

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

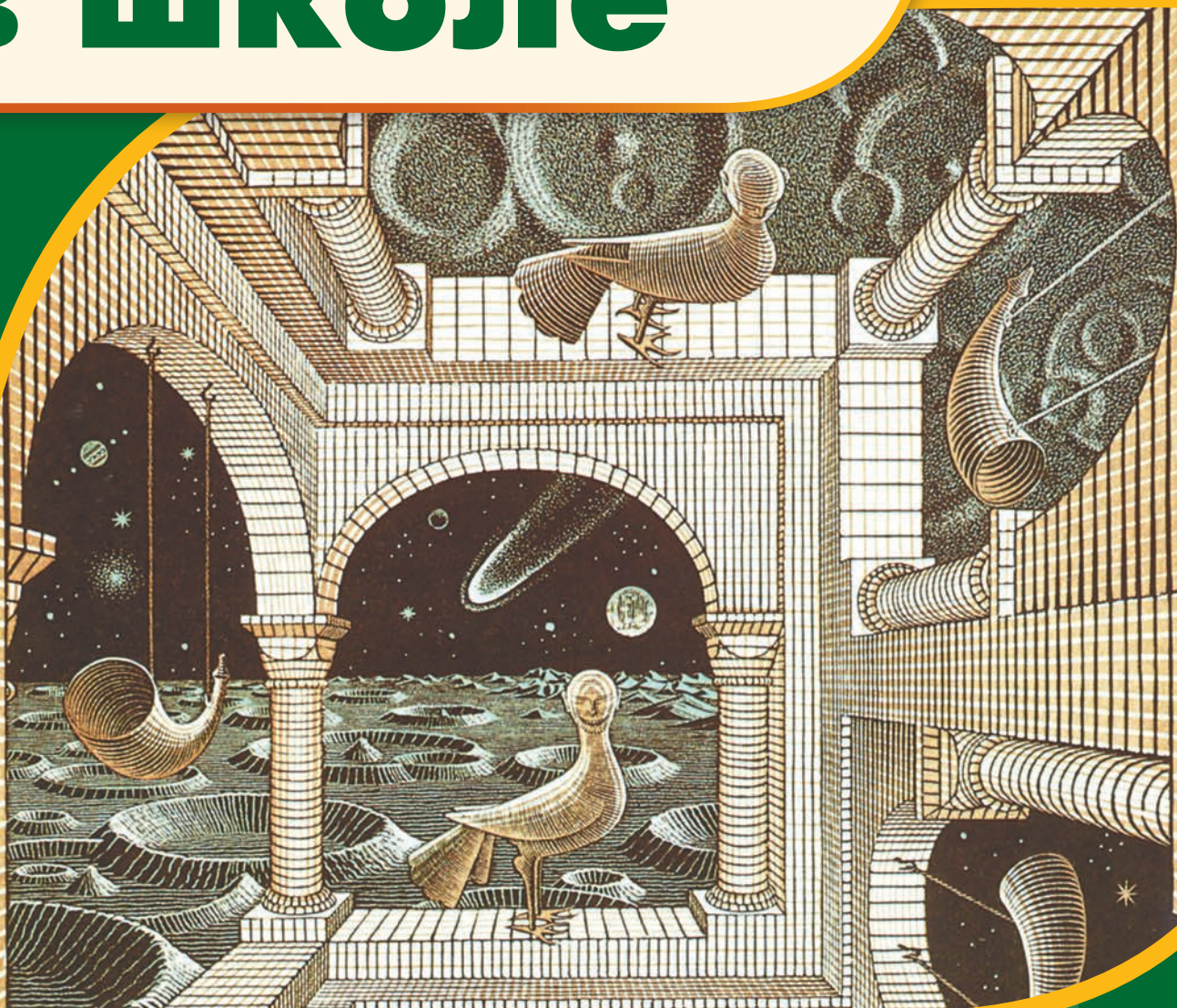


научно-теоретический и методический журнал

1 2024

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



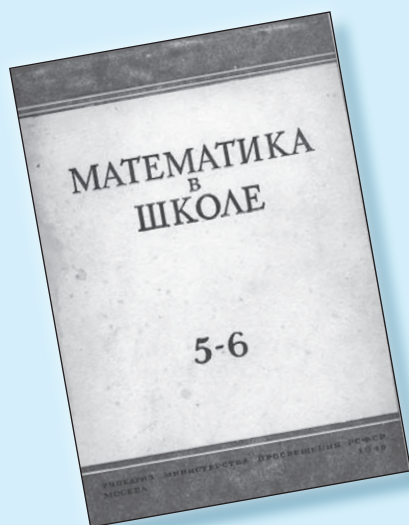
О формировании логической грамотности учащихся
при изучении свойств числовых неравенств

Компьютерный инструмент и кризис школьного
математического образования

Академик А.Н. Колмогоров
и журнал «Математика в школе»

Журналу
90 лет!

Журналу «Математика в школе» — 90 лет



На протяжении всех этих лет «Математика в школе» была настольным журналом в моей семье. Сначала у бабушки, методиста и учителя математики, создававшей на Пресне первые в стране школы рабочей молодежи. Потом у мамы, всю жизнь преподававшей в школе математику, осваивавшей вместе с журналом все хитросплетения легендарной Колмогоровской реформы. А потом и у меня — с первых лет моего учительского опыта.

И вот уже 15 лет я не только читатель журнала, но и тот, кто вместе с преданным журналу профессиональным творческим коллективом формирует каждый номер, отвечая за содержательность, актуальность, качество наших материалов.

Конечно, этот юбилей мы с радостью разделяем с нашими читателями, нашими замечательными авторами, всеми многочисленными друзьями нашего журнала.

Журнал «Математика в школе» — особенный, он относится к тем редчайшим периодическим изданиям, к подшивкам которых обращаются и годы, и десятилетия спустя, находя там красивые идеи и актуальные размышления, блестящие методические советы, интересные задачи и оригинальные решения.

Издавать журнал с такой давней историей и славными традициями — большая честь и ответственность, но не повод почитать на лаврах. Журнал чутко реагирует на новые вызовы, на самые актуальные вопросы математического образования в цифровом XXI веке.

У нас много идей, проектов и планов на будущее, в котором — мы уверены — никакой самый продвинутый искусственный интеллект никогда не заменит настоящего, живого учителя.

Мы всегда с вами, наши дорогие читатели!

Главный редактор Бунимович Е.А.

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ
И МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1/2024

Министерство
просвещения
Российской Федерации
ООО «Школьная Пресса»
Издаётся с мая 1934 г.
Периодичность – 8 номеров в год

В НОМЕРЕ:

АКТУАЛЬНАЯ ТЕМА

- 3 Журнал «Математика в школе»: 90 лет на службе математическому образованию

ОЛИМПИАДЫ

- 5 Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К.,
Рубанов И.С., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храпцов Д.Г.
**Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников
по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2022/2023 учебного года (Первый день)**

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 17 Тимофеева И.Л., Хредченко О.В.
**О формировании логической грамотности учащихся
при изучении свойств числовых неравенств**
- 24 Максимова О.В.
**О математических моделях на примере решения некоторых
школьных вероятностных задач**

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 33 Чернышева У.А., Чернышев А.Н.
**Универсальный способ решения задач на вычисление расстояния
между скрещивающимися прямыми**

ПРОФИЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ

- 44 Малышев И.Г.
Спрямление плоских кривых

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 49 Иванов С.Г., Рыжик В.И.
Компьютерный инструмент и кризис школьного математического образования

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ОТДЕЛ

- 56 Филипповский Г.Б.
Жерар Дезарг – «отец» проективной геометрии и учитель Блеза Паскаля

ХРОНИКИ

- 63 Афанасьев В.В., Вечтомов Е.М.
Международная научно-практическая конференция XVII Колмогоровские чтения, посвящённая 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова
- 67 Калинин С.И.
Академик А.Н. Колмогоров и журнал «Математика в школе»
- 69 Якубов А.В.
К юбилею журнала. Взгляд из региона

СЕТЕМАТИКА

- 74 **Смотри и решай в уме!**

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 75 **«Вкалывают роботы, а не человек» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)**

ЗАДАЧИ

- 79 Подаев М.В.
Четырёхугольники

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3835. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2024, № 1 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ЖУРНАЛ «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»: 90 ЛЕТ НА СЛУЖБЕ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

В 2024 году самое авторитетное периодическое издание для учителей математики – научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе» – отпразднует своё 90-летие! Журнал выходит с 1934 года, и уже многие десятилетия служит верным помощником учителям-предметникам, преподавателям и студентам высших учебных заведений, педагогам дополнительного образования.

Предпосылкой к появлению периодического издания для учителей математики можно считать выход двух выпусков неперiodического сборника «Математика в школе», посвящённых вопросам преподавания математики в трудовой школе первой ступени в 1924 году в Ленинграде. Упомянутый сборник выходил также в 1925 и 1926 гг. Позднее, в 1930 году, в Москве стал издаваться методический журнал «Физика, химия, математика, техника в трудовой школе» под общей редакцией проф. П.П. Лебедева. Начало издания периодического методического сборника с названием «Математика и физика в школе» восходит к маю 1934 года. Данный сборник выходил по 1936 год, после чего в 1937 году из него выделился и стал выходить под привычным сегодня названием журнал «Математика в школе».

Начиная с первых выпусков сборника «Математика и физика в школе», а затем журнала «Математика в школе», ответственным редактором был Александр Николаевич Барсуков. Он писал по по-

воду журнала: «Только в тесном сотрудничестве с самим учительством мы сможем добиться того, чтобы журнал стал настольной книгой для всякого педагога, работающего над повышением своей квалификации» («Математика в школе», № 1, 1937 г.).

До начала Великой Отечественной войны в июне 1941 г. ежегодно выходило в свет 6 номеров журнала, а в военный год читатель получил только 4, после чего деятельность редколлегии и редакции приостановилась по понятным причинам. Журнал возобновил своё функционирование только в 1946 году. А.Н. Барсуков снова продолжил руководство журналом на посту ответственного редактора.

С 1958 по 1991 гг. журнал «Математика в школе» возглавлял Черкасов Ростислав Семёнович, а с 1992 по 2008 гг. – Александр Иванович Верченко.

С 2009 года по настоящее время главным редактором журнала «Математика в школе» является Бунимович Евгений Абрамович, заслуженный учитель России, кандидат педагогических наук, автор школьных учебников и методических пособий по математике, лауреат Премии Правительства РФ в области образования.

