получили про-

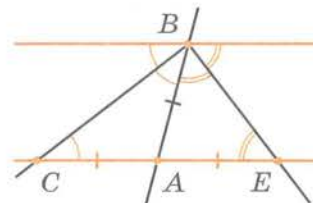
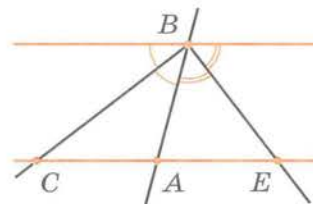


Рис. 13.32

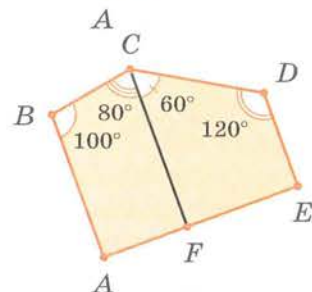
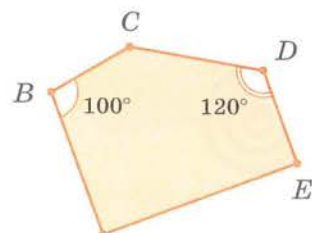


Рис. 13.33

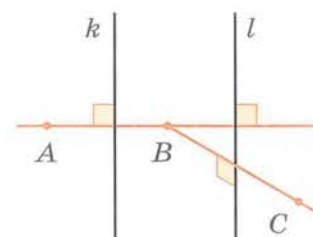
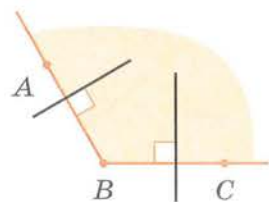


Рис. 13.34

тиворечие. Значит, прямые k и l не могут быть параллельны, то есть они пересекаются.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 13.4** Докажите, что прямые AB и CD на рисунке клетчатой бумаги параллельны (рис. 13.35).

РЕШЕНИЕ: Отметим точки M и K на чертеже и проведём отрезок BC . Треугольники MDC и BAB равны по двум сторонам и прямому углу между ними, поэтому угол MCD равен углу KBA . Обозначим их величину буквой α . Кроме того, прямые CM и BK параллельны, поэтому углы MCB и KBC равны как накрест лежащие при них и секущей BC . Обозначим их величину буквой β . Тогда величина углов DCB и ABC равна $\alpha + \beta$. Поскольку эти углы равны и являются накрест лежащими при секущей BC , то прямые AB и CD параллельны по первому признаку.

Что и требовалось доказать.

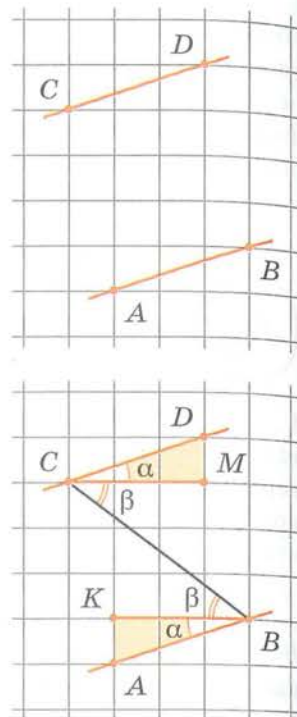


Рис. 13.35



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 13.1 ☆☆☆ Параллельно стороне равнобедренного треугольника провели прямую. Докажите, что она отсекает от него тоже равнобедренный треугольник (рис. 13.36).
- 13.2 ☆☆☆ Через точку на биссектрисе угла параллельно его сторонам провели две прямые. Они отсекают от данного угла четырёхугольник (рис. 13.37). Докажите, что все его стороны равны.
- 13.3 ☆☆☆ Стороны двух углов, показанных на рисунке 13.38, соответственно параллельны. Докажите, что эти углы равны.
- 13.4 ☆☆☆ Биссектриса угла прямоугольника разбивает его другую сторону на отрезки с длинами 5 и 7 см так, как это показано на рисунке 13.39. Найдите площадь этого прямоугольника.

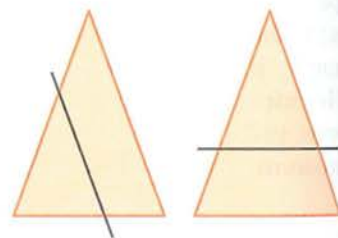


Рис. 13.36

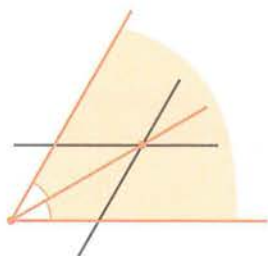


Рис. 13.37

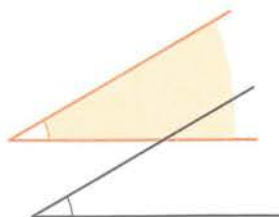


Рис. 13.38

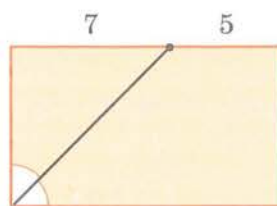


Рис. 13.39

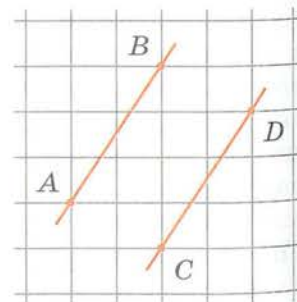


Рис. 13.40

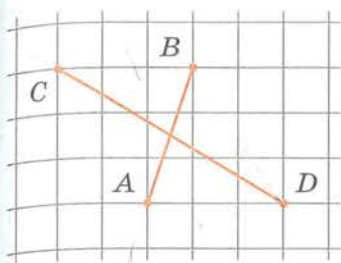


Рис. 13.41

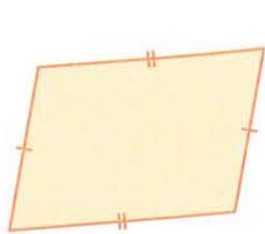


Рис. 13.42

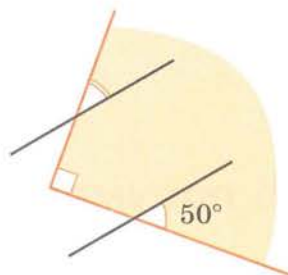


Рис. 13.43

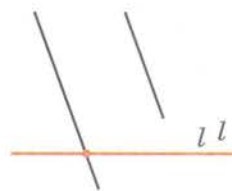


Рис. 13.44

13.5 ★☆☆ Докажите, что прямые AB и CD на клетчатой бумаге (рис. 13.40) параллельны.

13.6 ★☆☆ Докажите, что отрезки AB и CD на клетчатой бумаге (рис. 13.41) делятся точкой пересечения пополам.

13.7 ★☆☆ Противоположные стороны четырёхугольника попарно равны. Докажите, что эти стороны лежат на параллельных прямых (рис. 13.42).

13.8 ★☆☆ Две параллельные прямые пересекают стороны прямого угла. Одна из них образует с его стороной угол в 50° . Какой угол образует вторая прямая со второй стороной этого угла (рис. 13.43)?

13.9 ★☆☆ Одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую l . Докажите, что вторая прямая также пересечёт l (рис. 13.44).

13.10 ★☆☆ Бумажную полосу согнули вдоль отрезка AB так, как это показано на рисунке 13.45. Докажите, что углы CAB и ABD равны.

13.11 ★☆☆ Прямоугольный лист бумаги согнули так, что совместились его противоположные вершины. Докажите, что линия сгиба перпендикулярна диагонали этого прямоугольника (рис. 13.46).

13.12 ★☆☆ Две прямые пересекаются под углом 50° . Третья прямая образует с ними равные углы. Чему могут быть равны эти углы (рис. 13.47)?

13.13 ★☆☆ На плоскости провели 10 прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них не больше 18° (рис. 13.48).

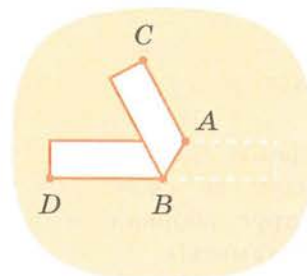


Рис. 13.45

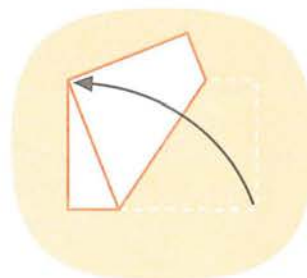


Рис. 13.46

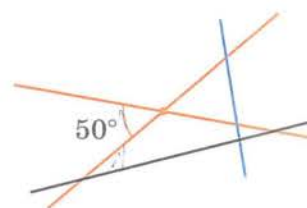


Рис. 13.47



Рис. 13.48



«Я должен ещё подумать!»

Очистить геометрию Евклида от «пятна», доказать знаменитый его пятый постулат пытались на протяжении двадцати веков многие учёные. Вот далеко не полный список этих попыток: Птолемей (II в.), Прокл (IV в.), Ибн Аль Хайсам (X в.), Омар Хайям (XI в.), Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.), Клавий (1514); Кательди (1603), Борелли (1658), Витале (1680), Валлис (1663), Саккери (1733), Ламберт (1766), Бертран (1778), Лагранж (1810), Лежандр (1823).

Известен курьёзный случай, когда Жозеф Луи Лагранж (рис. 13.49), делая доклад в Парижской академии наук со своим доказательством аксиомы параллельных, вдруг оборвал его со словами: «Я должен об этом ещё подумать!»

К началу XIX века количество ошибочных доказательств аксиомы параллельных достигло 55. Николай Лобачевский сказал об этом так: «Напрасные старания в продолжение двух тысяч лет».

Как правило, ошибки всех подобных «доказательств» состояли в том, что их авторы брали на веру какое-нибудь другое очевидное утверждение, из которого они уже строго выводили потом знаменитый пятый постулат Евклида. По сути эти допущения были другими формами того же постулата, то есть все они были эквивалентны ему. Приведём здесь некоторые из них.

ЭКВИВАЛЕНТЫ АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

- 1 Параллельность различных прямых обладает свойством транзитивности.
- 2 Существует хотя бы один прямоугольник (рис. 13.50).
- 3 Сумма углов во всех треугольниках одинакова (рис. 13.51).
- 4 Сумма углов хотя бы в одном треугольнике равна 180° ;
- 5 Все точки в одной полуплоскости, лежащие на одинаковом расстоянии от прямой линии, находятся на одной прямой (рис. 13.53).
- 6 Через любые три точки проходит либо прямая, либо окружность (рис. 13.54).

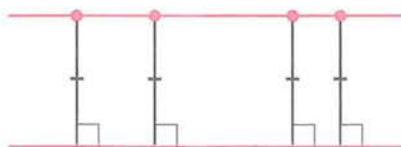


Рис. 13.53



Жозеф Луи Лагранж

Рис. 13.49

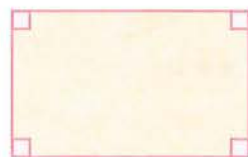


Рис. 13.50



Рис. 13.51

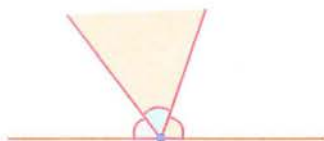


Рис. 13.52



Рис. 13.54

- 7 Существуют неравные треугольники с тремя одинаковыми углами (рис. 13.55).
- 8 Любая прямая, проходящая через точку внутри острого угла, пересекает хотя бы одну его сторону.

Если принять на веру любое из этих утверждений, мы сразу окажемся в «плоской» геометрии Евклида, то есть на бесконечном ровном листе бумаги, где нет никакой «кривизны». Если отвергнуть любое из этих утверждений, то геометрия сразу станет искривленной, неплоской, гораздо более сложной. Такую геометрию обычно называют неевклидовой или геометрией Лобачевского.

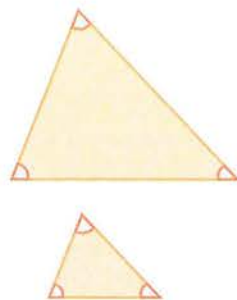


Рис. 13.55

Геометрия Лобачевского

Что же будет, если отвергнуть пятый постулат Евклида? Очевидно, что тогда через данную точку на плоскости можно будет провести больше одной прямой, параллельной данной. Больше одной — значит, как минимум две. Именно так и сформулировал великий русский математик Николай Иванович Лобачевский 11 февраля 1826 года главный постулат своей геометрии.



Аксиома Лобачевского

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести две прямые, параллельные данной.

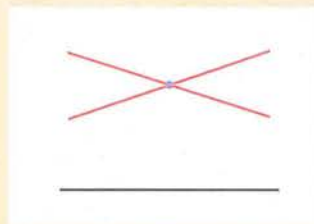


Рис. 13.56

Сразу бросается в глаза, что аксиома Лобачевского является отрицанием аксиомы параллельных Евклида. И это не случайно: Николай Лобачевский (рис. 13.57), как и многие его предшественники, сначала тоже пытался доказать пятый постулат Евклида. Он даже привёл своё доказательство на лекции перед студентами, но после тоже нашёл в нём ошибку. Неудивительно, что Лобачевский начал доказывать аксиому параллельных методом «от противного». Удивительно то, что, получив на этом пути множество очень странных выводов, он не остановился в своём исследовании, а продолжал его дальше. Ведь полученные им результаты противоречили всякому здравому смыслу! Попробуйте себе представить следующее: в геометрии Лобачевского существует прямая, которая проходит через точку внутри острого угла и не пересекает его сто-



Н. И. Лобачевский

Рис. 13.57



Николай Иванович Лобачевский провел 40 лет в Казанском университете, из которых 19 лет был его ректором. Его усилиями этот университет стал одним из лучших в России. Он читал лекции по арифметике, теории вероятностей, алгебре и геометрии, по физике, астрономии и даже гидравлике. Писал учебники для гимназий и заведовал библиотекой. Также его интересовали химия, ботаника и анатомия человека. Известно, что в юности после смерти своего старшего брата, он два года посвятил медицине.



Рис. 13.58

рон! Или такое: все точки в одной полуплоскости от прямой, лежащие на одинаковом от неё расстоянии, образуют кривую линию.

Если вдуматься, в этом нет ничего странного — ведь в геометрии Лобачевского не действует пятый постулат Евклида. Но современникам Николая Лобачевского это было трудно понять, над ним просто смеялись. Не помогло даже то, что Лобачевский стал ректором Казанского университета — то есть очень уважаемым человеком. Ведь сама природа, казалось, противоречила его выводам: легко ли себе представить, что существует геометрия, где нет ни одного квадрата, даже нет ни одного прямоугольника? Посмотрите вокруг: нас с вами окружают одни квадраты и прямоугольники — плитки на полу, столы и двери, скамейки и тетради...

Тем не менее в новой геометрии Николай Лобачевский не мог обнаружить противоречия. Да его там и не было, но поняли это уже только после его смерти. Оказалось, что подобная геометрия существует на кривых поверхностях, точнее — на поверхностях, кривизна которых отрицательна. Такие поверхности устроены довольно сложно, а вот поверхность с положительной кривизной нам должна быть очень хорошо знакома. Это поверхность нашего с вами земного шара. На ней тоже нет ни одного квадрата и ни одного прямоугольника, и при этом на ней нет никаких противоречий!

Николай Лобачевский более 30 лет в одиночку создавал совершенно новую неевклидову геометрию. Эти занятия дорого ему стоили — научное общество Петербурга резко критиковало эти его труды. Чего стоит, например, отзыв о его работе академика Остроградского: «Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели; большая часть книги осталась для меня столь же неизвестной, как если бы я никогда не видал её... Все, что я понял в геометрии Лобачевского, ниже посредственного. Из этого я вывел заключение, что книга господина ректора Лобачевского опорочена ошибками, что она небрежно изложена и, следовательно, не заслуживает внимания Академии». Лобачевскому не дали защитить диссертацию, и его авторитет как учёного сильно пошатнулся. Вот какова была цена человеческого непонимания!

Справедливости ради, необходимо сказать, что не все современники Николая Ивановича Лобачевского не могли его понять. В это же время в Германии жил и работал знаменитый математик Карл Гаусс (рис. 13.58), который получил множество глубоких результатов в арифметике и алгебре, а будучи ещё юношей, смог построить циркулем и линейкой правильный 17-угольник (рис. 13.59). Гаусса даже называли королём математиков, хотя его отец был простой садовник. Гаусс тоже много думал

над проблемой пятого постулата Евклида и одно время даже занимался геометрией кривых поверхностей. Видимо, он был первым, кто догадался о существовании других геометрий. Известно, что Гаусс измерял углы треугольника, образованного тремя горными пиками, и надеялся обнаружить отличие в своих измерениях от теории Евклида. Однако он публично хранил молчание об этих исследованиях и не опубликовал своих результатов — видимо, боялся уронить этим свой авторитет в научном мире. В 1819 году Гаусс получает письмо некоего Фердинанда Швейкарта, в котором тот пишет, что обнаружил «звёздную» геометрию, где нет необходимости в пятом постулате Евклида.

В том же письме Швейкарт сообщал, что обычная геометрия является лишь ограниченной частью «звёздной», в которой сумма углов любого треугольника меньше двух прямых углов. Ответ Гаусса на это письмо был таким: «Почти всё это списано с моей души!»

Сам Фердинанд Швейкарт был профессором римского права и математикой занимался как любитель. Он тоже не опубликовал своих исследований, хотя наверняка сделал бы это первым. До конца своей жизни Гаусс публично хранил молчание о геометрии без аксиомы параллельных, но даже в своих мыслях он продвинулся в ней не так далеко, как Лобачевский. Когда в 1840 году Николай Лобачевский впервые опубликовал свои результаты на немецком языке, в научной среде Германии их тоже не поняли. Однако Карл Гаусс прочёл эту книгу и был восхищён ею, о чём написал своим друзьям. После смерти в его библиотеке были найдены два экземпляра «Геометрических исследований» Лобачевского. Более того, в 1842 году Гаусс предложил избрать никому тогда не известного Лобачевского в академики Геттингенского учёного общества и послал ему об этом письмо и соответствующий диплом. Вот его рекомендация: «Королевскому обществу позволю себе предложить в корреспонденты нашего общества русского имперского статского советника Н. Лобачевского, профессора в Казани, одного из самых выдающихся математиков русского государства».

Гаусс даже стал учить русский язык, чтобы прочитать другие труды Лобачевского в оригинале! Вот выдержка из его письма: «Я начинаю читать по-русски довольно успешно и нахожу в этом большое удовольствие. Господин Кнорре прислал мне небольшой мемуар Лобачевского, написанный им по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке... возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном математике».

Правда, даже Гаусс сообщает о трудности понимания работ Лобачевского: «Его работы можно уподобить запутанному лесу, через который нельзя найти дороги, не изучив предварительно каждого дерева».



Рис. 13.59



Карл Гаусс

Рис. 13.60

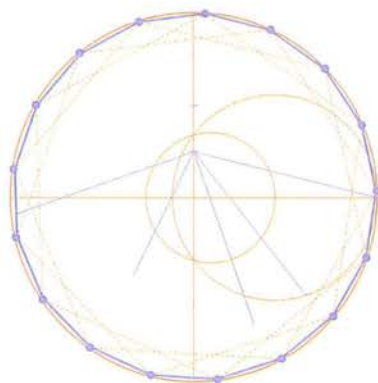


Рис. 13.61



Янош Больаи

Рис. 13.62

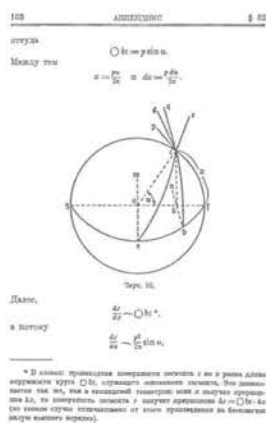


Рис. 13.63

Есть ещё один человек, имя которого навсегда связано с открытием новой неевклидовой геометрии. Его зовут Янош Больаи. Он был венгром, а Венгрия тогда принадлежала Австрийской империи. Ещё в детстве Янош проявил способности к математике и музыке: к десяти годам он имел собственные музыкальные сочинения, а в 13 лет овладел уже основами дифференциального и интегрального исчисления. Его отец, Фракаш Больаи, сам был математиком и даже другом знаменитого Гаусса. Отец хотел, чтобы его сын учился у его великого друга, но вышло по-другому. В 20 лет Янош заканчивает военно-инженерную академию в Вене и тогда же увлекается теорией параллельных. Об этом он сообщает своему отцу и получает от него следующий красноречивый ответ: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий... я знаю этот путь, я прошёл его до конца, я пережил эту беспроблемную ночь, и всякий светоч, всякую радость жизни я похоронил в ней... Молю тебя: оставь в покое учение о параллельных — оно лишит тебя здоровья, досуга и покоя, оно погубит для тебя всю радость жизни». Согласитесь: после такого высокопарного предостережения трудно было сыну удержаться и не заглянуть в эту «бездну, которая может поглотить тысячи Ньютонов»! И Янош, не вняв предостережению своего отца, последовал его примеру.

Уже в 1823 году он приходит к выводу, что пятый постулат Евклида доказать невозможно, и пишет свой первый и единственный законченный трактат, где кратко и очень изящно излагает основы совершенно другой геометрии. «Я создал странный новый мир из ничего!» — так говорит он в письме своему отцу. В том же году Янош поступает офицером на военную службу и потом отдаёт ей 10 лет жизни.

Но история на этом не заканчивается. Волею судьбы его трактат под витиеватым названием «Приложение, содержащее науку о пространстве, не зависящую от истинности или ложности последней аксиомы Евклида» так и не был опубликован. Похоже, отец Яноша сам не мог его до конца понять и потому не дал ему хода. А его сын всё это время служил офицером в маленькой румынской крепости Тамешвар. Только через восемь лет отец решает послать трактат Яноша своему другу по университету — великому Гауссу. В письмах друзьям Гаусс называет юного Яноша гением высшего класса. А вот его ответ отцу юного гения был довольно холоден. Приведём его здесь: «Теперь несколько слов о работе Вашего сына. Вероятно, Вы будете немало поражены, если я начну с того, что не могу похвалить её. Но я не могу сделать ничего иного, поскольку хвалить её означало бы хвалить самого себя. Всё содержание его работы, её результаты и путь, на который встал Ваш сын, почти везде согласуются с моими собственными мыслями, которые занимали меня в течение последних

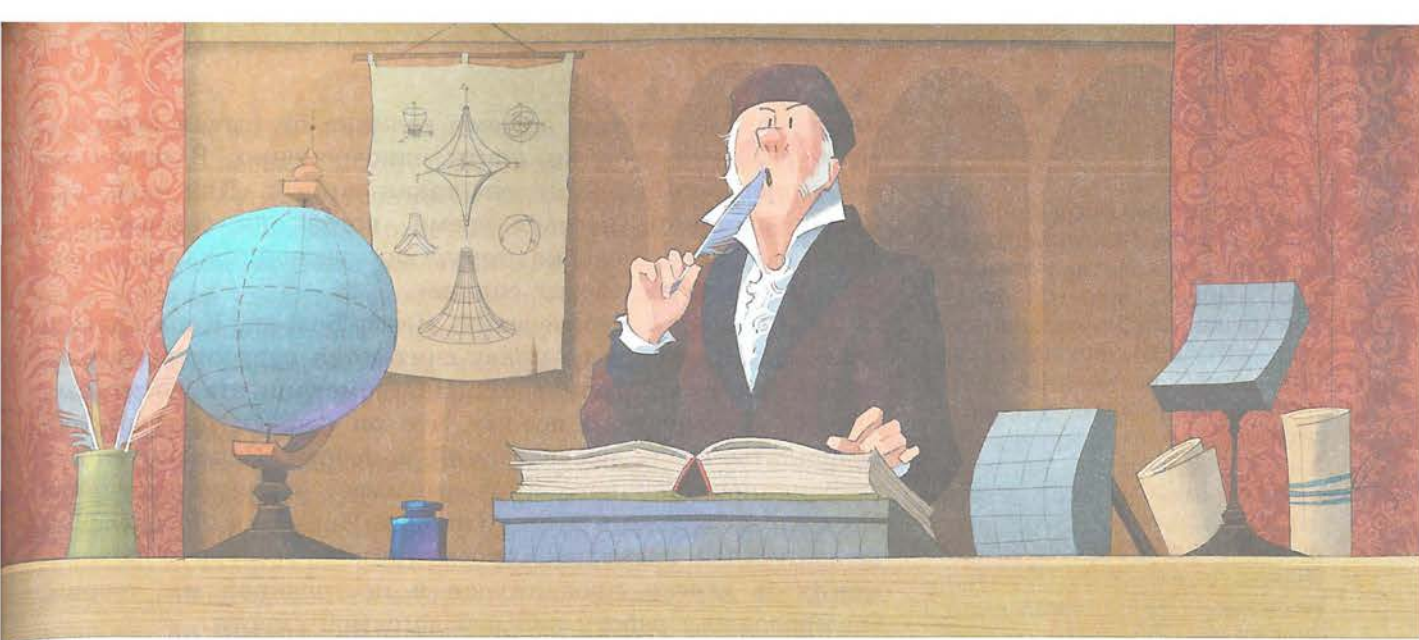


Рис. 13.64

30 лет. Я имел намерение сам перенести их на бумагу, но не хотел ничего из этого публиковать при жизни. Ведь большинство людей совершенно не имеют понятия о том, о чём здесь идёт речь. Поэтому я немало поражён тем, что освобожден от необходимости делать это сам, и меня радуется, что именно сын моего старого друга предвосхитил меня». Таким образом, получалось, что молодой Янош просто прочитал мысли Гаусса!

Ответ Гаусса нанёс честолюбивому Яношу глубокую душевную рану. Его здоровье пошатнулось, характер сильно испортился, и в 1833 году Янош навсегда оставляет военную службу. Годом раньше его отец публикует книгу по математике, в приложении к которой помещает Appendix — трактат своего сына, написанный им на латыни (рис. 13.61). Трактат был наконец опубликован, но ни Янош, ни его отец не знали, что в далёкой России ещё в 1829—1830 годах в каком-то «Вестнике казанского университета» впервые были опубликованы результаты по неевклидовой геометрии Николая Ивановича Лобачевского. До конца своей жизни Янош Больаи занимался математикой, но так и не смог завершить и опубликовать больше ни одной своей работы.

После его смерти было обнаружено несколько десятков тысяч черновиков. Более того, узнав о работах Лобачевского только в 1848 году, Янош Больаи пришёл в ярость. До конца своей жизни он был уверен, что никакого Лобачевского не существует, а все его результаты присвоил и опубликовал «жадный» Гаусс. Правда, как истинного учёного, его восхитили некоторые теоремы и доказательства «Геометрических исследований», и он написал к ним подробные комментарии. Последние годы жизни этот гениальный человек провел в глубокой депрессии. Он



Янош Больаи был поистине гениальным молодым человеком — он знал девять языков (включая китайский!), играл на скрипке, прекрасно фехтовал и слыл отъявленным дуэлянтом.

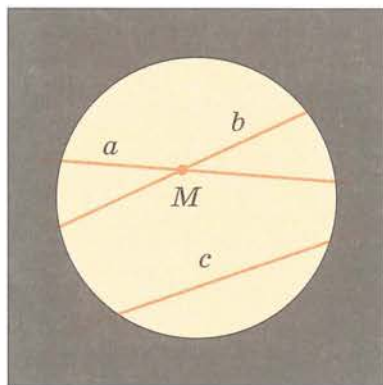


В конце жизни Лобачевский диктует свою 'Пангеометрию (то есть всеобщую геометрию), будучи уже слепым. Она была опубликована за год до его кончины в 1855 году в «Учёных записках Казанского университета».



Псевдосфера Бельтрами

Рис. 13.65



Модель Клейна

Рис. 13.66

много думал над тем, почему великие открытия совершаются разными людьми почти одновременно. В одном из его черновиков была найдена такая запись: «Для идей, как и для растений, настает время, когда они созревают в разных местах, подобно тому, как весной фиалки появляются везде, где светит солнце».

Николай Лобачевский, Янош Больаи, Карл Гаусс и Фридрих Швейкарт по праву считаются первооткрывателями неевклидовой геометрии. Но геометрия эта носит имя именно Лобачевского потому, что он первым опубликовал результаты своих исследований в печати. Запомните: для современного научного мира это имеет огромное значение! Но дело не только в этом. Николай Иванович Лобачевский не испугался насмешек современников, всеобщего непонимания и далеко продвинулся в построенной им теории. Он продолжал работу над ней до самой смерти.

Последнюю свою работу Николай Иванович заканчивает вопросом о том, какова на самом деле природа окружающего нас пространства, то есть каков этот мир —

евклидов он или нет? И сам же отвечает на этот вопрос так: «Один только опыт может подтвердить истину данного предположения: например, измерением углов прямолинейного треугольника...»

Итак, один только опыт может подтвердить истину... Это вам ничего не напоминает? Конечно же! Данный подход — это основа физики, в которой эксперимент решает всё. Получается, что геометрия — это тоже часть физики, то есть математическая теория, с помощью которой человек исследует данный ему мир. А каков этот мир, покажет только эксперимент. Так на самом деле и оказалось. Вскоре после смерти Лобачевского появились первые модели неевклидовой геометрии. В 1856 году итальянский математик Эудженио Бельтрами обнаружил материальные тела, на поверхности которых выполняется геометрия Лобачевского. Одно из них — это так называемая псевдосфера, немного похожая на трубу старинного граммофона (рис. 13.62).

Оказалось, что на этой поверхности через одну точку можно провести много «прямых» линий, не пересекающих данную «прямую». Само собой разумеется, «прямые» на такой кривой поверхности — это не прямые в обычном смысле этого слова. Так же как и на поверхности нашей Земли, такие «прямые» всегда идут по кратчайшему пути между своими точками — поэтому их и называют геодезическими. Ещё через 15 лет немецким математиком Фелик-

сом Клейном была обнаружена очень простая, но абстрактная модель неевклидовой геометрии. В этой модели вся плоскость — это внутренность некоторого круга, граница которого недостижима (рис. 13.63). Можно даже сказать, что это такая «круглая вселенная», на приближение к границе которой уходит бесконечное время. Точки в этой «вселенной» обыкновенные, отрезки тоже, а вот «прямые» — это отрезки, концы которых находятся на границе нашего круга. То есть дойти до «конца» такой «прямой» невозможно за конечное время.

Аксиома параллельных в «круглой вселенной» Клейна не выполняется. Посмотрите на рисунок: на нём через точку *M* проходит много прямых, которые не пересекают данную прямую *s*. Таким образом, перед нами явная модель неевклидовой геометрии. Как жаль, что ни Лобачевский, ни Больаи, ни Швейкарт или Гаусс не могли увидеть её при жизни!

Ну а как же обстоит дело в нашей вселенной? Какова её геометрия? В некоторой степени на этот вопрос смогла ответить теория относительности, созданная ещё одним гением Альбертом Эйнштейном. Оказалось, что согласно этой теории вблизи очень массивных тел лучи солнечного света должны искривляться. То есть прямые линии в поле очень сильной гравитации идут не так, как у Евклида. А ведь для человека путь луча света — это модель прямой линии. Получается, что само пространство должно искривляться силой тяготения! Как и любую физическую теорию, этот вывод необходимо было проверить на практике, то есть нужно было подтвердить его экспериментом. Эйнштейн пришел к своему открытию в 1916 году в разгар Первой мировой войны, и необходимо было ещё дождаться её окончания, чтобы поставить такой опыт. Ведь провести его можно было только во время полного солнечного затмения.

Идея эксперимента состояла в том, чтобы во время затмения сфотографировать звезду, которая по всем расчётам должна находиться позади Солнца и которую невозможно в этот момент увидеть с Земли. Если же световые лучи, проходя вблизи огромного Солнца на самом деле искривляются полем его гравитации, то они обогнут Солнце и звезду станет видно. Этот фантастический эксперимент был поставлен 29 мая 1919 года на маленьком острове возле западного побережья Африки и блестяще подтвердил догадку Эйнштейна (рис. 13.64)! Видите, как сложно устроен мир, в котором мы с вами живём!

Вопрос, поставленный Николаем Лобачевским в конце жизни, так и остаётся пока открытым. Даже если окружающее нас пространство искривлено, то заметить это на тех расстояниях, с которыми человек имеет дело, пока невозможно. Сам Лобачевский проводил такой эксперимент: он измерял углы треугольника, одна вершина кото-



Легко проверить, что в круглой модели Клейна выполняются все аксиомы геометрии Евклида, кроме аксиомы параллельных.

В самом деле: любые две её точки можно соединить обычным отрезком, который можно продолжить до пересечения с границей нашего круга. То есть через любые две точки можно провести прямую. Из трёх точек на прямой здесь тоже только одна лежит между двух других, и любая прямая разбивает всю плоскость на две части так же, как в геометрии Евклида. Аксиомы отрезков и углов здесь тоже выполняются, если особым образом определить длину отрезка и величину угла.



Опыт Эйнштейна

Рис. 13.67

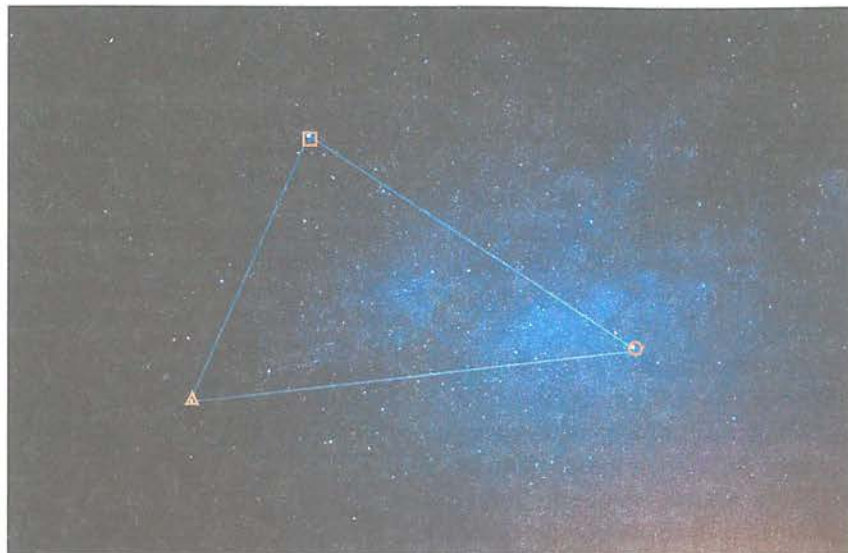


Рис. 13.68

рого находилась в определённой точке на Земле, вторая — на Солнце, а третья — на звезде Сириус (рис. 13.6). Данный его эксперимент не показал отличия от геометрии Евклида. Но это ничего не доказывает. Если на нашей Земле нарисовать маленький треугольник со сторонами не больше 1 метра, то он тоже будет практически плоским, как у Евклида. Треугольник же со сторонами в 10 000 км будет иметь совершенно другую форму и другую сумму своих углов. То есть даже на Земле на таких больших расстояниях должна работать уже другая геометрия (рис. 13.66)! А расстояния в окружающей нас Вселенной вообще превосходят всякое воображение — свет некоторых видимых нами звёзд идёт к нам от них миллионы лет!



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

13.14 ★☆☆ Попробуйте найти ошибку такого «доказательства» пятого постулата Евклида. Докажем, что через точку C проходит единственная прямая, параллельная AB . Как известно, из точки C можно опустить единственный перпендикуляр CD на AB . К прямой CD можно восстановить единственный перпендикуляр CE . Прямая CE параллельна AB . Поскольку наши построения выполнены единственным возможным образом, то такая прямая только одна (рис. 13.67).

13.15 ★☆☆ Как вы уже знаете, в геометрии Лобачевского через одну точку можно провести две пря-

- Вега
- △ Денеб
- Альтаир

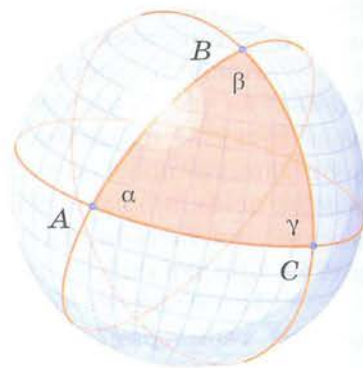


Рис. 13.69

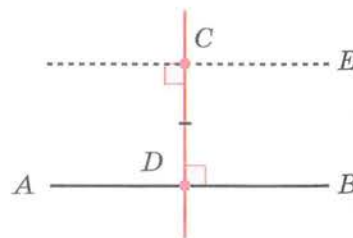
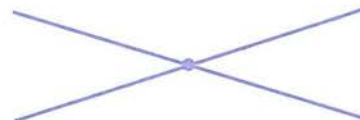


Рис. 13.70

мые, которые не пересекают данную. Докажите, что через любую точку в этой геометрии можно провести сколько угодно таких прямых (рис. 13.68).



ВОПРОСЫ

Используем интернет

- 1 Известно, что у Карла Гаусса и Николая Лобачевского был один учитель математики. Кто это был?
- 2 Кто из первооткрывателей неевклидовой геометрии несколько лет преподавал в харьковском университете?
- 3 Кто из первооткрывателей неевклидовой геометрии вызвал на дуэль родного отца?
- 4 Обыватели часто полагают, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Как вы объясните, почему это не так?
- 5 Кто из основателей неевклидовой геометрии лично наблюдал полное солнечное затмение?
- 6 В одном произведении русской литературы так рассуждают о неевклидовой геометрии: «Объявляю, что принимаю Бога прямо и просто. Но вот, однако, что надо отметить: если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он её по эвклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трёх измерениях пространства. Между тем находились и находятся даже и теперь геометры и философы и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная, или ещё обширнее, всё бытие было создано лишь по эвклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Эвклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть, и сошлись бы где-нибудь в бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум эвклидовский, земной, а потому где нам решать о том, что не от мира сего».

Попробуйте определить, кто написал это произведение.

Рис. 13.71

§14 Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника

Пожалуй, самым важным свойством «плоской» геометрии Евклида является то, что сумма углов любого треугольника в этой геометрии одинакова и равна 180° . Впервые это заметили ещё ученики Пифагора, но вряд ли они могли бы доказать данное утверждение строго. Знаменитый французский математик, физик, инженер и философ XVII века Блез Паскаль заново открыл его, когда ему было всего 12 лет. Мы же с вами сделаем это со всей строгостью, опираясь на свойство параллельных прямых.



Теорема о сумме углов треугольника

Сумма углов любого треугольника равна 180° .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть углы произвольного треугольника ABC соответственно равны α , β и γ . Проведём через его вершину B прямую EK , параллельную прямой AC .

Тогда углы CAB и EBA окажутся накрест лежащими при двух параллельных и секущей AB .

По свойству параллельных прямых эти углы равны, поэтому величина угла EBA равна α .

Точно так же величина угла KBC равна γ .

Легко видеть, что углы с величинами α , β и γ вместе составляют развёрнутый угол EBC , поэтому их сумма $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Таким образом, сумма углов любого треугольника равна развёрнутому углу, или 180° .

Теорема доказана.