С первых лет своего существования журнал поддерживал тесную связь с Наркомпросом РСФСР, Министерством просвещения, с созданной в годы Великой Отечественной войны (в 1943 г.) Академией педагогических наук РСФСР, с

учёными-математиками, авторами учебников и методических пособий по математике: А.Я. Хинчиным, А.П. Киселёвым, А.Н. Колмогоровым, П.С. Александровым, А.И. Маркушевичем, Н.Я. Виленкиным, К.И. Нешковым, Н.И. Сырневым, А.И. Фетисовым, С.И. Шварбурдом, И.М. Ягломом и др.; с передовыми учителями, широкой учительской аудиторией.

Именно на страницах журнала «Математика в школе» обсуждались происходившие реформы содержания математического образования, актуальные вопросы преподавания математики, зарождение и развитие олимпиадного движения, вступительные испытания в ведущие вузы страны. Таким образом, содержание журнала позволяет проследить не только историю развития математики как ведущего школьного предмета, но и российского образования в целом с конца 1930-х годов по наше время.

Сегодня на страницах журнала опытные учителя, методисты, педагоги, учёные делятся с читателем своими секретами преодоления трудностей, возникающих в процессе обучения. Авторы новых учебников рассказывают о методических идеях, заложенных в их пособиях, об особенностях работы с ними. Читая журнал «Математика в школе», вы будете в курсе всех изменений в отечественной системе математического образования: это и новые образовательные стандарты, и новые формы экзаменов, и организация исследовательской деятельности учащихся, и повышение квалификации педагогов, и многое-многое другое.

Основные рубрики журнала: Экзамены; Консультация; Открытый урок; Олимпиады; Методический семинар; Математика

и образование; Повышение квалификации; Проблемы и суждения; Из истории математического образования; Деятели науки и просвещения; Вне урока; Задачник и др.

Журнал «Математика в школе» направлен на расширение теоретической и методической подготовки учителей, повышение уровня профессионального мастерства. Во все времена наш журнал был и остаётся оперативным посредником между школьными учителями и учёными-математиками, методистами, разработчиками новых образовательных программ, учебников, экзаменационных материалов.

Основными целями журнала являются: знакомство читателей с новыми научно-методическими разработками ведущих специалистов, публикация аналитических материалов, в которых изучаются актуальные проблемы преподавания математики в школе, проблемы контроля знаний учащихся на разных уровнях образования, включая анализ заданий ОГЭ, ЕГЭ, а также публикации других материалов, связанных с методической стороной процесса преподавания математики.

По сравнению с другими журналами педагогической направленности «Математика в школе» старается знакомить читателя не только с методическими вопросами отечественного математического образования, но и с зарубежным опытом обучения математике, в том числе анализирует структуру и уровень преподавания, проведение олимпиад для учащихся, содержание выпускных экзаменов и т.д.

Приглашаем авторов к опубликованию своих материалов на страницах нашего журнала!

*С любовью и уважением к нашим читателям,
редакция журнала «Математика в школе»*

РЕГИОНАЛЬНЫЕ ЭТАПЫ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ОЛИМПИАДЫ ИМ. Л. ЭЙЛЕРА 2022/2023 УЧЕБНОГО ГОДА (ПЕРВЫЙ ДЕНЬ)

THE REGIONAL STAGES OF THE ALL-RUSSIAN OLYMPIAD ON MATHEMATICS FOR SCHOOL STUDENTS AND EULER OLYMPIAD OF 2022/2023 ACADEMIC YEAR (FIRST DAY)

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_5

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов,**П.А. Кожевников, О.К. Подлипский,**Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
nazar_ag@mail.ru;**И.С. Рубанов,**

Кировский Центр дополнительного образования одаренных школьников;

А.С. Кузнецов,

Санкт-Петербургский государственный университет;

К.А. Сухов,Санкт-Петербург, Президентский
Физико-Математический Лицей № 239;**Д.Г. Храмов,**

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov,**P.A. Kozhevnikov, O.K. Podlipskii,**Moscow Institute of Physics and Technology,
nazar_ag@mail.ru;**I.S. Rubanov,**

Kirov Centre for Additional Education of Gifted Student;

A.S. Kuznetsov,

St Petersburg University;

K.A. Sukhov,

Saint-Petersburg, Presidential Physics and Mathematics Lyceum No. 239;

D.G. Khramtsov,

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) первого дня региональных этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2022/2023 учебного года

Abstract: problems with solutions of the first day of the regional stages of the All-Russian Olympiad on mathematics for school students and Euler Olympiad of 2022/2023 academic year are provided

Ключевые слова: Всероссийская олимпиада школьников по математике, олимпиады им. Л. Эйлера, региональный этап, олимпиадная задача

Keywords: All-Russian Olympiad on mathematics for school students, Euler Olympiad, regional stage, Olympiad problem

© Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, А.С. Кузнецов, К.А. Сухов, Д.Г. Храмов, 2024

На протяжении ряда лет Всероссийская олимпиада школьников (ВсОШ) на региональном этапе проводилась для учащихся 8, 9, 10 и 11 классов. Затем,

в связи со значительным расширением числа предметов, по которым проводится ВсОШ, и унификацией её правил, официально региональный и заключительный

этапы ВсОШ стали проводиться только для учащихся 9–11 классов. И в целях сохранения наработанной в нашей стране системы работы с одарёнными школьниками, для учащихся 8 класса стала проводиться олимпиада имени Л. Эйлера. В статье приведены задания с решениями первого дня региональных этапов ВсОШ и олимпиады Эйлера 2022/2023 учебного года.

Условия задач 8 класс

8.1. (И. Рубанов) Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата $ABCD$. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет строго меньше половины диагонали квадрата.

8.2. (И. Рубанов) Пусть $p_1, p_2, \dots, p_{100}$ — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа $a_1, \dots, a_k$, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1 p_2^3, p_2 p_3^3, \dots, p_{99} p_{100}^3, p_{100} p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел $a_1, \dots, a_k$. Докажите, что $k \geq 150$.

8.3. (А. Голованов) В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, ..., 99, 100. Назовём *уголком* фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2 . Назовём уголок *хорошим*, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших уголков? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).

8.4. (С. Берлов) На стороне AC треуголь-

ника ABC выбрана точка E . Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X . Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?

8.5. (С. Берлов) По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырёх стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?

9 класс

9.1. (И. Богданов) Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

9.2. (Д. Храмов) Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

9.3. (Д. Храмов) Дано натуральное число n . На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой,

переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

9.4. (М. Антипов) Даны натуральные числа a , b и c . Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $c \geq b$.

9.5. (И. Почепцов, Д. Бродский) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ . Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S . Пусть точки M и N – середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр l к прямой MN , восстановленный в точке M , пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ .

10 класс

10.1. (А. Кузнецов, П. Кожевников) В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

10.2. (Д. Храпцов) Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

10.3. (В. Дольников) В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

10.4. (М. Антипов) Даны натуральные a , b , c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a .

10.5. (М. Туревский, М. Дидин) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BC и отмечена точка пересечения высот H . Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD , в точках P и Q . Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$.

11 класс

11.1. (А. Кузнецов) Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a , b , c таких, что a делится на $b + c$ и $b + c$ делится на $b - c + 1$?

11.2. (А. Антропов, К. Сухов) Даны различные вещественные числа a_1 , a_2 , a_3 и b . Оказалось, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$$

имеет три различных вещественных корня c_1 , c_2 , c_3 . Найдите корни уравнения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b$.

11.3. (В. Дольников) В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

11.4. (И. Почепцов) На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1, 2)$. Если на доске написана пара чисел (a, b) , то на доску можно дописать пару $(-a, -b)$, а также пару $(-b, a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a, b) и (c, d) , то на доску можно дописать пару $(a + c, b + d)$. Могла

ли через некоторое время на доске оказаться пара (2022, 2023)? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел (1, 2) и (2, 1) считаются различными.

11.5. (А. Кузнецов) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH , медиана AM , а также отмечен центр O его описанной окружности ω . Отрезки OH и AM пересекаются в точке D , прямые AB и CD – в точке E , прямые BD и AC – в точке F . Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y . Докажите, что прямые BY , CX и AH пересекаются в одной точке.

Решения задач

8 класс

8.1. Решение. Рассмотрим момент, когда бегун с диагонали AC находится в точке O пересечения диагоналей. Если второй бегун в этот момент не находится в точке B или D , расстояние между бегунами будет меньше половины диагонали, и задача решена. В противном случае будем считать для определенности, что второй бегун в этот момент находится в точке B , а первый движется из A в C . Поскольку скорости бегунов равны, в тот момент, когда первый добегит до середины E отрезка OC , второй будет находиться в середине F отрезка BO , и расстояние $EF < EO + OF = AC/2$, что и требовалось показать.

8.2. Решение. Будем называть натуральное число *белым*, если оно делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и *чёрным* в противном случае. Скажем, что число a_i *обслуживает* число $p_k p_m^3$ из списка

$$p_1 p_2^3, p_2 p_3^3, \dots, p_{99} p_{100}^3, p_{100} p_1^3, \quad (*)$$

если $a_i \cdot a_j = p_k p_m^3$ для некоторого a_j . Очевидно, что при этом одно из чисел a_i , a_j – белое, а другое – чёрное. Так как белое число может обслуживать не более одного

числа из списка (*), то белых чисел среди a_i не менее 100. Кроме того, если чёрное число обслуживает число $p_k p_m^3$, то оно равно p_k , p_m или $p_k p_m$ и потому может обслуживать не более двух чисел из списка (*). Значит, чёрных чисел среди a_i не менее 50. Таким образом, $k \geq 100 + 50 = 150$, что и требовалось доказать.

8.3. Ответ. 162.