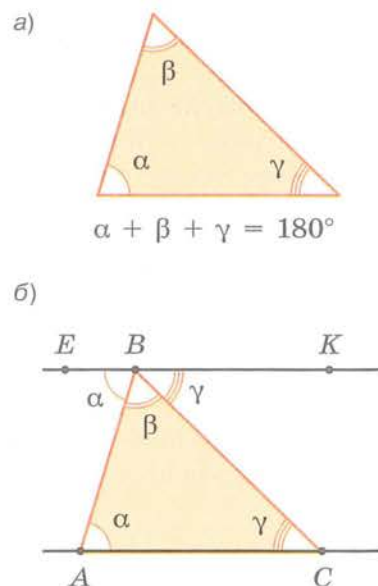


Рис. 14.1

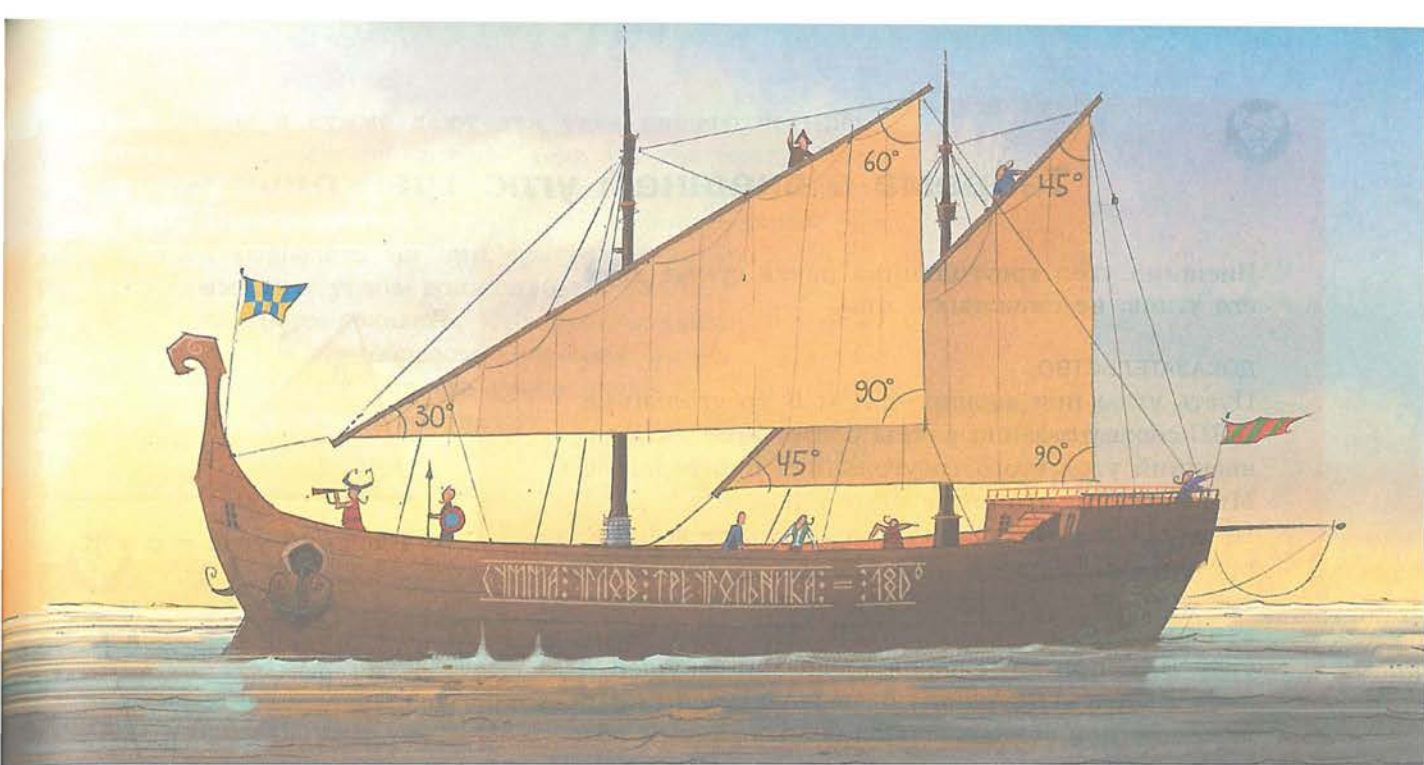


Рис. 14.2



УПРАЖНЕНИЕ

- 1 Вырежьте из бумаги треугольник, отметьте середины двух его сторон и проведите высоту к третьей его стороне. Теперь загните два его угла так, как это показано на рисунке 14.3. Убедитесь на опыте, что вместе все углы этого треугольника составляют развёрнутый угол.

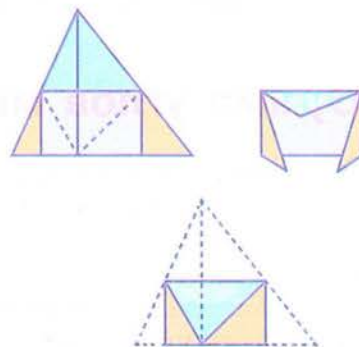


Рис. 14.3

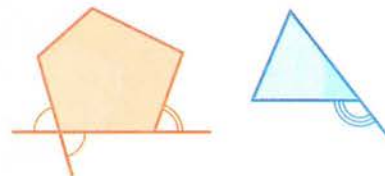
Мы с вами скоро увидим, что теорема о сумме углов треугольника очень часто используется для решения самых разных задач. А для того чтобы нам было удобнее группировать углы на чертежах, мы с вами докажем ещё одну теорему. Она называется **теоремой о внешнем угле треугольника**.

Но давайте сначала определим, что такое внешний угол треугольника или даже многоугольника.



Внешний угол многоугольника — это угол, смежный с углом многоугольника при его вершине (рис. 14.4).

При одной вершине у многоугольника всегда образуются два его внешних угла. Эти углы всегда равны друг другу, поскольку являются вертикальными.



Внешние углы треугольника и многоугольника

Рис. 14.4



Теорема о внешнем угле треугольника

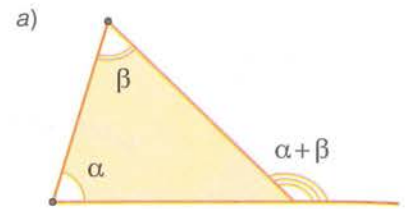
Внешний угол треугольника равен сумме двух его углов, не смежных с ним.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть углы при вершинах A и B треугольника ABC соответственно равны α и β . Угол BCE — внешний угол этого треугольника при вершине C . Мы докажем, что он равен $\alpha + \beta$.

Проведём через вершину C прямую, параллельную прямой AB . Луч CK этой прямой, лежащий внутри угла BCE , разбивает его на два меньших угла. Угол ECK равен α , поскольку он соответственный углу BAC при двух параллельных и секущей AC . Угол BCK и ABC равны β , поскольку они накрест лежащие при тех же параллельных. Таким образом, получается, что внешний угол BCE треугольника равен $\alpha + \beta$.

Что и требовалось доказать.



Внешний угол = $\alpha + \beta$

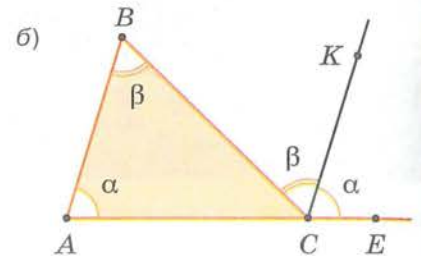
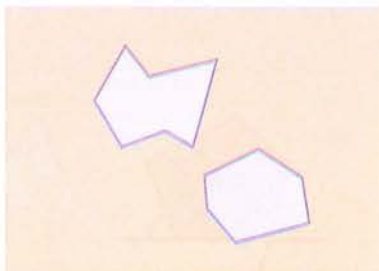


Рис. 14.5

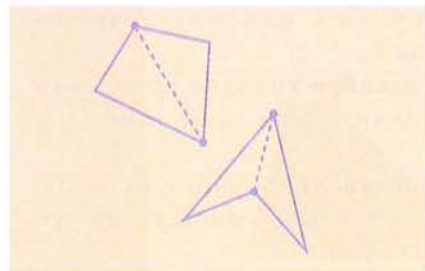
Сумма углов многоугольника

Мы с вами сейчас увидим, что сумма углов любого многоугольника зависит только от количества его углов. Для начала возьмём любой четырёхугольник. Каким бы он ни был — выпуклым или нет, — его всегда можно разбить диагональю на два треугольника (рис. 14.17). Если мы сложим шесть углов этих треугольников, то как раз получим сумму углов всего четырёхугольника. В самом деле, угол каждого из них либо совпадает с углом нашего четырёхугольника, либо прилегает к проведённой диагонали. А



Сумма углов многоугольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$

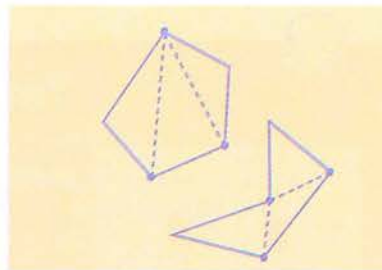
Рис. 14.6



Сумма углов любого четырёхугольника равна 360°

Рис. 14.7

все такие углы в сумме дают два угла нашего четырёхугольника, между которыми проведена эта диагональ. Значит, сумма углов любого четырёхугольника должна быть равна 360° . Произвольный пятиугольник можно двумя его диагоналями разрезать на три треугольника (рис. 14.8). Поэтому сумма его углов должна быть равна $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Можно строго доказать, что произвольный n -угольник можно таким же образом разрезать на $(n - 2)$ треугольника. Поэтому сумма его углов равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Для невыпуклых многоугольников это доказательство не так просто, поэтому мы с вами строго докажем эту формулу для случая, когда многоугольник выпуклый.



Сумма углов любого пятиугольника равна 540°

Рис. 14.8



Теорема о сумме углов многоугольника

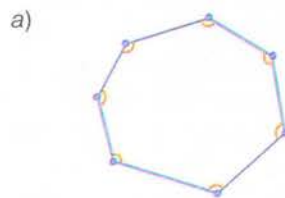
Сумма углов любого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть выпуклый многоугольник имеет n углов. Давайте возьмём любую точку O внутри многоугольника и соединим её со всеми его вершинами. Каждый проведённый отрезок будет лежать внутри нашего плоского многоугольника, поскольку он выпуклый. Если разрезать многоугольник по всем этим отрезкам, он распадётся ровно на n треугольников.

Теперь сложим все углы в этих n треугольниках. Мы получим сумму углов данного нам многоугольника и сверх того — сумму всех углов этих треугольников с вершиной в точке O . Сумма этих углов равна 360° , поскольку вместе они составляют так называемый полный угол, или два развёрнутых угла. Таким образом, сумма углов нашего n -угольника равна $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Что и требовалось доказать.



Сумма углов равна $180^\circ \cdot (n - 2)$

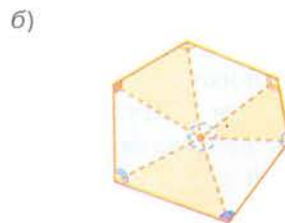


Рис. 14.9

Сумма внешних углов многоугольника

Итак, мы с вами доказали, что сумма углов многоугольника зависит только от количества его вершин. А знаете ли вы, что сумма внешних углов любого многоугольника не зависит даже от этого, то есть она одинакова для всех треугольников, четырёхугольников, пятиугольников и любых n -угольников? И доказать это совсем просто.



Теорема о сумме внешних углов

Сумма внешних углов любого многоугольника всегда одинакова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть углы нашего многоугольника равны $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Отметим при каждой его вершине по одному его внешнему углу. Поскольку каждый внешний угол — смежный с углом самого многоугольника, то эти внешние углы равны $(180^\circ - \alpha_1), (180^\circ - \alpha_2), \dots, (180^\circ - \alpha_n)$. Тогда их сумма будет равна $(180^\circ - \alpha_1) + (180^\circ - \alpha_2) + \dots + (180^\circ - \alpha_n) = 180^\circ \cdot n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$. Поскольку мы уже доказали, что $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = (n - 2) \cdot 180^\circ$, то сумма внешних углов равна $180^\circ \cdot n - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

Таким образом, мы убедились, что сумма внешних углов любого многоугольника всегда одинакова.

Что и требовалось доказать.



Сумма внешних углов любого многоугольника равна 360°

Рис. 14.10

Интересно, что понять данный факт можно и без всякой теории, как говорят, «на пальцах». А точнее — на спичках. Мы будем двигать обыкновенную спичку по контуру многоугольника так, чтобы она всё время была вне его. Если спичка переходит с одной стороны многоугольника на следующую, она каждый раз поворачивается на внешний угол этого многоугольника при данной вершине. А когда спичка обойдёт весь многоугольник, то повернётся вокруг самой себя на сумму всех его внешних углов и вернётся на прежнее место! То есть спичка сделает вокруг себя один полный оборот, или же повернётся на 360° . Значит, сумма внешних углов многоугольника равна 360° .



Как вы думаете, где в этом доказательстве «на спичках» используется аксиома параллельных?

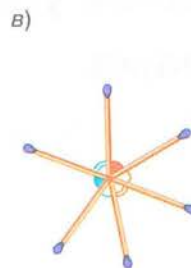
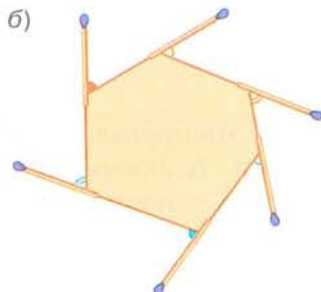
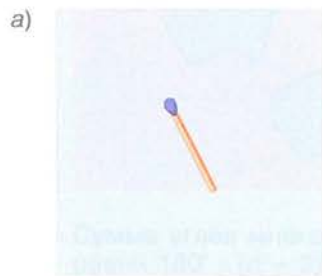


Рис. 14.11



ВОПРОСЫ

- 1 Чему равна сумма углов треугольника? Чему может быть равен угол равностороннего треугольника?
- 2 Используется ли в теореме о сумме углов треугольника аксиома параллельных прямых?
- 3 Что такое внешний угол многоугольника? Чему равна сумма всех его внешних углов?
- 4 Чему равна сумма углов четырёхугольника, пятиугольника?
- 5 Существует ли многоугольник, сумма углов которого равна 900° ?
- 6 Чему равна сумма углов многоугольника, показанного на рисунке 14.12?
- 7 Можно ли десятиугольник разрезать на семь треугольников?
- 8 Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть перпендикулярны друг другу?



Рис. 14.12



Рис. 14.13



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 14.1** Один угол шестиугольника прямой, а все другие равны между собой. Найдите величину этих углов (рис. 14.13).

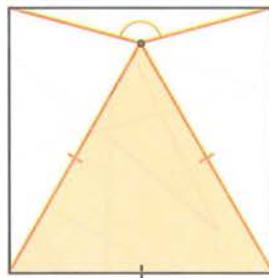
РЕШЕНИЕ: Обозначим величину равных углов шестиугольника буквой α . Тогда сумма всех его углов будет равна $5\alpha + 90^\circ$. Мы уже знаем, что сумма углов любого шестиугольника равна $180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$. Таким образом, получаем уравнение $5\alpha + 90^\circ = 720^\circ$. Отсюда находим, что $\alpha = 126^\circ$.

ОТВЕТ: 126° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 14.2** На стороне квадрата внутри него построили равносторонний треугольник. Найдите отмеченный на рисунке угол, под которым из вершины этого треугольника видна противоположная сторона квадрата (рис. 14.14, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть на стороне AD квадрата $ABCD$ внутри него построен равносторонний треугольник AED . Поскольку все его углы равны, то их величина должна быть равна 60° . Все углы квадрата прямые, поэтому угол BAE равен $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Но у квадрата все стороны также равны, значит, $AB = AD = AE$. То есть треугольник ABE равнобедренный. Обозначим его равные углы при основании BE буквой α (рис. 14.14, б). По теореме о

а)



б)

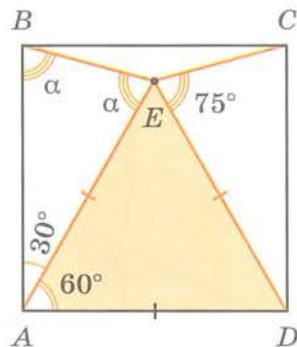


Рис. 14.14

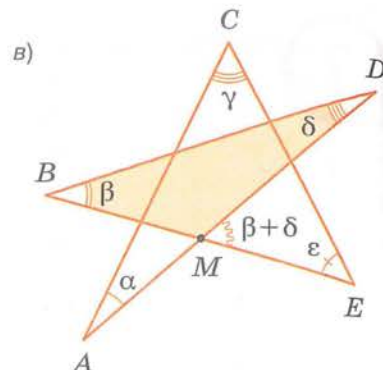
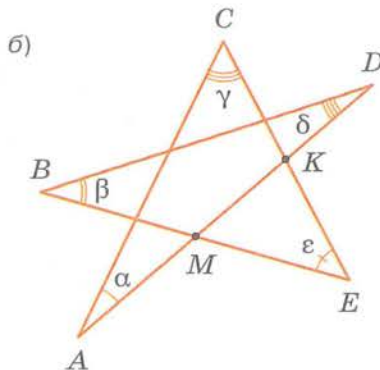
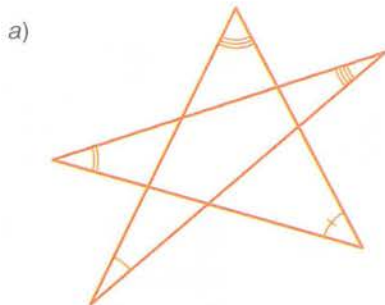


Рис. 14.15

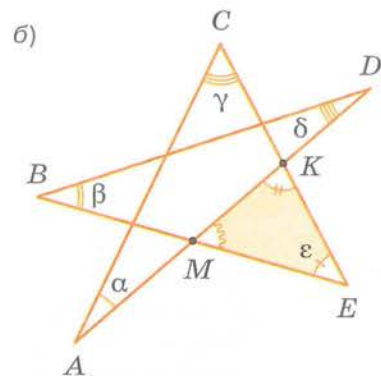
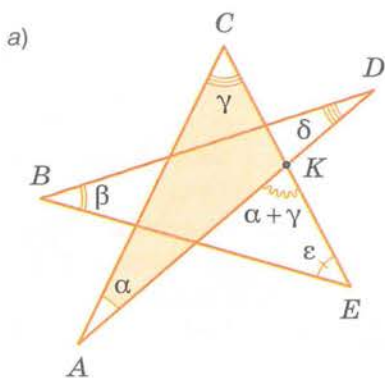


Рис. 14.16

сумме углов треугольника должно быть $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$. Отсюда получаем, что $\alpha = 75^\circ$. Точно так же можно доказать, что угол DEC равен 75° . Но тогда искомый угол BEC равен $360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$.

ОТВЕТ: 150° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 14.3** Найдите сумму углов при вершинах любой пятиконечной звезды (рис. 14.15, а).

РЕШЕНИЕ: Обозначим вершины звезды буквами A, B, C, D, E . Пусть величины углов при этих вершинах равны $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ϵ соответственно. Задача состоит в том, чтобы найти сумму $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$.

Обозначим точки пересечения отрезка AD с отрезками BE и CE буквами M и K (рис. 14.15, б). Заметим, что угол DME — внешний для треугольника DMB , поэтому он равен $\beta + \delta$ (рис. 14.15, в).

Точно так же угол AKE является внешним для треугольника KAC , поэтому он равен $\alpha + \gamma$ (рис. 14.16, а). Таким образом мы получаем, что сумма $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$ равна сумме всех углов треугольника EMK (рис. 14.16, б), то есть она равна 180° .

ОТВЕТ: 180° .

☆☆☆ **ПРИМЕР 14.4** На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяли точки M, K и E так, что $BK = KM = ME = EA = AC$ (рис. 14.17, а). Найдите угол этого треугольника, лежащий против основания.

РЕШЕНИЕ: Обозначим величину искомого угла буквой α . Треугольник MBK равнобедренный, поэтому угол BMK тоже равен α . Угол MKE — внешний для этого треугольника, поэтому он равен $\alpha + \alpha = 2\alpha$ (рис. 14.17, б).

Поскольку треугольник KME тоже равнобедренный, то его угол MEK также равен 2α . Давайте и дальше «складывать» нужные нам углы по теореме о внешнем угле треугольника. Заметим, что угол AME — внешний для треугольника BME , поэтому он равен $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$ (рис. 14.17, в). Треугольник AME опять равнобедренный, значит, его угол MAE тоже равен 3α . А угол AEC является

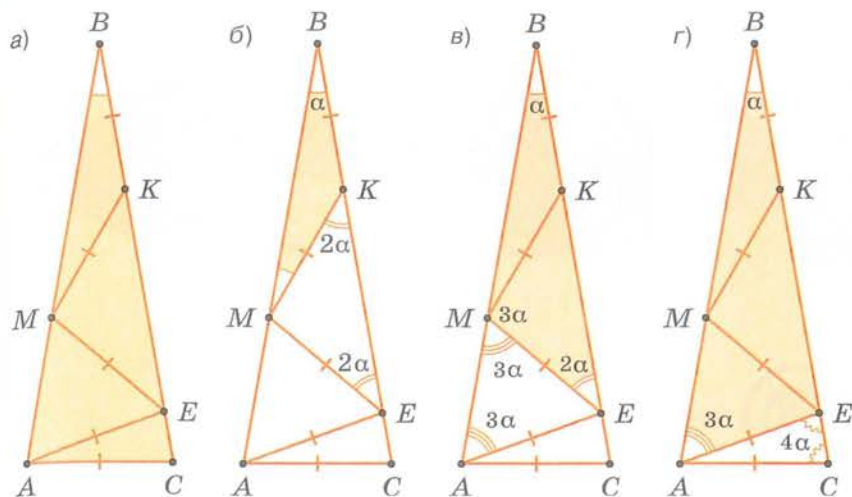


Рис. 14.17

внешним для треугольника ABE , следовательно, он равен $\alpha + 3\alpha = 4\alpha$. Поскольку треугольник AEC равнобедренный, то угол ACE тоже равен 4α . Нам осталось заметить, что сам треугольник ABC по условию был равнобедренным, поэтому его угол BAC равен 4α . Если теперь мы сложим все углы треугольника ABC , то получим $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 9\alpha$ (рис. 14.17, г). По теореме сумма углов любого треугольника равна 180° , поэтому должно быть $9\alpha = 180^\circ$. Значит, $\alpha = 20^\circ$.

ОТВЕТ: 20° .

★★★ **ПРИМЕР 14.5** На сторонах угла, величина которого равна 50° , взяли точки A, B, C, D так, как это показано на рисунке, причём $AB = BC = CD$ (рис. 14.18, а). Найдите угол между прямыми AC и BD .

РЕШЕНИЕ: Обозначим вершину данного угла буквой O , а точку пересечения отрезков AC и BD — буквой E . Треугольник ABC равнобедренный, поэтому его углы при вершинах A и C равны. Обозначим их величину α . Заметим, что для треугольника ABC угол OBC внешний, поэтому он равен $\alpha + \alpha = 2\alpha$ (рис. 14.18, б).

Треугольник BCD также равнобедренный, поэтому его углы при вершинах B и D равны β . Угол BCO для этого треугольника внешний, значит, он равен $\beta + \beta = 2\beta$ (рис. 14.18, в).

Конечно, найти по отдельности углы α и β мы не сможем: для этого у нас не хватает данных. Но найти их сумму очень просто. В самом деле, сумма углов треугольника OBC должна быть равна 180° , поэтому $50^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (рис. 14.18, г). А отсюда следует, что $2\alpha + 2\beta = 130^\circ$, то есть $\alpha + \beta = 65^\circ$. До ответа нам остался всего один шаг. Нужный нам угол между прямыми AC и BD является внешним углом к треугольнику BCE , поэтому он как раз равен $\alpha + \beta = 65^\circ$ (рис. 14.18, д).

ОТВЕТ: 65° .

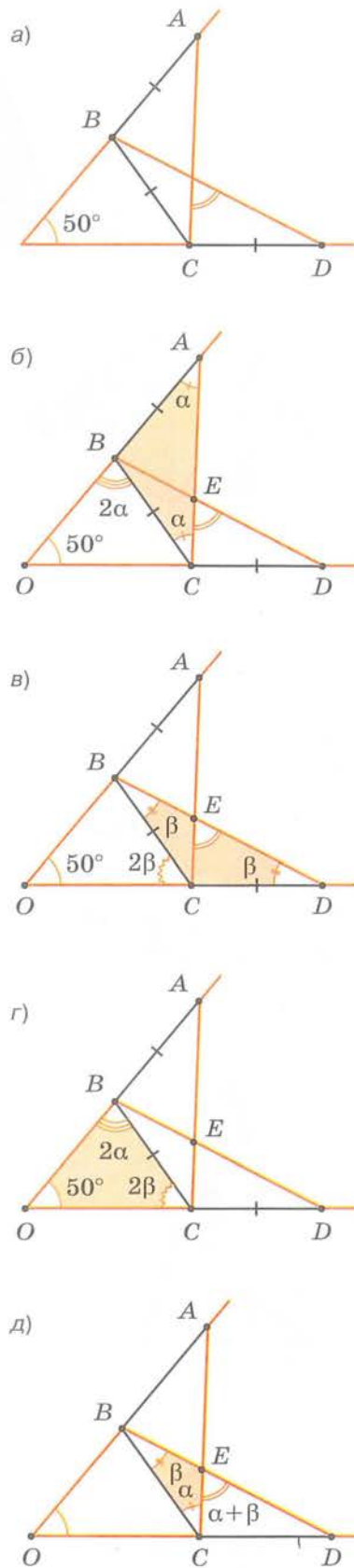


Рис. 14.18



Рис. 14.19



Рис. 14.20

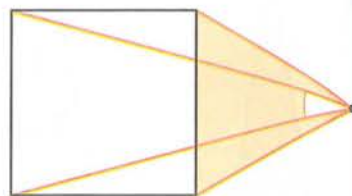


Рис. 14.21

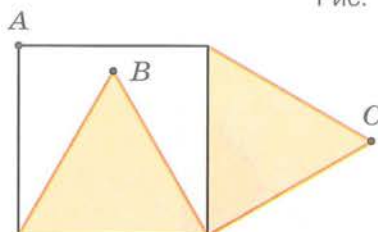


Рис. 14.22



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

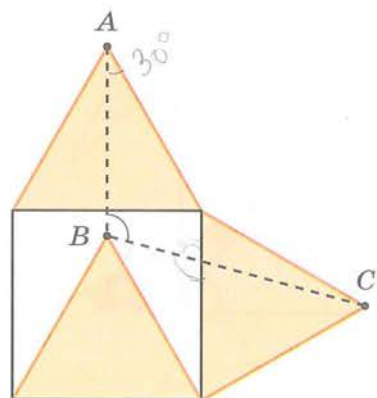


Рис. 14.23



Рис. 14.24



Рис. 14.25

- 14.1** ★★★ Один из углов равнобедренного треугольника равен 50° . Найдите его другие углы. Могут ли быть у задачи различные решения?
- 14.2** ★★★ Один из углов равнобедренного треугольника в два раза больше другого. Найдите этот угол.
- 14.3** ★★★ Биссектриса прямого угла треугольника образует с его противоположной стороной угол 65° . Найдите меньший угол этого треугольника.
- 14.4** ★★★ Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с его боковой стороной угол 75° (рис. 14.19). Найдите угол при основании этого треугольника. Может ли у задачи быть второе решение?
- 14.5** ★★★ Два угла пятиугольника прямые, а остальные равны между собой (рис. 14.20). Чему равны эти углы?
- 14.6** ★★★ На стороне квадрата во внешнюю от него область построили равносторонний треугольник. Найдите угол, под которым из вершины этого треугольника видна противоположная сторона квадрата (рис. 14.21).
- 14.7** ★★★ На двух сторонах квадрата построили равносторонние треугольники так, как это показано на рисунке 14.22. Лежат ли отмеченные на нём точки A, B и C на одной прямой?
- 14.8** ★★★ На трёх сторонах квадрата построили равносторонние треугольники так, как это показано на рисунке 14.23. Найдите на нём величину угла ABC.

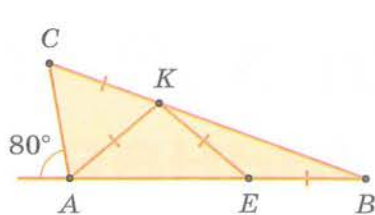


Рис. 14.26

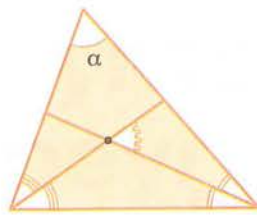


Рис. 14.27

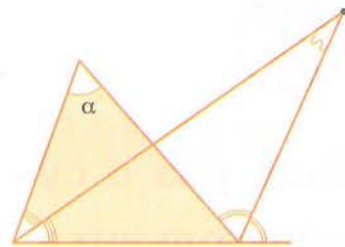


Рис. 14.28

14.9 ★★★ Равнобедренный треугольник разрезали на два меньших равнобедренных треугольника так, как это показано на рисунке 14.24. Найдите угол при основании этого треугольника.

14.10 ★★★ Равнобедренный треугольник разрезали на два меньших равнобедренных треугольника так, как это показано на рисунке 14.25. Найдите угол при основании этого треугольника.

14.11 ★★★ Треугольник с внешним углом, равным 80° , разрезали на три равнобедренных треугольника так, как это показано на рисунке 14.26. Найдите меньший угол этого треугольника.

14.12 ★★★ Угол треугольника равен α . Найдите угол между биссектрисами двух других его углов (рис. 14.27).

14.13 ★★★ Угол треугольника равен α . Найдите угол между биссектрисой его второго угла и биссектрисой внешнего угла при третьей вершине (рис. 14.28).

14.14 ★★★ Найдите сумму углов при вершинах шестизвонной замкнутой ломаной, показанной на рисунке 14.29.

14.15 ★★★ Найдите сумму углов при вершинах семизвонной замкнутой ломаной, показанной на рисунке 14.30.

14.16 ★★★ На продолжении стороны AC треугольника ABC отметили точки M и K так, что $AM = AB$, $CK = BC$. Найдите угол MBK, если угол ABC равен β (рис. 14.31).

14.17 ★★★ Выпуклый шестиугольник таков, что его противоположные углы попарно равны (рис. 14.32). Докажите, что противоположные стороны такого шестиугольника параллельны.

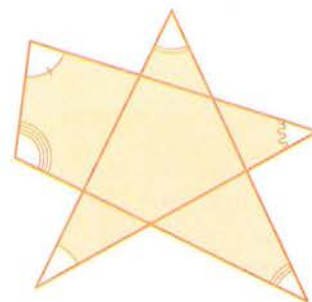


Рис. 14.29

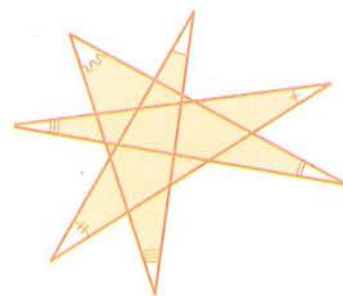


Рис. 14.30

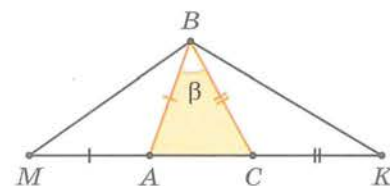


Рис. 14.31

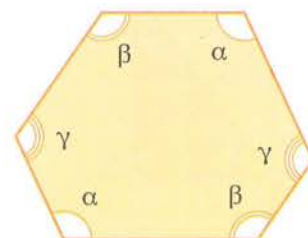


Рис. 14.32



Ещё раз о сумме углов треугольника

Можно ли вычислить сумму углов треугольника, не используя аксиомы параллельных? Давайте попробуем это сделать с помощью следующего рассуждения.

Предположим, что сумма углов треугольника нам неизвестна, и обозначим её буквой S . Возьмём произвольный треугольник ABC и отметим на его стороне AC любую точку M . Если мы проведём отрезок BM , то получим два меньших треугольника ABM и BCM . Теперь сложим все шесть углов в этих двух треугольниках. С одной стороны, в сумме мы должны получить $2S$. С другой стороны, сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов исходного треугольника ABC , к которой нужно ещё прибавить углы AMB и CMB (рис. 14.33). Поскольку эти углы смежные, то их сумма равна 180° . Значит, для величины S мы с вами получаем такое уравнение: $2S = S + 180^\circ$. Откуда следует, что $S = 180^\circ$.

Выходит, что мы с вами доказали теорему о сумме углов любого треугольника и нигде не пользовались аксиомой параллельных? Нет ли здесь логической ошибки? Конечно, такая ошибка есть. Только что проведённое нами «доказательство» — хороший пример из длинного списка неудачных попыток доказать пятый постулат Евклида. Попробуйте теперь сами найти в нём ошибку.

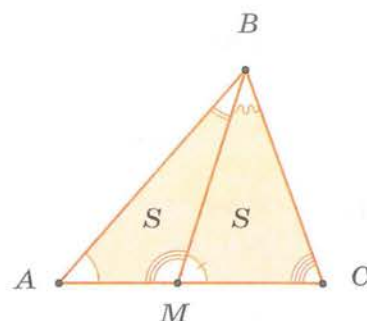


Рис. 14.33

§15 Расчёт углов в равных треугольниках и дополнительные построения

В этом параграфе мы с вами не будем проходить никакой теории. Он полностью посвящён решению задач. Правда, многие из этих задач решаются похожими способами, или, как ещё говорят, одним и тем же методом. Мы с вами познакомимся с двумя такими методами — расчётом углов в равных треугольниках и методом дополнительных построений.

Расчёт углов в равных треугольниках

В этих задачах мы с вами будем на чертежах находить равные треугольники, отмечать их соответственно равные углы, а потом использовать теорему о сумме углов треугольника. Равные треугольники будут нашими «помощниками»: не бойтесь искать их на своём чертеже, пробуйте разные варианты, обозначайте равные углы в этих треугольниках одинаковыми буквами и считайте... А начнём мы с примера на клетчатой бумаге.



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 15.1** На листе в клетку провели прямые AB и CD так, как это показано на рисунке. Докажите, что эти прямые перпендикулярны друг другу (рис. 15.2, а).

РЕШЕНИЕ: Отметим на отрезке AD точку E так, что $ED = BD$. На чертеже видно, что $AD = CE$, и, следовательно, прямоугольные треугольники ABD и CDE равны по первому признаку (рис. 15.2, б). Значит, равны их соответственные углы BAD и DCE . Обозначим их величину буквой α . Величину угла CDE давайте обозначим β . Поскольку треугольник CED прямоугольный, то можно записать сумму его углов: $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. Отсюда $\alpha + \beta = 90^\circ$. Пусть наши прямые AB и CD пересекаются



Рис. 15.1

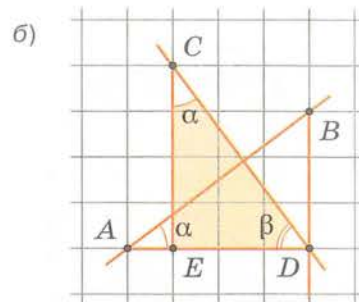
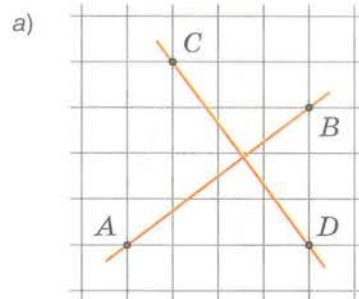


Рис. 15.2

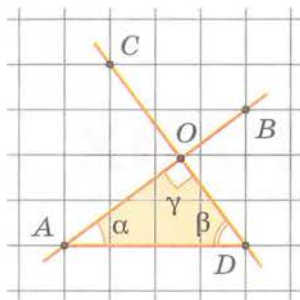


Рис. 15.3

в точке O (рис. 15.3). Обозначим величину угла AOD буквой γ и рассмотрим треугольник AOD . Сумма его углов должна быть равна 180° , поэтому $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Поскольку $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $90^\circ + \gamma = 180^\circ$. Значит, $\gamma = 90^\circ$, то есть прямые AB и CD перпендикулярны.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ ПРИМЕР 15.2 На сторонах равностороннего треугольника ABC взяли точки D и E так, что отмеченный на рисунке угол между отрезками AE и BD равен 60° . Докажите, что $AE = BD$ (рис. 15.4, а).

РЕШЕНИЕ: Обозначим угол CAE буквой α . Поскольку все углы равностороннего треугольника равны 60° , то угол BAE равен $60^\circ - \alpha$. Пусть отрезки AE и BD пересекаются в точке O (рис. 15.4, б). Угол BOE — внешний для треугольника ABO , поэтому сумма углов OAB и OBA равна 60° . Значит, угол ABO равен $60^\circ - (60^\circ - \alpha) = \alpha$. Теперь рассмотрим треугольники ABD и AEC . Они равны по второму признаку, поскольку $AB = AC$, а прилежащие к этим сторонам углы равны α и 60° (рис. 15.4, в). Из равенства данных треугольников и следует, что $AE = BD$.

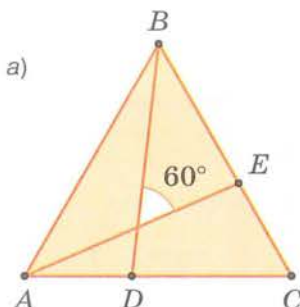
Что и требовалось доказать.

☆☆☆ ПРИМЕР 15.3 На стороне CD и на продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ взяли точки E и K так, что $CK = AE$. Найдите угол BEK (рис. 15.5, а).

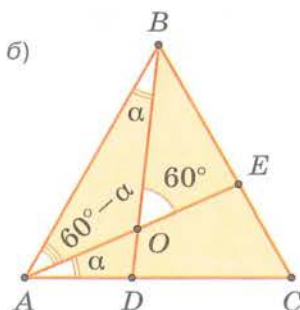
РЕШЕНИЕ: Соединим точки B и K отрезком. Треугольники BCK и BAE равны по первому признаку, поскольку $BC = BA$, $CK = AE$, а углы BCK и BAE прямые. Из равенства данных треугольников следует, что $BK = BE$, а углы CBK и ABE равны. Обозначим их величину буквой α . Тогда угол ABK равен $90^\circ - \alpha$, а угол KBE равен $\alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$ (рис. 15.5, б).

Рассмотрим треугольник KBE . Он равнобедренный, поэтому его углы BEK и BKE равны. Обозначим их величину буквой β (рис. 15.5, в). По теореме о сумме углов треугольника получаем $\beta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. Отсюда $\beta = 45^\circ$. Таким образом, угол BEK равен 45° .

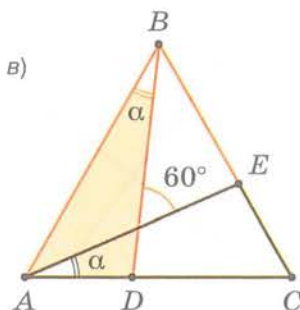
ОТВЕТ: 45° .



а)

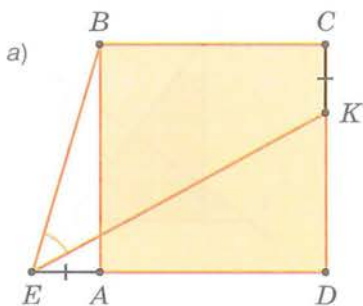


б)

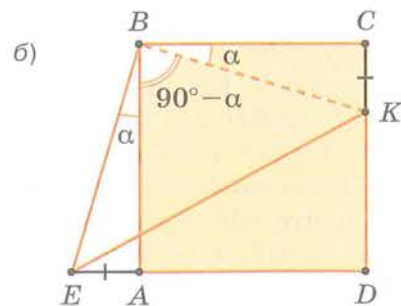


в)

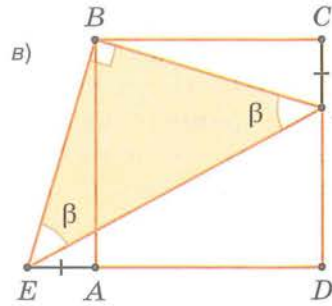
Рис. 15.4



а)



б)



в)

Рис. 15.5

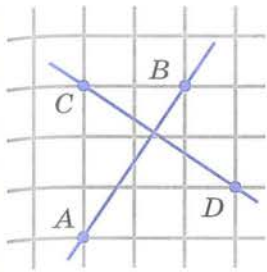


Рис. 15.6

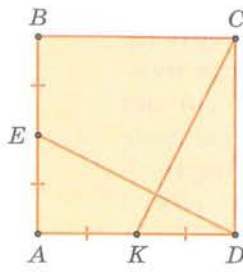


Рис. 15.7

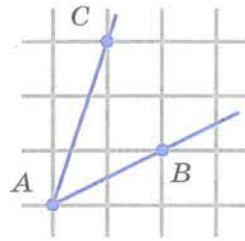


Рис. 15.8

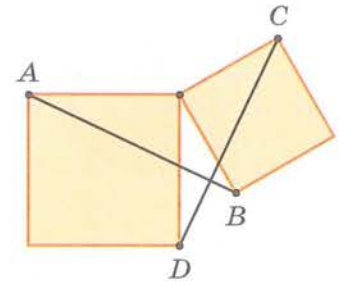


Рис. 15.9



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 15.1 ★☆☆ Докажите, что прямые AB и CD , изображённые на клетчатой бумаге, перпендикулярны друг другу (рис. 15.6).
- 15.2 ★☆☆ Точки K и E — середины сторон квадрата $ABCD$. Докажите, что отрезки CK и DE перпендикулярны друг другу (рис. 15.7).
- 15.3 ★☆☆ Найдите угол BAC , изображённый на рисунке 15.8 на клетчатой бумаге.
- 15.4 ★☆☆ Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отрезки AB и CD , показанные на рисунке 15.9, перпендикулярны друг другу.
- 15.5 ★☆☆ Равносторонние треугольники ABC и CDK расположены так, как показано на рисунке 15.10. Докажите, что прямая BK параллельна стороне AC .
- 15.6 ★☆☆ Квадраты $ABCD$ и $DEFK$ имеют общую вершину D , причём точка E лежит на стороне AB . Верно ли, что точка K лежит на прямой BC (рис. 15.11)?
- 15.7 ★☆☆ Вокруг квадрата описали прямоугольник так, что каждая вершина квадрата лежит на одной из сторон этого прямоугольника. Верно ли, что данный прямоугольник тоже квадрат (рис. 15.12)?