Решение. Назовём *центром* уголка клетку, которая граничит по сторонам с двумя другими его клетками. Рассмотрим любой квадрат 2×2 , находящийся в нашей таблице. В нём содержится 4 уголка. При этом хорошими из них могут быть только те, в центрах которых находятся два наибольших числа из тех, что находятся в нашем квадрате 2×2 . Так как каждый уголок находится в каком-либо (и при том – единственном) квадрате 2×2 , то хороших уголков в нашей таблице не может быть больше половины от их общего числа. Число же всех уголков равно 4×81 , так как всего в нашей таблице имеется 81 квадрат размером 2×2 (например, потому, что левые верхние клетки всех таких квадратов образуют квадрат 9×9). Итак, мы доказали, что хороших уголков не больше, чем $4 \times 81 : 2 = 162$. Приведём пример, когда их ровно 162. Покрасим клетки таблицы в два цвета (чёрный и белый) в шахматном порядке, и произвольным образом поставим на чёрные клетки числа от 51 до 100, а на белые – числа от 1 до 50. Легко видеть, что в этом случае в каждом квадрате 2×2 будет ровно два хороших уголка с центрами в чёрных клетках.

8.4. Ответ. 2.

Решение. По свойству биссектрисы и равенствам из условия задачи получим соотношение $\frac{AE}{AB} = \frac{XE}{BX} = \frac{AX}{AL}$. Рассматривая крайние дроби, получаем пропорцию

$\frac{AE}{AX} = \frac{AB}{AL}$. Но тогда треугольники AEX и BAL подобны по второму признаку подобия. По условию треугольник AEX равнобедренный. Следовательно, таким же будет и треугольник BAL . Но тогда $2\angle ABL = 2\angle BAL = \angle BAC$, откуда и получается ответ.

8.5. Ответ. 198.

Решение. Пусть подряд стоят числа a, b, c, d, e . Заметим, что если $a > c$, то $a + b > b + c$, откуда $cd > de$, то есть $c > e$. Продолжая это рассуждение, получим, что каждое число больше числа, идущего по часовой стрелке через одно от него. Но тогда, записав цепочку из 98 таких неравенств, начиная с какого-то числа a , получим, что $a > a$ – противоречие. Значит, все 99 расставленных чисел равны одному и тому же числу a , такому что $2a = a^2$, откуда $a = 2$, а искомая сумма равна $2 \cdot 99 = 198$.

9 класс

9.1. Ответ. Они затратили поровну времени.

Решение 1. Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, то есть тоже поровну.

Решение 2. Нарисуем графики движения мальчиков по дорожке: на горизонтальной оси отмечаем время t , на вертикальной – положение y мальчика, считая от начала дорожки.

Пусть P_0, P_1, P_2 – точки, соответствующие старту Пети, моменту, когда он перешёл с асфальтового участка на песчаный, и его финишу; пусть V_0, V_1, V_2 – аналогичные точки для Васи. Тогда графики движения мальчиков – это ломаные $P_0P_1P_2$

и $V_0V_1V_2$, при этом отрезки P_0V_0, P_1V_1 и P_2V_2 горизонтальны (рис. 1). По условию, середины отрезков P_0P_1 и V_0V_1 совпадают, откуда $P_0V_0P_1V_1$ – параллелограмм. Аналогично, $P_1V_1P_2V_2$ – параллелограмм. Значит, отрезки P_0V_0, V_1P_1 и P_2V_2 параллельны и равны. Поэтому между моментами финиша Пети и Васи прошло столько же времени, сколько и между моментами их старта; отсюда и следует ответ.

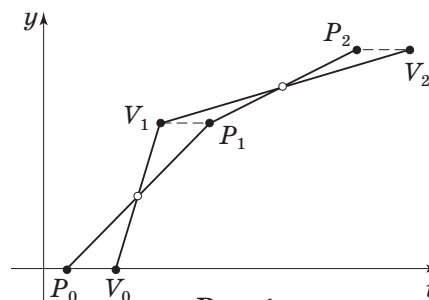


Рис. 1

9.2. Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовём *хорошим*.

Заметим, что исходный треугольник – хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30 \text{ см}$.

Если какой-то многоугольник Π разбит на хорошие многоугольники, то площадь Π , равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра Π (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь Π больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

9.3. Ответ. $2n - 1$.

Решение. Заметим, что в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Покажем сначала, что все $2n$ ладей не могли попасть в одну часть. Пусть A, B, C, D – угловые клетки доски (в порядке обхода против часовой стрелки, см. рисунок 2). Из симметрии, A и C должны принадлежать разным частям, как и B и D . Это значит, что либо A и B , либо A и D лежат в одной части, а остальные две клетки – в другой.

Пусть для определённости A и B лежат в части I. Тогда все граничные клетки между ними также должны лежать в части I; действительно, если какая-то такая клетка X лежит в части II, то в ней же лежит какой-то путь из X в C , а в части I лежит какой-то путь из A в B ; но эти пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

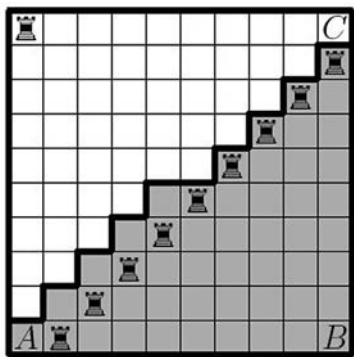


Рис. 2

Значит, вся горизонталь между клетками A и B лежит в части I, то есть в ней должна быть хотя бы одна ладья. Аналогично, в части II тоже есть целая горизонталь (между C и D), а значит, есть ладья. Отсюда и следует требуемое.

Осталось привести пример, когда в одной из частей расположено $2n - 1$ ладей. Один из возможных примеров устроен так. Рассмотрим диагональ квадрата;

в одну часть попадут клетки ниже неё, а также нижняя половина самой диагонали; остальные клетки попадут во вторую часть. Расставим $2n - 1$ ладью в клетки непосредственно под диагональю; тогда они окажутся в одной части. Оставшуюся ладью поставим на пересечении оставшихся строки и столбца, в которых ладья ещё не стоит. На рисунке 2 указан такой пример при $n = 5$.

9.4. Решение 1. Предположим противное: пусть $b \geq c + 1$. Из делимости $abc + 1$ на $ab - b + 1$ следует, что число $b(ac - a + 1) = (abc + 1) - (ab - b + 1)$ кратно $ab - b + 1$. Поскольку числа b и $ab - b + 1 = b(a - 1) + 1$ взаимно просты, получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$. Ясно, что $ac - a + 1 > 0$, поэтому либо $ac - a + 1 = ab - b + 1$, либо $ac - a + 1 \geq 2(ab - b + 1)$.

В первом случае получаем $b = a(b - c + 1)$ и, значит, b делится на a , что невозможно по условию. Во втором случае справедливы неравенства

$$\begin{aligned} ac - a &\geq 2b(a - 1) + 1 > \\ &> 2b(a - 1) > 2c(a - 1), \end{aligned}$$

то есть $ac < 2c - a < 2c$. Это значит, что $a < 2$, то есть $a = 1$; но это также невозможно по условию, ибо тогда снова b делится на a .

Решение 2. Опять же предположим противное (то есть, что $c < b$). Поскольку $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$, то и $bc - c + 1 = (abc + 1) - c(ab - b + 1)$ тоже кратно $ab - b + 1$, то есть

$$bc - c + 1 = k(ab - b + 1) \quad (*)$$

при некотором натуральном k . Иначе говоря,

$$\begin{aligned} 0 &= (bc - c + 1) - k(ab - b + 1) = \\ &= b(c - ka + k) - (k + c - 1). \end{aligned} \quad (**)$$

Значит, $k + c - 1$ делится на b . Покажем, что $k + c - 1 = b$.

По нашему предположению $c < b$. С другой стороны, поскольку $a > 1$ и $c > 1$

(иначе одно из чисел a или c кратно другому), выполнены соотношения:

$bc - c + 1 < b^2 < b(b + 1) \leq b(ab - b + 1)$, из которых с учётом равенства (*) следует неравенство $k < b$. Значит, $0 < k + c - 1 < 2b$, и потому $k + c - 1 = b$.

Теперь (**) переписывается в виде $0 = b(c - ka + k) - b$, то есть $c - ka + k - 1 = 0$. Но тогда $ka = k + c - 1 = b$, то есть b делится на a . Это невозможно.

9.5. Решение. Обозначим окружности с диаметрами AB и CD через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что точка S лежит на отрезке MN .

Пусть прямые CS и DS пересекают l в точках P и Q соответственно (рис. 3). Поскольку CD – диаметр ω_2 , имеем $\angle PSQ = \angle CSD = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике PSQ отрезок SM – высота, поэтому $\angle MSP = 90^\circ - \angle SPM = \angle SQP$. С другой стороны, поскольку $NS = NC$, то $\angle SCD = \angle CSN = \angle MSP$. Итак, $\angle SCD = \angle MSP = \angle SQP$, то есть точки P, Q, C и D лежат на одной окружности γ' .

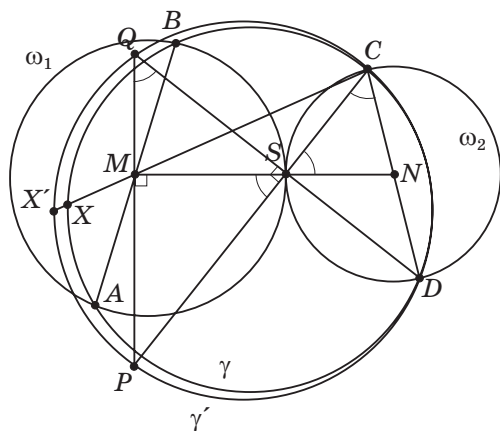


Рис. 3

Пусть теперь прямая MC пересекает окружности γ и γ' в точках X и X' соответственно (точка M лежит на отрезках CX и CX'). Тогда $MC \cdot MX = MA \cdot MB = MS^2$, поскольку M – центр окружности ω_1 . С другой стороны, $MC \cdot MX' = MP \cdot MQ = MS^2$;

последнее равенство опять же вытекает из того, что SM – высота в прямоугольном треугольнике PSQ . Значит, $MC \cdot MX = MS^2 = MC \cdot MX'$, то есть $X = X'$. Но точка X отлична от C и D , так как M не лежит на CD ; значит, окружности γ и γ' имеют три общих точки C, D, X , то есть они совпадают. Поэтому точка P лежит на γ , что и требовалось доказать.

Замечание. Решение можно было бы завершить многими разными способами. Например, равенства $MP \cdot MQ = MS^2 = MA \cdot MB$ означают, что точки P, Q, A и B лежат на одной окружности δ . Тогда либо окружности γ, γ' и δ совпадают, либо это три разные окружности. Во втором случае радикальные оси этих трёх окружностей должны пересекаться в одной точке или быть параллельными; но данные радикальные оси – это прямые PQ, AB и CD , и для них эти утверждения неверны.