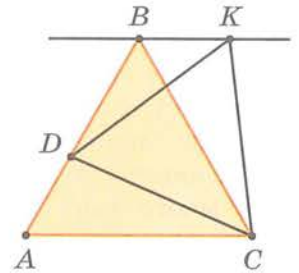


Рис. 15.10

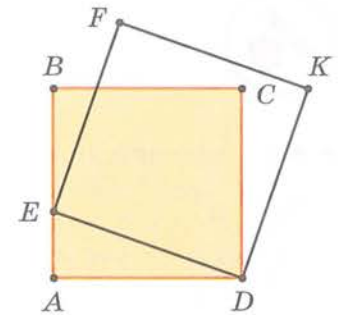


Рис. 15.11

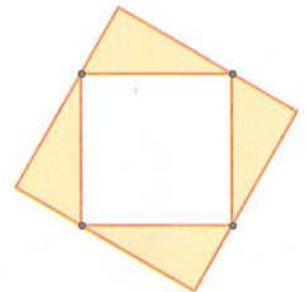


Рис. 15.12

Дополнительные построения

Во всех предыдущих задачах мы с вами находили равные треугольники, которые помогали нам решить данную зада-

чу. Эти треугольники уже были нарисованы на чертеже, нужно было только их отыскать. Но есть задачи, где нужных для решения треугольников (или других фигур) нет на чертеже, их необходимо построить самому. Тогда говорят, что в таких задачах нужны дополнительные построения. Задачи с дополнительными построениями самые сложные, но одновременно и самые красивые. Более того, именно такие задачи развивают геометрическую интуицию, умение видеть то, что необходимо для решения, но было скрыто от глаз. Можно даже сказать, что дополнительные построения подобны строительным лесам, которые ставят архитекторы, когда возводят высокое здание (рис. 15.14). Для того чтобы научиться решать такие задачи, нужен опыт и некоторое терпение. Никогда не известно заранее, какое именно дополнительное построение позволит найти ответ. Конечно, есть некоторые «стандартные» дополнительные построения или приёмы, которые мы разберём вместе. А дальше вы будете думать сами. Только решив много таких задач, вы научитесь сами видеть, что нужно сделать в каждом конкретном случае. А теперь давайте перейдём к примерам.



Рис. 15.13



Рис. 15.14



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 15.4** Стороны треугольника равны a , b и c . Напротив стороны с длиной a в треугольнике лежит угол 120° . Покажите, что из отрезков с длинами a , c и $b + c$ можно сложить новый треугольник. Чему равен средний по величине угол полученного треугольника (рис. 15.15, а)?

РЕШЕНИЕ: Треугольник, который нам нужно построить, должен иметь сторону с длиной $b + c$. Как нам нарисовать на нашем чертеже отрезок с такой длиной? Один из самых простых способов – продлить сторону с длиной b данного нам треугольника на длину другой его стороны c . Давайте так и сделаем. На продолжении стороны AC возьмём точку K так, что $AK = c$ (рис. 15.15, б). Тогда длина отрезка CK будет равна $b + c$. Сделав такое дополнительное построение, мы получим, что угол BAK равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Отсюда легко понять, что треугольник ABK — равнобедренный! Значит, длина отрезка BK тоже будет равна c (рис. 15.15, в). Осталось только заметить, что треугольник CBK имеет нужные нам стороны: a , c и $b + c$. То есть мы с вами его построили! В задаче ещё спрашивалось, чему равен средний по величине угол этого треугольника. Давайте посмотрим на полученный нами чертёж: угол CBK больше 60° , угол при вершине K

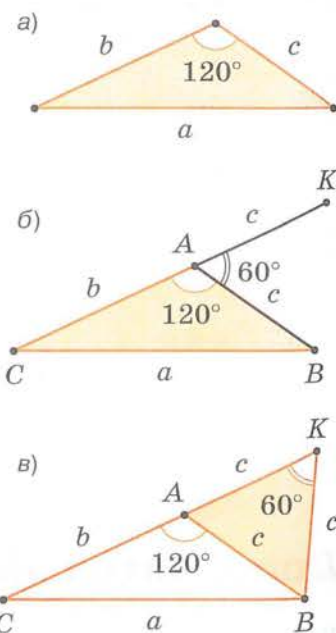


Рис. 15.15

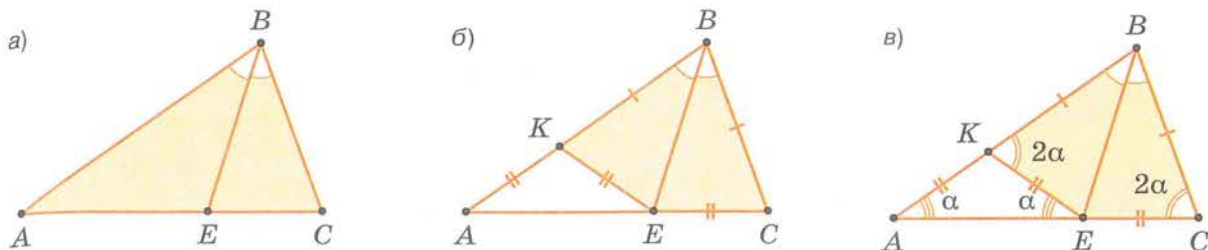


Рис. 15.16

равен 60° , а угол BCK меньше 60° (подумайте почему!). Значит, средний угол $СКВ$ этого треугольника равен в точности 60° .

ОТВЕТ: 60° .

★★★ **ПРИМЕР 15.5** В треугольнике ABC провели биссектрису BE . Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов этого треугольника в два раза больше другого (рис. 15.16, а).

РЕШЕНИЕ: Давайте перепишем данное нам в условии равенство так: $AB - BC = CE$. Как теперь геометрически получить разность $AB - BC$ в виде одного отрезка? Самый лёгкий способ – это отложить сторону BC на стороне AB от точки B (рис. 15.16, б). Для этого на стороне AB возьмём точку K так, что $BK = BC$. Тогда $AK = AB - BC$. Но по условию $AB - BC = CE$. Значит, должно быть $CE = AK$. Вы можете спросить: как всё это связано с биссектрисой и отрезком EC ? А вот как: треугольники BEC и $BЕК$ должны быть равны по первому признаку, ведь у них сторона BE общая, стороны BC и BK равны, а угол KBE равен углу CBE . Поэтому $EC = KE$. По условию $EC = AK$, а значит, $AK = KE$. То есть треугольник AKE должен быть равнобедренным. Обозначим его равные углы при основании AE буквой α (рис. 15.16, в). Тогда угол BKE равен 2α , поскольку он внешний для этого треугольника AKE . Но тогда и угол ACB тоже равен 2α , ведь мы доказали, что треугольники BKE и BCE равны. Таким образом, в треугольнике ABC угол при вершине C в два раза больше угла при вершине A .

Что и требовалось доказать.

★★★ **ПРИМЕР 15.6** На клетчатой бумаге нарисовали два угла. Верно ли, что они равны по величине (рис. 15.17, а)?

РЕШЕНИЕ: Давайте попробуем на чертеже перенести нужные нам углы α и β ближе друг к другу. Треугольники ABC и KTE равны по первому признаку, поэтому угол KET тоже равен α . Поскольку прямые TE и MF параллельны, то углы TED и EDF равны как накрест лежащие. Обозначим их величину буквой γ . В нашей задаче требуется выяснить: верно ли, что $\alpha = \beta$. Но это то же самое, что проверить равенство $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Однако $\beta + \gamma = 45^\circ$,

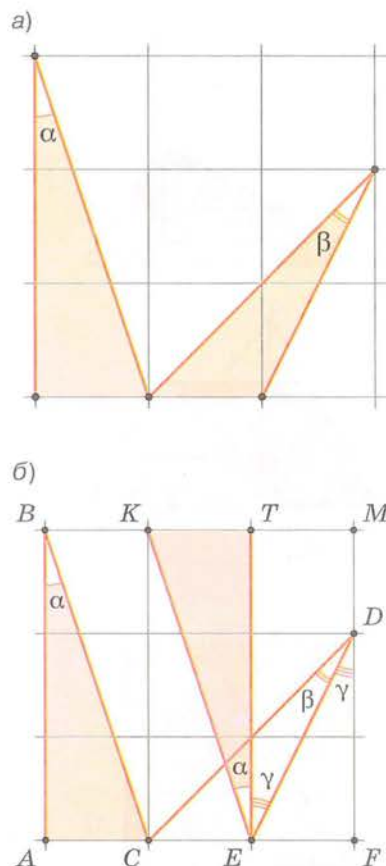


Рис. 15.17

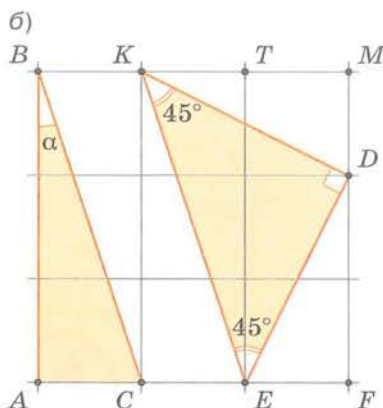
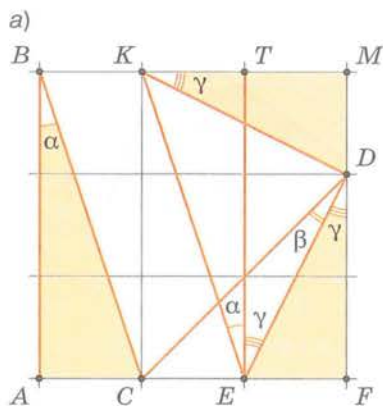


Рис. 15.18

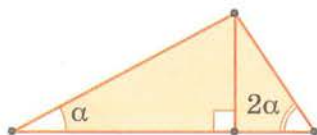


Рис. 15.19

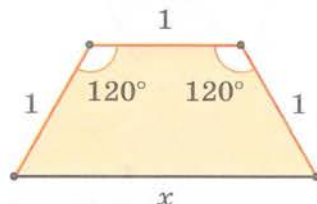


Рис. 15.20

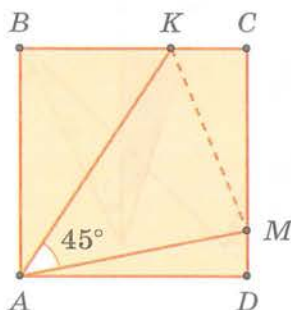


Рис. 15.21

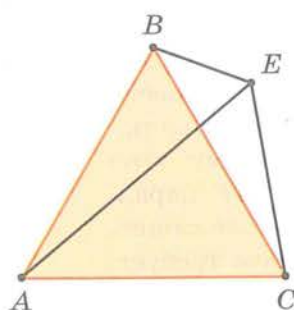


Рис. 15.22

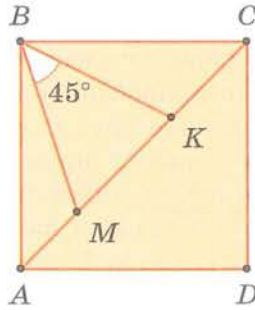


Рис. 15.23

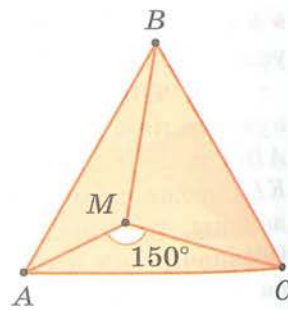


Рис. 15.24

поскольку треугольник CDF равнобедренный, а угол при вершине F у него прямой. Значит, нам осталось только выяснить, действительно ли $\alpha + \gamma = 45^\circ$. Теперь посмотрим на треугольники EDF и DKM (рис. 15.18, а). Они равны по первому признаку, поэтому $ED = DK$, а угол DKM равен γ . Тогда угол KDM равен $90^\circ - \gamma$. Значит, угол KDE равен $180^\circ - \gamma - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ$. Выходит, что треугольник KDE равнобедренный и угол при вершине D у него прямой. Отсюда сразу следует, что другие два его угла равны 45° (рис. 15.18, б). Значит, $\alpha + \gamma = 45^\circ$. Помните, что и $\beta + \gamma = 45^\circ$? Таким образом, мы доказали, что $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, или же $\alpha = \beta$.

ОТВЕТ: Указанные в условии углы равны.



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

15.8 ★☆☆ Один из углов при основании треугольника в 2 раза больше другого. Высота, опущенная на основание, делит его на два отрезка. Докажите, что разность этих отрезков равна одной из сторон треугольника (рис. 15.19).

15.9 ★☆☆ Три стороны четырёхугольника равны 1. Найдите его четвёртую сторону, если два угла, не прилежащие к этой стороне, равны 120° (рис. 15.20).

15.10 ★☆☆ На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяли точки K и M так, что угол MAK равен 45° . Докажите, что $BK + DM = MK$ (рис. 15.21).

15.11 ★☆☆ Вне равностороннего треугольника ABC взята точка E так, что угол BEC равен 120° . Докажите, что $BE + EC = AE$ (рис. 15.22).

15.12 ★☆☆ На диагонали AC квадрата $ABCD$ взяли точки M и K так, что угол MBK равен 45° . Дока-

жите, что из отрезков AM , MK и CK можно сложить треугольник. Чему равен наибольший угол этого треугольника (рис. 15.23)?

- 15.13** ★★★ В равностороннем треугольнике ABC взяли точку M так, что $\angle AMC = 150^\circ$. Докажите, что из отрезков AM , BM и CM можно сложить прямоугольный треугольник (рис. 15.24).

Продление медианы на свою длину

Есть ещё один приём или стандартное дополнительное построение, которое помогает решать многие задачи. Заключается он в том, что медиану треугольника продлевают на свою длину. Посмотрим, как он работает, на примере следующей задачи.



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

★★★ **ПРИМЕР 15.7** В треугольнике медиана совпала с биссектрисой. Верно ли, что этот треугольник равнобедренный (рис. 15.25, а)?

РЕШЕНИЕ: Легко заметить, что утверждение этой задачи — обратное к свойству равнобедренного треугольника. Конечно, ниоткуда не следует, что оно обязано быть верным. Давайте сначала попробуем вместе найти равные треугольники на чертеже без дополнительных построений. Треугольники ABC и CBM имеют общую сторону BM , равные стороны AM и CM и равные углы при вершине B . Однако такие треугольники не подходят под известные нам признаки равенства, ведь их равные углы не лежат между соответственно равными сторонами. Следует ли отсюда, что треугольник ABC не будет равнобедренным? Пока не следует. Просто обычные методы решения здесь не дают результата. Попробуем пойти другим путём. Теперь продлим медиану BM на свою длину за точку M . То есть на прямой BM возьмём точку D так, что $DM = BM$. Тогда треугольники AMD и CMB будут равны по двум сторонам и углу между ними, поскольку углы AMD и CMB вертикальные (рис. 15.25, б). Значит, их стороны AD и BC будут равны, а угол ADM будет равен углу CBM . Но тогда выходит, что угол ADM равен углу ABM , и по признаку треугольник BAD должен быть равнобедренным. То есть $AB = AD = BC$. Таким образом, $AB = BC$, и наш треугольник ABC — равнобедренный. Значит, мы с вами доказали ещё один признак равнобедренного треугольника.

ОТВЕТ: Верно, треугольник всегда равнобедренный.

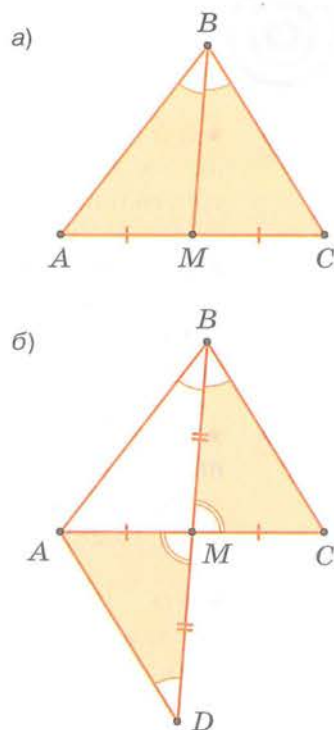


Рис. 15.25

☆☆☆ ПРИМЕР 15.8 Медиана треугольника образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 70° и 40° . Докажите, что она равна половине одной из сторон этого треугольника (рис. 15.26, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольнике ABC проведена медиана BM , а углы ABM и CBM соответственно равны 40° и 70° . Продлим эту медиану на свою длину, то есть возьмём на прямой BM точку D так, что $MD = BM = m$. Тогда треугольники ABM и CDM равны по первому признаку, так как у них есть по две равные стороны, а углы между ними равны как вертикальные (рис. 15.26, б). Значит, угол CDM равен углу ABM и равен 70° . Теперь вычислим угол BCD . Поскольку сумма углов треугольника BCD равна 180° , то угол BCD равен $180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ$. Получается, что треугольник BCD должен быть равнобедренным по признаку, поэтому $BD = BC$. Поскольку $BD = 2m$, то $m = \frac{BC}{2}$. То есть медиана BM равна половине стороны BC треугольника.

Что и требовалось доказать.

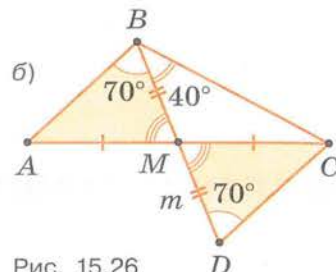
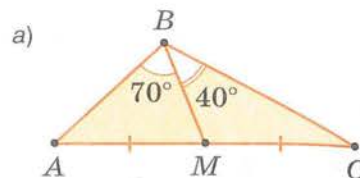


Рис. 15.26

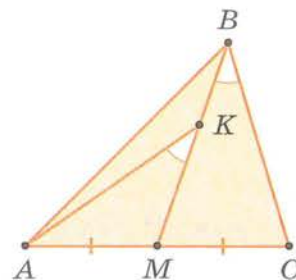


Рис. 15.27

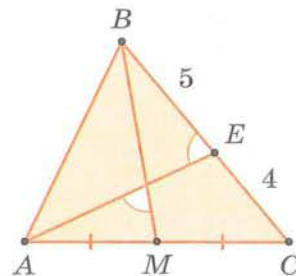


Рис. 15.28

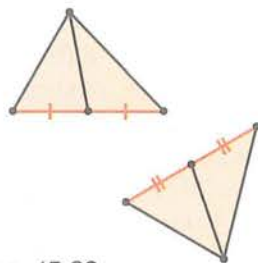


Рис. 15.29

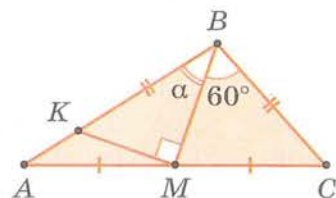


Рис. 15.30



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

15.14 ☆☆☆ Как разрезать произвольный треугольник на две части, чтобы потом сложить из них другой треугольник?

15.15 ☆☆☆ На медиане BM треугольника ABC взяли точку K так, что угол AKM равен углу MBC . Докажите, что отрезок AK равен одной из сторон треугольника (рис. 15.27).

15.16 ☆☆☆ Прямая AE образует равные углы со стороной BC и медианой BM треугольника ABC . Найдите длину медианы BM , если $BE = 5$, $CE = 4$ (рис. 15.28).

15.17 ☆☆☆ У двух треугольников соответственно равны две стороны и медианы, проведённые к их третьим сторонам. Докажите, что такие треугольники равны (рис. 15.29).

15.18 ☆☆☆ В треугольнике ABC провели медиану BM . На стороне AB взяли точку K так, что $\angle BKM = 90^\circ$. Оказалось, что $BK = BC$. Найдите угол ABM , если угол CBM равен 60° (рис. 15.30).

§16 Прямоугольный треугольник

Прямоугольный треугольник

Среди всех треугольников в геометрии прямоугольный треугольник играет особую роль. Из самого названия следует, что у такого треугольника должен быть один прямой угол. А вот другие его углы должны быть острыми — ведь их сумма равна 90° (подумайте почему). Прямоугольный треугольник возникает, если вертикально поставленный к земле столб закрепить наклонной перекладиной или тросом (рис. 16.2). В основе любого кронштейна, с помощью которого вешают на стену полки, тоже лежит прямоугольный треугольник (рис. 16.3). Такую же форму имеет и чертёжный угольник, которым пользуются плотники, — с его помощью легко чертить на плоской поверхности параллельные или перпендикулярные прямые (рис. 16.4).

Любой треугольник можно разделить на два прямоугольных треугольника, если провести в нём высоту (рис. 16.1). Значит, любой треугольник, и вообще любой многоугольник, всегда состоит из нескольких прямоугольных треугольников. Почему это важно? Дело в том, что с помощью прямоугольных треугольников очень удобно считать площади и расстояния между точками на плоскости. Например, расстояния вычисляют по знаменитой теореме Пифагора, которую мы с вами изучим в 8 классе.

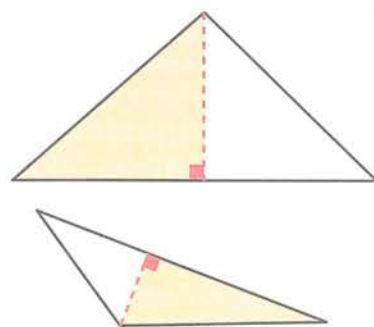


Рис. 16.1



Теорема Пифагора гласит, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов. Именно поэтому египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5 имеет прямой угол.

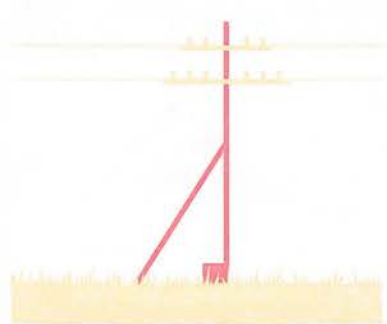


Рис. 16.2

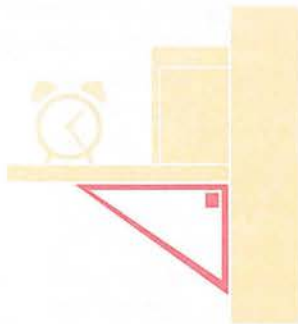


Рис. 16.3

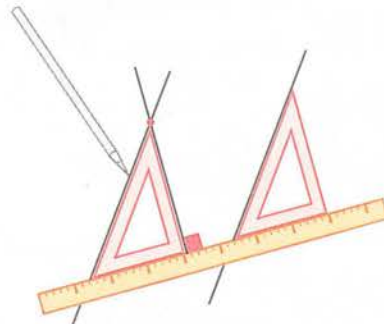


Рис. 16.4

А пока давайте дадим несколько определений. Ведь прямоугольный треугольник — фигура древняя, и его стороны принято называть соответственно — так, как это делали ещё древние греки. Стороны, выходящие из вершины прямого угла такого треугольника, называются **катетами**. По-гречески это слово значит «идущий вниз», а ещё «отвес». В этом нет ничего удивительного, ведь с помощью отвеса (верёвки с грузом) во все времена строители проводили вертикальную прямую или опускали на землю перпендикуляр (рис. 16.5). Такие слова, как каталог, катапульта, катастрофа, тоже образованы при помощи греческой приставки **ката-**, которая и означает «вниз».

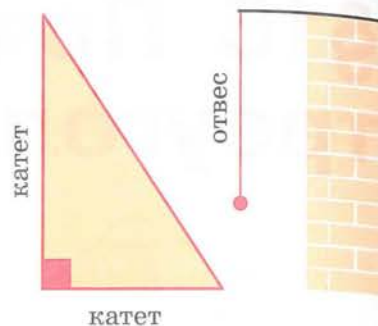


Рис. 16.5

Третья сторона прямоугольного треугольника, лежащая против его прямого угла, называется **гипотенуза**. С происхождением этого странного названия не всё до конца ясно. Дословно оно значит «стягивающая вниз». Ведь «**гипо-**» означает внизу, а «**тейно**» — тянуть, стягивать. Существует предположение, что данную сторону треугольника греки называли гипотенузой, когда она была в горизонтальном положении — так, как это показано на рисунке 16.6. Сам же треугольник им мог напоминать гору, возвышающуюся над морем. А приставка **гипо-** аналогична приставке **под-** русского языка. С её помощью образовалось слово гипотеза и множество медицинских терминов: гипофиз, гипоксия, гипотония и другие.



Рис. 16.6

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Установить равенство двух прямоугольных треугольников можно по известным уже вам признакам равенства обычных треугольников. Только звучать они будут немного по-другому, поскольку стороны прямоугольных треугольников имеют специальные названия.

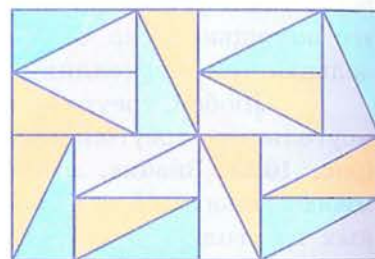


Рис. 16.7



Равенство по двум катетам

Если у двух прямоугольных треугольников равны катеты, то такие треугольники равны (рис. 16.8).

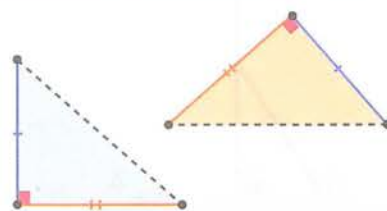


Рис. 16.8



Равенство по гипотенузе и острому углу

Если у двух прямоугольных треугольников равны гипотенузы и один из острых углов, то такие треугольники равны (рис. 16.9).

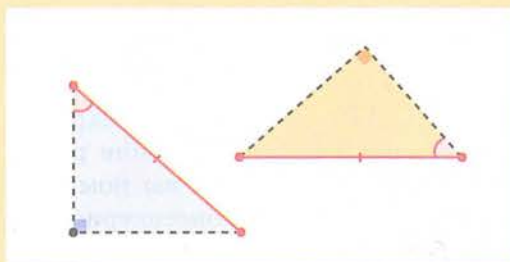


Рис. 16.9



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Докажите два признака равенства прямоугольных треугольников, используя ранее изученные вами признаки.

Однако для прямоугольных треугольников существуют особые признаки равенства, которые прямо не следуют из общих признаков. Самый известный из них — это признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету. Звучит он так:



Равенство по гипотенузе и катету

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 16.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные гипотенузы AB и A_1B_1 и равные катеты AC и A_1C_1 . Докажем, что эти треугольники равны. Поскольку катеты AC и A_1C_1 равны, можно совместить их так, чтобы вершина A_1 совпала с вершиной A , вершина C_1 — с вершиной C , а вершины B_1 и B оказались по разные стороны от прямой AC (рис. 16.11, а). Тогда угол BCB_1 будет развёрнутым, поскольку он равен сумме двух прямых углов. Значит, точка C будет лежать

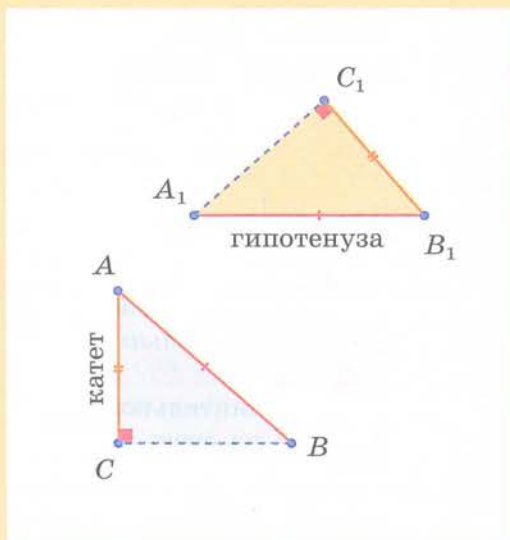


Рис. 16.10

на отрезке BB_1 и два наших прямоугольных треугольника вместе составят один большой треугольник ABB_1 , а отрезок AC окажется его высотой.

Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные гипотенузы, то полученный треугольник ABB_1 будет равнобедренным. А высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, как вы помните, совпадает с его медианой и биссектрисой. Значит, углы BAC и $B_1A_1C_1$ должны быть равны. Но тогда треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC по первому признаку (рис. 16.11, б).

Что и требовалось доказать.

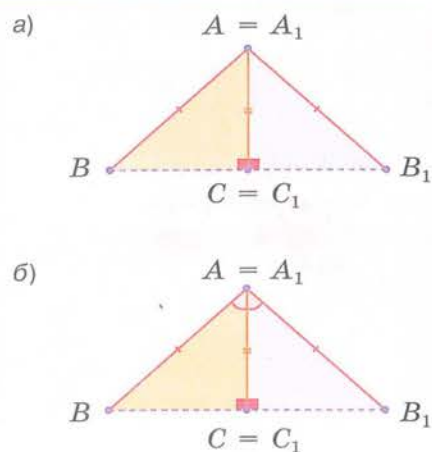


Рис. 16.11

Медиана прямоугольного треугольника

У прямоугольных треугольников есть особое свойство, которого нет у других треугольников. Оно связано с их медианой, проведённой из вершины прямого угла к гипотенузе. Заключается оно в следующем:



Свойство медианы прямоугольного треугольника

Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к его гипотенузе, равна половине гипотенузы (рис. 16.12, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC из вершины его прямого угла C провели медиану CM (рис. 16.12, б). Докажем, что медиана CM в два раза короче его гипотенузы AB .

Давайте обозначим острые углы нашего треугольника буквами α и β . Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Сделаем дополнительное построение: продлим медиану CM на свою длину за точку M . На луче CM мы тогда получим точку E такую, что $EM = CM$. Треугольники BME

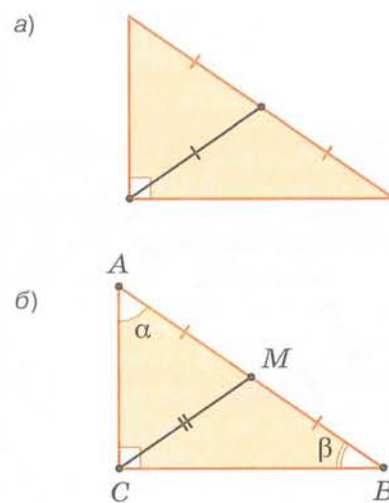


Рис. 16.12

и $\triangle AMC$ будут равны по первому признаку, поскольку $AM = BM$, $CM = EM$, а их углы при вершине M равны как вертикальные (рис. 16.13).

Из равенства данных треугольников следует, что $BE = BC$ и угол $\angle MBE$ равен α . Значит, угол $\angle CBE$ будет равен $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Теперь рассмотрим треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle EBC$. Они равны по первому признаку, поскольку $AC = BE$, сторона BC у них общая, а углы $\angle ACB$ и $\angle CBE$ равны 90° . Тогда $CE = AB$.

Поскольку $CE = 2CM$, то $CM = \frac{1}{2} AB$.

Что и требовалось доказать.

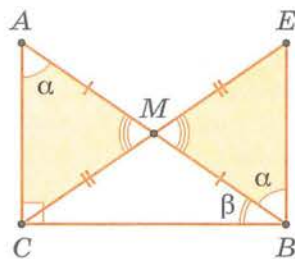


Рис. 16.13

Могут ли медианы других треугольников обладать данным свойством? Чтобы это выяснить, давайте сформулируем обратное утверждение и докажем, что оно верно. Такое обратное утверждение называют признаком фигуры.



Признак прямоугольного треугольника

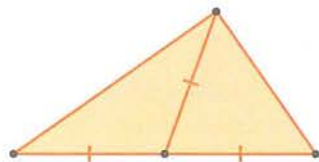
Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то данный треугольник — прямоугольный (рис. 16.14, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Предположим, медиана CM некоторого треугольника ABC равна половине его стороны AB . Нужно доказать, что данный треугольник прямоугольный.

Так как сторона AB в два раза больше медианы CM , то отрезки AM , BM и CM должны быть равны. Тогда треугольники $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ будут равнобедренными. Давайте обозначим равные углы при их основаниях AC и BC буквами α и β и сложим все углы в треугольнике ABC (рис. 16.14, б). По теореме о сумме углов треугольника получим: $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$. Тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$. А это и означает, что угол $\angle ACB$ нашего треугольника равен 90° . То есть треугольник ABC — прямоугольный. Что и требовалось доказать.

а)



б)

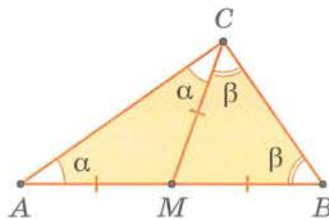


Рис. 16.14

Прямоугольный треугольник с углом 30°

Если острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , то он обладает ещё одним замечательным свойством. Дело в том, что такой треугольник можно считать «половинкой» от равностороннего треугольника. Но давайте вначале запишем



Свойство прямоугольного треугольника с углом 30°

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине его гипотенузы (рис. 16.15, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть угол C прямоугольного треугольника ABC равен 30° , а его гипотенуза AB равна c . Другой угол B этого треугольника легко найти: он равен $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Сделаем дополнительное построение: отразим наш треугольник симметрично относительно прямой AC . Как вы помните, для этого нам нужно продолжить катет BC на свою длину и взять такую точку B_1 , что $B_1C = BC$ (рис. 16.15, б).

Тогда треугольники AB_1C и ABC будут равны по первому признаку, поскольку их катеты равны. Значит, его углы CAB_1 и AB_1C будут равны 30° и 60° соответственно. Посмотрите теперь на треугольник ABB_1 : все его углы равны 60° . Значит, треугольник равносторонний. Поэтому $BB_1 = 2BC = AB$. Таким образом, катет BC ровно в 2 раза меньше гипотенузы AB .

Что и требовалось доказать.

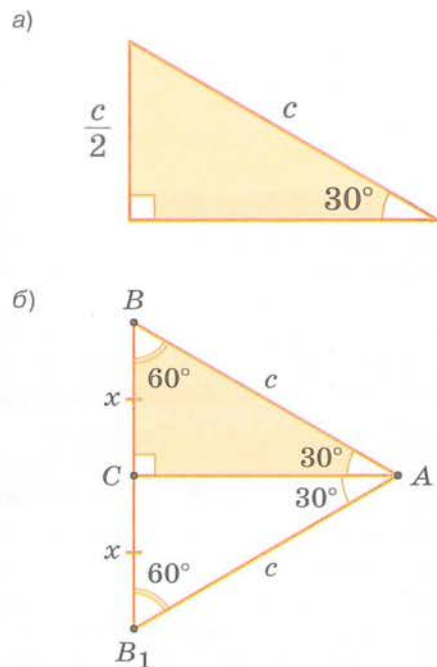


Рис. 16.15

Прямоугольный треугольник с углом 30° встречается так же часто, как и равносторонний треугольник. Его можно встретить на портиках зданий (рис. 16.16) и даже под землей... Не удивляйтесь: эскалаторы в метро имеют как раз такой наклон — 30° (рис. 16.17). Поскольку фонари на них устанавливают обычно на одинаковых рас-

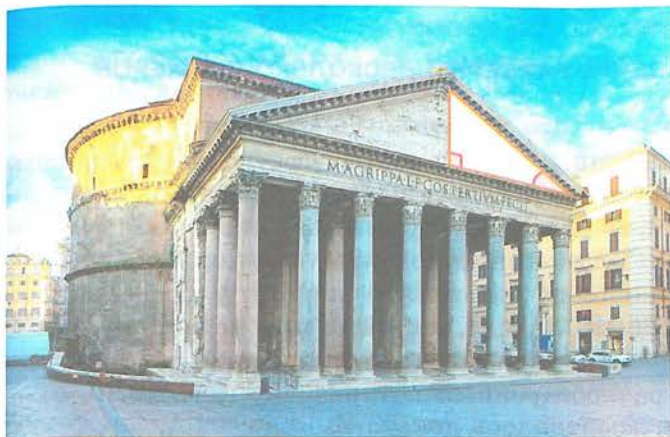


Рис. 16.16



Рис. 16.17

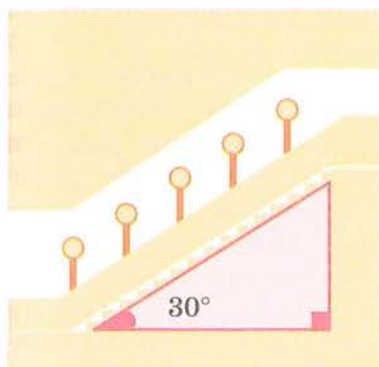


Рис. 16.18

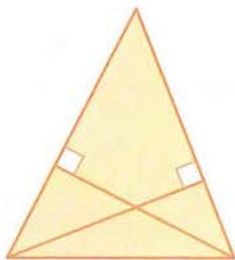
стояниях друг от друга, то, посчитав количество этих фонарей и расстояние между ними, можно легко вычислить примерную глубину станции метро (рис. 16.18).



ВОПРОСЫ

- 1 Что такое катет и гипотенуза? Какие слова русского языка содержат те же греческие приставки?
- 2 Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
- 3 Верно ли, что любой треугольник можно составить из двух прямоугольных треугольников?
- 4 Могут ли разные прямоугольные треугольники иметь равные гипотенузы?
- 5 Какие вы знаете признаки равенства прямоугольных треугольников? Какой из них прямо не следует из общих признаков равенства треугольников?
- 6 Чему равна медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины его прямого угла?
- 7 Как звучит признак прямоугольного треугольника?
- 8 Чему равен катет прямоугольного треугольника, если прилегающий к нему угол равен 60° ?
- 9 Самый большой в мире эскалатор находится на станции метро «Адмиралтейская» в Санкт-Петербурге. Его длина равна 137 метров. На какую глубину он опускает пассажиров?
- 10 Верно ли, что середина одной стороны прямоугольного треугольника находится на одинаковых расстояниях от всех его вершин? Как называется эта сторона?
- 11 Как бы вы сформулировали признак прямоугольного треугольника с углом 30° ?

а)



б)

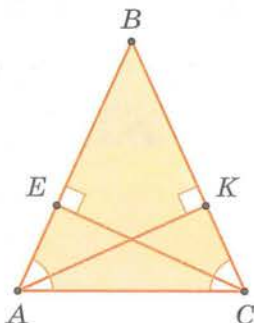
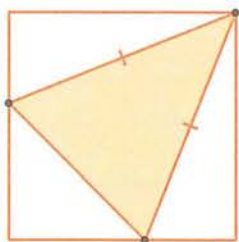
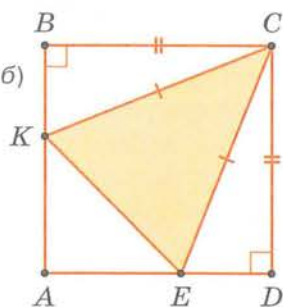


Рис. 16.19

а)



б)



в)

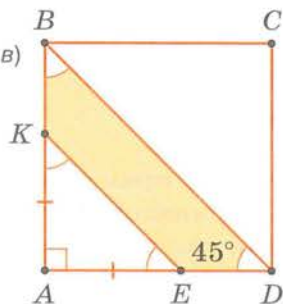


Рис. 16.20



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 16.1** Две высоты треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный (рис. 16.19, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольнике ABC равны высоты AK и CE . Тогда прямоугольные треугольники AKC и AEC будут равны по гипотенузе и катету, поскольку их сторона AC общая. Значит, их углы при вершинах A и C треугольника ABC равны. Отсюда следует, что треугольник ABC — равнобедренный по признаку (рис. 16.19, б).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 16.2** В квадрат вписали равнобедренный треугольник так, как показано на рисунке. Докажите, что одна сторона этого треугольника параллельна диагонали квадрата (рис. 16.20, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть вершины K и E равнобедренного треугольника KCE лежат соответственно на сторонах AB и AD квадрата $ABCD$. Поскольку стороны квадрата равны и углы у него прямые, а $CK = CE$, то прямоугольные треугольники BKC и DEC равны по гипотенузе и катету (рис. 16.20, б). Поэтому $BK = ED$. Отсюда следует, что $AK = AE$ и треугольник AKE равнобедренный с прямым углом при вершине A . Значит, его углы при вершинах K и E равны 45° . Точно также треугольник ABD прямоугольный и равнобедренный, поэтому его угол ADB тоже равен 45° . А поскольку углы AKE и ADB равны, то прямые EK и BD параллельны по признаку (рис. 16.20, в).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 16.3** В четырёхугольнике два противоположных угла прямые, а его диагонали перпендикулярны друг другу. Докажите, что одна из этих диагоналей делит другую пополам (рис. 16.21, а).

РЕШЕНИЕ: Если в четырёхугольнике $ABCD$ углы при его противоположных вершинах B и D прямые, то диагональ AC разбивает его на два прямоугольных треугольника. Давайте проведём в этих треугольниках медианы

а)

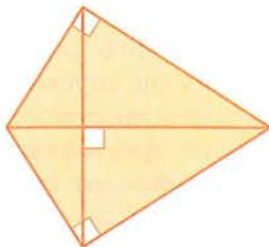
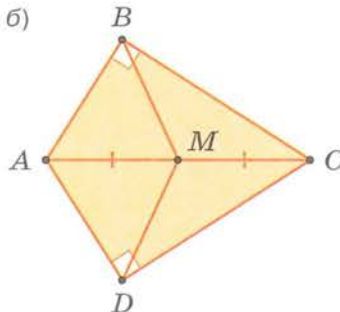


Рис. 16.21

б)



BM и DM к их общей гипотенузе AC . По свойству прямоугольных треугольников эти медианы должны быть равны половине гипотенузы AC , то есть $BM = DM$ (рис. 16.21, б).

Если точка M окажется на отрезке BD , то она будет серединой сразу двух диагоналей нашего четырёхугольника, и тогда все доказано. В другом случае получаем равнобедренный треугольник BMD . Поскольку по условию диагонали четырёхугольника перпендикулярны друг другу, то отрезок KM будет высотой треугольника BMD (рис. 16.21, в). Но в равнобедренном треугольнике высота, проведённая к его основанию, совпадает с медианой. Значит, точка K является серединой диагонали BD . То есть в любом случае диагональ AC делит диагональ BD пополам.

Что и требовалось доказать.

★★★ ПРИМЕР 16.4 В прямоугольном треугольнике острый угол равен 15° , а гипотенуза равна 1. Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу (рис. 16.22, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 1, а его угол A равен 15° . Проведём медиану CM к гипотенузе AB данного нам треугольника. По свойству эта медиана равна половине гипотенузы, то есть $CM = \frac{1}{2}$ (рис. 16.22, б). Треугольник ACM равнобедренный, поэтому его угол ACM тоже равен 15° .

Угол CMB — внешний для треугольника ACM , поэтому он равен $15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

Теперь проведём высоту CH и рассмотрим треугольник MCH — он прямоугольный с углом 30° . По свойству такого треугольника катет CH должен быть равен половине гипотенузы, то есть $\frac{1}{2} CM = \frac{1}{4}$ (рис. 16.22, в).

Итак, высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна $\frac{1}{4}$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{4}$.

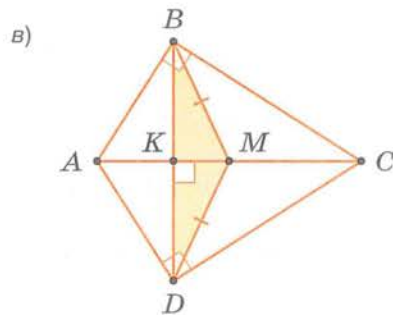


Рис. 16.21

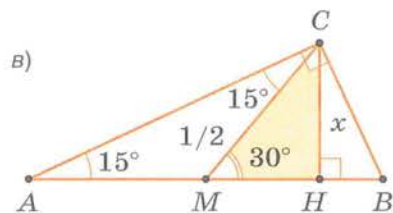
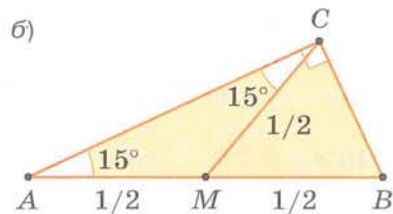
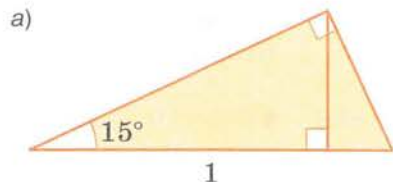


Рис. 16.22



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

16.1 ★★★ У четырёхугольника равны две соседние стороны, а два противоположных его угла прямые. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны (рис. 16.23).

16.2 ★☆☆ В четырёхугольнике две противоположные стороны равны, а два противоположных угла рав-

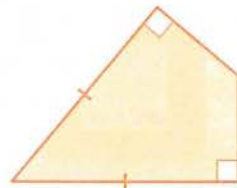


Рис. 16.23

ны 90° . Докажите, что все углы этого четырёхугольника прямые (рис. 16.24).

16.3 ☆☆☆ Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и проведённой к нему медиане (рис. 16.25).

16.4 ☆☆☆ Докажите, что медиана и высота, проведённые к гипотенузе прямоугольного треугольника, образуют равные углы с его катетами (рис. 16.26).

16.5 ☆☆☆ Одна сторона треугольника в два раза больше другой, а угол между ними равен 60° . Найдите меньший из углов треугольника (рис. 16.27).

16.6 ☆☆☆ Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна одному из его катетов. Найдите острые углы этого треугольника.

16.7 ☆☆☆ Найдите высоту дома, размеры которого показаны на рисунке 16.29, если угол между равными скатами его крыши равен 120° .

16.8 ☆☆☆ Ваня поднялся по неподвижному эскалатору метро и насчитал на нём 90 ступенек и 8 фонарей. Чему равно расстояние между соседними фонарями, если высота одной ступеньки равна 20 см (рис. 16.30)?

16.9 ☆☆☆ Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . На его гипотенузу опустили высоту. В каком отношении она её делит (рис. 16.28)?

16.10 ☆☆☆ Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . К его гипотенузе провели серединный перпендикуляр. В каком отношении он делит катет этого треугольника (рис. 16.31)?

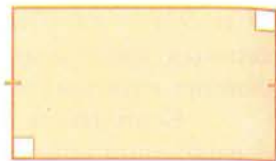


Рис. 16.24

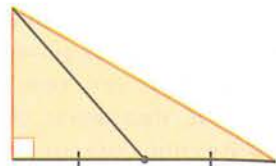


Рис. 16.25

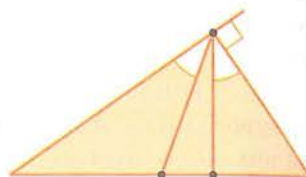


Рис. 16.26

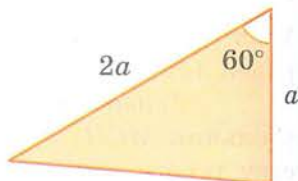


Рис. 16.27

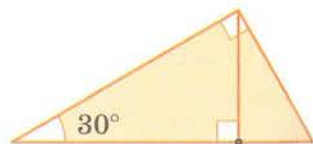


Рис. 16.28

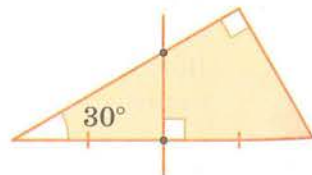


Рис. 16.31

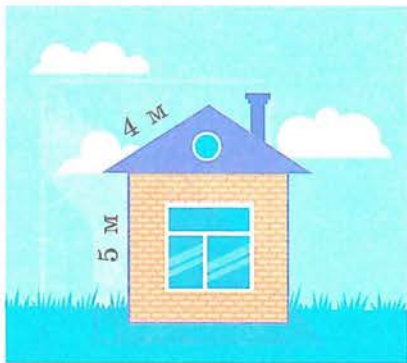


Рис. 16.29

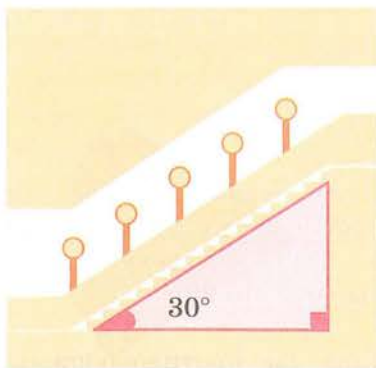


Рис. 16.30

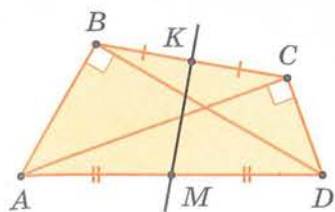


Рис. 16.32

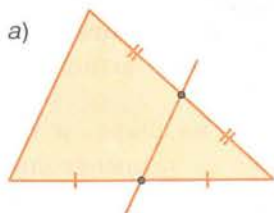


Рис. 16.33

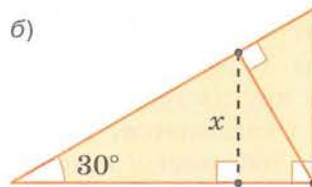


Рис. 16.33

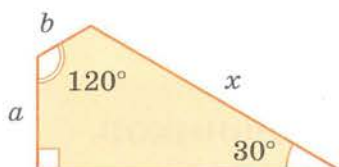


Рис. 16.34

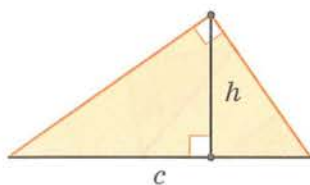


Рис. 16.35

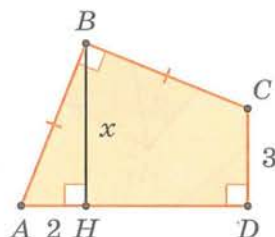


Рис. 16.36

16.11 ★★★ В четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD прямые. Точки M и K — середины его сторон AD и BC соответственно. Докажите, что прямая MK перпендикулярна одной из сторон этого четырёхугольника (рис. 16.32).

16.12 ★★★ Через середины двух сторон треугольника провели прямую. Докажите, что расстояния от всех вершин этого треугольника до данной прямой одинаковые (рис. 16.33, а).

16.13 ★★★ Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , а его гипотенуза равна 1. Найдите длину отрезка, отмеченного на рисунке пунктиром (рис. 16.33, б).

16.14 ★★★ Выразите сторону четырёхугольника, обозначенную буквой x на рисунке, через его стороны a и b (рис. 16.34).

16.15 ★★★ Докажите равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу (рис. 16.35).

16.16 ★★★ В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и D равны 90° , $AB = BC$. Найдите длину перпендикуляра BH , если $AH = 2$, $CD = 3$ (рис. 16.36).



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Когда вы самостоятельно доказывали признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу, то наверняка использовали теорему о сумме углов треугольника (подумайте, в каком месте!). Таким образом, ваше доказательство должно было опираться на аксиому параллельных, то есть на знаменитый пятый

постулат Евклида. А можно ли доказать этот признак без аксиомы параллельных? Другими словами, выполняется ли он в других геометриях?

Оказывается, что и в геометрии на шаре, и в геометрии Лобачевского признаки равенства прямоугольных треугольников тоже «работают». Значит, все их можно доказать, не используя пятый постулат Евклида, в том числе и признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Давайте приведём доказательство, в котором не используется теорема о сумме углов треугольника.



Равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные гипотенузы $AB = A_1B_1$ и равные острые углы α при вершинах A и A_1 (рис. 16.37, а). Давайте докажем, что эти треугольники равны. Отрасим вершины B и B_1 симметрично относительно прямых AC и A_1C_1 и получим точки D и D_1 .

Тогда треугольник ACD будет равен треугольнику ACB , а треугольник $A_1C_1D_1$ — треугольнику $A_1C_1B_1$ по первому признаку. Можно сказать, что мы «удвоили» наши прямоугольные треугольники (рис. 16.37, б).

Значит, $AD = AB = A_1B_1 = A_1D_1$. Кроме того, углы BAD и $B_1A_1D_1$ будут равны 2α . Тогда треугольники BAD и $B_1A_1D_1$ будут равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, должны быть равны их углы B и B_1 . А если так, то треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Что и требовалось доказать.

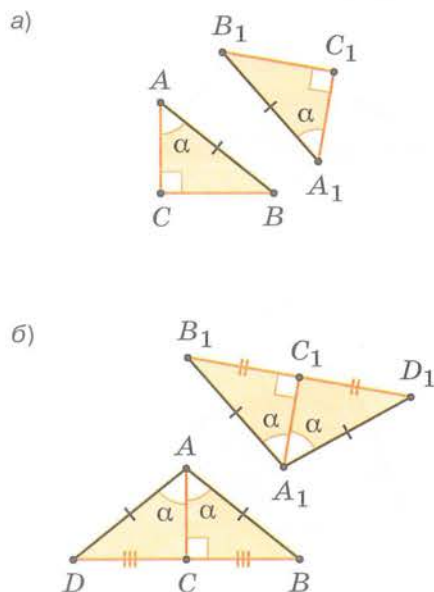


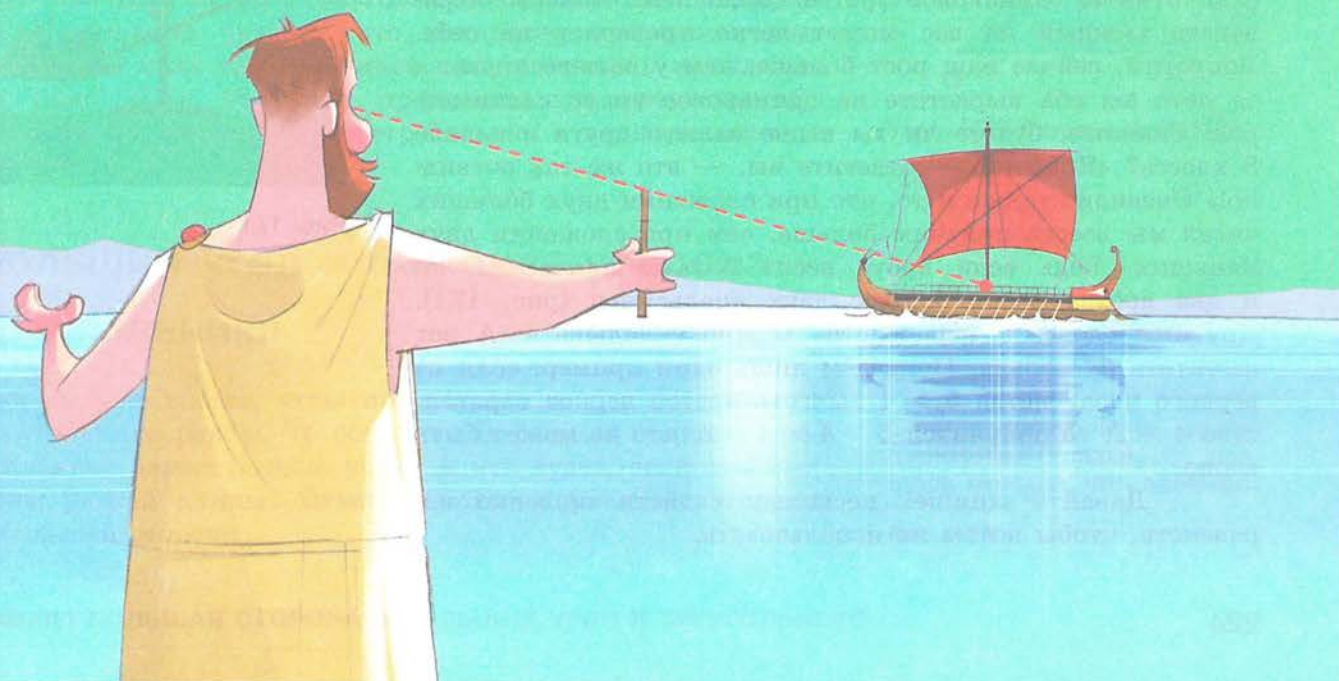
Рис. 16.37

5

Геометрические неравенства

§17 Большая сторона и больший
угол в треугольнике

§18 Неравенство треугольника



§17 Бóльшая сторона и больший угол в треугольнике

Неравенства в математике

До сих пор мы с вами искали на чертежах равные треугольники, отмечали равные отрезки и углы. Значит, мы имели дело с равенством фигур. В этом же параграфе мы будем выяснять, какой угол или какой отрезок на чертеже больше другого, то есть будем сравнивать их между собой. В таких случаях говорят, что имеют дело с **неравенствами**.

Неравенства встречаются не только в геометрии. На уроках алгебры вы уже сравнивали числа и знаете, что одно число больше другого, если их разность больше нуля. Отсюда сразу следует, что неравенство между двумя числами не поменяется, если к каждому из них прибавить (или отнять) одинаковое третье число. Это свойство неравенств каждый из вас может легко проверить на себе. Допустим, сейчас ваш рост больше, чем у вашего друга, а за лето вы оба вырастаете на одинаковое число сантиметров. Скажите, будете ли вы выше вашего друга в начале 8 класса? «Конечно, — ответите вы, — это же так очевидно!» Очевидно также и то, что при сложении двух бóльших чисел мы всегда получим больше, чем при сложении двух меньших. Ведь если арбуз весит больше апельсина, то и два арбуза весят больше двух апельсинов (рис. 17.1). Другими словами, неравенства можно складывать. А вот вычитать их нельзя. Приведём лишь один пример: если из верного неравенства $5 > 4$ вычесть другое верное неравенство $4 > 2$, то получится $5 - 4 > 4 - 2$, что не может быть верно.

Давайте запишем несколько свойств числовых неравенств, чтобы потом их использовать.

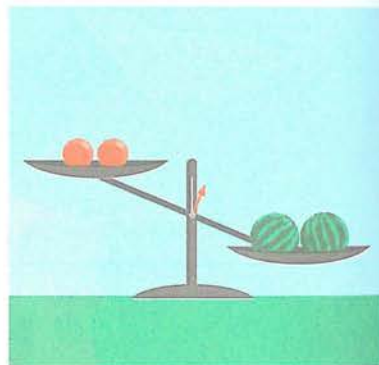


Рис. 17.1



Свойства числовых неравенств

- 1 Если $a > b$, то $a - b > 0$.
- 2 Если $a > b$, то $a + c > b + c$, для любого c .
- 3 Если $a < b < c$, то $a < c$.
- 4 Если $a > b$, то $a \cdot c > b \cdot c$, для $c > 0$.
- 5 Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

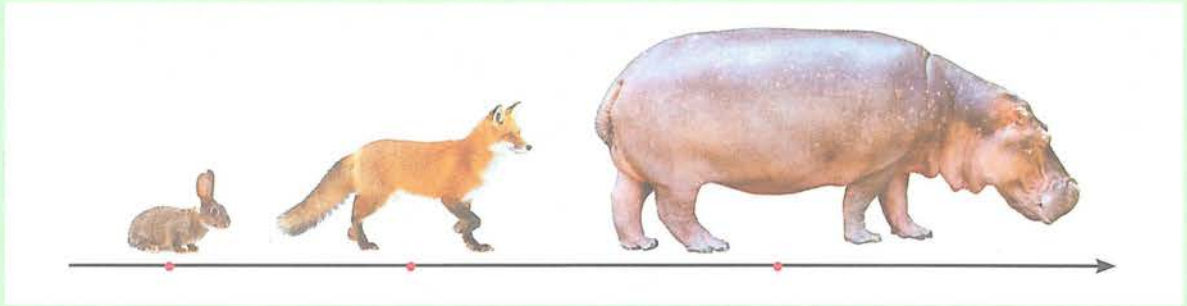


Рис. 17.2

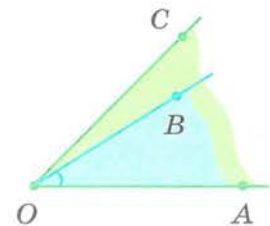
Перейдём теперь к неравенствам в геометрии. Мы будем считать, что из двух отрезков по определению меньше тот, который можно целиком поместить внутри другого отрезка. Точно также меньший из двух углов всегда можно расположить внутри большего угла, если его откладывать от их общей стороны. Из пройденных нами свойств отрезков и углов следует, что у меньшего отрезка или угла должна быть и величина меньше, чем у большего (рис. 17.3, 17.4).

Впрочем, не все фигуры в геометрии можно так сравнивать, как отрезки и углы. Например, нельзя сказать, что один из двух треугольников просто больше другого. Необходимо указать, что конкретно мы сравниваем: периметры этих треугольников или, например, их площади (рис. 17.5). Нетрудно придумать два треугольника, у одного из которых периметр больше, а площадь меньше другого.



Отрезок CD меньше отрезка AB

Рис. 17.3



Угол AOC больше угла AOB

Рис. 17.4

Больший угол и бо́льшая сторона треугольника

Как вы уже знаете, углы при основании равнобедренного треугольника равны. То есть против равных сторон в треугольнике лежат равные углы. А что будет, если эти стороны разной длины? Ответ на этот вопрос даёт теорема о бо́льшей стороне.



Синий треугольник имеет периметр больше, а площадь меньше, чем зелёный

Рис. 17.5



Теорема о большей стороне

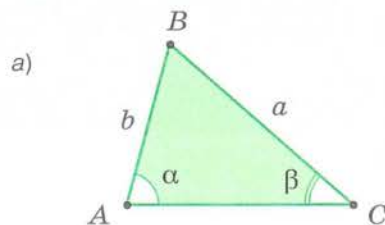
В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (рис. 17.6, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть в треугольнике ABC сторона BC больше стороны AB . Мы докажем, что угол при вершине A всегда больше угла при вершине C . Давайте обозначим величины этих углов буквами α и β и убедимся, что $\alpha > \beta$ (рис. 17.6, а).

Сделаем дополнительное построение: отложим от вершины B на стороне BC нашего треугольника отрезок BK , равный стороне AB . Поскольку сторона BC по условию больше стороны AB , то точка K окажется где-то на отрезке BC (рис. 17.6, б). Тогда треугольник ABK будет равнобедренным, поэтому его углы BAK и BKA будут равны. Обозначим их величину буквой γ . Ясно, что луч AK лежит внутри угла BAC , поэтому $\gamma < \alpha$. Теперь сравним величины углов γ и β . Поскольку угол AKB — внешний для треугольника AKC , то по теореме он равен сумме углов β и CAK . Поэтому $\gamma > \beta$. Значит, мы получаем двойное неравенство: $\beta < \gamma < \alpha$. Откуда следует, что $\beta < \alpha$.

Что и требовалось доказать.



Если $a > b$, то $\alpha > \beta$

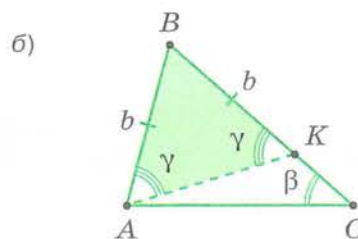


Рис. 17.6

Мы с вами доказали, что против большей стороны в треугольнике всегда лежит больший угол. А верно ли обратное утверждение? Оказывается, что оно тоже верно. То есть против большего угла в треугольнике всегда должна лежать большая сторона. Называют это утверждение теоремой о большем угле треугольника.



Теорема о большем угле

В треугольнике против большего угла всегда лежит большая сторона (рис. 17.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть в треугольнике ABC угол при вершине A больше угла при вершине C . Мы докажем, что

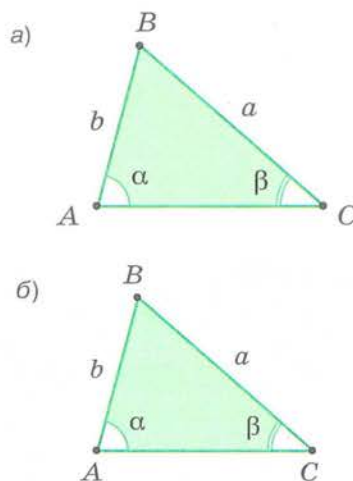
сторона BC в треугольнике должна быть больше его стороны AB . Обозначим данные углы буквами α и β , а противоположные им стороны треугольника — как a и b .

По условию нам дано $\alpha > \beta$.

Будем рассуждать от противного. Допустим, что сторона BC не больше стороны AB . Тогда возможны всего два случая: либо $a = b$, либо $b > a$. В первом случае треугольник ABC должен быть равнобедренным, и тогда по его свойству $\alpha = \beta$. А это противоречит условию нашей теоремы. Во втором случае по доказанной раньше теореме о большей стороне треугольника против его большей стороны b должен лежать больший угол β .

То есть тогда должно быть $\alpha < \beta$. Но по условию дано, что $\alpha > \beta$. Мы опять пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно, и на самом деле $a > b$.

Что и требовалось доказать.



Если $\alpha > \beta$, то $a > b$

Рис. 17.7

Перпендикуляр и наклонная

Вы уже знаете, что из точки на прямую всегда можно опустить перпендикуляр. Длину этого перпендикуляра называют **расстоянием** от данной точки до прямой.

А знаете почему? Дело в том, что перпендикуляр короче всех других отрезков, которые соединяют данную точку с точками прямой линии. Все такие отрезки называют **наклонными** к прямой или просто **наклонными**. Другими словами, самый короткий путь от точки до прямой идёт не по наклонной, а по перпендикуляру к ней. Именно так плывёт в море человек к берегу, чтобы сократить себе путь. Так же переходят оживлённую улицу или



Рис. 17.8

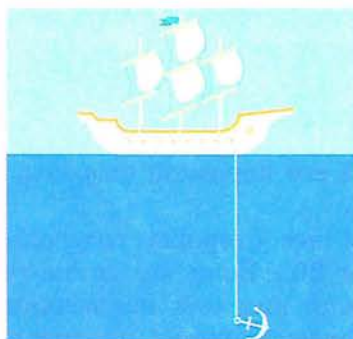


Рис. 17.9

строят мост через реку — перпендикулярно к её берегам, потому, что так короче. С помощью перпендикуляра измеряют высоту или глубину. Опуская якорь, по длине цепи определяют расстояние до дна. Потом цепь всегда удлиняют, чтобы корабль мог немного отойти в сторону. Именно потому, что перпендикуляр короче наклонной. Причём данное утверждение — не аксиома, а теорема. И мы её сейчас докажем.



Теорема о перпендикуляре и наклонной

Перпендикуляр короче любой наклонной, проведённой из данной точки к прямой (рис. 17.10, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Опустим из данной точки M на прямую l перпендикуляр MH . Давайте проведём из этой же точки к прямой произвольную наклонную MK и докажем, что она длиннее перпендикуляра MH (рис. 17.10, б).

Рассмотрим треугольник MHK . В нём отрезок MK является гипотенузой, а перпендикуляр MH — катетом. Против гипотенузы в треугольнике лежит прямой угол, а против катета MH лежит угол MKH . Но этот угол острый, иначе сумма углов в треугольнике была бы больше 180° . Значит, угол, лежащий против гипотенузы, всегда больше угла, лежащего против катета. По теореме о большем угле в этом треугольнике гипотенуза всегда должна быть больше катета, а значит, отрезок перпендикуляра MH короче любой наклонной MK . Что и требовалось доказать.

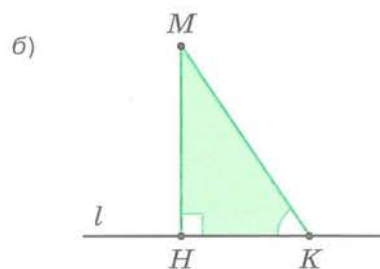


Рис. 17.10



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 17.1** Докажите, что угол треугольника, лежащий против самой его короткой стороны, не превосходит 60° .

РЕШЕНИЕ: Если все стороны треугольника равны, то все его углы равны 60° . Если же какие-то стороны не равны по длине, то среди них есть наименьшая. По теореме о большей стороне треугольника против его самой короткой стороны должен лежать самый маленький угол.

Обозначим величину этого угла буквой α . Два других угла треугольника тогда будут больше или равны α . Значит, сумма всех углов нашего треугольника должна быть больше или равна 3α . Тогда $3\alpha \leq 180^\circ$. Откуда $\alpha \leq 60^\circ$.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 17.2** На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что расстояние от этой точки до противоположной вершины не больше боковой стороны треугольника (рис. 17.11, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть M — произвольная точка на основании AC равнобедренного треугольника ABC . По свойству углы при его основании равны. Обозначим их величину буквой α , а величину угла AMB — буквой β . Поскольку угол AMB — внешний для треугольника BMC , то он равен сумме угла α и угла MBC . Поэтому $\beta > \alpha$. Теперь рассмотрим треугольник ABM . В нём сторона AB должна быть больше стороны BM по теореме, поскольку против этой стороны лежит угол β , который больше угла α . Значит $BM < AB$ (рис. 17.11, б).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 17.3** На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC построили квадрат $BCDE$. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Какой из отрезков больше: DO или EO (рис. 17.12, а)?

РЕШЕНИЕ: Пусть угол B треугольника ABC равен α . Тогда угол ABE равен $90^\circ + \alpha$. Треугольник ABE равнобедренный, ведь стороны квадрата равны. Поэтому его углы при основании AE равны β (рис. 17.12, б). Запишем сумму углов треугольника ABE : $90^\circ + \alpha + 2\beta = 180^\circ$. Откуда $\beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Значит, угол AED равен $90^\circ - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (рис. 17.13). Диагональ BD делит квадрат на два равных треугольника, поэтому угол EDO равен 45° . Теперь рассмотрим треугольник OED . В нём угол OED больше угла ODE , поэтому по теореме о большем угле сторона OD больше стороны OE .

ОТВЕТ: $OD > OE$.

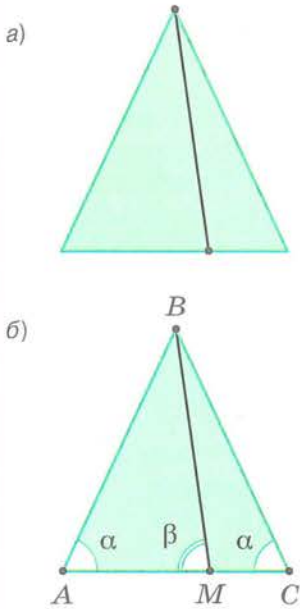


Рис. 17.11

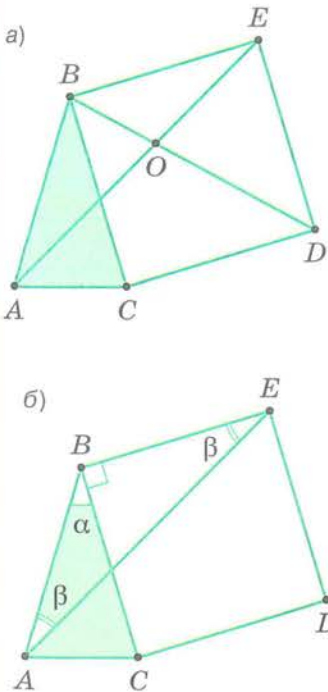


Рис. 17.12

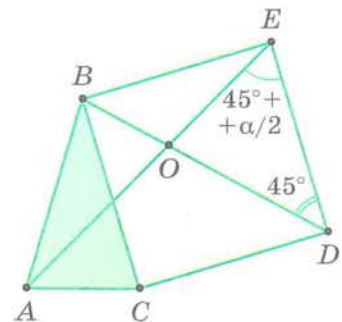


Рис. 17.13

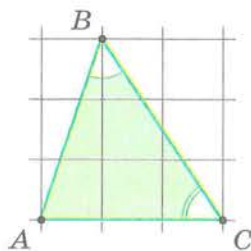


Рис. 17.14

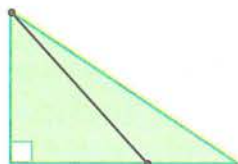


Рис. 17.15

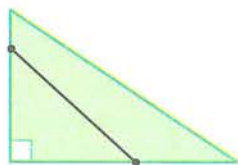


Рис. 17.16

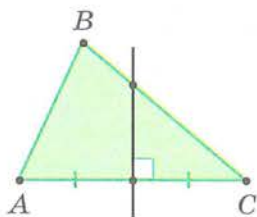


Рис. 17.17

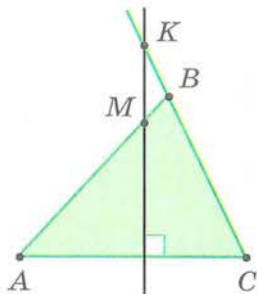


Рис. 17.18



ВОПРОСЫ

- 1 Можно ли складывать числовые неравенства? Можно ли их вычитать?
- 2 Применима ли к неравенствам транзитивность?
- 3 Верно ли, что в треугольнике против самой большой стороны лежит угол, который не меньше 60° ?
- 4 Что длиннее в прямоугольном треугольнике: катет или гипотенуза? Почему это так?
- 5 Как выглядит самый короткий путь от точки до прямой линии?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 17.1 ☆☆☆ Докажите, что в треугольнике против тупого угла лежит самая большая сторона.
- 17.2 ☆☆☆ На клетчатой бумаге отметили точки A , B и C . Какой из углов больше: ABC или BCA (рис. 17.14)?
- 17.3 ☆☆☆ Нарисуйте четырёхугольник, все стороны которого больше двух его диагоналей. Может ли он быть выпуклым?
- 17.4 ☆☆☆ Точку на катете прямоугольного треугольника соединили отрезком с его противоположной вершиной. Докажите, что длина полученного отрезка не больше гипотенузы треугольника (рис. 17.15).
- 17.5 ☆☆☆ На катетах прямоугольного треугольника отметили по точке. Докажите, что соединяющий их отрезок не больше гипотенузы треугольника (рис. 17.16).

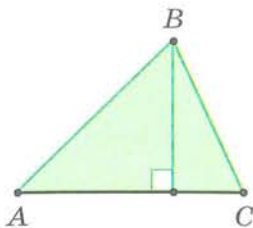


Рис. 17.19

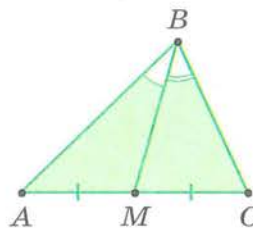


Рис. 17.20

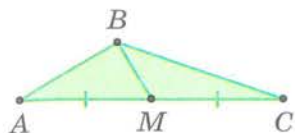


Рис. 17.21

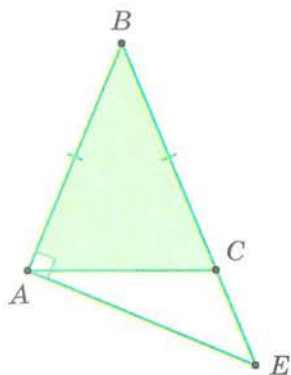


Рис. 17.22

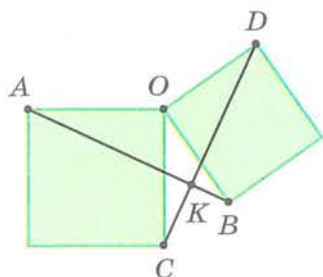


Рис. 17.23

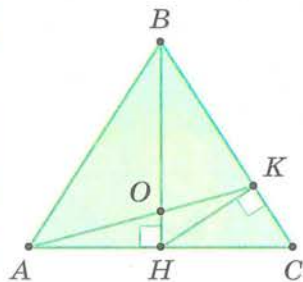


Рис. 17.24

- 17.6 ☆☆☆ Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает его сторону BC . Докажите, что $BC > AB$ (рис. 17.17).
- 17.7 ☆☆☆ Перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает его сторону AB в точке M , а продолжение стороны BC — в точке K . Известно, что $AB > BC$. Докажите, что $BK > BM$ (рис. 17.18).
- 17.8 ☆☆☆ Высота делит сторону неравнобедренного треугольника на два отрезка. Докажите, что меньший из них прилегает к большему углу треугольника (рис. 17.19).
- 17.9 ☆☆☆ В треугольнике ABC провели медиану BM . Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM (рис. 17.20).
- 17.10 ☆☆☆ Медиана BM треугольника ABC меньше половины его сторон AB и BC . Докажите, что угол ABC больше 120° (рис. 17.21).
- 17.11 ☆☆☆ На продолжении боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC взяли точку E так, что угол BAE равен 90° . При какой величине угла ABC верно, что $AC > CE$ (рис. 17.22)?
- 17.12 ☆☆☆ Два квадрата имеют общую вершину O . Отрезки AB и CD , которые соединяют их вершины на рисунке, пересекаются в точке K . Известно, что $AK > DK$. У какого из этих квадратов сторона больше (рис. 17.23)?
- 17.13 ☆☆☆ На основание AC равнобедренного треугольника ABC опущена высота BH . Из точки H на его боковую сторону BC опустили перпендикуляр HK . Отрезки AK и BH пересекаются в точке O . Какой отрезок больше: BO или BK (рис. 17.24)?

§18 Неравенство треугольника

Неравенство треугольника

Каждый человек знает, что на плоскости самый короткий путь от одной точки до другой идёт по отрезку прямой линии или просто «по прямой». Так обычно и говорят: «Иди напрямик». В самом деле, данное утверждение очень похоже на аксиому. В своё время древние философы смеялись над великим Архимедом, когда он пытался это строго обосновать. «Даже осёл знает, что самый короткий путь к стогу сена идёт по прямой!» — говорили они. Все это, конечно, так... А теперь представьте, что с утра от дома до школы вы шли пешком 500 м. После уроков у школы сели на автобус и проехали 3 км по прямой улице до своего кружка. А после занятий с этого кружка на другом авто-

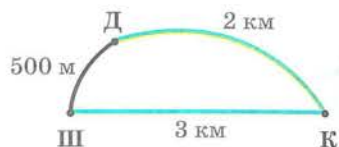


Рис. 18.2

Рис. 18.1



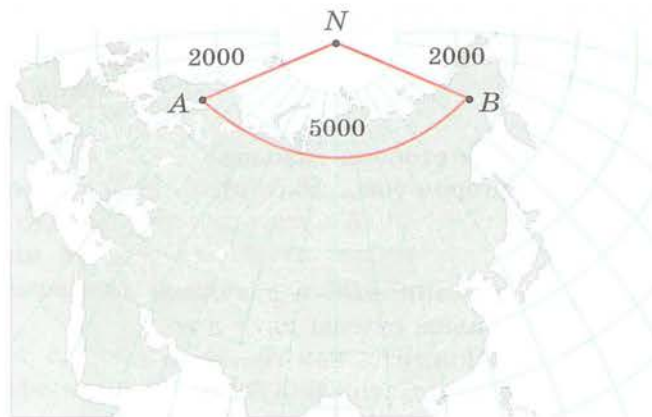


Рис. 18.3

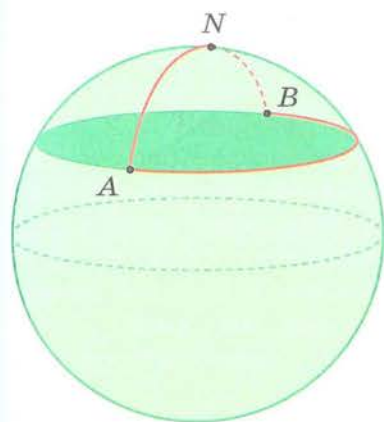


Рис. 18.4

бусе и уже по другой улице вернулись домой. Могли ли вечером вы проехать ровно 2 км? Перед тем как отвечать на этот вопрос, давайте нарисуем схему ваших передвижений в течение дня. Там будут всего три точки: ваш дом, школа и кружок. Школу и кружок соединяет отрезок прямой дороги длиной 3 км (рис. 18.2). Теперь вообразите, что вы проехали от кружка до дома, а потом вечером снова пришли в школу. Весь ваш путь от кружка до школы тогда составил бы всего $2 \text{ км} + 500 \text{ м} = 2,5 \text{ км}$. Но разве могло такое быть, если «по прямой» между ними было 3 км? Конечно, нет! Ведь путь по отрезку прямой должен быть всегда короче любого другого.