Рассуждение выше имеет недостаток: оно не проходит в случае, когда точки P, Q, A и B лежат на одной прямой. Этот случай легко разобрать отдельно (тогда MN проходит через центр окружности γ , $AB \parallel CD$ и $AC \perp BD$).

10 класс

10.1. Ответ. Можно.

Решение. Один из многих возможных примеров показан на рисунке 4.

	1	2	9	10	20	90	
1	1	2	0	0	0	0	3
2	0	0	4	0	0	0	4
9	0	0	5	0	0	0	5
10	0	0	0	10	20	0	30
20	0	0	0	0	0	40	40
90	0	0	0	0	0	50	50

Рис. 4

10.2. Ответ. Нельзя.

Решение. См. решение задачи 9.2.

10.3. Решение. Предположим противное, и пусть во множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех – пусто.

Пусть среди множеств $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ нашлись два множества B и C , имеющие $k \leq 28$ общих элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ найдём подмножество D_i , не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i – общий элемент множеств $A_1, A_2, \dots, A_{50}$). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств $B, C, D_1, \dots, D_k$ – пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить ещё несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остаётся пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество – A_3), не содержащее y_1 . Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \dots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \dots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \dots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств $A_3, A_1,$

A_2 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K . Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует – противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \dots, A_{50}$ являются подмножествами множества K . Но во множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

10.4. Решение. Из условия следует, что $(abc + 1) - (ab - b + 1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ взаимно просты. Следовательно, $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab - b + 1) = (2a - 2)b + 2 > (2a - 2)c + 2 = ac + (a - 2)c + 2 > ac + 2 > ac - a + 1$. Значит, делимость $ac - a + 1$ на $ab - b + 1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Запишем последнее равенство так: $a(c - 1) = (a - 1)b$. Из него видно, что $(a - 1)b$ делится на a . Но так как $a - 1$ и a взаимно просты, то отсюда следует, что b делится на a , что и требовалось доказать.

Замечание. Приводить примеры чисел, удовлетворяющих условию, в решении не требуется. Но из решения несложно получить даже полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ta, (a - 1)t + 1)$, где $a > 1, t > 1$ – произвольные натуральные числа.

10.5. Решение. Заметим, что $PQ \parallel CD$. Значит, PQ пересекает гипотенузу AH прямоугольного треугольника AHD в её середине M , так что $MA = MD = MH$ (рис. 5).

Тогда $\angle MDH = \angle MHD$, а поскольку $MH \perp BC$ и $HD \perp CD$, то и $\angle MDH = \angle BCD$. Получаем равенство $\angle MDH = \angle BCD$, из

которого следует касание прямой MD и окружности (BCD) в точке D . Следовательно, $MD^2 = MP \cdot MQ$ (по теореме о произведении отрезков секущей).

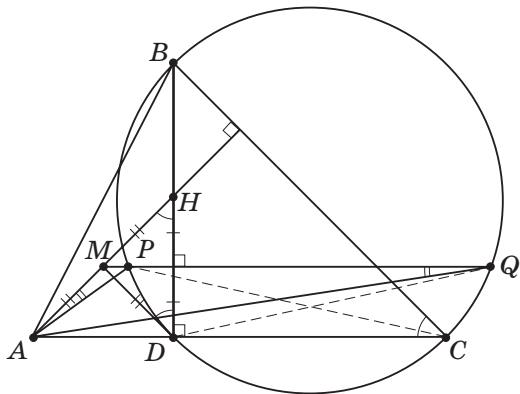


Рис. 5

Но тогда и $MA^2 = MP \cdot MQ$. Значит, треугольники AMP и QMA подобны (угол AMQ общий и $MA/MP = MQ/MA$) и $\angle MQA = \angle MAP$. Поэтому $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMN = 90^\circ - \angle MND = \angle CBD$. Итак, $\angle MPA + \angle MQA = \angle CBD$, и, поскольку $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA + \angle MQA) + (\angle MPB + \angle MQB)$, для завершения решения остаётся убедиться в том, что $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$.

Для определённости далее считаем, что P лежит между M и Q . Имеем $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - (\angle BPQ - \angle PQB)$. Так как $PQ \parallel CD$, то дуги PD и CQ равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы также равны. Тогда, используя свойства равенства вписанных углов, опирающихся на равные дуги, получаем равенства $\angle BPQ - \angle PQB = \angle BDQ - \angle PCB = (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD$, что завершает доказательство.

Замечание. Во второй части решения счёт углов можно провести разными способами. Попутно можно доказать, что H — это ортоцентр треугольника BPQ .

11 класс

11.1. О т в е т. Нельзя.

Решение. Предположим, такие три числа найдутся. Поскольку a кратно $b + c$, сумма $a + (b + c) = 2023$ также кратна $b + c$, из чего следует, что $b + c$ нечётно. Значит, $b - c + 1$ — чётное число, и нечётное число $b + c$ не может на него делиться.

11.2. О т в е т. $-a_1, -a_2$ и $-a_3$.

Решение 1. Так как многочлен $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3 , то справедливо тождество $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$. Подставив $-x$ в последнее равенство вместо x , получим

$$\begin{aligned} (-x - a_1)(-x - a_2)(-x - a_3) - b &= \\ &= (-x - c_1)(-x - c_2)(-x - c_3), \end{aligned}$$

что равносильно

$$\begin{aligned}(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) + b &= \\ &= (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3).\end{aligned}$$

Полученное тождественное равенство означает, что тремя корнями уравнения $b = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$ являются числа $-a_1, -a_2, -a_3$.

Решение 2. По теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$$c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,$$

$$c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3 + b.$$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1) + (-a_2) + (-a_3) = (-c_1) + (-c_2) + (-c_3),$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1,$$

$$-a_1a_2a_3 = -c_1c_2c_3 + b,$$

из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$ являются корнями уравнения

$$(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) - b = 0.$$

Замечание. Если в первое уравнение подставить вместо x числа c_1 , c_2 и c_3 , то из полученных трёх равенств

$$(c_1 - a_1)(c_1 - a_2)(c_1 - a_3) = \\ = b, (c_2 - a_1)(c_2 - a_2)(c_2 - a_3) = b$$

И $(c_3 - a_1)(c_3 - a_2)(c_3 - a_3) = b$ непосред-

ственно не следует, например, что

$$(-a_1 + c_1)(-a_1 + c_2)(-a_1 + c_3) = b.$$

11.3. Решение. См. решение задачи 10.3.

11.4. Ответ. Не могла.

Решение 1. Докажем, что для любой пары (x, y) , записанной на доске, число $2x - y$ делится на 7.

Действительно, для пары $(1, 2)$ число $2 \cdot 1 - 2 = 0$ делится на 7.

Пусть для пары (a, b) число $2a - b$ делится на 7. Тогда для пары $(-a, -b)$ число $2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$ делится на 7, и для пары $(-b, a + b)$ число $2 \cdot (-b) - (a + b) = -a - 3b = 3(2a - b) - 7a$ делится на 7.

Пусть для пар (a, b) , (c, d) числа $2a - b$, $2c - d$ делятся на 7. Тогда для пары $(a + c, b + d)$ число $2(a + c) - (b + d) = (2a - b) + (2c - d)$ делится на 7.

Так как для пары $(2022, 2023)$ число $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ не делится на 7, то эта пара на доске появиться не может.

Решение 2. Будем к каждой паре (a, b) на доске дописывать третье число $c = -a - b$. Тогда сумма чисел в каждой тройке будет равна нулю, а правила дописывания новых троек будут такими: если на доске записана тройка (a, b, c) , то можно дописать тройки $(-a, -b, -c)$ и $(-b, -c, -a)$, а если записаны тройки (a, b, c) и (d, e, f) , то можно дописать тройку $(a + d, b + e, c + f)$ – назовём эту тройку *суммой* троек (a, b, c) и (d, e, f) . Также для тройки (a, b, c) и целого числа k обозначим через $k \cdot (a, b, c)$ тройку (ka, kb, kc) .

Докажем, что все тройки, появляющиеся на доске, имеют вид

$$(a, b, c) = k \cdot (1, 2, -3) + l \cdot (2, -3, 1) + m \cdot (-3, 1, 2) \quad (*)$$

с целыми k, l и m . В начальный момент времени это верно: $(1, 2, -3) = 1 \cdot (1, 2, -3) + 0 \cdot (2, -3, 1) + 0 \cdot (-3, 1, 2)$.

Теперь достаточно показать, что из троек, имеющих вид $(*)$, также получаются

лишь такие тройки. Для операции взятия суммы троек это очевидно. Для остальных операций это тоже несложно проверить: если (a, b, c) имеет вид $(*)$, то

$$\begin{aligned} (-a, -b, -c) &= (-k) \cdot (1, 2, -3) + \\ &+ (-l) \cdot (2, -3, 1) + (-m) \cdot (-3, 1, 2), \\ (-a, -b, -c) &= (-m) \cdot (1, 2, -3) + \\ &+ (-k) \cdot (2, -3, 1) + (-l) \cdot (-3, 1, 2). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Предположим теперь, что на доске появилась тройка $(2022, 2023, -4045)$, то есть она имеет вид $(*)$. Тогда выполнены равенства $2022 = k + 2l - 3m$ и $2023 = 2k - 3l + m$.

Выражая из первого равенства $k = 2022 - 2l + 3m$ и подставляя во второе, получаем уравнение $7(m - l) = -2021$. Однако это невозможно, поскольку 2021 не делится на 7.

Замечание. Можно показать, что указанными операциями получаются *все* тройки, имеющие вид $(*)$. Также можно заметить, что $(-3, 1, 2) = -(1, 2, -3) - (2, -3, 1)$, так что в формуле $(*)$ можно обойтись без третьего слагаемого.

Аналогичное решение можно получить и без дописывания третьего числа к паре (однако оно будет выглядеть менее естественно). Именно, можно доказать, что все пары, появляющиеся на доске в исходном процессе, имеют вид

$$(a, b) = k \cdot (1, 2) + l \cdot (2, -3) \quad (**)$$

с целыми k и l . Заметим здесь, что если пара (a, b) имеет вид $(**)$, то

$$(-b, a + b) = l \cdot (1, 2) + (l - k) \cdot (2, -3).$$

11.5. Решение. Пусть P – такая точка на луче HE , что $PB \perp BC$ (рис. 6). Докажем, что точки C, O и P лежат на одной прямой.