Теперь разберём другой пример. Один самолёт пролетел 2000 км на север, после 2000 км на юг, затем 5000 км на запад и — вернулся в исходную точку... Могло ли такое быть? Удивительно, но такое бывает. Например, если исходная точка — в 2000 км от северного полюса Земли. На рисунке 18.4 показано, как мог лететь этот самолёт. На географической карте его маршрут выглядел бы как треугольник, стороны которого равны 2000 км, 2000 км и 5000 км (рис. 18.3). Но разве может быть такой треугольник? Ведь самый короткий путь между двумя точками на плоскости должен идти по прямой! В том-то и дело, что географическая карта плоская, а наша Земля круглая. Расстояния на такой карте неизбежно искажаются, причём тем сильнее, чем ближе вы подходите к полюсу Земли. Если бы мы с вами рисовали путь нашего самолёта на глобусе, то сразу бы увидели, что при движении на запад по параллели он летит вовсе не по самому короткому пути между точками. А для самых коротких отрезков на поверхности Земли выполняется то же неравенство, что и для трёх точек на плоскости. И называется оно так же, как и на плоскости, **неравенством треугольника**. Причём, как это ни удивительно, человек его может строго доказать. Итак, давайте для плоскости сформулируем



Неравенство треугольника

В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (рис. 18.5, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

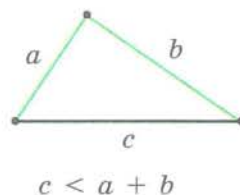
Возьмём любой треугольник ABC и докажем, что его сторона AC меньше суммы двух других сторон AB и BC . Помните, как геометрически получить сумму двух сторон $AB + BC$? Правильно: нужно отложить их на одной прямой. Итак, отложим на продолжении стороны BC нашего треугольника отрезок BE , равный AB . Тогда $AB + BC = CE$. Нам с вами осталось доказать, что $CE > AC$.

Посмотрите на треугольник ABE : он равнобедренный, поэтому его углы BAE и BEA при основании AE равны. Угол CAE больше угла BAE . Значит, он больше и угла AEB . Теперь посмотрите на треугольник AEC : в нём по теореме против большего угла CAE лежит сторона CE , которая должна быть больше стороны AC . То есть $AB + BC > AC$ (рис. 18.5, б).

Точно так же легко проверить, что в этом треугольнике и сторона AB , и сторона BC меньше суммы двух других его сторон.

Что и требовалось доказать.

а)



б)

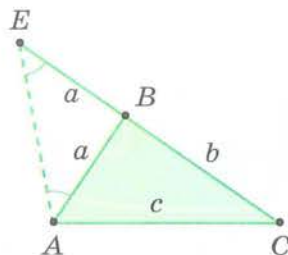


Рис. 18.5

Может ли быть треугольник со сторонами 2, 3 и 6? Конечно нет! Ведь если бы он существовал, то для него должно было выполняться главное неравенство треугольника. Но ведь $2 + 3 < 6$. Поэтому такого треугольника нет. А существует ли треугольник со сторонами 2, 3 и 4? Такой треугольник существует. Именно потому, что каждая его сторона меньше суммы двух других! Такой треугольник можно легко построить циркулем и линейкой. Давайте сделаем это вместе. Вначале возьмём отрезок AC , длина которого равна 4. Потом построим две окружности с центрами в точках A и C , радиусы которых равны 2 и 3. Любая из точек пересечения этих окружностей будет третьей вершиной нужного нам треугольника ABC . Треугольник со сторонами 2, 3 и 4 построен (рис. 18.6).

Самые умные из вас (или самые сомневающиеся) могут задать такой вопрос: «А почему построенные нами окружности вообще будут пересекать друг друга?» Это можно доказать, хотя само доказательство довольно сложно. Поэтому мы примем без доказательства, что:

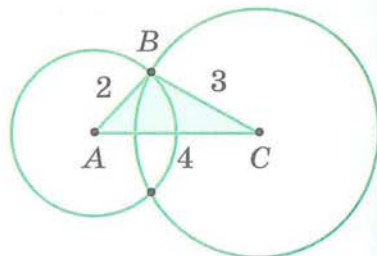


Рис. 18.6



Из трёх отрезков, каждый из которых меньше суммы двух других, всегда можно построить треугольник.

Пусть длины сторон треугольника равны a , b и c . Каждая его сторона меньше суммы двух других. А насколько она меньше? Может ли эта сторона быть совсем маленькой? Давайте запишем неравенства для каждой стороны нашего треугольника:

$$c < a + b, a < b + c, b < a + c.$$

В предыдущем параграфе мы с вами говорили, что если от обеих частей неравенства отнять одно и то же число, то знак неравенства не поменяется. Давайте отнимем от двух частей второго неравенства число b . Тогда мы получим верное неравенство $a - b < c$. Если же отнять число a от обеих частей третьего неравенства, то получится $b - a < c$. Итак, число c не может быть слишком маленьким — оно обязано быть больше каждого из двух чисел $(a - b)$ и $(b - a)$. Значит, в любом случае оно больше разности двух других сторон треугольника. А под разностью этих сторон в дальнейшем мы будем понимать разницу между большей и меньшей из них.

Итак, мы доказали важное следствие из неравенства треугольника:



Следствие из неравенства треугольника

В треугольнике каждая сторона больше разности двух других его сторон (рис. 18.7).

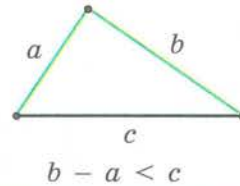


Рис. 18.7

Неравенство ломаной

Из доказанной нами теоремы следует, что путь на плоскости из точки A в точку B по отрезку AB всегда короче пути, который проходит через любую точку C , не лежащую на отрезке AB . Можно сказать и так: ломаная, состоящая из двух звеньев AC и CB , всегда длиннее отрезка AB , который стягивает её концы. А верно ли это для ломаной, состоящей из любого количества звеньев? Ответ на этот вопрос даёт неравенство ломаной.



Неравенство ломаной

Длина ломаной не может быть меньше отрезка, соединяющего её начало и конец (рис. 18.8, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Обозначим вершины данной нам ломаной буквами $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ и покажем, что её длина больше длины отрезка A_1A_n . Для этого мы соединим начало нашей ломаной сразу с её третьей вершиной A_3 отрезком A_1A_3 и рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$.

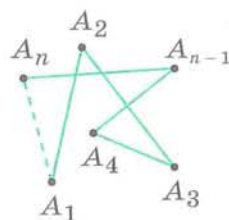
По теореме о неравенстве треугольника имеем $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$ (рис. 18.8, б). Поэтому, если мы «пропустим» вершину A_2 и сделаем новую ломаную $A_1A_3A_4\dots A_n$ без этой вершины, то её длина будет меньше (рис. 18.8, в).

На следующем шаге соединим первую вершину данной ломаной уже с четвёртой её вершиной A_4 и по неравенству треугольника $A_1A_3A_4$ получим, что $A_1A_4 \leq A_1A_3 + A_3A_4$ (рис. 18.8, г). Отсюда следует, что без вершин A_2 и A_3 мы получим ещё более короткую ломаную $A_1A_4A_5\dots A_n$ (рис. 18.8, д).

Если продолжать этот процесс дальше, на каждом шаге мы будем заменять два соседних звена полученной нами ломаной на одно новое звено, которое короче их суммы по неравенству треугольника. Таким образом, каждый раз мы будем уменьшать длину всей ломаной и количество её звеньев, пока у нас не останется только одно звено A_1A_n . Значит, отрезок A_1A_n короче длины всей нашей ломаной (рис. 18.8, е).

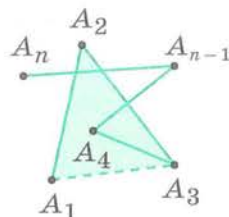
Что и требовалось доказать.

а)

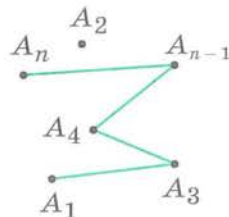


Сумма всех звеньев $\geq A_1A_n$

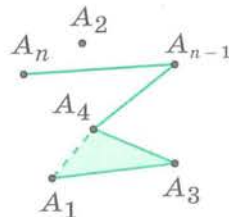
б)



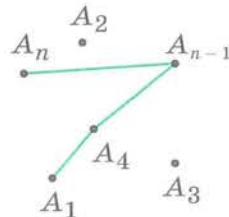
в)



г)



д)



е)

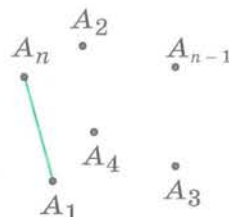


Рис. 18.8

Треугольник в треугольнике

Существует ещё одно важное неравенство, которое связано с треугольником. Вернее, сразу с двумя треугольниками. Предположим, что один треугольник целиком находится в другом. Скажите: какой из них имеет больший периметр? «Это же очевидно, — скажете вы, — больше тот, который снаружи!» Вы совершенно правы, но этот ответ вам подсказывает интуиция. А знаете, как это строго доказать? Давайте попробуем это сделать.



Неравенство периметров двух треугольников

Если один треугольник целиком содержится в другом, то он имеет меньший периметр (рис. 18.9, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Представим себе, что один из наших треугольников сделан из белой бумаги и на нём нарисован ещё один треугольник — зелёного цвета. Возьмем ножницы и попробуем ими вырезать зелёный треугольник из белого. Каждый раз мы будем резать бумагу по прямой линии, то есть делать один прямолинейный разрез. Вначале мы разрежем её по отрезку AB , на котором лежит одна из сторон зелёного треугольника. Белый треугольник тогда распадётся на две части, причём зелёный треугольник останется в одной из этих частей (рис. 18.9, б).

А что можно сказать про периметр этой части? Оказывается, он всегда будет меньше, чем у исходного белого треугольника. И вот почему. Чтобы получить периметр отрезанной нами части, из периметра белого треугольника нужно вычесть отрезки AC и BC , но зато добавить длину линии разреза — отрезок AB . Поскольку в треугольнике ABC сторона AB меньше суммы сторон AC и BC , то после такого «отрезания» мы всегда отнимем больше, чем прибавим. А значит, периметр отрезанной нами части будет меньше, чем у белого треугольника.

На следующем шаге мы будем резать бумагу по прямой DE , на которой лежит вторая сторона зелёного треугольника. Бумага опять распадётся на две части, в одной из которых окажется наш зелёный треугольник (рис. 18.9, в). Периметр этой части станет ещё меньше, поскольку по сравнению с предыдущим куском к нему мы добавим длину отрезка DE , но отнимем длину ломаной, соединяющей те же точки.

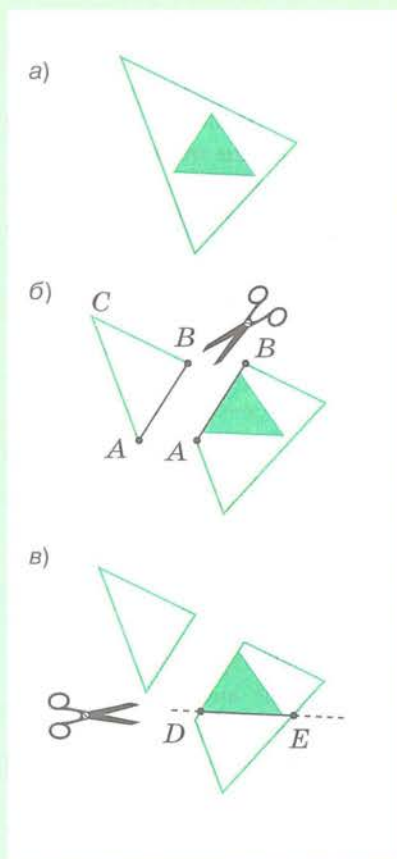


Рис. 18.9

По неравенству ломаной мы снова отнимем больше, чем прибавим.

Как вы уже догадались, так можно сделать сколько угодно раз, и каждый раз периметр «обрезков» бумаги будет становиться только меньше. Однако нам осталось сделать всего один разрез — на этот раз по прямой $МК$. Сделав его, мы полностьюотрежем зелёный треугольник от белой бумаги (рис. 18.10). Поскольку на каждом шаге мы уменьшали периметр полученных частей, то и периметр зелёного треугольника будет меньше периметра исходного белого треугольника.

Что и требовалось доказать.

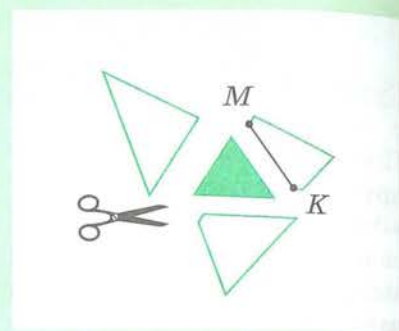


Рис. 18.10

Замечание. Точно так же можно доказать, что если внутри данного многоугольника лежит не треугольник, а любой другой выпуклый многоугольник, то его периметр всегда будет меньше исходного (рис. 18.11, а). Если же внутренний многоугольник будет невыпуклым, то его периметр может быть сколь угодно большим (рис. 18.11, б).

а)



б)



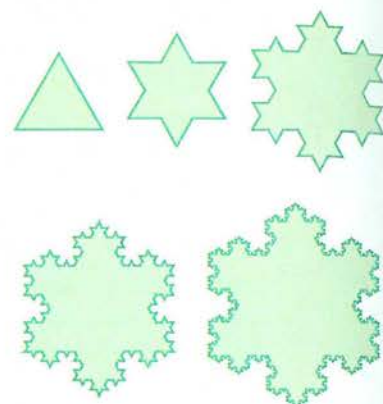
Выпуклый многоугольник внутри имеет меньший периметр

Периметр невыпуклого многоугольника может быть любым

Рис. 18.11

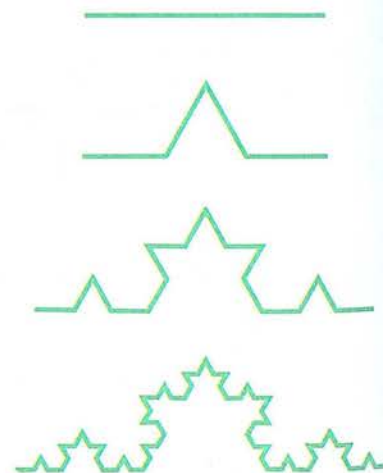
Интересно, что теоретически на обыкновенном листе бумаги можно расположить фигуру, периметр которой будет сколь угодно большим. Такие «бесконечно извилистые» фигуры называют **фракталами**. Один из первых фракталов, описанных в математике, был придуман в 1904 г. шведским математиком Хельге фон Кохом. Строится он так.

Вначале рисуют любой равносторонний треугольник. Потом каждую его сторону делят на три равные части. На средней части каждой стороны во внешнюю область строят ещё по одному равностороннему треугольнику. Получается равносторонний 12-угольник или шестиугольная звезда. На третьем шаге каждую сторону этой шестиугольной звезды опять делят на три равные части, на средней части каждой стороны опять строят равносторонний треугольник... Так получают 48-угольник (рис. 18.12).



Снежинка Коха

Рис. 18.12



Построение снежинки Коха

Рис. 18.13

Дальше этот процесс повторяется сколько угодно раз. Периметры получаемых снежинок все время увеличиваются. В самом деле: на любом шаге мы из каждой стороны выбрасываем треть её длины, но добавляем две трети. Значит, и периметр всей снежинки увеличивается на $\frac{1}{3}$ периметра предыдущей. То есть периметр каждой следующей снежинки будет равен $P + \frac{1}{3} P = \frac{4}{3} P$. Можно написать последовательность этих периметров: $1, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}, \frac{256}{81}, \dots, \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Можно доказать, что такая последовательность ничем не ограничена, а снежинка Коха — это извилистая линия, которая получается в пределе за бесконечное число шагов. Выходит, что и периметр снежинки Коха должен быть сколь угодно большим.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Нарисуйте на листе писчей бумаги многоугольник, периметр которого равен 3 м.
- 2 Сделайте в обычном листе бумаги из тетради такую дыру, через которую вы сами могли бы пролезть.
- 3 Нарисуйте на листе белой бумаги снежинку Коха, сделав 4 шага так, чтобы её периметр был ровно 128 см (рис. 18.14).

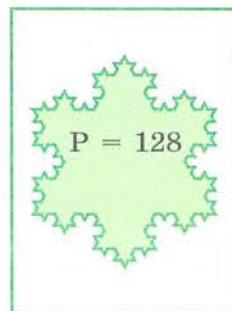


Рис. 18.14

Неравенство «резинки»

Ещё одно важное неравенство связано с ломаной в треугольнике. Возьмите внутри треугольника ABC произвольную точку M и скажите, какая ломаная будет длиннее: ABC или AMC (рис. 18.15).

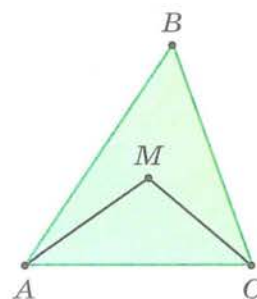


Рис. 18.15

Интуиция вас опять не обманет — длина ломаной ABC будет больше. Это станет особенно очевидно, если обе ломаные мысленно считать эластичными «резинками».

Представьте себе, что вы натянули резинку на рогатке пальцем в точке M и хотите перевести палец в точку B . Ясно, что для этого необходимо ещё растянуть резинку, то есть увеличить её длину (рис. 18.16). Мы с вами это сейчас строго докажем безо всяких рогаток. Тем более что это неравенство было ещё в первой из книг Евклида.

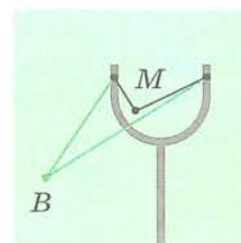


Рис. 18.16



Неравенство «резинки»

Если точка M принадлежит треугольнику ABC , то $AM + CM \leq AB + BC$ (рис. 18.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть точка M лежит внутри треугольника ABC . Посмотрите на треугольник AMC : он целиком находится внутри треугольника ABC . Тогда по доказанному нами неравенству о двух треугольниках периметр треугольника AMC должен быть меньше периметра треугольника ABC . Это значит, что

$$AM + MC + AC \leq AB + BC + AC.$$

Отнимем теперь длину отрезка AC от двух частей нашего неравенства. Как вы помните, неравенство от этого не изменится. Но тогда мы и получим неравенство «резинки»:

$$AM + BM \leq AB + BC.$$

Что и требовалось доказать.

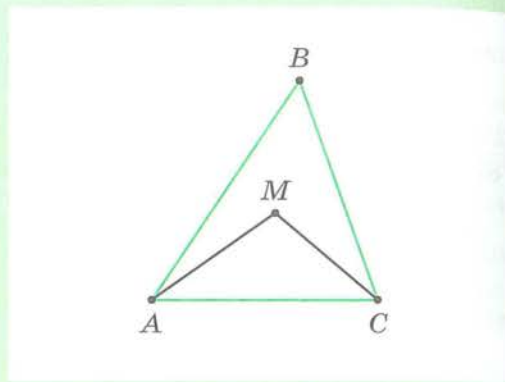


Рис. 18.17

Замечание. Точно так же можно доказать, что если внутри треугольника ABC расположить какую угодно «выпуклую» ломаную $AMK...NC$, которая лежит по одну сторону от любого своего звена (или его продолжения), то длина такой ломаной тоже будет меньше суммы сторон $AB + BC$ данного треугольника (рис. 18.18, а). Если же ломаная невыпукла, то её длина может быть очень большой (рис. 18.18, б).

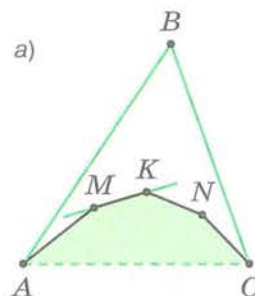


ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 18.1** Длины двух сторон треугольника равны 2 и 5, а длина третьей — целое число. Чему может быть равно это число (рис. 18.19)?

РЕШЕНИЕ: Обозначим длину третьей стороны треугольника буквой n . В математике такой буквой часто обозначают целые числа. В треугольнике каждая сторона должна быть меньше суммы двух других сторон, поэтому должны выполняться неравенства: $n < 2 + 5$, $5 < n + 2$. Из них сразу следует, что $3 < n < 7$. А поскольку n — целое число, то это может быть только при $n = 4, 5, 6$.

ОТВЕТ: 4, 5, 6.



Выпуклая ломаная $AMKNC$ короче $AB + BC$

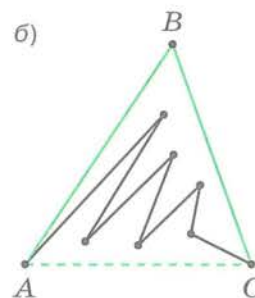


Рис. 18.18

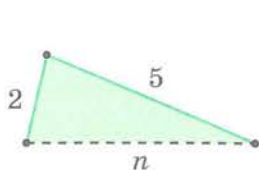


Рис. 18.19

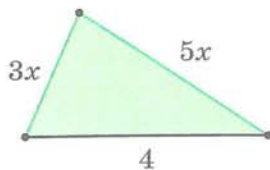


Рис. 18.20

☆☆☆ **ПРИМЕР 18.2** Одна сторона треугольника равна 4 см, а длины двух других относятся как 3 : 5. Докажите, что периметр треугольника меньше 20 см (рис. 18.20).

РЕШЕНИЕ: Поскольку длины двух сторон треугольника относятся как 3 : 5, мы можем обозначить их длины как $3x$ и $5x$. По неравенству треугольника имеем $5x < 3x + 4$. Отсюда следует, что $x < 2$. Периметр треугольника равен $4 + 3x + 5x = 4 + 8x$. Значит, он меньше, чем $4 + 8 \cdot 2 = 20$ см.

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 18.3** Докажите, что медиана треугольника меньше половины суммы двух его сторон, выходящих из той же вершины.

РЕШЕНИЕ: Обозначим длины сторон AB , BC и медианы BM треугольника ABC соответственно буквами a , b и m (рис. 18.21, а).

Мы должны доказать, что $m < \frac{1}{2}(a + b)$. Сделаем дополнительное построение — продлим медиану BM на свою длину. То есть на луче BM возьмем точку D так, что $DM = BM = m$. Тогда треугольники ABM и CDM будут равны по первому признаку. Следовательно, должны быть равны их стороны $CD = AB = a$.

Теперь рассмотрим треугольник BCD . По неравенству треугольника: $BD < BC + CD$. Или $2m < a + b$. Откуда $m < \frac{1}{2}(a + b)$ (рис. 18.21, б).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 18.4** Внутри многоугольника взяли две любые точки A и B . Докажите, что отрезок AB всегда меньше половины периметра многоугольника (рис. 18.22, а).

РЕШЕНИЕ: Продолжим отрезок AB до пересечения с границей нашего многоугольника (рис. 18.22, б). Если многоугольник невыпуклый, прямая AB может пересекать его более чем в двух точках. Мы обозначим буквами A_1 и B_1 две самые удаленные друг от друга точки пересечения этой прямой с границей многоугольника (рис. 18.22, в). Тогда должно быть верно, что $AB < A_1B_1$. Точки A_1 и B_1 разбивают контур всего многоугольника на две части — две

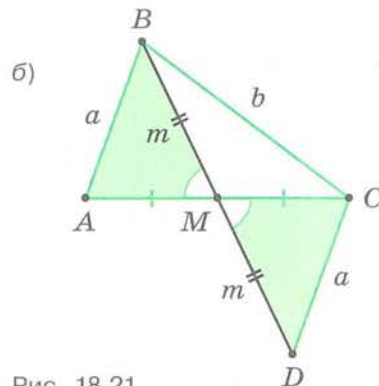
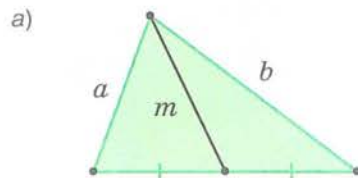


Рис. 18.21

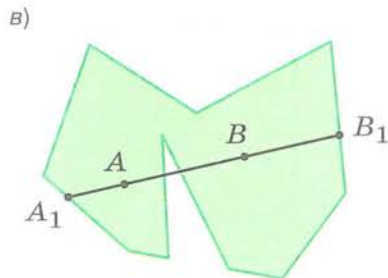
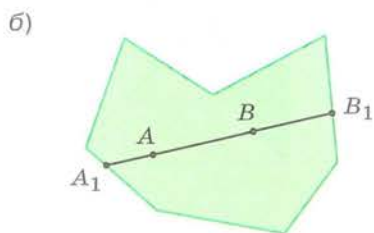
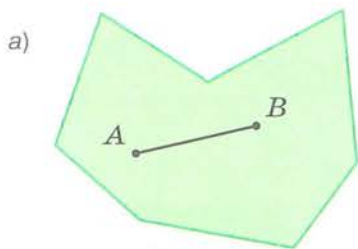


Рис. 18.22

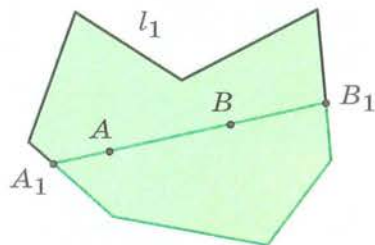


Рис. 18.23

ломанные, длины которых мы обозначим как l_1 и l_2 . Очевидно, что периметр всего многоугольника равен сумме длин этих ломаных, то есть $P = l_1 + l_2$ (рис. 18.23).

Как вы помните, по неравенству ломаной должны быть выполнены неравенства $A_1B_1 < l_1$ и $A_1B_1 < l_2$. Если мы их сложим, то получим $2A_1B_1 < l_1 + l_2 = P$. Значит, $A_1B_1 < \frac{1}{2}P$. Поскольку $AB < A_1B_1$, то должно быть $AB < \frac{1}{2}P$. То есть длина отрезка AB меньше половины периметра всего многоугольника.

Что и требовалось доказать.

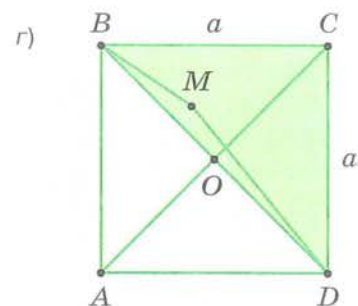
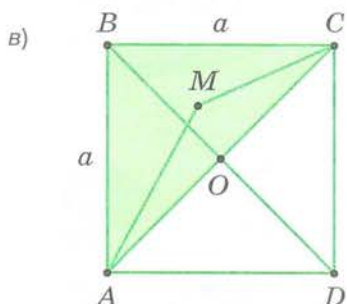
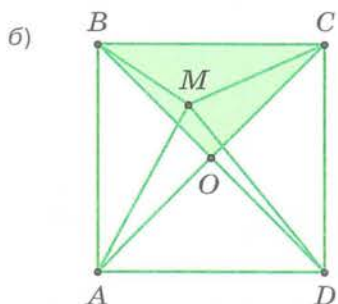
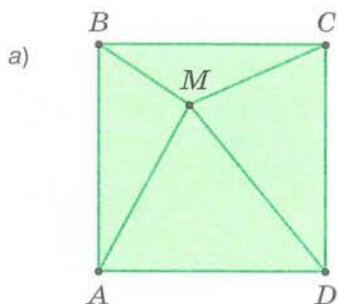


Рис. 18.24

★★★ **ПРИМЕР 18.5** Внутри квадрата взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от неё до вершин квадрата меньше периметра этого квадрата.

РЕШЕНИЕ: Возьмём в квадрате $ABCD$ произвольную точку M (рис. 18.24, а). Диагонали квадрата пересекаются в точке O и разбивают квадрат на 4 треугольника. Точка M обязательно попадёт в один из этих треугольников. Предположим, что она окажется в треугольнике BOC (рис. 18.24, б). Значит, точка M будет находиться в треугольниках ABC и BCD одновременно. Обозначим сторону квадрата буквой a . Поскольку точка M лежит в треугольнике ABC , то по неравенству «резинки» имеем, что:

$$AM + CM \leq AB + BC = 2a \quad (\text{рис. 18.24, в}).$$

А поскольку точка M лежит в треугольнике BCD , то также по неравенству «резинки»:

$$BM + DM \leq BC + CD = 2a \quad (\text{рис. 18.24, г}).$$

Сложим два этих неравенства и получим, что

$$AM + BM + CM + DM < 4a.$$

То есть сумма расстояний от точки M до вершин квадрата меньше его периметра. Точно так же можно рассмотреть случаи, когда точка M попадает в треугольник ABO или принадлежит другим треугольникам.

Что и требовалось доказать.

Существует и другое решение последней задачи, которое можно применить для прямоугольников и некоторых других четырёхугольников. Мы также приведём его здесь.

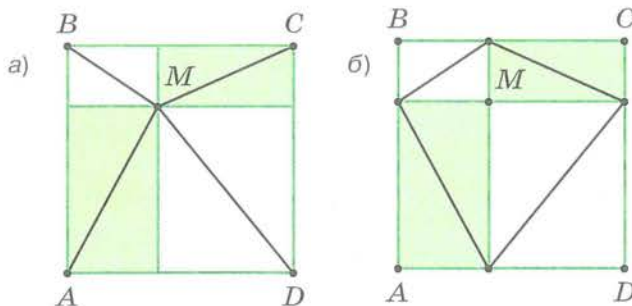


Рис. 18.25

Второе решение. Проведём через точку M две прямые, параллельные сторонам квадрата. Они разобьют данный нам квадрат на 4 меньших прямоугольника (рис. 18.25, а). Отрезки AM , BM , CM и DM в этих прямоугольниках являются диагоналями (рис. 18.25, б). Легко доказать, что диагонали любого прямоугольника равны друг другу. В каждом из четырёх прямоугольников проведём другую диагональ. Тогда они вместе будут образовывать четырёхугольник, вписанный в наш квадрат (рис. 18.26). Сумма отрезков AM , BM , CM и DM будет равна периметру этого четырёхугольника. Поскольку этот четырёхугольник можно «вырезать» из данного нам квадрата, то его периметр будет меньше периметра самого квадрата.

Что и требовалось доказать.

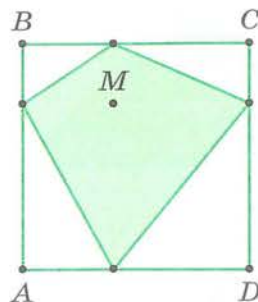


Рис. 18.26



ВОПРОСЫ

- 1 Какой путь между двумя точками на плоскости самый короткий? Из какого неравенства это следует?
- 2 Длины двух сторон треугольника равны a и b . В каких пределах может меняться длина его третьей стороны?
- 3 Прямоугольный лист бумаги по прямой линии разрезали на две части. Может ли периметр одной из этих частей быть больше периметра исходного листа?
- 4 В чём состоит неравенство «резинки»?
- 5 Можно ли на листе тетради нарисовать многоугольник с периметром 10 м?
- 6 Что такое снежинка Коха? Чем она отличается от обычных многоугольников?
- 7 Верно ли, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 18.1 ★☆☆ Четыре ученика назвали числа, равные длинам некоторого треугольника. Один из них ошибся, а другие сказали правду. Кто ошибся, если Дима сказал 2, Вася сказал 3, Миша сказал 5, а Володя сказал 7 (рис. 18.27)?

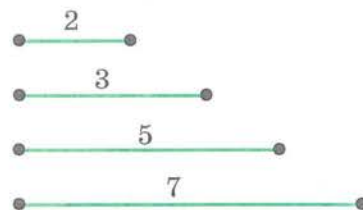


Рис. 18.27

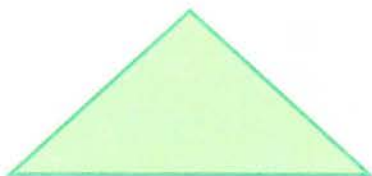


Рис. 18.28

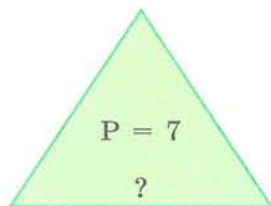


Рис. 18.29

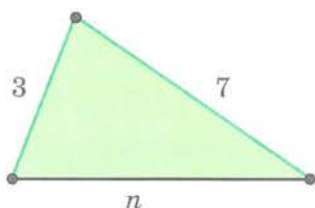


Рис. 18.30

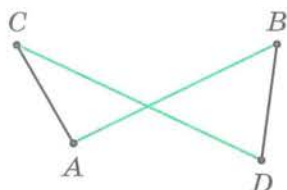


Рис. 18.31

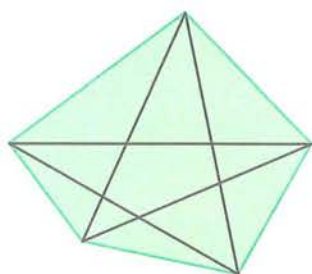


Рис. 18.32

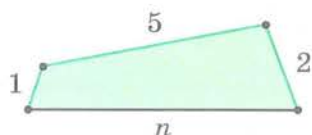


Рис. 18.33

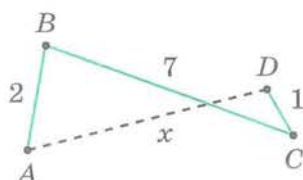


Рис. 18.34

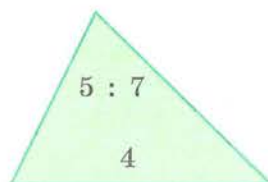


Рис. 18.35



Рис. 18.36

- 18.2 ★☆☆ Одна сторона равнобедренного треугольника равна 5, а другая 12 (рис. 18.28). Найдите периметр этого треугольника.
- 18.3 ★☆☆ Найдите длину основания равнобедренного треугольника, если одна его сторона в два раза больше другой, а периметр равен 7 см (рис. 18.29).
- 18.4 ★☆☆ Сколько существует различных треугольников, длины двух сторон которых равны 3 и 7, а длина третьей — целое число (рис. 18.30)?
- 18.5 ★☆☆ Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что $AC + BD < AB + CD$ (рис. 18.31).
- 18.6 ★☆☆ Докажите, что сумма всех диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра (рис. 18.32).
- 18.7 ★☆☆ Длины трёх сторон четырёхугольника последовательно равны 1, 5 и 2 (рис. 18.33). Какие значения может принимать длина его четвёртой стороны, если известно, что она — целое число?
- 18.8 ★☆☆ В ломаной $ABCD$ известны длины трёх её звеньев: $AB = 2$, $BC = 7$, $CD = 1$. Длина звена AD равна целому числу (рис. 18.34). Какие значения она может принимать?
- 18.9 ★☆☆ Одна сторона треугольника равна 4, а длины двух других относятся как 5 : 7. Докажите, что все стороны этого треугольника меньше 14 (рис. 18.35).
- 18.10 ★☆☆ Докажите, что сумма диагоналей четырёхугольника меньше его периметра (рис. 18.36).
- 18.11 ★☆☆ Длины двух сторон треугольника равны 2 и 5 (рис. 18.37). Докажите, что медиана, проведённая к третьей его стороне, больше 1,5.
- 18.12 ★☆☆ Внутри треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от неё до

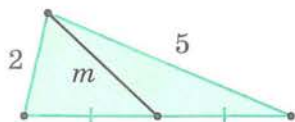


Рис. 18.37

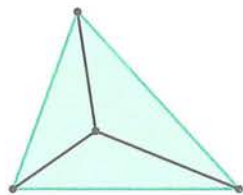


Рис. 18.38

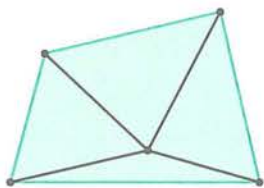


Рис. 18.39

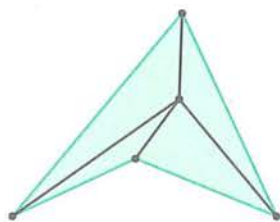


Рис. 18.40

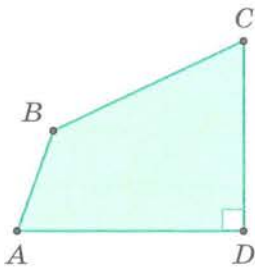


Рис. 18.41

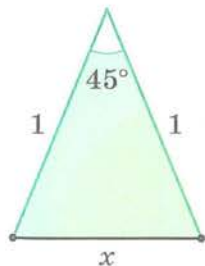


Рис. 18.42

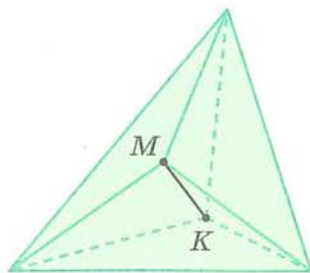


Рис. 18.43

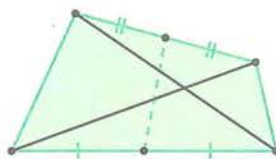


Рис. 18.44

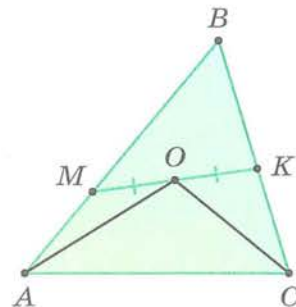


Рис. 18.45

вершин треугольника меньше его периметра (рис. 18.38).

18.13 ★☆☆ Дан выпуклый четырёхугольник. Где необходимо взять точку, чтобы сумма расстояний от неё до его вершин была наименьшей (рис. 18.39)?

18.14 ★☆☆ Дан невыпуклый четырёхугольник. Докажите, что точка с минимальной суммой расстояний до всех его вершин совпадает с одной из них (рис. 18.40).

18.15 ★☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ угол D прямой. Докажите, что $CD < AB + BC$ (рис. 18.41).

18.16 ★☆☆ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 45° . Верно ли, что основание треугольника больше $\frac{1}{2}$ (рис. 18.42)?

18.17 ★☆☆ В треугольнике взяли две произвольные точки M и K . Для каждой нашли сумму расстояний от неё до вершин треугольника. Докажите, что эти две суммы отличаются не более чем на длину отрезка MK (рис. 18.43).

18.18 ★☆☆ Докажите, что отрезок, который соединяет середины противоположных сторон четырёхугольника, меньше половины суммы его диагоналей. (рис. 18.44).

18.19 ★☆☆ На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли произвольные точки M и K . Точка O — середина отрезка MK . Докажите, что $AM + CK < AO + CO$ (рис. 18.45).

18.20 ★☆☆ Может ли сумма расстояний от некоторой точки внутри четырёхугольника до его вершин быть больше периметра этого четырёхугольника?

18.21 ★★★ В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

18.22 ★★★ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 20° (рис. 18.46). Докажите, что основание треугольника больше $\frac{1}{3}$.

18.23 ★★★ Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 40° (рис. 18.47). Верно ли, что основание треугольника больше $\frac{2}{3}$?