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника ADE и прямой CMB имеем $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1$. Поскольку прямые PB, AH и OM параллельны (так как они все

перпендикулярны прямой BC), выполнены равенства $AB/BE = HP/PE$ и $DM/MA = DO/OH$. Значит, $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DO}{OH} \cdot \frac{HP}{PE} = 1$, из чего следует, что точки C , O и P лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника EDH . А поскольку $\angle PBC = 90^\circ$, точка P диаметрально противоположна точке C окружности ω . Аналогично, если Q – точка пересечения перпендикуляра к прямой BC , проходящего через точку C , и прямой HF , то точка Q диаметрально противоположна точке B . Из этого следует, что $\angle FXC = \angle PXC = 90^\circ$, и $\angle FYB = \angle QYB = 90^\circ$, а четырёхугольник $BPQC$ является прямоугольником.

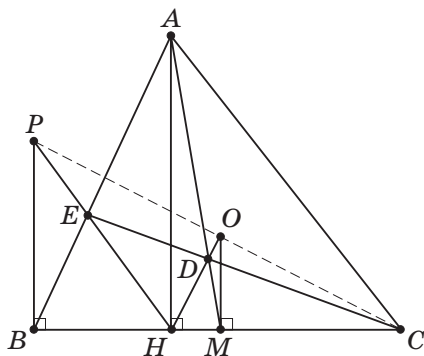


Рис. 6

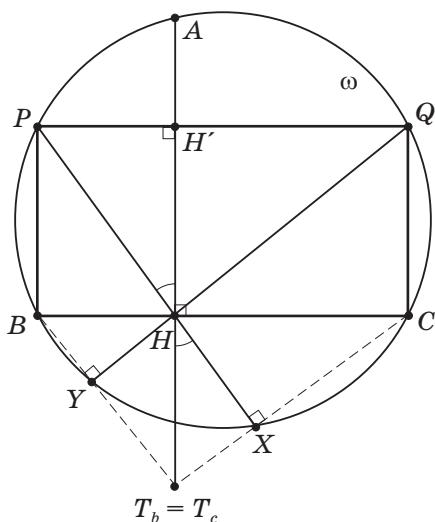


Рис. 7

Обозначим через H' , T_b и T_c точки пересечения прямой AH соответственно с прямыми PQ , BY и CX (рис. 7). Заметим, что треугольники HXT_c и $HH'P$ подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит, $HT_c/HX = HP/HH'$, или $HT_c = HX \cdot HP/HH' = HB \cdot HC/HH'$ (последнее равенство следует из свойства пересекающихся секущих). Аналогично, $HT_b = HB \cdot HC/HH'$. Значит, $T_b = T_c$, а прямые BY и CX пересекают прямую AH в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Математика. Областные олимпиады. 8–11 класс. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.
3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012/2013 учебного года // Математика в школе. 2013. № 9. С. 36–46.
4. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013/2014 учебного года // Математика в школе. 2014. № 9. С. 37–40.
5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015/2016 учебного года // Математика в школе. 2016. № 5. С. 16–28.
6. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (Первый день) // Математика в школе. 2019. № 4.

С. 11–21. (Второй день) // Математика в школе. 2019. № 5. С. 15–25.

7. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожеевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (Первый

день) // Математика в школе. 2020. № 5. С. 12–19. (Второй день) // Математика в школе. 2020. № 6. С. 10–20.

Статья поступила в редакцию

19.06.2023.

Принята к публикации

14.08.2023.

К ЮБИЛЕЮ ЖУРНАЛА!

В течение нескольких лет мне довелось работать в редакции журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников», и эти годы, конечно же, невозможно забыть. Это была весьма напряжённая, насыщенная и, вместе с тем, очень интересная и трепетная командная работа. Интересная и трепетная во многом потому, что за каждой статьёй, присланной в редакцию (независимо от того, будет ли она в итоге опубликована или нет), всегда виден автор – человек, совершенно искренне желающий поделиться своими научно-методическими находками со всеми читателями, основную часть которых составляют учителя математики и учащиеся. Человеку стороннему может показаться, что все проблемы школьного математического образования, а также методы их разрешения давно известны, поскольку само содержание его мало меняется. Соответственно, он может усомниться в нужности таких журналов, как «Математика в школе» и «Математика для школьников». Но он будет глубоко неправ. Дело в том, что сейчас стремительно меняются сами дети, меняется их мотивация к обучению. Благодаря интернету они имеют возможность сравнивать успех в творческой и карьерной реализации предыдущих поколений – к примеру, тех недавних школьников, которые получили российское математическое образование, и тех, кто учился по стандартам CIS (Кембриджская международная школа), где гораздо меньше математических фактов даётся с доказательством, а шаблонов, как решать задачи, больше. Так что научно-методические баталии ещё впереди, а наши журналы обязательно будут в гуще этих событий!

На Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики, состоявшемся 23–24 ноября 2023 года в Москве в МГУ им. М.В. Ломоносова, мне довелось поговорить с несколькими учителями математики, приехавшими издалека. На мой вопрос, как они оценивают нынешний журнал «Математика в школе», они ответили: «Да это самый лучший журнал для учителей!» Я тоже так считаю.

Троицкая С.Д.,

д. ф.-м. н.

О ФОРМИРОВАНИИ ЛОГИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СВОЙСТВ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

ON LOGICAL LITERACY SCHOOL STUDENT'S FORMATION IN STUDY OF NUMERICAL INEQUALITIES PROPERTIES

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_17

И.Л. Тимофеева, доктор пед. наук,
профессор МПГУ (Москва), iltimofeeva@mail.ru;

О.В. Хредченко, магистрант, институт
математики и информатики, МПГУ,
ohredcenko@gmail.com

I.L. Timofeeva, SciD (Pedagogy), Professor MSPU
(Moscow), iltimofeeva@mail.ru;

O.V. Khredchenko, master's student Institute of
Mathematics and Computer Science MSPU,
ohredcenko@gmail.com

Аннотация: статья посвящена некоторым проблемам формирования логической грамотности учащихся на уроках математики. Предложен подход к формированию логической грамотности учащихся при изучении числовых неравенств в 8 классе. Изложен вариант включения вопросов логического характера в процесс изучения свойств числовых неравенств

Abstract: the article is devoted to some problems of logical literacy student's formation in math lessons. An approach to the formation of student's logical literacy in study of numerical inequalities in 8th grade is proposed. The variant of inclusion logical nature questions in process of studying the properties of numerical inequalities is presented

Ключевые слова: теорема, логическая структура теоремы, обратная теорема, кванторные слова, условная форма теоремы, безусловная форма теоремы, числовое неравенство, логическая грамотность, учащийся 8 класса

Keywords: theorem, theorem's logical structure, inverse theorem, quantifier words, theorem's conditional form, unconditional form of the theorem, numerical inequality, logical literacy, 8th grade student

© И.Л. Тимофеева, О.В. Хредченко 2023

Вряд ли учитель математики усомнится в том, что у учащихся необходимо формировать логическую грамотность. Вопрос в том, при изучении каких тем и как именно это лучше делать. Считаем, что формировать логическую грамотность следует при изучении любой темы, поскольку логическая составляющая присутствует во всех темах школьного курса математики. Покажем, как можно формировать логическую грамотность при изучении свойств числовых неравенств.

Какие логические знания и умения можно формировать у учащихся при изучении теорем школьного курса математики, указано нами в статье [3]. В статье [4] перечислены логические знания и умения, которые следует формировать при изучении теорем углублённого курса алгебры.

Остановимся на возможностях формирования логических знаний и умений при изучении темы «Числовые неравенства» по учебнику Ю.Н. Макарычева и

др. [1]. Покажем, каким образом можно «встроить» вопросы логического характера в изучаемый материал.

В теме «Числовые неравенства» изучается целый ряд теорем о свойствах отношения порядка на множестве действительных чисел. Эти теоремы имеют довольно прозрачную логическую структуру. Их даже несложно записать, используя символы логических операций, частично известных учащимся из курса информатики. Кроме того, для каждой теоремы несложно провести доказательство, поэтому есть возможность уделить время логическому оперированию формулировками этих теорем.

При изучении теорем, связанных со свойствами числовых неравенств, предлагаем акцентировать внимание на следующих вопросах логического характера:

1. В чём отличие предложения с переменной (или переменными) от предложения без переменных, то есть от высказывания? Можно ли говорить об истинности или ложности предложения с переменной так же, как можно говорить об истинности или ложности высказывания?

2. Какие логические операции используются в формулировке данной теоремы?

3. Как построить предложение, обратное данной теореме вида «Если ..., то ...»?

4. Обязательно ли предложение, обратное данной теореме, является теоремой?

5. Почему недопустимо говорить: «Обратная теорема неверна»?

6. Какие кванторные слова «для любого» или «существует» подразумеваются в теореме? Каким образом их можно восстановить?

7. Что значит опровергнуть предложение вида «Для любого ... верно ...», то есть доказать, что оно неверно?

8. Что такое контрпример?

9. Можно ли теорему вида «Если ..., то...», то есть теорему в условной форме, сформулировать иначе, без союза «если», в безусловной форме?

Заметим, что в классах с углублённым изучением математики можно даже записывать некоторые изучаемые теоремы с помощью символов, обозначающих логические операции и кванторы.

Рассмотрим, как организовать логико-ориентированную работу учащихся на уроках на примере нескольких теорем о числовых неравенствах.

1. Логические союзы «и», «или» при определении нестрогого неравенства и двойного неравенства. Во-первых, при введении понятия *нестрогого неравенства* следует обратить внимание учащихся на использование логического союза «или», то есть логической операции «дизъюнкция».

Говорят, что число a больше или равно числу b , и пишут $a \geq b$, если $a - b > 0$ **или** $a - b = 0$, то есть если $a > b$ **или** $a = b$.

Для закрепления понимания операции дизъюнкции учащимся рекомендуется задать два вопроса следующего типа:

1. «Верно ли неравенство $6 \geq 5$?». Учащиеся нередко дают ошибочный ответ «Неверно, поскольку $6 > 5$ ».

2. «Верно ли неравенство $5 \geq 5$?». Учащиеся нередко дают ошибочный ответ «Неверно, поскольку $5 = 5$ ».

Обе ошибки связаны с непониманием смысла логического союза «или» (дизъюнкции). Неравенство $a \geq b$ верно, если верно хотя бы одно из предложений: $a > b$; $a = b$.

Во-вторых, при введении *двойного неравенства* следует обратить внимание учащихся на использование логического союза «и», то есть логической операции «конъюнкция». Действительно, двойное

неравенство вводится как обозначение *конъюнкции* двух строгих или нестрогих неравенств одного знака: если $a < b$ и $b < c$, то пишут $a < b < c$, а если $a \leq b$ и $b \leq c$, то пишут $a \leq b \leq c$.

Такие логические акценты необходимы для понимания утверждений, в которых используется нестрогое неравенство или двойное неравенство.

2. Условная и безусловная формы теоремы. Важным примером использования двойного неравенства служит утверждение о сравнении среднего гармонического, среднего геометрического и среднего арифметического для положительных чисел. Известное соотношение представляет собой нестрогое двойное неравенство, то есть конъюнкцию двух нестрогих неравенств:

Утверждение. «Для положительных чисел a и b выполняется соотношение

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{» [1, с. 162].}$$

На примере теоремы о сравнении средних можно показать учащимся возможность сформулировать теорему как в *безусловной* (категорической) форме «Для чисел ... таких, что $A(\dots)$, выполняется $B(\dots)$ », так и в *условной* форме «Если $A(\dots)$, то $B(\dots)$ ». Вместо многоточия можно вставлять одну, две или более переменных.

Ранее теорема о сравнении средних сформулирована в безусловной (категорической) форме. Формулировка теоремы о сравнении средних в условной форме такова:

«Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{» [1, с. 163].}$$

Следует обратить внимание учащихся, что обе формулировки теоремы (оба предложения) имеют одинаковый смысл, хотя имеют разную форму.

3. Импликация – логическая операция над предложениями. Кванторные слова. Контрпример. После разговора о теореме в условной форме, то есть теореме вида «Если ..., то...», уместно познакомить учащихся с новой логической операцией, называемой *импликацией*, и со словами «посылка импликации» и «заключение импликации». Сначала надо ввести импликацию для высказываний. Затем показать на примере, что условное предложение (импликацию) можно построить из предложений с переменными, а не только из высказываний.

Пример. Рассмотрим два предложения с переменной x : « $x > 6$ » и « $x > 3$ ». Построим из них два условных предложения (две импликации):

$$\text{«Если } x > 6, \text{ то } x > 3\text{»}. \quad (1)$$

$$\text{«Если } x > 3, \text{ то } x > 6\text{»}. \quad (2)$$

Можно ли считать верным предложение (1)? Можно ли считать верным предложение (2)? Необходимо отметить, что эти предложения не являются высказываниями. Но они оба превращаются в высказывания, если переменной x придавать разные значения. Предложение (1) превращается в истинное высказывание при любых значениях переменной. Предложение (2) при одних значениях переменной превращается в истинное высказывание, а при других – в ложное. Например, при $x = 7$ получим высказывание «Если $7 > 3$, то $7 > 6$ », которое истинно, поскольку его посылка и заключение истинны. Однако, например, при $x = 4$ получим высказывание «Если $4 > 3$, то $4 > 6$ », которое ложно, поскольку посылка этой импликации истинна, а заключение ложно.

Несложно доказать предложение

«Для любого числа x ,
если $x > 6$, то $x > 3$ ». (3)

Однако нельзя доказать предложение

«Для любого числа x ,
если $x > 3$, то $x > 6$ ». (4)

Действительно, предложение (4) можно *опровергнуть*, то есть доказать его отрицание:

«Неверно, что для любого
числа x , если $x > 3$, то
 $x > 6$ ». (5)

Это предложение логически равносильно предложению

«Существует число x такое,
что $x > 3$, но неверно, что
 $x > 6$ ». (6)

Чтобы доказать последнее предложение, достаточно привести пример такого значения для x , при котором предложение «Если $x > 3$, то $x > 6$ » превратится в ложное высказывание. Мы такой пример уже приводили: $x = 4$. Пример, который позволяет доказать предложение (5), то есть опровергнуть предложение (4), называют *контрпримером*.

Таким образом, вопрос «Верно ли предложение $A(\dots)?$ », если это предложение $A(\dots)$ имеет одну или несколько переменных, не является корректным. Следует уточнить вопрос, например, так: «Для любых ли значений переменных верно предложение $A(\dots)?$ ». Можно иначе: «Верно ли предложение “Для любых ... $A(\dots)$ ”?» или «Верно ли предложение “Существуют такие ..., что $A(\dots)$ ”?». Здесь же можно сообщить учащимся, что слова «для любого» и «существует» называют *кванторными словами* или просто *кванторами* (соответственно, квантором общности и квантором существования).

4. Предложение, обратное данному. Обратная теорема. Взаимно

обратные теоремы. Остановимся на теоремах, сформулированных в условной форме, то есть форме «Если A , то B », где A и B – предложения с одной или несколькими переменными. Например, в теореме о сравнении средних используются две переменные: a и b .

С теоремой «Если A , то B » связано предложение «Если B , то A », которое называют *обратным* этой теореме.

Уместно задать учащимся вопрос: «Всегда ли предложение, обратное данной теореме, также является теоремой?». Далее следует показать на примере, что не всегда.

Но если оба предложения «Если A , то B » и «Если B , то A » являются теоремами, то их называют *взаимно обратными теоремами*.

Рассмотрим свойство числовых неравенств.

Теорема.

«Если $a > b$, то $b < a$ ». (7)

После несложного доказательства этой теоремы можно перейти к работе логического характера.

Теорема (7) сформулирована в условной форме. Построим обратное ей предложение:

«Если $b < a$, то $a > b$ ». (8)

Предложение (8) также является теоремой, и её легко доказать.

Теорема (8) является обратной теоремой для теоремы (7). Значит, теоремы (7) и (8) являются взаимно обратными.

Замечание. В учебнике Ю.Н. Макарычева и др. [1] приведена следующая теорема:

Теорема 1. «Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$ » [1, с. 165].

Второе из этих двух условных предложений, по существу, является обратным первому. Однако авторы в нём поменяли местами переменные, поэтому второе

предложение формально не является обратным первому. Теорему 1 можно было бы сформулировать так:

«Если $a > b$, то $b < a$; если $b < a$, то $a > b$ ».

Тогда можно было бы сказать учащимся, что здесь требуется доказать два *взаимно обратных* утверждения.

5. Как можно опровергнуть предложение, обратное данной теореме, если оно неверно. Обратимся к другой теореме из учебника [1].

Теорема 2. «Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ » [1, с. 165].

Несложное доказательство этой теоремы приведено в учебнике [1].

Перейдем к логическому анализу этой теоремы. Прежде всего отметим, что теорема сформулирована в условной форме, то есть представляет собой импликацию двух предложений. Посылка этой импликации является конъюнкцией двух неравенств.

Поменяв местами посылку и заключение теоремы, получим обратное предложение: «Если $a < c$, то $a < b$ и $b < c$ ». Является ли это предложение теоремой? Для того чтобы обосновать отрицательный ответ на поставленный вопрос, рекомендуется предварительно проделать следующую работу с учащимися, начав её с краткого диалога (вопрос-ответ).

Вопрос: О любых ли трёх числах идет речь в теореме 2? Или на них наложено какое-то условие? Или речь идёт о конкретных числах?

Ответ: В этой теореме речь идёт о любых действительных числах.

Таким образом, учащиеся подведены к пониманию, что в теореме 2 подразумеваются слова «для любых a, b, c ». Поэтому теорему можно сформулировать, явно используя подразумеваемые кванторные слова:

«Для любых чисел a, b, c из $\mathbf{R}$, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ ». (9)

Для построения предложения, обратного этой теореме, следует построить обратную импликацию для условной части теоремы. При этом не следует менять часть предложения с кванторными словами (разъяснительную часть). Итак, обратным теореме (9) является предложение

«Для любых a, b, c из $\mathbf{R}$, если $a < c$, то $a < b$ и $b < c$ ». (10)

Является ли высказывание (10) истинным? Или же оно ложно, то есть является истинным отрицание этого предложения: «Неверно, что для любых a, b, c из $\mathbf{R}$, если $a < c$, то $a < b$ и $b < c$ »? Чтобы обосновать истинность последнего предложения, достаточно обосновать положительный ответ на вопрос: «Существуют ли такие числа a, b, c , что $a < c$, но неверно, что $a < b$ и $b < c$?». Для обоснования положительного ответа учащиеся без особых затруднений приводят пример трёх таких чисел, например, $a = 3$, $b = 6$, $c = 5$. Можно привести иллюстрацию на числовой прямой.

Здесь у учителя есть выбор: говорить или не говорить о том, что отрицание конъюнкции «неверно, что $a < b$ и $b < c$ » логически равносильно дизъюнкции отрицаний «неверно, что $a < b$ **или** неверно, что $b < c$ », которая, в свою очередь, равносильна дизъюнкции « $a \geq b$ **или** $b \geq c$ ». Для экономии времени можно уйти от этого разговора, например, следующим образом. Как вариант, следует записать заключение импликации в виде двойного неравенства $a < b < c$ и не уточнять, какому предложению равносильно его отрицание «неверно, что $a < b < c$ », а просто привести пример трёх таких чисел a, b, c , что $a < c$, но неверно, что $a < b < c$.

Далее полезно задать вопрос: «Можно ли в этом случае сказать: “Обратная теорема неверна”?». Скорее всего, учащиеся дадут положительный ответ на этот вопрос. Обязательно следует объяснить учащимся, почему абсолютно недопустимо сочетание слов «теорема неверна». Следует говорить так: «Предложение, обратное данной теореме, неверно» или так: «Предложение, обратное данной теореме, не является теоремой».

6. Трудности, которые могут возникнуть при построении предложения, обратного данному. Рассмотрим ещё одну теорему из учебника [1].

Теорема 4. «Если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$ » [1, с. 166].

После явного указания подразумеваемых кванторных слов получим:

«Для любых чисел a, b и любого положительного числа c , если $a < b$, то $ac < bc$ ».