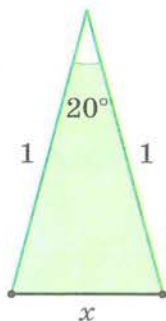


Рис. 18.46

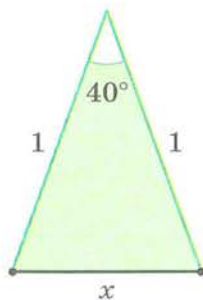


Рис. 18.47

6

Геометрические места точек

§19 Геометрические места точек

§20 Окружность и круг

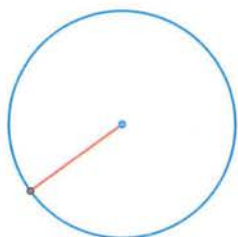


§19 Геометрические места точек

Геометрическое место точек

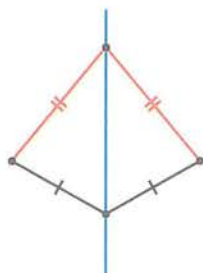
Когда на уроке алгебры вы решаете уравнение, то в ответ записываете только те числа, для которых оно верно. А что такое вообще любое уравнение? Это всегда некоторое условие, которое и определяет нужные нам числа. Точно так же в геометрии для точек на плоскости можно задать какое-нибудь условие, а в ответ «записать» только те точки, для которых оно выполняется. Множество всех таких точек, подходящих под данное условие, называют **геометрическим местом точек** или сокращённо ГМТ. Обратите внимание: мы считаем, что ГМТ найдено, если мы нашли не две или три нужные нам точки, а все точки, подходящие под это условие. Само же условие или правило может быть произвольным. Давайте приведём здесь несколько примеров таких условий или ГМТ на плоскости:

Все точки, одинаково удалённые от данной точки:



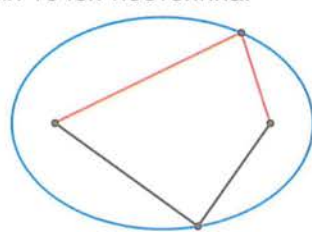
окружность

Все точки, одинаково удалённые от двух данных точек:



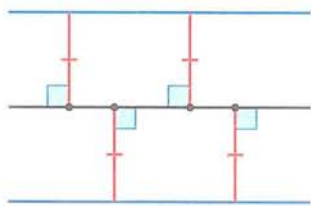
прямая

Все точки, сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянна:



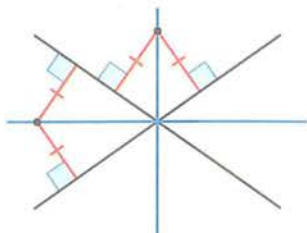
эллипс

Все точки, одинаково удалённые от данной прямой:



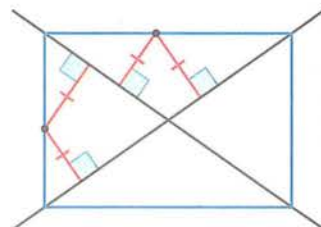
2 параллельные прямые

Все точки, равноудалённые от двух данных прямых:



2 перпендикулярные прямые

Все точки, сумма расстояний от которых до двух данных прямых постоянна:



прямоугольник

Рис. 19.1

Геометрическое место точек не всегда представляет собой линию. Это может быть несколько линий, целая область, а может быть всего одна или несколько точек. Например, внутри любого треугольника есть всего одна точка, одинаково удалённая от всех его сторон (рис. 19.2, а). И наоборот, точки с одинаковой суммой расстояний до сторон равностороннего треугольника заполняют весь этот треугольник (рис. 19.2, б). Конечно, может случиться и так, что под данное условие вообще не подойдёт ни одна точка. Такое бывает, ведь и в алгебре встречаются уравнения, которые не имеют решений.

Окружность

Возьмите циркуль, поставьте его иглу в данную точку плоскости и поворачивайте так, чтобы другой конец циркуля двигался по бумаге. Закреплённый на нём грифель опишет замкнутую кривую, которую называют **окружностью**.

Само слово **циркуль** в переводе с латыни означает **кружок**, то есть маленький круг. Большие же круги римляне называли **цирками** и чертили их, как и во все времена, с помощью натянутой верёвки. Почему же натянутая верёвка, закреплённая за один свой конец, рисовала окружность? Дело в том, что длина верёвки при этом не менялась, а значит, не менялось и расстояние от другого её конца до закреплённой точки. Так же и циркуль при вращении сохраняет расстояние между своими концами, поэтому расстояние от всех точек начерченной им линии до острия иглы циркуля остаётся одним и тем же. Теперь мы можем дать математическое определение окружности.

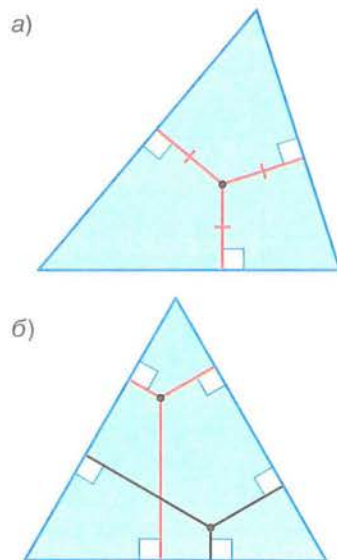


Рис. 19.2

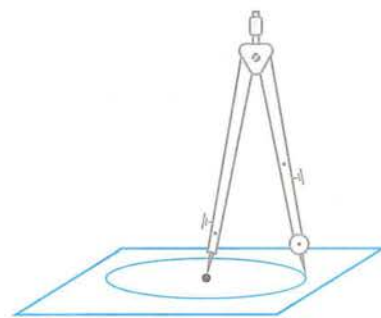
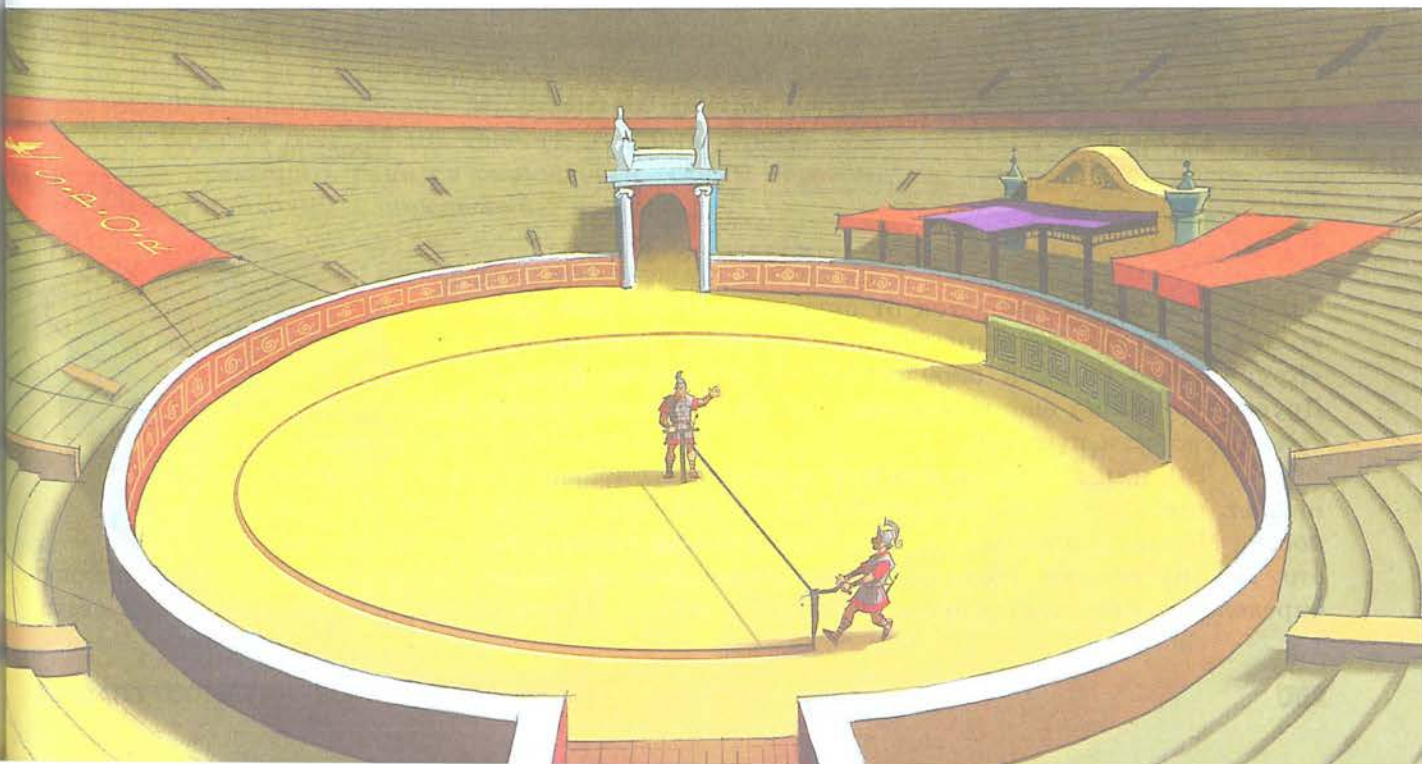


Рис. 19.3

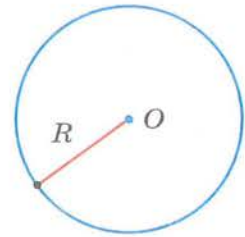




Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

Данная точка называется **центром окружности**, а указанное расстояние — её **радиусом**.

Окружность с центром в точке O и радиусом R обозначают так: $\text{окр } (O; R)$ (рис. 19.4).



Окружность $(O; R)$

Рис. 19.4



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Постройте окружность с центром в точке O , которая проходит через точку A . Сколько других узлов сетки лежат на этой окружности? Отметьте эти узлы (рис. 19.5).
- 2 Нарисуйте окружность, на которой лежат четыре отмеченные на рисунке точки. Отметьте центр этой окружности (рис. 19.7).
- 3 Постройте три окружности так, чтобы каждая из них проходила через центры двух других (рис. 19.6). Обязаны ли быть равны радиусы этих окружностей?

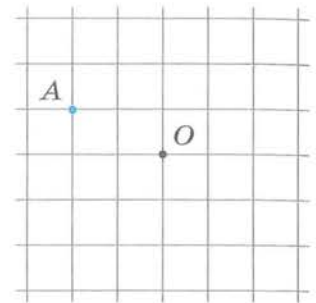


Рис. 19.5

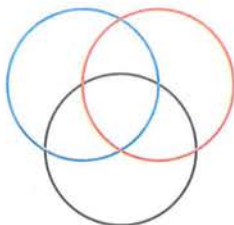


Рис. 19.6

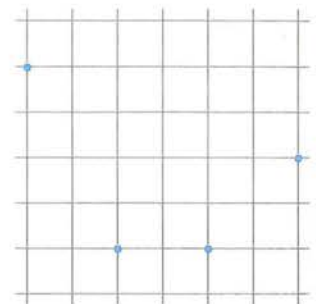


Рис. 19.7

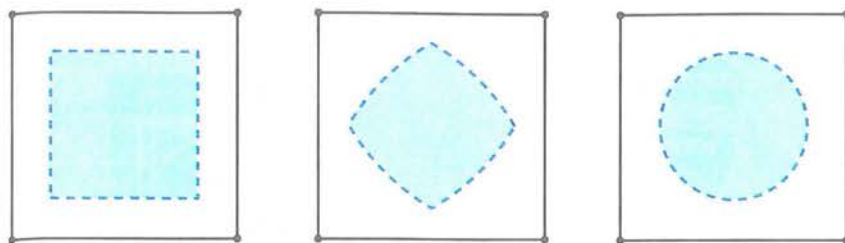
Круг

Знаете, чем круг отличается от окружности? На этот простой с виду вопрос один ученик 7 класса ответил так: «Круг — это блин, а окружность — это форма блина». Другой же сказал ещё интереснее: «Круг закрашен, а внутри окружности пустота!»

Так или иначе, но каждый человек интуитивно понимает, что круг — это то, что находится «внутри» окружности. Можно даже сказать, что для окружности круг — это её внутренняя область. Правда, работать с таким определением не очень удобно.



Рис. 19.8



Квадрин

Ромбовский

Круглов

Рис. 19.9

Возьмём для примера следующую ситуацию. В новом городском районе четыре станции метро находятся в вершинах квадрата. Расстояние между соседними станциями равно 2 км. Строительная компания хочет построить жилой комплекс так, чтобы его жителям до каждой из этих станций было добираться меньше 2 км. Удачное расположение комплекса может увеличить цену за квадратный метр жилья. Где имеет смысл расположить этот комплекс? Перед ответственным совещанием директор компании поручил аналитическому отделу подготовить план-проект будущего строительства. Глава аналитического отдела от трёх своих заместителей получил три плана местности, где была изображена подходящая часть района. Все они показаны на рис. 19.9. Только один из заместителей знает геометрию и представил своему начальнику верный чертёж. Определите, кто это был.

Перед тем как читать дальше, постарайтесь самостоятельно ответить на данный вопрос. Можно сказать, поставьте себя на место начальника...

Как же правильно определить круг? Давайте подумаем. Ясно, что любую точку M в области, ограниченной окружностью, можно соединить отрезком с её центром O . Луч OM пересекает окружность только один раз, поскольку по аксиоме на нём можно отложить только один отрезок, равный радиусу. Точка M , очевидно, должна лежать на этом радиусе (рис. 19.10). Значит, и длина отрезка OM не может превышать радиуса окружности. Таким образом, мы с вами приходим к определению круга:



Круг — это множество всех точек плоскости, удалённых от данной точки не более чем на длину данного отрезка.

Данная точка называется **центром круга**, а указанный отрезок — **радиусом круга**.

Круг с центром в точке O и радиусом R обозначают так: круг $(O; R)$.

Таким определением круга пользоваться гораздо удобнее. Предположим, один фермер выпустил на луг пастись свою козу, а чтобы она далеко не уходила, привязал

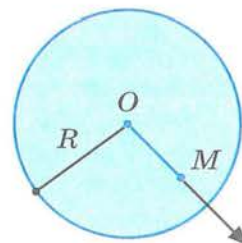
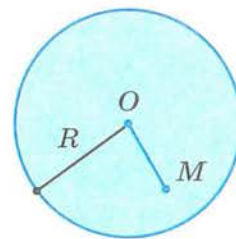


Рис. 19.10

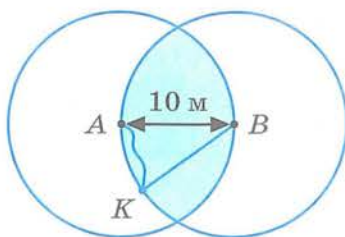


Круг $(O; R)$. $OM \leq R$

Рис. 19.11



Рис. 19.12



Коза съест траву на пересечении двух кругов

Рис. 19.13

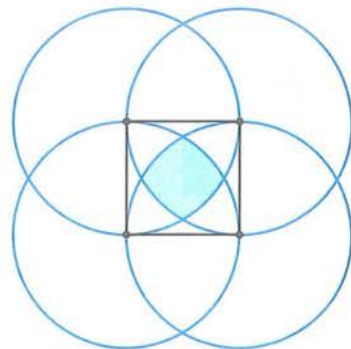


Рис. 19.14

её к двум кольшкам A и B с помощью двух верёвок. Длина каждой верёвки 10 метров, а расстояние между кольшками оказалось таким же. В течение дня коза выщипала всю траву везде, куда она смогла дотянуться. Как выглядит та часть луга, где паслась коза и где теперь не стало травы?

Чтобы ответить на этот вопрос, давайте нарисуем две окружности радиусом 10 м с центрами в точках A и B . Поскольку обе верёвки имеют длину 10 м, то коза не сможет отойти от каждого кольшка дальше, чем на это расстояние. Поэтому она должна находиться сразу в двух кругах с центрами в точках A и B и радиусами 10 м. Значит, коза выщиплет траву лишь на пересечении данных кругов. Нужная часть луга показана на рис. 9.13.

Вернёмся теперь к вопросу о строительстве жилого комплекса. Если его жителям до какой-либо из станций метро добираться не больше 2 км, то сам комплекс должен находиться внутри круга с центром на этой станции и радиусом 2 км. Нужное расположение комплекса будет только в том случае, когда он окажется в каждом из четырёх таких же кругов с центрами на всех станциях метро. Пересечение данных кругов показано на рисунке 19.14 голубым цветом. Выходит, что из трёх заместителей начальника аналитического отдела компании геометрию знал только один Ромбовский.

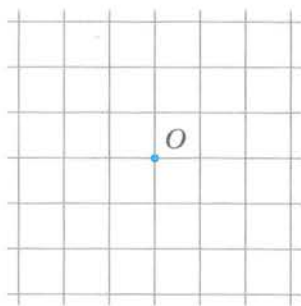


Рис. 19.15

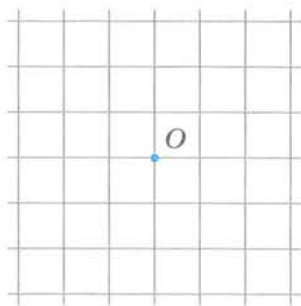


Рис. 19.16



УПРАЖНЕНИЯ

- 4 Сторона одной клетки квадратной сетки равна единице. Отметьте все узлы этой сетки, расстояние от которых до отмеченной точки O меньше 2. Сколько всего таких узлов (рис. 19.15)?
- 5 Сторона одной клетки квадратной сетки равна единице. Сколько её узлов находится от точки O на расстоянии большем 2, но меньшем 3 (рис. 19.16)?

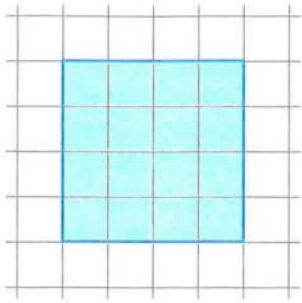
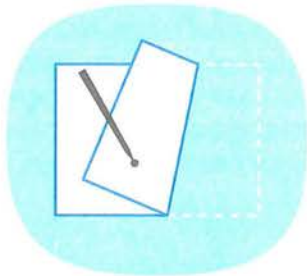


Рис. 19.17

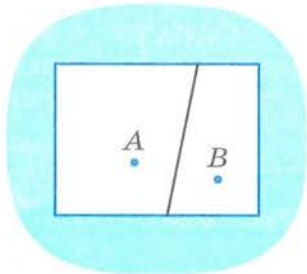
- 6 Расстояние между точками A и B на клетчатой бумаге равно 2. Сколько существует узлов этой бумаги, расстояние от которых до точки A меньше 2, а до точки B — больше 2?
- 7 Можно ли квадрат со стороной в 4 клетки поместить в круг, радиус которого равен 3 клеткам (рис. 19.17)?

Серединный перпендикуляр

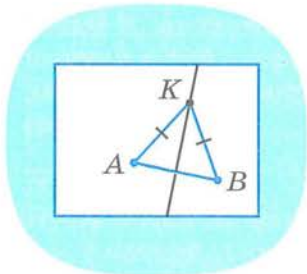
а)



б)



в)



г)

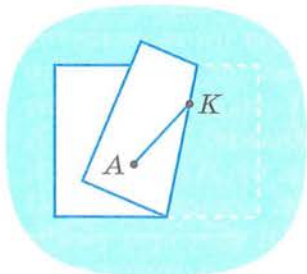


Рис. 19.18

Согните на столе обычный лист бумаги и посмотрите на линию его сгиба. Она представляет собой идеальную прямую линию. Знаете почему? Потому, что она — серединный перпендикуляр. Но давайте по порядку. Если проткнуть сложенный нами лист в любом месте иголкой (рис. 19.18, а, б) и снова разложить его на плоскость, в местах прокола мы увидим две точки: A и B (рис. 19.18, б). Отметим теперь любую точку K на линии сгиба. Отрезки AK и BK обязаны быть одной длины, поскольку при сложении бумаги они совпадали (рис. 19.18, в, г). Так же будет для любой точки на сгибе — значит, все его точки должны быть одинаково удалены от точек A и B нашего прокола.

Где на плоскости могут лежать все точки, которые равноудалены от A и B ? Давайте это выясним. Одна из таких точек должна быть на середине отрезка AB — обозначим её буквой M . Пусть теперь K — любая точка на плоскости, равноудалённая от A и B . Поскольку $AK = BK$, то треугольник AKB равнобедренный, а отрезок MK — его медиана, проведённая к основанию (рис. 19.19, а). Данная медиана в равнобедренном треугольнике совпадает с высотой, поэтому прямая MK должна быть перпендикуляром к отрезку AB и проходить через его середину. Другими словами, точка K должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Обратите внимание: перпендикуляр — это прямая линия. Поэтому все точки линии сгиба листа бумаги обязаны лежать на прямой!

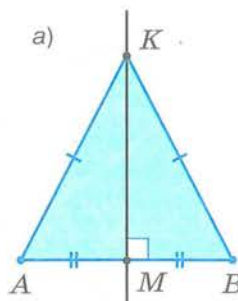
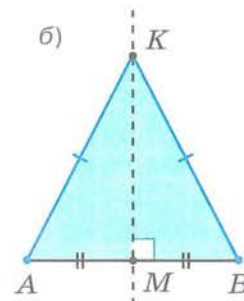


Рис. 19.19



Какая бы ни была у нас бумага, она всегда ограничена. Плоскость же бесконечна, как и серединный перпендикуляр к нашему отрезку AB . Верно ли, что любая точка данного перпендикуляра будет равноудалена от концов отрезка AB ? Можете в этом не сомневаться: для любой такой точки K треугольники AMK и BMK будут равны по первому признаку (рис. 19.19, б), ведь стороны AM и BM у них равны, сторона MK общая, а углы между этими сторонами прямые. Значит, для любой точки на перпендикуляре отрезки AK и BK будут равны. Итак, мы с вами получили ещё одно важное геометрическое место точек — **серединный перпендикуляр к отрезку**.

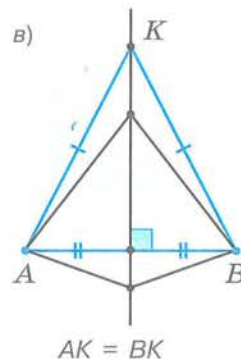


Рис. 19.19



Множество всех точек плоскости, равноудалённых от концов данного отрезка, является **серединным перпендикуляром** к этому отрезку.



УПРАЖНЕНИЯ

- 8 Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB на клетчатой бумаге (рис. 19.20).
- 9 Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB на клетчатой бумаге (рис. 19.21).
- 10 Постройте серединный перпендикуляр к отрезку AB на клетчатой бумаге (рис. 19.22).
- 11 Возьмите лист писчей бумаги и согните его так, чтобы линия сгиба была серединным перпендикуляром к его диагонали (рис. 19.23).
- 12 Возьмите лист писчей бумаги и согните его так, чтобы получить середину большей стороны. Как теперь, сгибая бумагу, получить точку, одинаково удалённую от этой середины и концов противоположной стороны листа (рис. 19.24)?

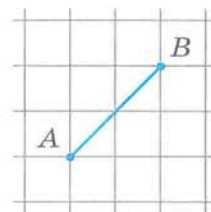


Рис. 19.20

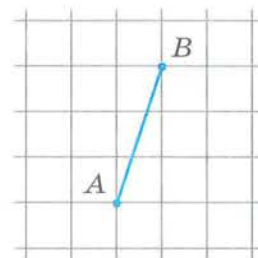


Рис. 19.21

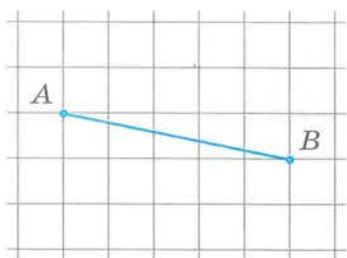


Рис. 19.22

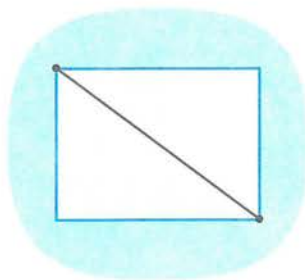


Рис. 19.23

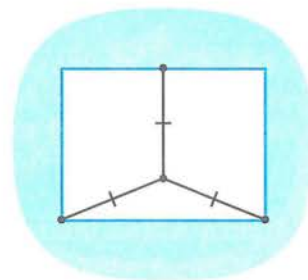
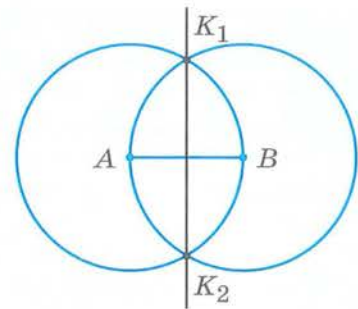


Рис. 19.24

Можно ли построить серединный перпендикуляр к данному отрезку циркулем и линейкой? Конечно, можно! И даже очень просто. Ведь нам достаточно получить всего две точки, равноудалённые от концов этого отрезка. Потом мы по линейке проведём через них прямую и получим нужный нам серединный перпендикуляр! Почему это работает? Всё очень просто: если точки равноудалены от концов отрезка, то они должны лежать на серединном перпендикуляре к нему. Но перпендикуляр — это прямая линия. По аксиоме через две точки можно провести лишь одну прямую. Значит, проведённая нами прямая и будет серединным перпендикуляром к данному отрезку.

Итак, давайте построим серединный перпендикуляр к отрезку AB . Поставим иглу циркуля в точку A и проведём окружность радиусом, равным отрезку AB . Потом построим окружность с тем же радиусом, но с центром в точке B . Эти две окружности пересекутся в точках K_1 и K_2 . Теперь по линейке проведём прямую K_1K_2 — она и будет серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 19.25).



Построение серединного перпендикуляра

Рис. 19.25

Точки на серединном перпендикуляре к отрезку AB равноудалены от его концов. А где находятся все точки, которые ближе к A , чем к B ? Интуиция нам подсказывает, что они должны быть с той стороны от этого перпендикуляра, где находится точка A . Так оно и есть, но мы докажем это строго.



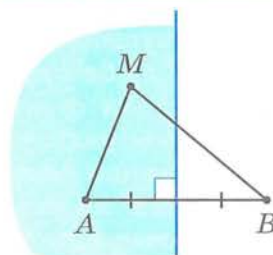
Теорема

Геометрическим местом точек M на плоскости, находящихся ближе к точке A , чем к точке B , является полуплоскость, расположенная с той стороны от серединного перпендикуляра к отрезку AB , что и точка A (рис. 19.26, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть точка M находится в одной полуплоскости с точкой A относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB . Тогда точки M и B лежат в разных полуплоскостях относительно этого перпендикуляра, и по аксиоме отрезок MB должен пересекать его в некоторой точке K (рис. 19.26, б). Поскольку точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , то должно быть $AK = BK$. Поэтому отрезок BM можно представить как сумму отрезков $BM = MK + BK = AK + MK$. Но в треугольнике AMK должно выполняться

а)



$$AM < BM$$

б)

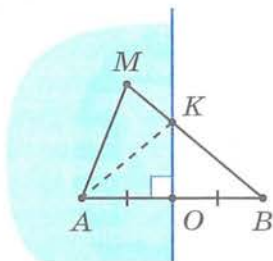


Рис. 19.26

неравенство: $AM < AK + MK$. Значит, $AM < BM$. Точно так же можно доказать, что любая точка в другой полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB лежит ближе к точке B , чем к точке A . Значит, все точки M , для которых $AM < BM$, находятся с точкой A в одной полуплоскости относительно этого перпендикуляра. То есть данная полуплоскость и есть их геометрическое место.

Что и требовалось доказать.

Биссектриса угла

Вы помните, что биссектриса делит угол пополам (рис. 19.27, а)? Если бумажный угол сложить так, чтобы совместились его стороны, то линия сгиба бумаги станет его биссектрисой. Отсюда следует, что биссектриса угла лежит на оси его симметрии (рис. 19.27, б).

Давайте возьмём любой угол A , меньший 180° , на его биссектрисе выберем произвольную точку M и опустим из неё на стороны этого угла перпендикуляры MB и MC (рис. 19.28, а). Тогда треугольники AMB и AMC будут равны по гипотенузе и острому углу. Значит, должны быть равны их катеты MB и MC (рис. 19.28, б). Помните, что расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из неё на эту прямую? Значит, любая точка M на биссектрисе угла должна находиться на равных расстояниях от его сторон. Другими словами, все точки биссектрисы **равноудалены** от сторон угла.

Все ли точки внутри угла, равноудалённые от его сторон, находятся на его биссектрисе? Оказывается, что других таких точек нет. В самом деле, пусть какая-то точка M удалена от сторон угла A на равные расстояния. Это значит, что равны перпендикуляры MB и MC , опущенные из неё на стороны этого угла. Но тогда прямоугольные треугольники AMB и AMC будут равны по гипотенузе и катету. В самом деле, гипотенуза AM у них общая, а катеты BM и CM равны по условию. Значит, у этих треугольников должны быть равны острые углы при вершине A . Поэтому точка M лежит на биссектрисе данного угла.

Мы с вами доказали, что все точки на биссектрисе данного угла, меньшего 180° , равноудалены от его сторон и других таких точек внутри этого угла нет. Значит, биссектриса угла — это геометрическое место всех таких точек. Давайте теперь запишем это как теорему:

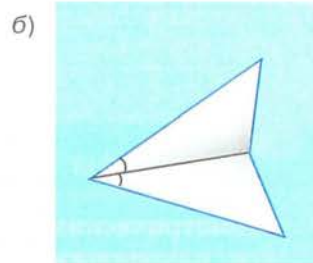
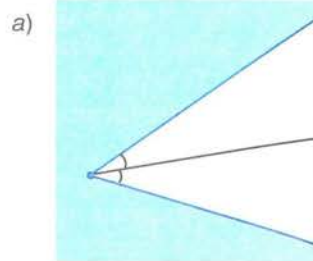


Рис. 19.27

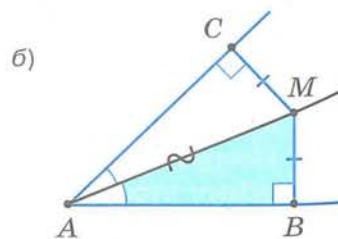
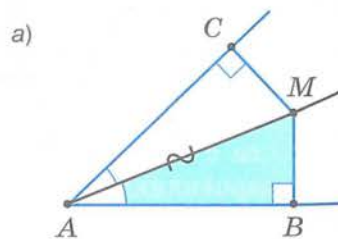


Рис. 19.28



Теорема

Геометрическим местом точек внутри угла, которые равноудалены от его сторон, является биссектриса этого угла.

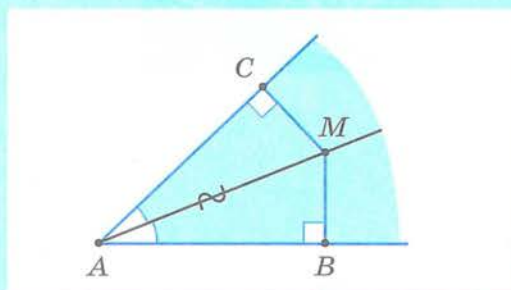


Рис. 19.29



УПРАЖНЕНИЯ

- 13 Возьмите лист белой бумаги, проведите на нём прямую, не параллельную его краю. Перегибая бумагу, получите на этом листе несколько точек на одинаковых расстояниях от этой прямой и края листа (рис. 19.30).
- 14 На листе белой бумаги проведите два отрезка прямых линий, которые пересекаются за пределами этого листа. Перегибая бумагу, постройте отрезок биссектрисы угла, образованного этими прямыми (рис. 19.31).
- 15 Проведите на белом листе бумаги прямую, которая отсекает от него треугольник. Перегибая бумагу, постройте биссектрисы всех его углов. Какое наблюдение теперь можно сделать (рис. 19.32)?

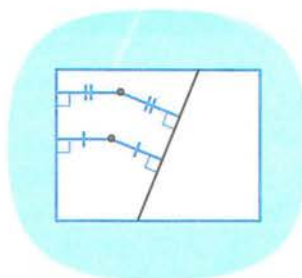


Рис. 19.30

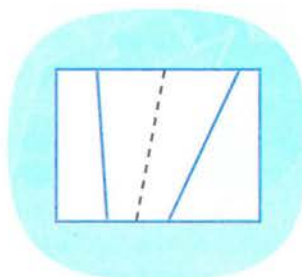


Рис. 19.31

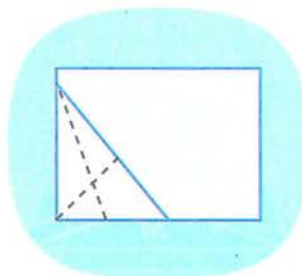


Рис. 19.32

Как построить биссектрису данного угла с вершиной A циркулем и линейкой? Например, можно поступить так. Поставим иглу циркуля в вершину и проведём окружность любого радиуса. Она пересечёт стороны нашего угла в точках B и C (рис. 19.33). Потом, не меняя раствора циркуля, тем же радиусом построим ещё две окружности с центрами в точках B и C . Эти окружности должны пройти через вершину угла A , но ещё один раз они пересекутся в некоторой точке M . Осталось соединить точки A и M по линейке — и биссектриса угла построена! Почему луч AM будет биссектрисой данного угла? Всё просто: треугольники ABM и ACM равны по третьему признаку, ведь сторо-

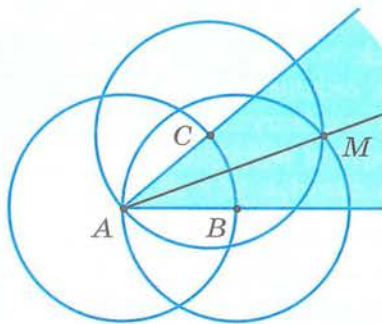


Рис. 19.33

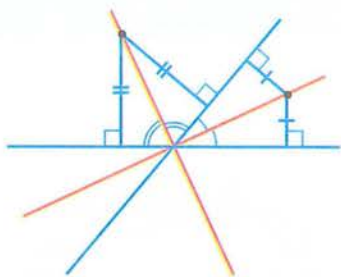


Рис. 19.34

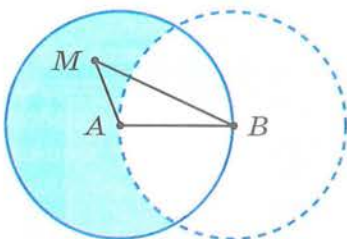


Рис. 19.35

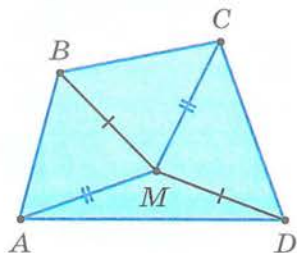


Рис. 19.36

на AM у них общая, а другие стороны равны радиусу выбранной нами окружности. Значит, равны углы BAM и CAM этих треугольников. То есть AM — биссектриса данного нам угла.

А что представляет собой множество точек, которые равноудалены от двух пересекающихся прямых? Ответить на этот вопрос теперь несложно. Две пересекающиеся прямые образуют две пары вертикальных углов. В каждом из них точки, равноудалённые от их сторон, лежат на биссектрисах этих углов. Как вы помните, биссектрисы вертикальных углов вместе образуют одну прямую. Значит, искомое множество точек — это две прямые, образованные биссектрисами четырёх данных углов (рис. 19.34). Легко доказать, что эти две прямые перпендикулярны друг другу. Как вы думаете, почему это так?



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 19.1** Дан отрезок AB . Закрасьте на плоскости множество всех таких точек M , что $AM \leq AB < BM$.

РЕШЕНИЕ: Двойное неравенство, данное в условии, означает одновременное выполнение для точек M сразу двух неравенств: $AM \leq AB$ и $AB < BM$. Давайте вначале рассмотрим первое из них.

Поскольку $AM \leq AB$, то все точки M должны принадлежать кругу с центром в точке A , радиус которого равен отрезку AB .

Второе неравенство $AB < BM$ показывает, что расстояние от точки M до точки B должно быть больше длины отрезка AB , и, значит, она не может лежать внутри круга с центром в точке B и радиусом AB . Таким образом, нужные нам точки M должны лежать вне этого круга. Остаётся закрасить все такие точки в первом круге, которые при этом не попадают во второй круг. Нужное геометрическое место точек отмечено на рисунке голубым цветом. **Обратите внимание:** граница второго круга с центром в точке B не входит в ответ, поэтому она показана на чертеже пунктиром.

ОТВЕТ: область ГМТ на рисунке 19.35 показана голубым цветом.

☆☆☆ **ПРИМЕР 19.2** Дан четырёхугольник $ABCD$. Сколько всего на плоскости существует таких точек M , что $AM = CM$, $BM = DM$ (рис. 19.36)?

РЕШЕНИЕ: Условие $AM = CM$ показывает, что точка M равноудалена от концов отрезка AC и поэтому должна лежать на серединном перпендикуляре к нему. Точно

так же равенство $BM = DM$ означает, что точка M находится на серединном перпендикуляре к отрезку BD . Значит, точка M должна лежать на пересечении серединных перпендикуляров к этим отрезкам. Отрезки AC и BD — диагонали нашего четырёхугольника, поэтому они не параллельны друг другу. Серединные перпендикуляры к ним — это две различные прямые линии, поэтому они могут пересекаться только в одной точке (рис. 19.37).

ОТВЕТ: точка M единственна.

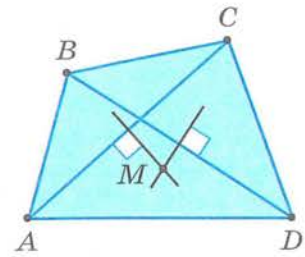


Рис. 19.37

☆☆☆ ПРИМЕР 19.3 Дан равносторонний треугольник ABC . Закрасьте внутри него все такие точки M , для которых выполняются неравенства $AM < BM < CM$.

РЕШЕНИЕ: Точки M должны удовлетворять сразу двум неравенствам: $AM < BM$ и $BM < CM$. Первое из них означает, что точка M ближе к точке A , чем к точке B . Тогда по теореме точка M должна лежать в той же полуплоскости от серединного перпендикуляра к отрезку AB , что и точка A . Этот серединный перпендикуляр пройдет через вершину C , поскольку данный нам треугольник равносторонний. Совершенно так же второе условие $BM < CM$ означает, что точка M лежит в той же полуплоскости от серединного перпендикуляра к отрезку BC , что и точка B . Таким образом, нужные нам точки лежат на пересечении двух этих полуплоскостей. Искомое геометрическое место точек внутри треугольника ABC отмечено голубым цветом. Сами перпендикуляры в него не входят, поэтому они показаны пунктиром (рис. 19.38).

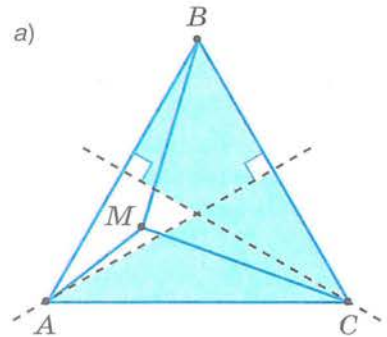


Рис. 19.38

ОТВЕТ: область ГМТ на рисунке показана голубым цветом.

☆☆☆ ПРИМЕР 19.4 Дан выпуклый четырёхугольник, у которого нет параллельных сторон. Где на плоскости находится такая точка, которая одновременно равноудалена от двух пар его противоположных сторон? Сколько всего таких точек (рис. 19.39, а)?

РЕШЕНИЕ: Сделаем дополнительное построение: продлим стороны данного нам четырёхугольника до пересечения в двух точках K и E . Поскольку по условию точка M равноудалена от противоположных сторон AD и BC четырёхугольника, то она должна лежать на биссектрисе угла CKD . Точно так же точка M должна лежать на биссектрисе угла AED , поскольку равноудалена от его сторон. Значит, точка M лежит на пересечении этих двух биссектрис. Таким образом, существует только одна точка M , подходящая под условие задачи (рис. 19.39, б).

ОТВЕТ: существует только одна точка с нужным свойством.

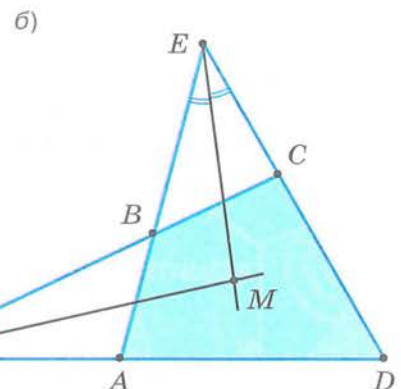
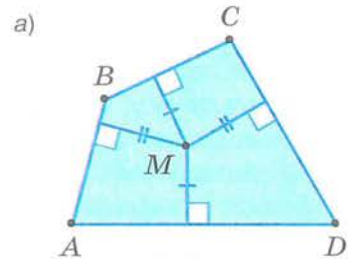


Рис. 19.39

★★★ **ПРИМЕР 19.5** Точка O — середина отрезка MK . Известно, что $AM < BM$, $AK < BK$. Обязательно ли $AO < BO$ (рис. 19.40, а)?

РЕШЕНИЕ: Возьмём отрезок AB и проведём к нему серединный перпендикуляр. Так как по условию $AM < BM$, то точка M должна лежать в той же полуплоскости относительно этого серединного перпендикуляра, что и точка A . По той же причине и точка K лежит в этой же полуплоскости, поскольку $AK < BK$. Но тогда весь отрезок MK лежит в данной полуплоскости по аксиоме, поскольку ей принадлежат его концы. Значит, и середина отрезка — точка O лежит с той же стороны от серединного перпендикуляра, что и точка A . Поэтому обязательно должно быть $AO < BO$ (рис. 19.40, б).

ОТВЕТ: обязательно.