Если использовать обозначение $\mathbf{R}$ для множества всех действительных чисел, а $\mathbf{R}^+$ – для множества всех положительных действительных чисел, то теорему можно сформулировать короче:

«Для любых a, b из $\mathbf{R}$ и любого c из $\mathbf{R}^+$, если $a < b$, то $ac < bc$ ». (11)

Теперь несложно построить обратное предложение. Для этого следует оставить без изменения часть теоремы с кванторными словами и построить обратную импликацию для её условной части:

«Для любых a, b из $\mathbf{R}$ и любого c из $\mathbf{R}^+$, если $ac < bc$, то $a < b$ ». (12)

Несложно доказать это утверждение, а значит, оно является теоремой.

В чём же здесь может возникнуть проблема?

Вернёмся к исходной теореме без кванторных слов: «Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$. Обратным ей является предложение «Если $ac < bc$, то $a < b$ и $c > 0$ ».

В этих двух предложениях можно явно указать подразумеваемые кванторы общности, считая, что все три переменные – действительные, и получить следующие предложения соответственно:

«Для любых a, b, c из $\mathbf{R}$, если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ ». (13)

«Для любых a, b, c из $\mathbf{R}$, если $ac < bc$, то $a < b$ и $c > 0$ ». (14)

Предложение (14) является обратным предложению (13). Оно является странным по смыслу и к тому же ложным. Его можно опровергнуть, приведя соответствующий контрпример. Очевидно, предложение (14) не равносильно предложению (12). Мы не рекомендуем учителю самому предлагать учащимся такой вариант построения обратного предложения для теоремы 4. Если же учащиеся сами построят обратное предложение именно таким образом, то придётся обсудить ситуацию. Следует объяснить, что от формулировки исходной теоремы зависит и построение обратного предложения.

Подобные проблемы, возникающие при построении предложения, обратного данному, уже обсуждались нами в статье «Обратные теоремы и кванторы» [5].

Отметим, что для теоремы 4, сформулированной с переменными, возможно перейти от условной формы к безусловной: «Для чисел a и b , таких что $a < b$, и положительного числа c верно неравенство $ac < bc$ ». Однако более полезной считаем формулировку без переменных: «Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство» [1, с. 167] или «Умножив обе части верного неравенства на положительное число, получим верное неравенство».

7. Об использовании логических символов при записи теорем. Исполь-

зование символов логических операций и кванторов при записи предложений делает наглядной логическую структуру этого предложения, способствует однозначному пониманию его смысла. Однако логическая символика на уроках алгебры в 8 классе не используется. Именно поэтому мы её и не использовали в данной статье. Если же изучение материала проводится на углублённом уровне, например, в рамках курса по выбору, то использование логических символов для записи предложений весьма полезно. Отметим, что использовать логическую символика для записи теорем следует исключительно при соблюдении норм такого использования. Мы неоднократно писали об этом (например, в [6]).

8. О неформальном введении логических понятий. Мы специально не приводили определения понятий «импликация предложений с переменными», «контрпример» и т. п. Считаем, что на уроках алгебры в 8 классе достаточно ограничиться примерами. Позже можно уточнить эти понятия. Однако давать определения этих понятий, как это сделано, например, в учебном пособии [2], считаем возможным только при углублённом изучении этих вопросов на курсе по выбору логической тематики.

В заключение ещё раз отметим, что формировать логическую грамотность учащихся полезно и возможно при изучении любой темы школьного курса математики.

Список источников

1. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб-

ник для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2022. 287 с.

2. Тимофеева И.Л., Сергеева И.Е., Лукьянова Е.В. Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования. М.: Издательский центр «Академия», 2011. 240 с.

3. Тимофеева И.Л., Сергеева И.Е. О логическом оперировании математическими теоремами и определениями // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе: материалы международной научно-практической интернет-конференции, Москва, МПГУ, 2022 г. / под ред. Л.Л. Босовой, Д.И. Павлова [Электронное издание сетевого распространения]. Москва: МПГУ, 2022. С. 593–602.

4. Тимофеева И.Л., Хредченко О.В. О логических знаниях и умениях, формируемых при изучении теорем разной логической структуры в углублённом курсе алгебры для 8 класса // Материалы VII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике» (к 80-летию со дня рождения В.А. Гусева), Москва, 18–19 ноября 2022 г. Москва: МПГУ, 2022.

5. Тимофеева И.Л. Размышления об обратных теоремах и кванторах // Математика в школе. 2005. № 5. С. 64–68.

6. Тимофеева И.Л. Некоторые замечания об использовании логической символики при обучении математике // Математика в школе. 2005. № 7. С. 53–56.

Статья поступила в редакцию:	27.06.23.
Принята к публикации:	15.08.23.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ШКОЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

ON MATHEMATICAL MODELS ON THE EXAMPLE OF SOLVING SOME SCHOOL PROBLEMS OF PROBABILITY THEORY

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_24

О.В. Максимова, к.т.н, доцент,
Университет МИСИС, Москва,
o-maximova@yandex.ru

O.V. Maksimova, PhD (Technic), associate
Professor, University MISIS, Moscow,
o-maximova@yandex.ru

Аннотация: в статье речь идёт о возникающих у школьников сложностях построения математической модели при реализации классического подхода в вероятностных задачах. В рамках школьного курса и на ЕГЭ именно такие задачи вызывают затруднения. Предложен подход к формированию навыков построения разных математических моделей учащимися при решении одной и той же вероятностной задачи. Рассмотрены задачи, в том числе, авторские, которые позволяют поэтапно вводить упрощение математической модели на примере реализации классического подхода расчёта вероятности

Abstract: the article is devoted to the difficulties of constructing a mathematical model that school-children face when implementing the classical approach in probabilistic problems. In the school course, and often on the exam, it is precisely such tasks that cause difficulties. An approach is proposed to the formation of skills for building different mathematical models by students when solving the same probabilistic problem. Problems, including author's ones, are considered, which allow to gradually introduce a simplification of the mathematical model on the example of the implementation of the classical approach to calculating probability

Ключевые слова: ЕГЭ по математике, вероятность, классическое определение вероятности, пространство элементарных исходов

Keywords: USE in mathematics, probability, classical definition of probability, elementary events

© О.В. Максимова, 2023

*Детский рисунок – домик с трубой и дымом,
круглое солнце с лучами, ... – модель окружающего мира,
где ухвачены главные черты восприятия ребенка.*

Хургин Я.И. «Да, нет или может быть...»

Введение

За годы проведения ЕГЭ по математике сложилось устойчивое негативное отношение к задачам по теории вероятностей тестовой части. В первую очередь, это наблюдается со стороны самих абитуриентов, которым кажется, что любая задача этого раздела решается путём де-

ления подходящих двух чисел из условия задачи для получения «хорошего» ответа [1]. Ситуация стала немного меняться, когда ответ к такой задаче методом подбора угадать стало сложнее, так как согласно условию, его нужно округлить, к примеру, до сотых [2]. В 2004–2008 гг. вышел ряд учебных пособий по теории

вероятностей, которые дополнили существующие учебники алгебры [3–5]. Это позволило создать фундамент для изучения основ теории вероятностей в школьном курсе. При этом тенденция сведения элементарной теории вероятностей к комбинаторике продолжается вопреки вызовам современности идти намного дальше «игровых задач» [6, 7]. Современная физика, социология, психология, экономика и др. науки развиваются на вероятностно-статистической базе.

Сложность и объём материала, к примеру, в техническом университете, подразумевают хорошее владение основами теории вероятностей. В то же время, в преподавательском сообществе после многих лет проведения ЕГЭ выработалось устойчивое недоверчивое отношение к результатам обучения основам теории вероятностей в школьном курсе. Поэтому изучение этого курса в рамках университетской программы начинается заново с тех же разделов, что и в школе [7, 8]. Часто это связано с тем, что после решения вероятностных задач из ЕГЭ у абитуриентов плохо формируется соответствие (и даже необходимость этого соответствия): практическая задача – математическая модель задачи. А именно построению математической модели при решении вероятностных задач целесообразно придавать большее внимание, тем самым сокращая разрыв и стресс при начале изучения соответствующего университетского курса [6, 9].

Целью настоящей статьи служит разработка подхода для формирования у школьников понятия математической модели в условиях решений вероятностных задач. Построение разных математических моделей проводится на примере применения классического подхода. Приобретённые навыки помогут учащимся далее

в университетском / школьном курсе, например, при построении гипотез для применения формулы полной вероятности и при расчётах условной вероятности.

Методы и материалы

Напомним необходимую терминологию классического подхода расчёта вероятности, на которой целесообразно фокусироваться при решении задач [3].

Элементарные события, шансы которых одинаковы, называются *равновозможными*. Элементарные события, при которых наступает событие A , называются элементарными событиями, *благоприятствующими* событию A .

Классический подход. Если события опыта равновозможные, то вероятностью события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих появлению события A , к числу всех возможных исходов, то есть

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \quad (1)$$

Существенным условием применения классического подхода служит *равновозможность исходов* и *их конечное число*. Известно (из истории), что пренебрежение равновозможностью исходов приводит к ошибочным результатам расчёта вероятности событий [9, 10]. В основном курсе теории вероятностей вводится понятие вероятностного пространства, которое является *математической моделью случайного явления* [11]. И именно оно служит основным объектом изучения теории вероятностей. Для школьников в коротком курсе это понятие обходится стороной (ввиду его сложности, поэтому нет необходимости его обсуждать в рамках школьного курса) и сводится к построению пространства элементарных событий Ω . Как раз этому этапу далее мы уделим внимание. Именно изучение разных ва-

риантов и анализ правильности построения пространства Ω при применении классического подхода даст возможность школьнику учиться строить и понимать, что такое математическая модель случайного явления.

Результаты и обсуждение

Часто при решении вероятностной задачи школьник даже не замечает, что привёл какое-то решение, которое основано на неподходящем к этой задаче готовом шаблоне. И если численный результат оказался неверным, он пеняет на плохую информацию в шаблоне или просто невезение, так как в этом случае его интуиция не сработала. Нередко он теряет интерес к задаче или пытается подвести к правильному ответу, перебирая различные комбинаторные варианты для применения классического подхода. Если в результате будет подобран правильный вариант, то лишь в некоторых случаях он попытается его проанализировать (чем этот ответ отличается от предыдущего), и сделать выводы. Ситуация хуже, когда результат изначально окажется близким по значению (или даже совпадающим после округления), но построенная модель непригодна для классического подхода, при этом она случайно приводит к близкому ответу в условиях конкретных числовых данных.