ВОПРОСЫ

- 1 Принадлежит ли окружности её центр? Тот же вопрос для круга.
- 2 Почему линия сгиба листа бумаги прямая? С каким геометрическим местом точек на плоскости это связано?
- 3 Верно ли, что угол симметричен относительно своей биссектрисы?
- 4 Как получить биссектрису бумажного угла без циркуля и линейки?
- 5 Где на плоскости находятся все точки, равноудалённые от двух данных точек?
- 6 Каким свойством обладают точки на биссектрисе угла, меньшего развёрнутого?
- 7 Как циркулем и линейкой построить серединный перпендикуляр к отрезку?
- 8 Как циркулем и линейкой построить биссектрису угла?
- 9 Верно ли, что центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любому отрезку, соединяющему две её точки?
- 10 Где находятся на плоскости точки, расстояние от которых до данной прямой постоянно?



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 19.1 ★★★ Дан равносторонний треугольник (рис. 19.41). Закрасьте все точки плоскости, расстояние

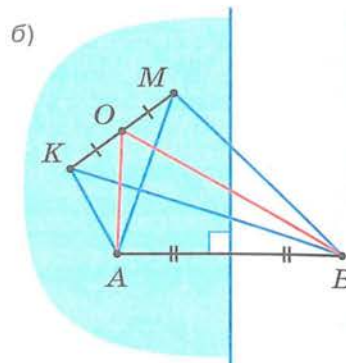
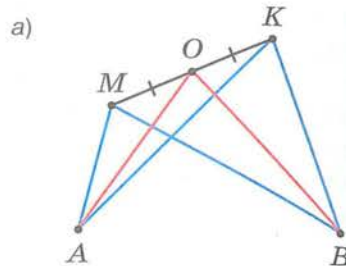


Рис. 19.40

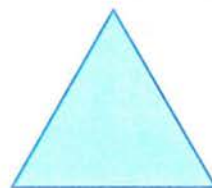


Рис. 19.41

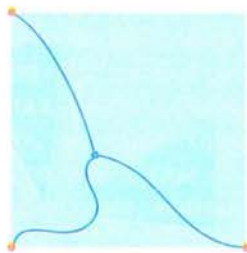


Рис. 19.42

от которых до всех вершин этого треугольника меньше его стороны.

- 19.2 ☆☆☆ Внутри квадратного участка, огороженного забором, пасётся коза. Её привязали верёвками к трём столбам, стоящим в углах участка. Длина каждой верёвки равна стороне забора. Коза съедает всю траву там, куда может дотянуться. На какой части участка коза съест траву (рис. 19.42)?

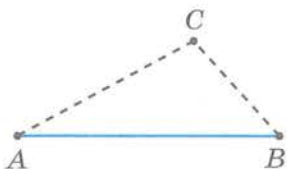


Рис. 19.43

- 19.3 ☆☆☆ Даны две точки A и B . Закрасьте на плоскости все точки C так, чтобы в треугольнике ABC сторона AB была наибольшей (рис. 19.43).

- 19.4 ☆☆☆ Даны две точки A и B . Закрасьте на плоскости все точки C так, чтобы в треугольнике ABC сторона AB была наименьшей (рис. 19.44).



Рис. 19.44

- 19.5 ☆☆☆ Дана прямая и две точки A и B по одну сторону от неё (рис. 19.45). Может ли на этой прямой быть больше одной точки M такой, что $AM = BM$?

- 19.6 ☆☆☆ Дан треугольник ABC . Где могут находиться все такие точки O , что $AO = BO = CO$? Сколько может быть таких точек (рис. 19.46)?

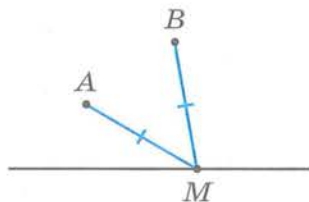


Рис. 19.45

- 19.7 ☆☆☆ В четырёхугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Где находятся такие точки M , что $AM = BM$, $CM = DM$? Сколько может быть таких точек (рис. 19.47)?

- 19.8 ☆☆☆ Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что эта точка принадлежит также и биссектрисе угла B (рис. 19.48).

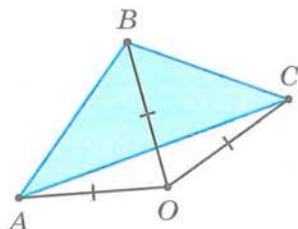


Рис. 19.46

- 19.9 ☆☆☆ В шестиугольнике нет параллельных сторон. Сколько существует точек, которые равноудалены от трёх его данных несмежных сторон (рис. 19.49)?

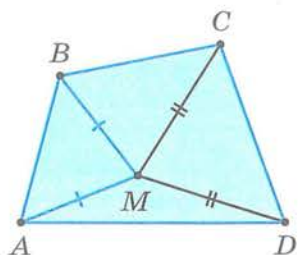


Рис. 19.47

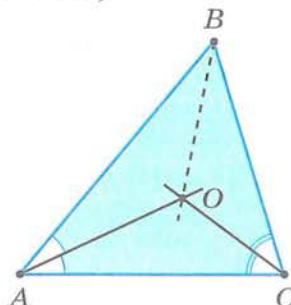


Рис. 19.48

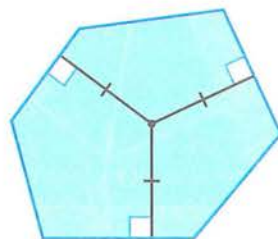


Рис. 19.49

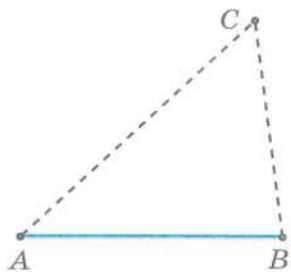


Рис. 19.50

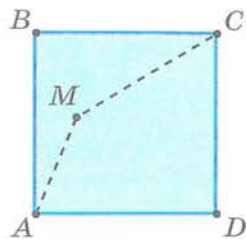


Рис. 19.51

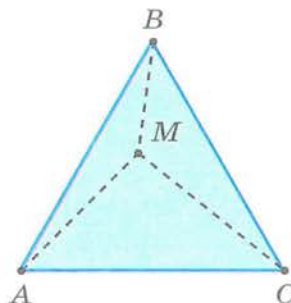


Рис. 19.52

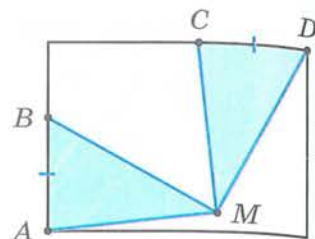


Рис. 19.53

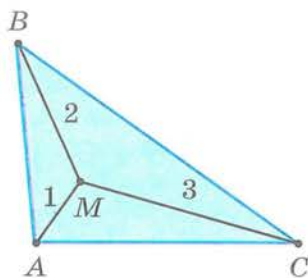


Рис. 19.54

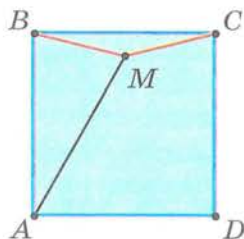


Рис. 19.55

- 19.10 ★☆☆ На некоторой прямой l нет ни одной точки, равноудалённой от точек A и B . Найдите угол между прямыми l и AB .
- 19.11 ★☆☆ Даны две точки A и B . Закрасьте на плоскости все точки C так, чтобы в треугольнике ABC сторона AB была средней по длине (рис. 19.50).
- 19.12 ★☆☆ В квадрате $ABCD$ закрасьте все такие точки M , что $AM < CM < BC$ (рис. 19.51).
- 19.13 ★☆☆ Дан равносторонний треугольник ABC . Закрасьте внутри него все такие точки M , что отрезок BM меньше отрезков AM и CM (рис. 19.52).
- 19.14 ★★★★★ На сторонах прямоугольника выбрали два равных отрезка AB и CD так, как это показано на рисунке. Найдите на плоскости все такие точки M , чтобы треугольники ABM и CDM были равны. Сколько существует таких точек (рис. 19.53)?
- 19.15 ★★★★★ Дан треугольник ABC . Некоторая точка M такова, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 3$. Докажите, что такая точка единственна (рис. 19.54).
- 19.16 ★★★★★ В квадрате $ABCD$ отметили точку M так, что $AM = AB$, $BM = CM$. Найдите угол AMB . Есть ли такие точки вне квадрата (рис. 19.55)?



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

В чём ошибка?

С серединным перпендикуляром к отрезку и биссектрисой угла связано одно замечательное рассуждение, которое «доказывает» явную ложь, но так правдоподобно, что в нём

очень трудно найти ошибку. Такие рассуждения ещё со времён Древней Греции называют **софизмами**. В древних Афинах была целая школа софистов, или «учителей мудрости», которые брались убеждать других людей во всём что угодно. Суды в древних Афинах были публичные, а политические вопросы решались на народном собрании, или так называемом Совете пятисот. За подготовку речи перед народом на суде софисты брали немалые деньги с тех, кому они их писали. Софисты учили ораторскому искусству и проповедовали, что любая истина относительна. Ради смеха, её всегда можно было перевернуть «с ног на голову». Например, учитель мудрости мог сначала убедить собеседника в чём-то одном, а потом — в прямо противоположном. Спорить с софистами было очень трудно. Знаменитый философ Сократ (рис. 19.56) осуждал софистов за их риторику и пустословие, не раз вступал с ними в словесные «поединки» и разоблачал их искусство.

Но давайте перейдём к геометрии. Как вы уже знаете, треугольники бывают прямоугольные, равнобедренные и вообще самой произвольной формы. Но мы с вами сейчас «докажем», что все треугольники на самом деле равнобедренные. Не удивляйтесь — именно так! А вы следите внимательно за рассуждением и попробуйте найти в нём ошибку.

«Доказательство»:

Возьмём произвольный треугольник ABC . Мы докажем, что он равнобедренный. Давайте построим серединный перпендикуляр к отрезку AC и проведём биссектрису угла ABC . Если они совпадут или окажутся параллельными, то в обоих случаях данная биссектриса будет перпендикулярна стороне AC . Но тогда она должна совпадать с высотой этого треугольника, и он будет равнобедренным по известному признаку (рис. 19.57, а). Рассмотрим теперь случай, когда биссектриса угла ABC и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекают друг друга в некоторой точке O (рис. 19.57, б). Здесь снова возможны два случая: либо точка O находится внутри нашего треугольника ABC , либо лежит вне него.

Рассмотрим сначала первый случай. Поскольку точка O находится на биссектрисе угла ABC , то она должна быть равноудалена от его сторон. Опустим из этой точки перпендикуляры OM и OK на стороны угла ABC . По свойству биссектрисы они должны быть равны, то есть $OM = OK$ (рис. 19.57, в).

Теперь пора вспомнить, что точка O также лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку AC . Значит, она должна быть равноудалена от его концов, и поэтому $OA = OC$ (рис. 19.58, а). Посмотрите на прямоугольные треугольники OAM и OKC : они равны по катету и гипотенузе (рис. 19.58, а). Значит, угол OAM равен углу



Философ Сократ

Рис. 19.56

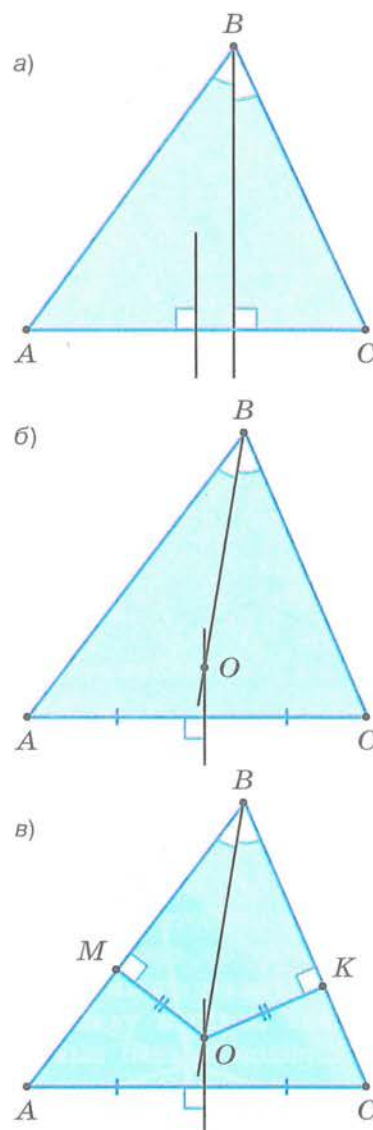


Рис. 19.57



ОСК. Обозначим их величину буквой α . А теперь посмотрите на треугольник АОС. Он равнобедренный, значит, углы ОАС и ОСА при его основании должны быть тоже равны. Обозначим их величину буквой β (рис. 19.58, б). Итак, величина каждого из углов при вершинах А и С треугольника АВС равна $\alpha + \beta$. То есть эти углы равны, и по признаку треугольник АВС должен быть равнобедренным!

Чтобы завершить доказательство, мы должны ещё рассмотреть случай, когда точка О лежит вне треугольника АВС. Здесь принципиально ничего не меняется: треугольники ОАМ и ОСК будут снова равны по гипотенузе и катету, поэтому их углы ОАМ и ОСК равны α . Треугольник АОС равнобедренный, значит, его углы ОАС и ОСА равны β . Выходит, что внешние углы МАС и АСК имеют равную величину $\alpha + \beta$. А эти углы — смежные углам треугольника АВС. Значит, в нашем треугольнике АВС углы при его вершинах А и С равны $180^\circ - (\alpha + \beta)$ (рис. 19.58, в). Не важно, чему равны эти два угла, важно, что они равны между собой. Ведь из этого следует, что треугольник АВС равнобедренный по признаку! Итак, мы разобрали все случаи расположения точки О. И в каждом случае треугольник оказался равнобедренным. Таким образом, все треугольники в геометрии Евклида должны быть равнобедренными! А если вам кажется, что это не так, не верьте глазам своим — это всего лишь обман вашего зрения.

Что и требовалось «доказать».

Комментарий: Из только что приведённого «доказательства» можно сделать далеко идущие выводы... Например, из него следует, что все треугольники должны быть не только равнобедренными, но и равносторонними (подумайте почему). А значит, и все расстояния между точками на плоскости должны быть вообще равны! Если бы всё это было правдой, то геометрия Евклида сразу стала бы бессмысленной и противоречила бы человеческому опыту. К счастью, ошибка в этом рассуждении есть...

Вам осталось её только найти!

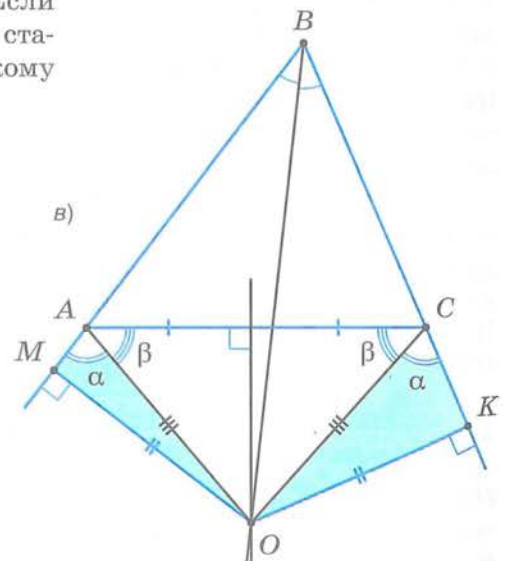
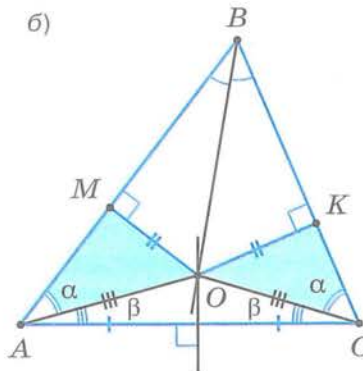
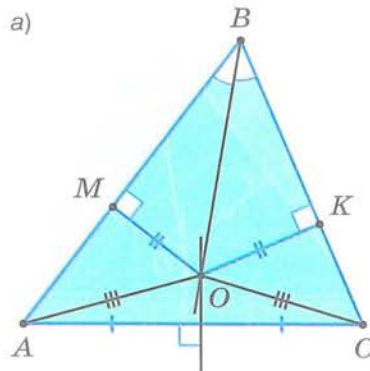


Рис. 19.58

Может быть, кто-то уже догадался: в доказательстве пропущен случай, когда точка О лежит прямо на стороне треугольника АВС.

Да, это действительно так. Но ошибка вовсе не в том. Если бы точка О находилась в середине стороны АС, биссектриса в нашем треугольнике совпала бы с медианой. А мы с вами уже доказывали, что в этом случае треугольник тоже должен быть равнобедренным. Вам придётся ещё подумать. Ведь этот софизм — один из самых сложных в элементарной геометрии.

§20 Окружность и круг



Рис. 20.1



Рис. 20.2



Шариковый подшипник

Рис. 20.3

Колесо

Бесспорно, одним из величайших изобретений человечества за всю его историю было колесо. Кажется, что колесо вообще появилось одновременно с человеком. Как представить себе нашу жизнь без колеса? Без него не сделать ни телеги, ни велосипеда! Машины без колёс не поедут, не пойдут никуда поезда. Остановятся стрелки часов, турбины самолётов, швейные машинки... Без колеса не вращался бы гончарный круг, не поворачивались бы жернова мельницы. Может быть, колесо вообще никто не изобретал? История сама ответила на этот вопрос, когда выяснилось, что древние цивилизации Америки, Австралии и Южной Африки не знали колеса. В государствах инков и ацтеков грузы перемещали на полозьях, тащили волоком. А колесо появилось на территории Евразии уже больше 7 тысяч лет назад. Самые старые окаменевшие колеса нашли при раскопках в Румынии и в предгорьях Кавказа. Изображения древних повозок на колёсах, или колесниц, были найдены в Вавилоне и Египте — им тоже больше пяти тысяч лет.

В чём же главный секрет колеса? По ровной твёрдой поверхности его гораздо легче катить, чем тащить волоком предмет такого же веса. Физики скажут, что трение о дорогу при качении колеса значительно меньше трения, возникающего при скольжении по ней. Это очевидное преимущество и сделало колесо незаменимым для создания всевозможных телег, тачек и повозок. А чтобы еще уменьшить сопротивление при вращении колеса об ось телеги, люди придумали подшипник. В нём много маленьких шариков или цилиндров, зажатых между втулкой колеса и осью, тоже катятся по кругу. Самые первые подшипники были найдены археологами при раскопках останков древнеримских кораблей. А повсеместно подшипники стали использовать в технике только в XX веке.

Окружность



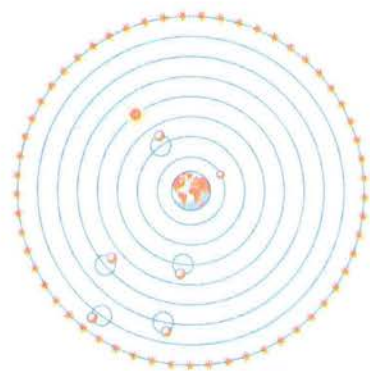
Круги на поверхности воды от упавшей на неё капли

Рис. 20.4



Мозаика из пересекающихся окружностей

Рис. 20.5



Модель Птолемея. Земля находится в центре Вселенной, а планеты движутся по окружностям — эпициклам

Рис. 20.6

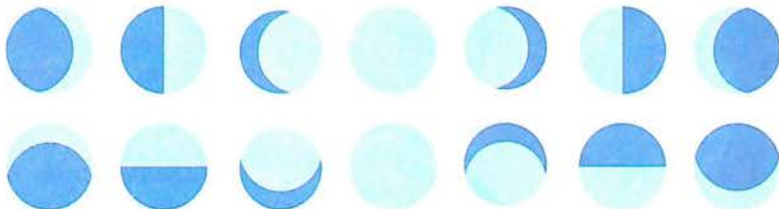
Что является математической моделью колеса? Конечно, окружность. Древние греки считали окружность самой совершенной из всех геометрических фигур.

Круги на воде, радуга на небе, даже линия горизонта — всё это окружности или части окружностей. Любая точка окружности одинаково расположена по отношению к её центру, поэтому окружность можно вращать вокруг этого центра и она будет совпадать сама с собой. Солнце, Луна и звезды движутся по окружностям — так думали люди древнего мира. А Земля должна находиться в центре всех этих окружностей — центре Вселенной (рис. 20.6). Как же могло быть иначе? Правда, некоторые звёзды странно «блуждали» по небу, за это их называли **планетами**, но считали, что планеты тоже движутся по окружностям, только их центры не стоят на месте, а сами ходят по кругу — **деференту**. Такую теорию двойных круговых движений планет, или **эпициклов**, придумал знаменитый античный астроном Птолемей. Теорией эпициклов пользовались больше тысячи лет, пока другой выдающийся астроном Иоганн Кеплер не провёл более точные наблюдения и не установил, что на самом деле планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам, в фокусах которых находится не Земля, а Солнце. Правда, открытие это было сделано только в начале XVII века.

Движение по окружности с давних пор стало основой понятия человека о времени. Ведь перемещение Солнца на небе чередует день и ночь, тень от шеста и часовая стрелка всегда идут по кругу, а Луна повторяет свою форму каждый месяц (рис. 20.7). Божественная рука поворачивает колесо — и всё повторяется снова.

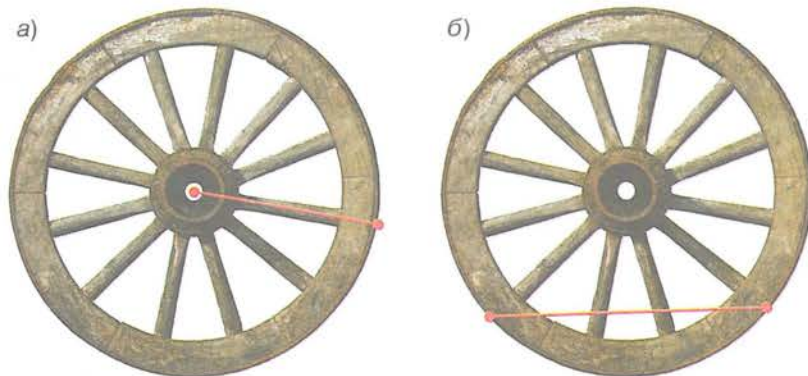
Какие же элементы есть у любой окружности?

Во-первых, это **центр**. Все точки окружности удалены от него на равное расстояние. Это расстояние обычно и называют **радиусом** окружности. Также радиусом называют любой отрезок, соединяющий точку на окружности с



Изменение фаз Луны каждый месяц в Северном полушарии и на экваторе

Рис. 20.7



Радиус окружности

Хорда окружности

Рис. 20.8

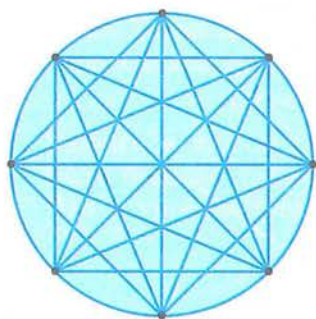


Рис. 20.9

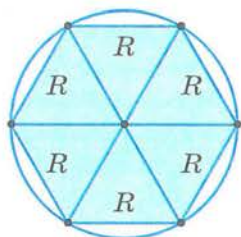


Рис. 20.10

её центром (рис. 20.8). Само слово «радиус» вошло в употребление только в XVI веке, а в переводе с латыни оно означает «луч» и даже «спица колеса».

Если две любые точки окружности соединить отрезком, то получится **хорда**. Хорда в переводе с греческого языка означает «струна» или «тетива». Если окружность разделить несколькими точками на равные части и соединить эти точки хордами, то получаются красивые чертежи (рис. 20.9). Но хорды бывают не только у окружностей. Так, хордой принято называть отрезок, соединяющий две точки любой кривой линии, а в биологии хордой называют вытянутый вдоль тела гибкий хребет — предшественник позвоночника большинства животных.

Если хорда окружности проходит через её центр, то её называют **диаметром** окружности и обычно обозначают буквой D . Понятно, что длина диаметра окружности должна быть равна двум её радиусам, то есть должно быть $D = 2R$.

Кроме того, вы наверняка слышали, что с окружностью связано знаменитое число $\pi \approx 3,1415...$ Это число показывает, во сколько раз длина окружности больше её диаметра. То есть длину окружности можно вычислить по формуле $l = \pi D = 2\pi R$. Сейчас число π вычислено уже со многими тысячами знаков после запятой, а когда-то великий Архимед считал его, вписывая в окружность многоугольники. Например, легко проверить, что отрезок, равный радиусу окружности, можно последовательно отложить на ней ровно 6 раз — это хорошо видно на рис. 20.10 (подумайте, почему это так!). Поэтому длина окружности должна быть немного больше шести её радиусов или трёх диаметров. А это значит, что число π должно быть немного больше 3.

Хотите узнать, откуда взялось само это обозначение для числа π ? Тогда попробуйте прочесть это древнегреческое слово: *περιφέρεια*. Не догадываетесь? Это слово существует и в русском языке, читается оно «периферия»

и означает место, сильно удалённое от центра, например от любого крупного города или какого-либо события. Говорят «уехать из столицы на периферию», «скользить по периферии знаний», «периферия сознания». Даже появился современный термин «периферия компьютерного обеспечения» — так обычно называют все внешние устройства компьютера. А изначально слово периферия на греческом языке означало просто окружность. От этого древнего греческого слова περίφερος великий математик XVIII века Леонард Эйлер взял первую букву π и стал ей обозначать главное число окружности. А теперь давайте повторим ещё раз:

ЭЛЕМЕНТЫ ОКРУЖНОСТИ



Радиус окружности — отрезок, соединяющий любую её точку с центром. Все радиусы окружности равны (рис. 20.12, а).



Хорда окружности — отрезок, соединяющий две любые её точки (рис. 20.12, б).



Диаметр окружности — это хорда, которая проходит через центр окружности (рис. 20.12, б).

Что такое диаметр фигуры?

Каждому ясно, что диаметр окружности — это самая большая её хорда. В этом смысле и говорят о диаметре труб, гвоздей или колёс автомобилей. В технике существует даже специальный знак, обозначающий диаметр: $\varnothing$. Да и само это слово в переводе с древнего греческого языка значит «поперечник». И всё-таки: почему диаметр окружности не может быть короче её хорды? Ответ на это даёт следующая теорема.



Леонард Эйлер

Рис. 20.11

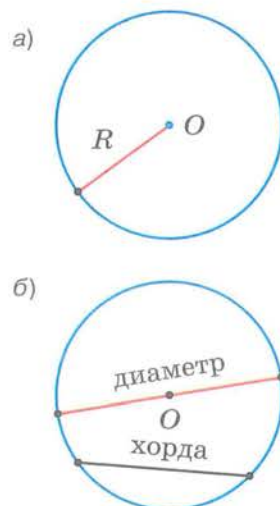


Рис. 20.12



Рис. 20.13



Теорема

Любая хорда окружности не превышает её диаметра.

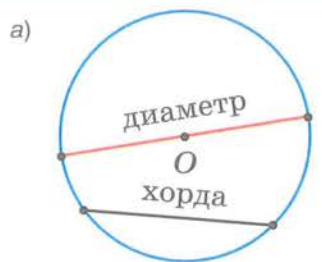
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Возьмём на окружности с центром в точке O и радиусом R любые две точки A и B . Если хорда AB проходит через центр окружности, то по определению она будет её диаметром и равна $2R$. Если же хорда AB не содержит центра окружности, то образуется треугольник AOB . Тогда для него должно выполняться неравенство треугольника:

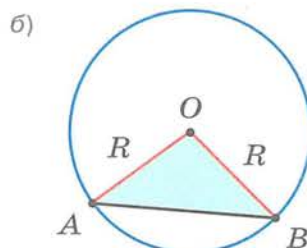
$$AB < AO + BO = 2R.$$

Значит, в любом случае хорда AB не может быть больше диаметра окружности.

Что и требовалось доказать.



хорда $\leq$ диаметра



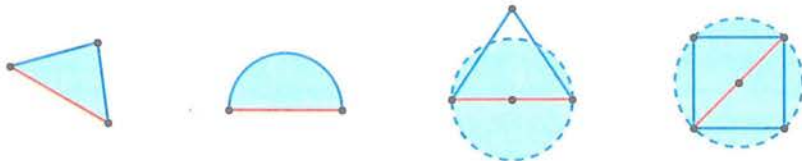
$$AB \leq 2R$$

Рис. 20.14

Полезно знать, что в геометрии диаметр можно определить не только для окружности или круга. Он есть у квадрата, треугольника, да и вообще у многих других геометрических фигур. А знаете, что называют диаметром фигуры? Так же как и у окружности, диаметр фигуры — это самая длинная её хорда.



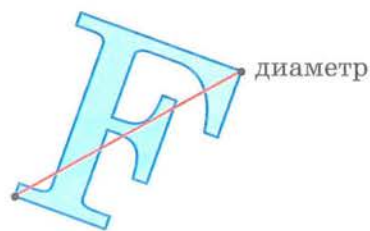
Диаметр геометрической фигуры — это самое большое расстояние между любыми двумя точками этой фигуры.



Диаметры квадрата и треугольника

Рис. 20.16

Приведём всего несколько примеров. Не очень сложно доказать, что диаметром квадрата служит любая его диагональ, диаметром треугольника — самая большая



Диаметр — самая длинная хорда

Рис. 20.15

его сторона. Получается, что у треугольника с разными сторонами диаметр только один, у квадрата их уже два, а у окружности — сколько угодно. Может даже возникнуть предположение, что геометрическую фигуру с данным диаметром можно всегда поместить внутри круга такого же диаметра. Для квадрата и прямоугольника это действительно верно, а для треугольника — уже нет. Рисунок 20.16 показывает, почему это так.



УПРАЖНЕНИЯ

- 1 Можете ли вы увидеть окружности на рисунке 20.17 Проверьте это с помощью циркуля.
- 2 А что изображено на рисунке 20.18, спираль или окружности? Проверьте это с помощью циркуля.
- 3 Сравните диаметры голубых кругов на рисунке 20.19: какой из них больше?
- 4 Проверьте, является ли фигура на спицах колеса окружностью (рис. 20.20).

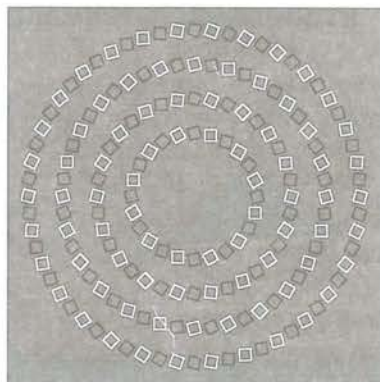


Рис. 20.17

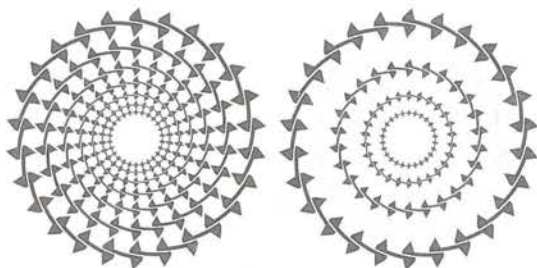


Рис. 20.18

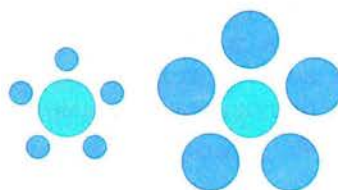


Рис. 20.19

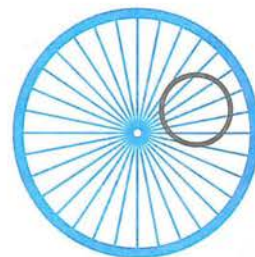


Рис. 20.20

Где находится центр окружности?

Предположим, что на листе бумаги начертили окружность, а потом её центр стёрли. Можно ли снова построить этот центр? Оказывается, сделать это очень просто! Даже если нет целой окружности, а есть только её небольшая часть... Где по отношению к самой окружности может находиться её центр?

Мы с вами его сейчас построим. Для этого возьмём на окружности две любые точки A и B . По определению центр окружности должен быть одинаково удалён от этих точек. Значит, он обязан находиться... Правильно — на серединном перпендикуляре к отрезку AB ! Вот для того чтобы сразу так сказать, мы и проходили геометрические места точек. Другими словами, центр нашей окружности лежит на серединном перпендикуляре к её хорде AB (рис. 20.21, а). Правда, на нём расположено много точек — какая из них будет центром? Заметим, что на нашей окружности есть и другие точки — давайте возьмём на ней третью точку C . Хорда AC ничем не хуже хорды AB , поэтому центр окружности точно также должен находиться и на серединном перпендикуляре к ней (рис. 20.21, б). Значит, он лежит на пересечении этих перпендикуляров!

Серединные перпендикуляры — это прямые линии, а две прямые могут пересекаться только в одной точке. То есть существует только одна точка на плоскости, где может располагаться центр данной нам окружности, и строится он однозначно даже по небольшой части этой окружности. Давайте теперь сформулируем полученный нами результат в виде теоремы.

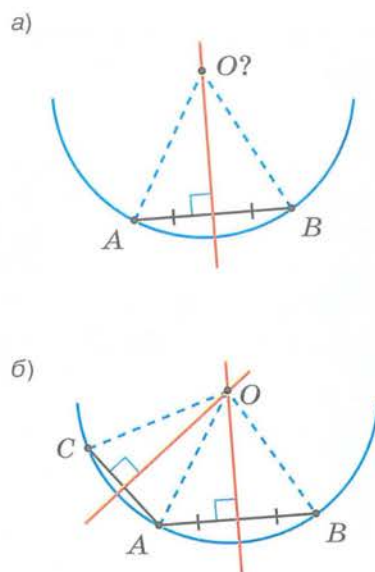


Рис. 20.21

Теорема

Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой её хорде.

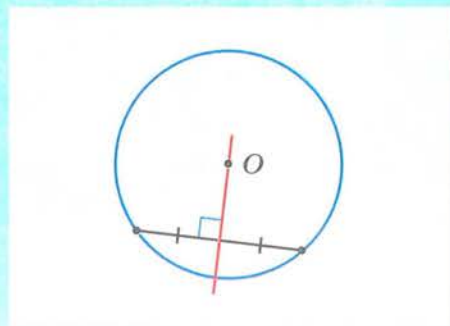


Рис. 20.22

Окружность симметрична

Является ли окружность симметричной фигурой? Сколько всего у неё осей симметрии?

Конечно, окружность симметрична, иначе греки никогда не называли бы её самой совершенной фигурой! А осей симметрии окружность имеет сколько угодно — любая прямая, проходящая через её центр, будет такой осью. Если бумажный круг согнуть так, чтобы линия сгиба была его диаметром, то две «половинки» этого круга совпадут между собой (рис. 20.23).

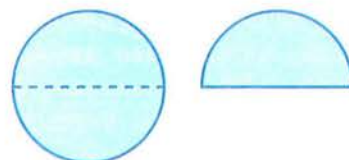


Рис. 20.23

Но это нужно еще доказать. Мы же сформулируем это утверждение в виде теоремы.



Теорема

Окружность симметрична относительно любого своего диаметра (рис. 20.24, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Проведём любой диаметр AB данной нам окружности и покажем, что она симметрична относительно него. Возьмём на окружности произвольную точку C , не лежащую на этом диаметре, и построим её хорду CC_1 , перпендикулярную прямой AB (рис. 20.24, б).

По предыдущей теореме центр O окружности должен лежать на серединном перпендикуляре к этой хорде. Диаметр AB проходит через центр O и перпендикулярен хорде CC_1 , поэтому точки C и C_1 окружности симметричны относительно прямой AB . Таким образом, при симметрии относительно любого диаметра AB все точки C нашей окружности снова попадают на эту окружность. Это значит, что при данной симметрии окружность переходит сама в себя, то есть она симметрична относительно любого своего диаметра.

Что и требовалось доказать.

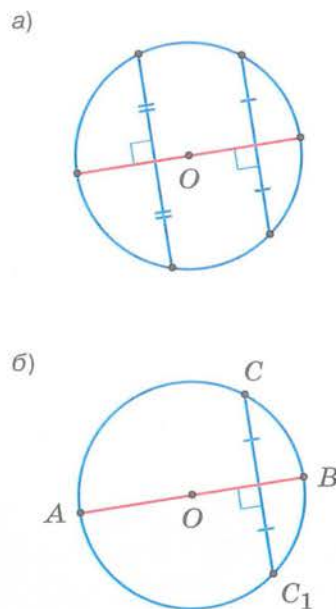


Рис. 20.24

Три точки определяют окружность

Помните, что прямую линию однозначно задают всего две её точки — по аксиоме через две точки проходит только одна прямая (рис. 20.25). А какое наименьшее число точек однозначно определяют окружность?

В аксиомах геометрии про это ничего не сказано. Легко понять, что двух точек для этого недостаточно: на рисунке 20.26 показано много окружностей, которые проходят через две данные точки.

Мы докажем, что окружность можно однозначно задать всего тремя её точками — то есть что через три данные точки может проходить только одна окружность. Правда, для этого данные три точки не должны лежать на одной прямой.



Рис. 20.25

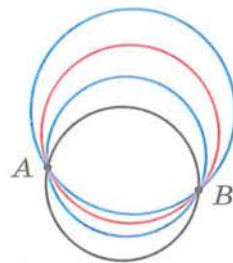


Рис. 20.26



Теорема

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность.

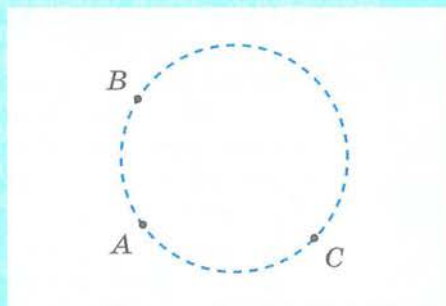


Рис. 20.27

Если три точки не лежат на одной прямой, то их можно всегда соединить между собой отрезками и получится треугольник. Наша теорема тогда будет звучать так:



Теорема

Через вершины любого треугольника проходит только одна окружность.

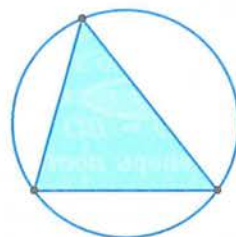
Именно эту окружность, проходящую через все вершины треугольника, в геометрии называют описанной вокруг треугольника (рис. 20.28, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Возьмём произвольный треугольник ABC и докажем, что существует только одна описанная вокруг него окружность. А начнём с того, что построим центр данной окружности.

Где может находиться этот центр? Ясно, что он должен быть на равных расстояниях от точек A и B , поэтому находиться он может только на серединном перпендикуляре к отрезку AB (рис. 20.28, б). Совершенно так же центр нашей окружности должен быть равноудалён от точек A и C , следовательно, он обязан находиться на серединном перпендикуляре к отрезку AC . Давайте построим серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC данного нам треугольника (рис. 20.29, а). Центр нужной окружности может быть только на их пересечении. Вот только всегда ли эти перпендикуляры пересекаются?

а)



Описанная окружность
треугольника

б)

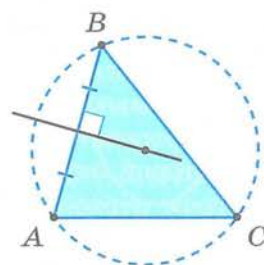


Рис. 20.28

Оказывается, что в геометрии Евклида это всегда так. И вот почему. Будем рассуждать от противоположного. Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC (назовём их l и k) не пересекают друг друга. Тогда они должны быть параллельны между собой, ведь перпендикуляры — это прямые линии.

Нарисуем их параллельными и посмотрим, как могут располагаться относительно них вершины нашего треугольника (рис. 20.29, б).

Поскольку сторона AB перпендикулярна прямой l , то она перпендикулярна и прямой k . То же самое можно сказать и про сторону AC . Значит, в этом случае точки A , B и C должны лежать на общем перпендикуляре к прямым l и k . Но тогда они принадлежат одной прямой, а это противоречит тому, что ABC — треугольник.

Полученное противоречие показывает, что серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC не могут быть параллельными и обязаны пересекаться в некоторой точке O .

Эта точка O подходит для центра искомой нами окружности. В самом деле, она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , поэтому должна быть равноудалена от его концов, значит, $AO = BO$. Точно так же точка O лежит и на серединном перпендикуляре к AC , поэтому $AO = CO$. Но тогда выходит, что расстояния от точки O до всех вершин треугольника одинаковы: $AO = BO = CO = R$ (рис. 20.29, в).

Если теперь поставить иглу циркуля в точку O и провести окружность с радиусом R , то она пройдёт через все вершины нашего треугольника.

То есть её существование доказано.

Но почему эта окружность только одна? На этот вопрос тоже легко ответить. Если бы через все вершины нашего треугольника проходила вторая окружность, то её центр O_1 по определению должен был быть также равноудалён от точек A , B и C . Но тогда точка O_1 лежала бы на тех же самых прямых l и k . Поскольку две прямые могут пересекаться только в одной точке, то центр второй окружности обязательно совпал бы с центром первой. Тогда совпали бы и радиусы окружностей, поскольку они обе проходят через точку A .

Что и требовалось доказать.

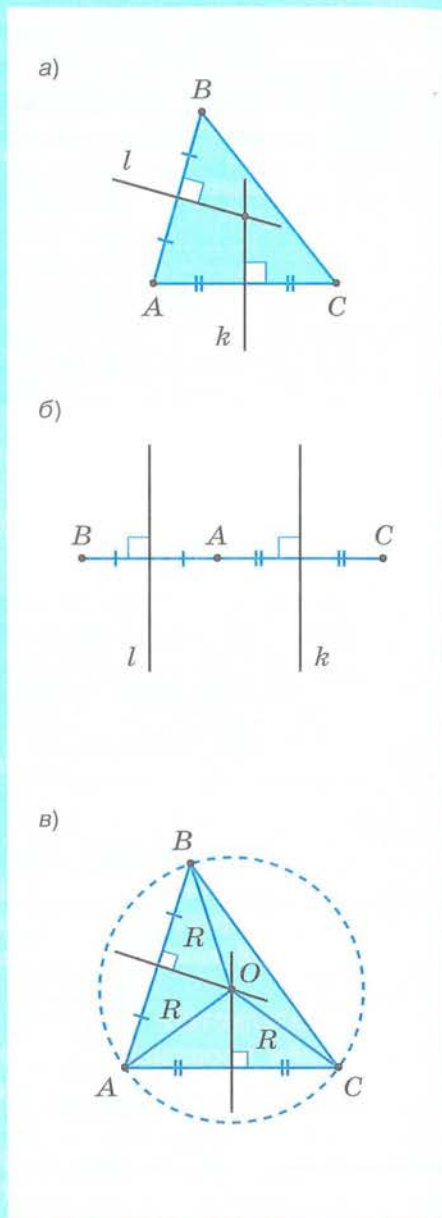


Рис. 20.29

Важная теорема доказана, но она имеет и не менее важные следствия. Вот первое из них:



Следствие 1 из теоремы

Серединные перпендикуляры к трём сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке — центре его описанной окружности.

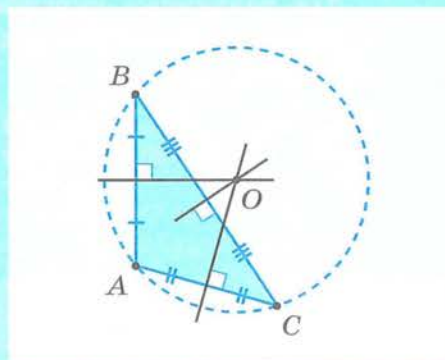


Рис. 20.30



УПРАЖНЕНИЯ

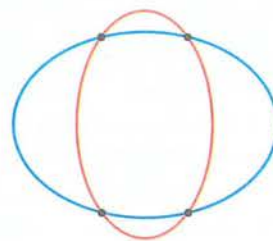
- 5 Докажите первое следствие из теоремы самостоятельно.
- 6 Нарисуйте произвольный четырёхугольник. Проверьте, пересекаются ли серединные перпендикуляры ко всем его сторонам в одной точке. Как нужно нарисовать четырёхугольник, чтобы для него это было верно?

Вы, конечно, знаете, как правильно нарисовать обыкновенную кружку? Обратите внимание — её круглое отверстие изображают в виде овала, который на самом деле является эллипсом (рис. 20.31).



Рис. 20.31

Так, в виде эллипса, мы с вами видим «со стороны» плоскую окружность в трёхмерном пространстве. В этом самом по себе нет ничего удивительного. А странно то, что два эллипса могут пересекать друг друга сразу в четырёх точках, и это тоже хорошо видно на рисунке 20.32. Если же мы возьмём две окружности, то они так пересекаться не смогут. Ведь две различные окружности могут иметь не более двух общих точек.



Два эллипса могут пересекаться в четырёх точках

Рис. 20.32

И в этом заключается второе важное следствие из нашей теоремы:



Следствие 2 из теоремы

Две различные окружности могут пересекаться не более чем в двух точках.

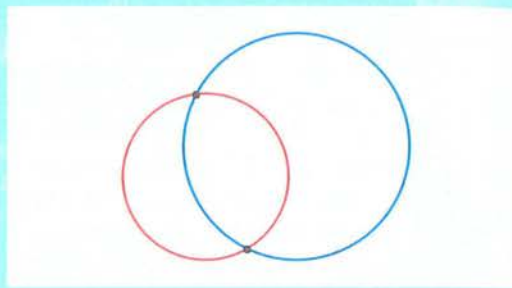


Рис. 20.33



УПРАЖНЕНИЯ

- 7 Докажите второе следствие из теоремы самостоятельно.
- 8 Начертите четыре окружности, которые пересекались бы ровно в 4 точках.

Теперь нарисуйте прямую, которая пересекает окружность. Сколько точек пересечения у вас получится? Конечно, две. В крайнем случае одна — тогда ваша прямая будет касаться окружности. А почему общих точек не может быть больше? Это настолько очевидно, что, кажется, не нуждается ни в каком доказательстве. Но согласитесь: очевидным должно быть то, что легко доказать! И мы это сейчас докажем.



Теорема

Прямая может пересекать окружность не более чем в двух точках (рис. 20.34).

Вначале нужно заметить, что очевидность доказываемого нами утверждения прямо следует из рисунка — так мы себе представляем окружность. Если быть точным, то даже не саму окружность, а круг, ведь интуитивно мы считаем его выпуклой фигурой. Выпуклая фигура с прямой линией всегда имеет либо

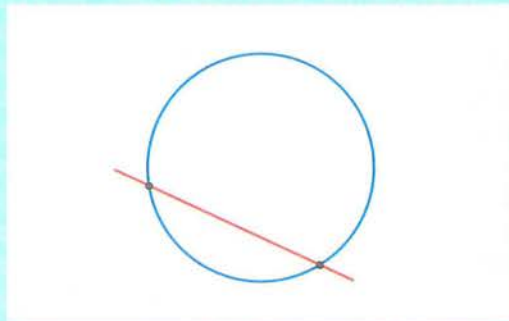


Рис. 20.34

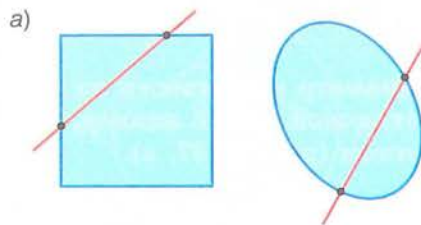
одну общую точку, либо только один отрезок — посмотрите на рисунки 20.35, а. Но ведь это надо ещё доказать! Мы же проведём строгое доказательство прямо из определения окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Будем опять рассуждать от противоположного. Допустим, что прямая линия пересекала окружность более чем в двух точках. Для того чтобы себе это представить, нам придётся нарисовать окружность уже невыпуклой фигурой (рис. 20.35, б).

Итак, пусть окружность и прямая имеют хотя бы три точки пересечения A , B и C (рис. 20.35, в). Посмотрим, где может находиться центр этой окружности. Поскольку AB и BC — хорды нашей окружности, то её центр должен быть на серединном перпендикуляре к каждой из них. Но эти серединные перпендикуляры не пересекают друг друга — они параллельны. Поэтому центра у этой окружности нет, а значит, нет и самой окружности. Полученное противоречие доказывает, что прямая и окружность не могут иметь три общие точки. Значит, они пересекаются не более чем в двух точках.

Что и требовалось доказать.



Прямая линия пересекает выпуклую фигуру по одному отрезку

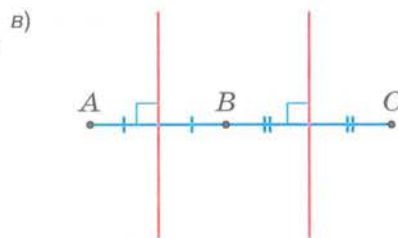
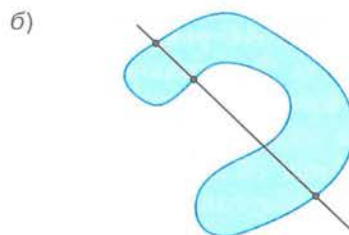


Рис. 20.35

Под каким углом виден диаметр?

Одним из первых открытий в геометрии было ещё одно замечательное свойство окружности — считается, что первым его обнаружил знаменитый мудрец Фалес. Он заметил, что диаметр окружности виден из любой её точки под прямым углом. Можно было бы сказать по-другому: угловой размер диаметра окружности для любой её точки равен 90° (рис. 20.36). А можно и так: все вписанные в окружность углы, которые опираются на её диаметр, равны 90° .

Достоверно неизвестно, мог ли сам Фалес доказать это свойство, ведь для этого ему нужно было уже знать, чему равна сумма углов треугольника. Мы же сейчас его докажем со всей строгостью.

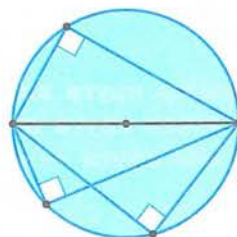


Рис. 20.36



Свойство диаметра окружности

Диаметр окружности из любой её точки, отличной от его концов, виден под прямым углом (рис. 20.37, а).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть AB — диаметр окружности с центром O , а C — любая другая точка этой окружности. Мы докажем, что угол ACB всегда равен 90° . Проведём в точку C радиус OC . Треугольник AOC равнобедренный, поэтому углы при его основании AC равны. Обозначим их величину буквой α . Треугольник BOC тоже равнобедренный, поэтому углы при его основании BC равны между собой. Пусть они имеют величину β (рис. 20.37, б). Запишем теперь сумму углов в треугольнике ABC :

$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ.$$

Отсюда сразу следует, что угол $ACB = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Что и требовалось доказать.

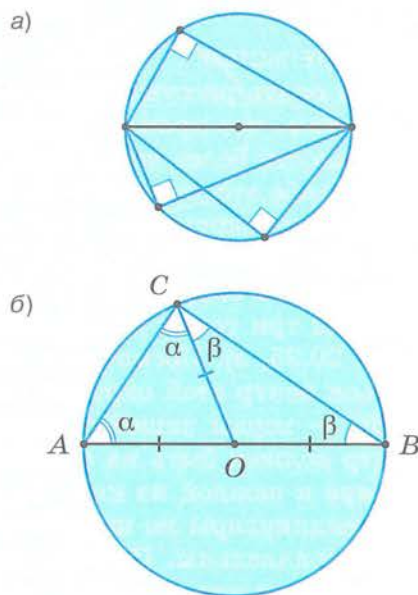


Рис. 20.37

Итак, из любой точки окружности её диаметр виден под прямым углом. А под каким углом он виден из других точек плоскости? Оказывается, это напрямую зависит от того, где находится данная точка: внутри круга с этим диаметром или вне его. Для всех точек внутри круга данный угол тупой, а для точек вне его — острый. Мы запишем это как теорему:



Теорема

Диаметр круга виден из любой точки внутри этого круга под тупым углом, а из точек вне круга — под острым углом.

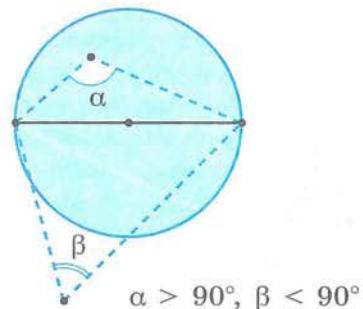


Рис. 20.38

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть AB — диаметр круга, а M — любая точка внутри этого круга. Мы докажем, что угол AMB тупой. Продолжим отрезок BM до пересечения с окружностью в точке K (рис. 20.39, а). Тогда по свойству диаметра окружности угол AKB равен 90° . Угол AMB является внешним для треугольника AMK , поэтому он больше угла AKM , то есть должен быть тупым.

Рассмотрим теперь случай, когда точка M лежит вне круга с диаметром AB . Тогда один из отрезков AM или BM должен пересечь окружность. Допустим, что отрезок BM пересекает её в точке K (рис. 20.39, б). Угол AKB опять равен 90° , так как он опирается на диаметр. Для треугольника AMK этот угол внешний, поэтому он больше угла AMK . Значит, угол AMB острый.

Что и требовалось доказать.

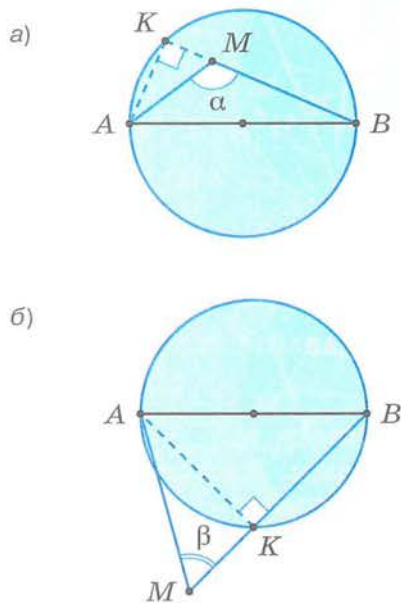


Рис. 20.39



ВОПРОСЫ

- 1 Какие элементы окружности вы знаете?
- 2 Что такое диаметр геометрической фигуры?
- 3 Под каким углом из точек окружности виден её диаметр?
- 4 В скольких точках могут пересекаться две окружности?
- 5 Сколько общих точек может иметь прямая с окружностью?
- 6 В каком случае через три данные точки можно провести окружность?
- 7 Где пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам треугольника?
- 8 Где на плоскости находятся точки, из которых данный отрезок виден под тупым углом?
- 9 Может ли у геометрической фигуры быть ровно три диаметра?
- 10 Что можно сказать о четырёхугольнике, если серединные перпендикуляры ко всем его сторонам пересекаются в одной точке?
- 11 Сколько осей симметрии у окружности? А сколько их у половины круга?
- 12 Что означает число π ? Почему оно больше 3?

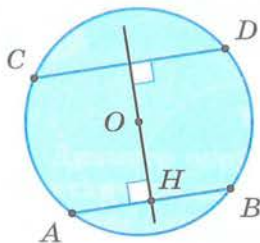


Рис. 20.40

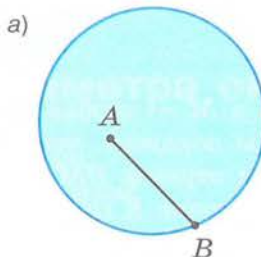
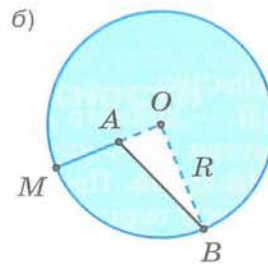


Рис. 20.41



ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

☆☆☆ **ПРИМЕР 20.1** В окружности провели две параллельные хорды. Докажите, что у них есть общий серединный перпендикуляр.

РЕШЕНИЕ: Пусть AB и CD — параллельные хорды одной окружности. Опустим из её центра O перпендикуляр OH на хорду AB (рис. 20.40). По свойству параллельных прямая OH будет также перпендикулярна и хорде CD . Как вы уже знаете, центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к любой её хорде, поэтому прямая OH и будет общим серединным перпендикуляром к хордам AB и CD .

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 20.2** Дана окружность и точка A , не лежащая на ней. Где на окружности находится такая точка B , для которой отрезок AB самый короткий (рис. 20.41, а)?

РЕШЕНИЕ: Будем считать, что точка A находится внутри данного нам круга с радиусом R . Другой случай разбирается точно так же. Проведём через точку A радиус OM нашей окружности. Мы докажем, что точка M искомая, то есть что отрезок AM самый короткий. В самом деле, поскольку точка A лежит на отрезке OM , то $OA + AM = R$. Для любой же другой точки B окружности по неравенству треугольника должно быть $AB + AO > R$. Поэтому $AB + AO > OA + AM$. Значит, $AB > AM$. То есть отрезок AM действительно короче любого другого отрезка AB .

ОТВЕТ: искомая точка лежит на пересечении отрезка OM с окружностью.

☆☆☆ **ПРИМЕР 20.3** В окружности провели две равные непересекающиеся хорды AB и CD . Докажите, что $AC = BD$ (рис. 20.42, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть O — центр данной окружности. Рассмотрим треугольники AOB и COD . Они равны по трём сторонам, поскольку $AB = CD$, а их другие стороны равны

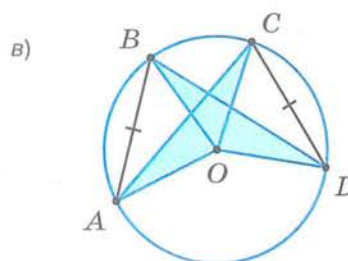
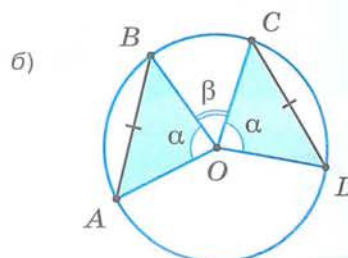
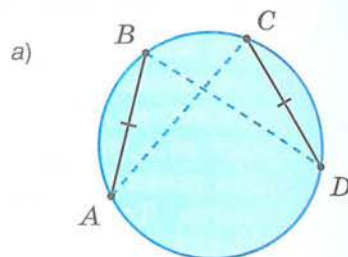


Рис. 20.42

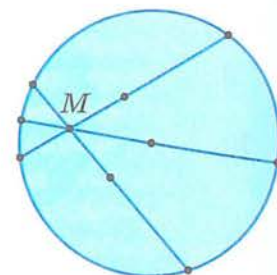


Рис. 20.43

как радиусы окружности. Из равенства этих треугольников следует, что равны их углы AOB и COD . Обозначим их величину буквой α , а величину угла BOC — β . Тогда углы AOC и BOD равны $\alpha + \beta$ (рис. 20.42, б). Рассмотрим теперь треугольники AOC и BOD . Они равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AC = BD$ (рис. 20.42, в).

Что и требовалось доказать.

☆☆☆ **ПРИМЕР 20.4** Через точку M внутри круга с центром O проводят произвольные хорды. Найдите геометрическое место середин всех таких хорд (рис. 20.43).

РЕШЕНИЕ: Пусть AB — любая хорда окружности, которая проходит через данную точку M и не содержит центра O круга. Точка H — середина этой хорды. По свойству окружности её центр лежит на серединном перпендикуляре к любой хорде, поэтому прямая OH перпендикулярна отрезку AB (рис. 20.44, а). Значит, угол OHM прямой, и отрезок OM из точки H виден под углом 90° . Как вы уже знаете, геометрическим местом всех точек H , из которых отрезок OM виден под прямым углом, будет окружность, построенная на отрезке OM как на диаметре (рис. 20.44, б). Правда, отдельно ещё нужно рассмотреть точки O и M — концы этого отрезка. Оказывается, они тоже подходят: точка O будет серединой диаметра данной нам окружности, проходящей через точку M . А точка M будет серединой хорды AB , когда эта хорда перпендикулярна отрезку OM . Итак, геометрическим местом середин хорд, проходящих через данную точку M круга, будет окружность, построенная на отрезке OM как на диаметре (рис. 20.44, в).

ОТВЕТ: окружность с диаметром OM .

☆☆☆ **ПРИМЕР 20.5** В окружность вписана простая ломаная, состоящая из трёх равных звеньев. Расстояние между началом и концом ломаной равно радиусу окружности. Найдите угол между соседними звеньями ломаной (рис. 20.45, а).

РЕШЕНИЕ: Пусть точки A и B — концы нужной нам ломаной $AMKB$, вписанной в окружность с центром O . По условию отрезок AB равен радиусу окружности, поэтому треугольник AOB должен быть равносторонним. Значит, угол AOB равен 60° (рис. 20.45, б).

Кроме того, треугольники AOM , $МОК$ и $КОВ$ должны быть равны по трём сторонам, поскольку все звенья у ломаной равны, а остальные их стороны — радиусы окружности. Из этого следует, что углы этих треугольников при вершине O также должны быть одинаковы, мы обозначим их величину буквой β . Дальше возможны два принципиально разных случая: либо ломаная и центр окружности лежат по одну сторону от прямой AB , либо по

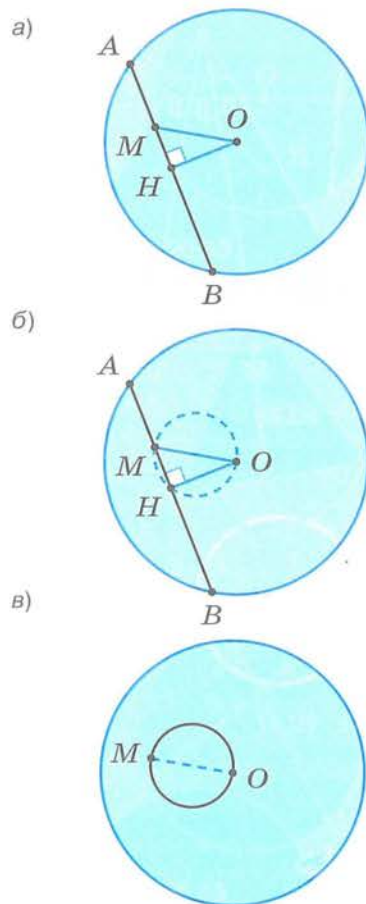


Рис. 20.44

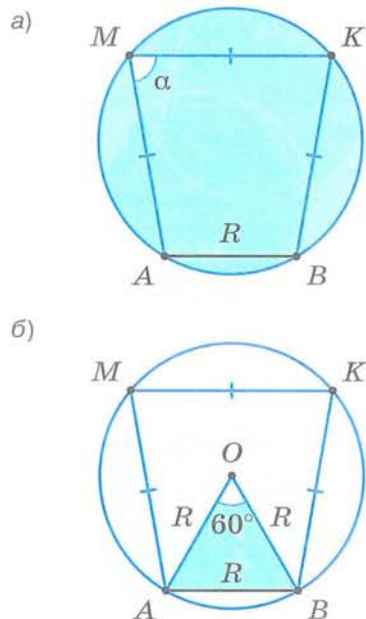


Рис. 20.45

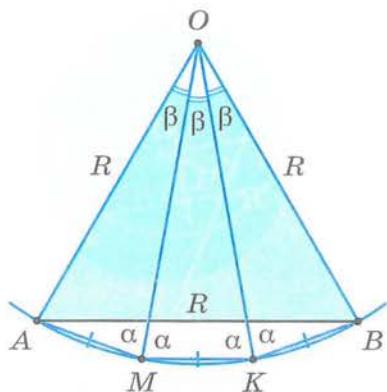


Рис. 20.46

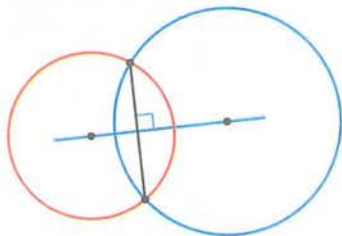


Рис. 20.47

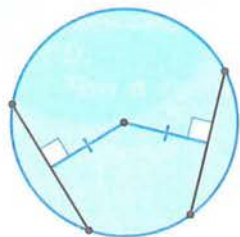


Рис. 20.48

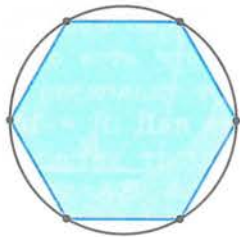


Рис. 20.49

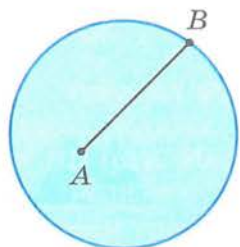


Рис. 20.50



РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

- 20.1** ★☆☆ Две окружности имеют общую хорду. Докажите, что она перпендикулярна прямой, на которой лежат их центры (рис. 20.47).
- 20.2** ★☆☆ В окружности провели две равные хорды. Докажите, что они находятся на одинаковых расстояниях от её центра (рис. 20.48).
- 20.3** ★☆☆ В окружность вписали шестиугольник, все стороны которого равны. Докажите, что радиус окружности равен стороне этого шестиугольника (рис. 20.49).
- 20.4** ★☆☆ Внутри круга взяли произвольную точку А. Где на окружности нужно взять такую точку

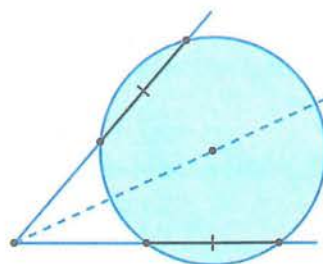


Рис. 20.51

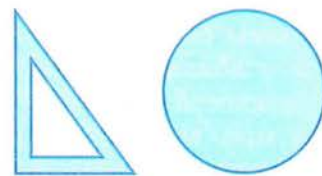


Рис. 20.52

разные стороны. Вначале рассмотрим первый случай — для него сумма углов наших треугольников с вершинами в центре окружности равна 360° . Значит, можно написать, что $3\beta + 60 = 360$. Откуда $\beta = 100$. Углы трёх равных треугольников AOM , MOK и KOB , прилежающие к равным звеньям нашей ломаной, тоже должны равны. Обозначим их величину буквой α и запишем сумму углов треугольника MOK : $2\alpha + 100 = 180$. Откуда $\alpha = 40$. Тогда искомый нами угол AMK между соседними звеньями ломаной будет равен $2\alpha = 80$.

Во втором случае искомая ломаная и центр O нашей окружности лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 20.46). Треугольник AOB здесь будет также равносторонним, и треугольники AOM , MOK и KOB также будут равны. А разница с первым случаем будет в том, что здесь $3\beta = 60$. Откуда $\beta = 20$. Давайте опять запишем сумму углов треугольника MOK : $2\alpha + 20 = 180$. Откуда $\alpha = 80$. Значит, искомый угол AMK между соседними звеньями нашей ломаной равен $2\alpha = 160$.

ОТВЕТ: искомый угол равен либо 80° , либо 160° .

B , чтобы длина отрезка AB была наибольшей (рис. 20.50)?

20.5 ★☆☆ Окружность высекает на сторонах угла равные хорды. Докажите, что её центр лежит на биссектрисе этого угла (рис. 20.51).

20.6 ★☆☆ Как построить центр окружности с помощью только чертёжного угольника без делений (рис. 20.52)?

20.7 ★☆☆ Диаметр окружности делит её хорду AB пополам. Докажите, что хорда AB либо перпендикулярна этому диаметру, либо сама является диаметром данной окружности (рис. 20.53).

20.8 ★☆☆ Треугольник вписан в окружность, центр которой лежит на одной его медиане. Докажите, что этот треугольник или равнобедренный, или прямоугольный (рис. 20.54).

20.9 ★☆☆ Две хорды окружности пересекаются так, что отмеченные на рисунке отрезки равны. Докажите, что сами хорды тоже равны (рис. 20.55).

20.10 ★☆☆ Хорды AB и CD одной окружности равны. Докажите, что прямые BC и AD параллельны (рис. 20.56).

20.11 ★☆☆ В окружность вписан треугольник, причём центр окружности оказался внутри этого треугольника. Докажите, что данный треугольник остроугольный (рис. 20.57).

20.12 ★☆☆ Прямая не пересекает окружность. Где на окружности находится точка, расстояние от которой до данной прямой наименьшее (рис. 20.58)?

20.13 ★☆☆ Две хорды окружности точкой пересечения делят друг друга пополам. Верно ли, что эта точка — центр окружности (рис. 20.59)?

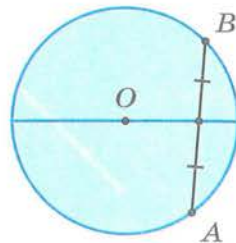


Рис. 20.53

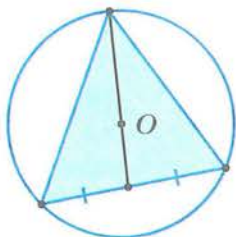


Рис. 20.54

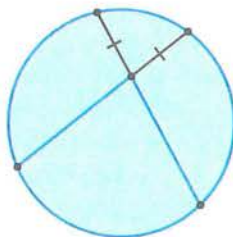


Рис. 20.55

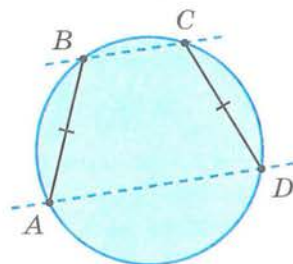


Рис. 20.56

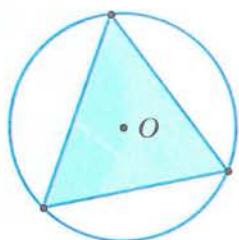


Рис. 20.57

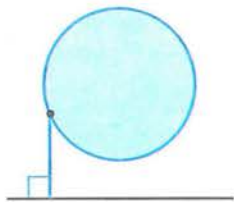


Рис. 20.58

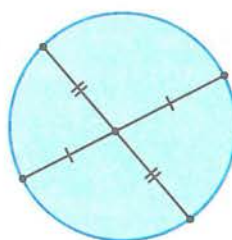


Рис. 20.59

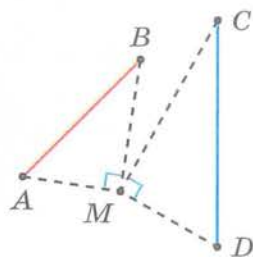


Рис. 20.60

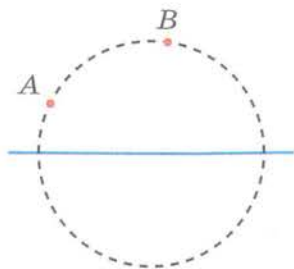


Рис. 20.61

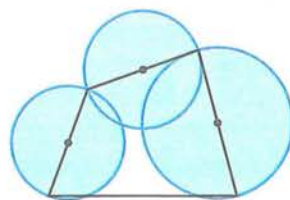


Рис. 20.62

20.14 ★☆☆ Два противоположных угла четырёхугольника тупые. Докажите, что соединяющая их диагональ короче другой его диагонали.

20.15 ★☆☆ Отрезки AB и CD не пересекаются. Докажите, что на плоскости есть не более двух точек M таких, что углы AMB и CMD одновременно равны 90° (рис. 20.60).

20.16 ★☆☆ Две точки лежат по одну сторону от прямой. Докажите, что есть не более одной окружности с центром на данной прямой, которая проходит через данные точки. В каком случае такой окружности не будет (рис. 20.61)?

20.17 ★☆☆ На всех сторонах произвольного четырёхугольника как на диаметрах построили круги. Всегда ли эти круги покроют весь четырёхугольник (рис. 20.62)?

20.18 ★☆☆ Точки A , B , C и D в указанном порядке расположены на окружности. На плоскости взяли такую точку M , что $AM = CM$, $BM = DM$. Обязательно ли точка M находится в центре окружности (рис. 20.63)?

20.19 ★☆☆ Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но для другого расположения точек на окружности (рис. 20.64).

20.20 ★☆☆ В окружность вписали пятиугольник, две соседние стороны которого равны радиусу окружности, а три другие равны между собой. Найдите отмеченный на рисунке угол пятиугольника (рис. 20.65).

20.21 ★☆☆ В окружности провели две пересекающиеся хорды. Оказалось, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоя-

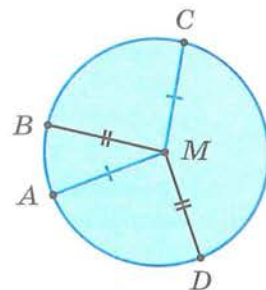


Рис. 20.63

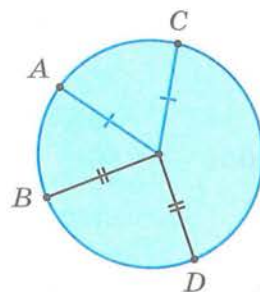


Рис. 20.64

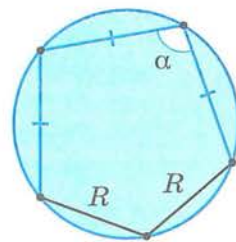


Рис. 20.65

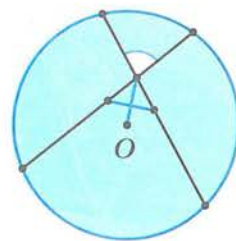


Рис. 20.66

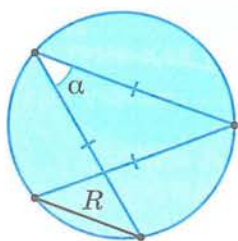


Рис. 20.67

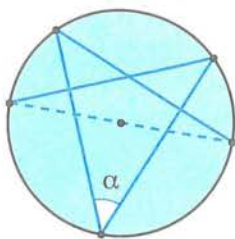


Рис. 20.68

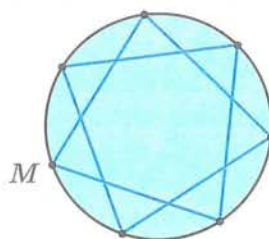


Рис. 20.69

нию между серединами этих хорд. Найдите угол между данными хордами (рис. 20.66).

- 20.22 ★★★ В окружность вписана самопересекающаяся ломаная, состоящая из трёх равных звеньев. Расстояние между началом и концом ломаной равно радиусу окружности (рис. 20.67). Найдите угол между соседними звеньями этой ломаной.

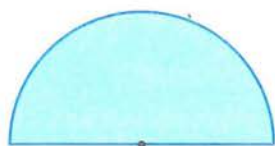


Рис. 20.70

- 20.23 ★★★ В окружность вписана замкнутая пятизвенная ломаная, четыре звена которой равны, а пятое является диаметром окружности (рис. 20.68). Найдите угол между её равными звеньями.

- 20.24 ★★★ Сколько существует ломаных, которые вписаны в одну окружность, состоят из семи равных звеньев и выходят из одной точки M этой окружности (рис. 20.69)?

- 20.25 ★★★ Докажите, что полукруг — выпуклая фигура (рис. 20.70).

- 20.26 ★★★ На каждой стороне выпуклого пятиугольника как на диаметре построили круг. Существует ли точка, которую покрывают все эти 5 кругов? А что будет, если пятиугольник будет невыпуклым (рис. 20.71)?

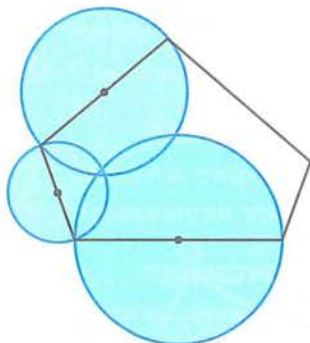


Рис. 20.71



ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

Почему круг выпуклый?

Каждому человеку ясно, что круг — это выпуклая фигура. Но почему это действительно так? Нужно ли вообще данное утверждение как-то доказывать или можно его при-

нять без доказательства как ещё одну аксиому? Оказывается, доказать выпуклость круга можно строго и совсем не сложно.

Вначале нужно напомнить, как в математике принято определять выпуклую фигуру.



Геометрическая фигура называется **выпуклой**, если отрезок, соединяющий любые две её точки, целиком содержится в этой фигуре.

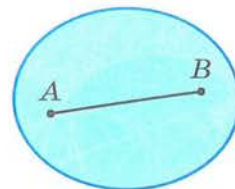
Например, фигура на рисунке 20.72 выпуклая, а на рисунке 20.73 — нет. Мы не будем ничего придумывать, а просто проверим это определение для всех точек круга и убедимся, что он выпуклый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Давайте в круге с центром O и радиусом R возьмём любые две точки A и B . Точка принадлежит кругу, если расстояние от неё до центра круга не превышает его радиуса (рис. 20.74). Точки A и B принадлежат кругу, поэтому должны выполняться оба неравенства $AO \leq R$ и $BO \leq R$. Мы покажем, что любая точка на отрезке AB тоже принадлежит нашему кругу. Итак, давайте возьмём любую точку M на отрезке AB и докажем, что $OM \leq R$. Это и будет означать, что весь отрезок AB со всеми его точками принадлежит нашему кругу. Тогда круг будет выпуклой фигурой по определению.

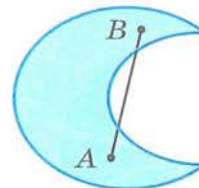
Обозначим величины углов AMO и BMO буквами α и β (рис. 20.75). Эти углы смежные, поэтому $\alpha + \beta = 180^\circ$. Либо оба этих угла равны 90° , либо один из них больше другого. Допустим, что $\alpha > \beta$. Тогда $2\alpha > \alpha + \beta = 180^\circ$. Откуда $\alpha > 90^\circ$. Но тогда в треугольнике AOM против стороны OA лежит тупой угол, и по теореме против него в нём должна лежать самая большая сторона. То есть должно выполняться неравенство $OM < OA < R$. Откуда следует, что $OM < R$. Значит, точка M принадлежит кругу. Точно так же разбирается случай, когда $\alpha < \beta$. Это рассуждение подходит для любой точки на отрезке AB , и в каждом случае оказывается, что $OM < R$. Значит, весь отрезок AB принадлежит кругу.

Что и требовалось доказать.



Выпуклая фигура

Рис. 20.72



Невыпуклая фигура

Рис. 20.73

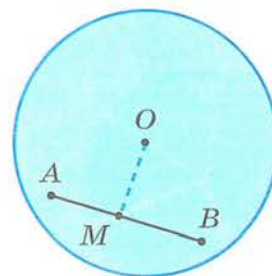


Рис. 20.74

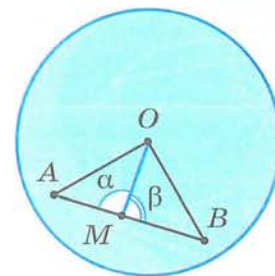


Рис. 20.75

Оглавление

ГЕОМЕТРИЯ КАК НАУКА

Первые учёные	4
---------------------	---

ГЛАВА 1 ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

1 Геометрические фигуры	32
2 Точка, прямая, плоскость	48
3 Две прямые на плоскости	56
4 Отрезки и лучи	65
5 Полуплоскость	78

ГЛАВА 2 УГЛЫ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

6 Углы	86
7 Ломаная и многоугольник	101
8 Выпуклые фигуры	112

ГЛАВА 3 РАВЕНСТВО ФИГУР

9 Равные фигуры	120
10 Признаки равенства треугольников	128
11 Симметрия и равнобедренный треугольник	142
12 Третий признак равенства треугольника	157

ГЛАВА 4 СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

13 Параллельные прямые	164
14 Сумма углов треугольника	192
15 Расчёт углов в равных треугольниках	203
16 Прямоугольный треугольник	211

ГЛАВА 5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

17 Бóльшая сторона и бóльший угол в треугольнике	224
18 Неравенство треугольника	232

ГЛАВА 6 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

19 Геометрическое место точек	248
20 Окружность и круг	265



Учебное издание

Волчкевич Максим Анатольевич

Математическая вертикаль

Геометрия

7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики

Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*

Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*

Редакторы *Е. А. Разинкова, В. Г. Щепеткин*

Младший редактор *Е. А. Андреевкова*

Художественный редактор *Т. В. Глушкова*

Художники *О. В. Попович, Алексей Вайнер*

Использованы фотографии фотобанков «Shutterstock», «Alamy», «Lori»
и фондов Музея Н. И. Лобачевского Казанского федерального университета

Компьютерная графика *И. В. Губиной*

Дизайн макета *З. С. Дорофеевой*

Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *З. С. Дорофеевой*

Корректоры *Н. В. Белозерова, И. А. Григалашвили*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд.
лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 04.11.19. Формат 84×108¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 0,00.
Тираж 20 100 экз. Заказ № 5612ТДЛ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников —
электронная почта «Горячей линии» — fpu@pros.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа».

Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46.

Тел.: +7 (4822) 44-85-98. Факс: +7 (4822) 44-61-51