Рассмотрим формирование понимания математической модели у школьников на примере задач с рассадками. Обсуждается следующая задача.

Задача 1. *За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.*

В большинстве интернет-ресурсах¹ предлагается такое решение.

Пусть первой за стол сядет девочка, рядом с ней есть два места, на каждое из которых может сесть 8 человек, из которых только одна девочка. Таким образом, вероятность, что девочки будут сидеть рядом, равна $2/8 = 0,25$.

Это решение, как правило, не вызывает с первого взгляда у учащихся вопросов. Но затем рассматривается другая задача (см. далее задачу 2), для которой такие рассуждения не подходят.

Задача 2. *В ряд на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.*

Возникает вопрос, как определить в процессе решения, в каком случае и как можно рассуждать? Предварительно изучив основы комбинаторики, обычно ставится вопрос подсчёта вариантов рассадок всех 9 человек, а при расчёте вероятности в приведённом выше решении вдруг учитывается лишь положение одного человека. Можно пояснить учащимся, почему мы так поступаем, в общем виде, а можно сосредоточиться на построении модели и условиях применения классического подхода, делая необходимым самостоятельную проверку правильности подобранной математической модели для этого подхода. Это даёт возможность самоконтроля, поиска наиболее коротких путей и укрепления навыков к решению других задач.

Для достижения поставленной цели предлагается придерживаться следующего алгоритма:

- 1) сформировать вид элементарного события (исход одного эксперимента),
- 3) построить (описать) пространство элементарных событий Ω ,

¹ Например, <https://ege.sdangia.ru/problem?id=325904> (дата обращения 10.07.2023).

3) проверить, являются ли события равновероятными и конечно ли Ω ,

4) подсчитать $n(\Omega)$, $n(A)$ и воспользоваться формулой (1).

Далее предлагается с учащимися рассмотреть на примерах этих двух задач последовательно «укорачивающиеся» математические модели, которые можно построить для расчёта искомой вероятности.

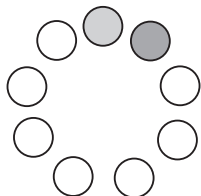


Рис 1. Рассадка двух девочек и семи мальчиков в задаче 1

Вернёмся к задаче 1 и рассмотрим несколько вариантов решений.

Решение 1.

1) Пусть рассматриваются все участники рассадки (рис. 1). Тогда элементарное событие можно описать как {определённая рассадка всех 9-ти человек за круглый стол}.

2) $\Omega = \{\text{все возможные рассадки всех 9-ти человек за стол}\};$

$A = \{\text{две девочки будут сидеть рядом}\}.$

3) Отметим, что Ω – конечно, а исходы равновозможны (так как каждая рассадка из всех 9-ти человек имеет одну возможность реализации). Значит, можно применять классический подход к расчёту $P(A)$.

4) Тогда общее число всевозможных расстановок есть число перестановок $n(\Omega) = 9!$

Чтобы подсчитать число благоприятствующих событий, когда две девочки располагаются рядом (отмечены цветом на рисунке 1), необходимо рассчитать число пересадок с учётом их положения. Для этого подсчёт разбивается на три этапа: – число способов рассадки мальчиков

с фиксированной рассадкой девочек (7!);

- число способов рассадки двух девочек вместе в круговой рассадке (9, так как они могут занимать места 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., 8 и 9, 9 и 1);
- число способов пересадки девочек относительно друг друга (2!).

Тогда, применяя принцип умножения в комбинаторике, получаем

$$n(A) = 7! \cdot 9 \cdot 2!.$$

Воспользуемся формулой (1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7! \cdot 9 \cdot 2!}{9!} = \frac{9 \cdot 2}{8 \cdot 9} = 0,25.$$

О т в е т: $P(A) = 0,25$.

В ходе решения становится понятно, что можно попробовать построить упрощённую математическую модель, не рассматривая рассадку мальчиков, так как в итоговом подсчёте число их возможных пересадок сократилось. Поэтому предлагается рассмотреть другую математическую модель при решении задачи.

Решение 2.

1) Пусть рассматриваются положения только девочек (Д1 и Д2) в рассадке. Попробуем рассмотреть неупорядоченную рассадку. Тогда элементарное событие можно описать как {определённая неупорядоченная рассадка двух девочек на 9 мест}.

2) $\Omega = \{\text{все возможные неупорядоченные рассадки двух девочек на 9 мест}\};$

$A = \{\text{две девочки будут сидеть рядом}\}.$

3) Отметим, что Ω – конечно, исходы будут равновозможны (так как каждая фиксированная неупорядоченная рассадка двух девочек имеет ровно две возможности реализации Д1, Д2 и Д2, Д1). Значит, можно применять классический подход к расчёту $P(A)$.

4) Тогда общее число всевозможных расстановок девочек есть число способов выбора двух мест из 9: $n(\Omega) = C_9^2$.

Чтобы найти число благоприятствующих событий, нужно подсчитать число способов выбора мест для двух девочек с учётом фиксированного порядка их рассадки: места 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., 8 и 9, 9 и 1. Таких положений $n(A) = 9$.

Воспользуемся формулой (1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{C_9^2} = \frac{9 \cdot 2}{8 \cdot 9} = 0,25.$$

О т в е т: $P(A) = 0,25$.

В ходе этого решения у учащихся должна возникнуть мысль, что, видимо, можно построить ещё более короткую математическую модель, не учитывая порядок рассадки девочек относительно друг друга (так как в итоговом подсчёте число их возможных пересадок относительно друг друга сократилось), а также место их посадки в круге. Поэтому предлагается рассмотреть другую модель при решении задачи.

Р е ш е н и е 3.

1) Пусть девочка Д1 заняла фиксированное положение (светло-серый круг на рис. 2). Рассмотрим положение девочки Д2 в рассадке. Тогда каждое элементарное событие можно описать как {определённое положение девочки Д2 среди 8 возможных}.

2) $\Omega = \{\text{все возможные положения девочки Д2 среди 8 возможных}\}$;

$A = \{\text{девочка Д2 будет сидеть рядом с Д1}\}$.

3) Отметим, что Ω – конечно. Покажем, что исходы будут равновозможны. При каждом положении девочки Д1 имеются одинаковые возможности для положения девочки Д2, всего таких возможностей 8.

4) Тогда общее число всевозможных рассадок девочки Д2 равно $n(\Omega) = 8$.

Чтобы подсчитать число благоприятствующих событий, нужно найти число способов рассадки девочки Д2 рядом с Д1 (рис. 2).

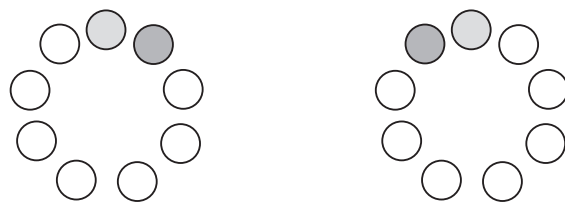


Рис 2. Варианты рассадки двух девочек при решении 3 задачи 1

Понятно, что число таких способов $n(A) = 2$.

Воспользуемся формулой (1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

О т в е т: $P(A) = 0,25$.

Отметим, что реализовать пункт 1) этого решения возможно лишь потому, что при каждом фиксированном положении Д1 у девочки Д2 ровно 2 возможности сесть рядом. Учащимся становится понятно, что принципиально важным был факт рассадки по кругу, когда у девочки Д2 были равные возможности относительно любого положения девочки Д1. Далее, рассмотрим задачу 2 без круговой рассадки и покажем различия в построении математических моделей с возможностью применения классического подхода.

Задача 2. В ряд на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.



Рис. 3. Рассадка в ряд двух девочек и семи мальчиков в задаче 2

Р е ш е н и е 1.

1) Пусть рассматриваются все участники рассадки. Тогда каждое элементарное событие можно описать как {определённая рассадка всех 9-ти человек в ряд}.

2) $\Omega = \{\text{всевозможные рассадки всех 9-ти человек в ряд}\};$

$A = \{\text{две девочки будут сидеть рядом}\}.$

3) Отметим, что Ω – конечно, а исходы равновозможны (каждая рассадка из всех 9-ти человек имеет одну возможность реализации).

4) Общее число всевозможных рассадок есть число перестановок $n(\Omega) = 9!$

Чтобы подсчитать число благоприятствующих событий, когда две девочки располагаются рядом (отмечены цветом на рисунке), необходимо рассчитать число пересадок с учётом их положения. Для этого подсчёт разбивается на три этапа:

- число способов пересадок мальчиков с фиксированной рассадкой девочек (это число равно 7!);
- число способов рассадки двух девочек совместно в круговой рассадке (таких способов ровно 8, так как две девочки могут занимать места 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., 8 и 9);
- число способов пересадки девочек относительно друг друга (2!).

Тогда, применяя принцип умножения в комбинаторике, получаем

$$n(A) = 7! \cdot 8 \cdot 2!.$$

Воспользуемся формулой (1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 2!}{9!} = \frac{2}{9}.$$

О т в е т: $P(A) = \frac{2}{9}.$

В ходе решения также становится понятно, что можно попробовать построить упрощённую математическую модель без учёта рассадок мальчиков. Поэтому предлагается рассмотреть более короткий подход к решению задачи.

Р е ш е н и е 2.

1) Пусть рассматриваются положения только двух девочек Д1 и Д2 в рассадке (серым цветом отмечены на рис. 3). Тогда каждое элементарное событие можно опи-

сать как {определённая неупорядоченная рассадка *двух девочек* на 9 мест}.

2) $\Omega = \{\text{всевозможные неупорядоченные рассадки двух девочек на 9 мест}\};$

$A = \{\text{две девочки будут сидеть рядом}\}.$

3) Отметим, что Ω – конечно, исходы будут равновозможны, каждая *фиксированная* неупорядоченная рассадка двух девочек имеет ровно две возможности реализации (Д1, Д2) и (Д2, Д1).

4) Тогда общее число всевозможных рассадок девочек есть число способов выбора двух мест для девочек из 9: $n(\Omega) = C_9^2.$

Чтобы подсчитать число благоприятствующих событий, нужно понять, сколькими способами две девочки могут сидеть рядом на этих 9 местах. Число таких способов – число способов выбора мест для двух девочек без учёта их порядка рассадки: места 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., 8 и 9, таких положений $n(A) = 8.$

Воспользуемся формулой (1):

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{C_9^2} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 9} = \frac{2}{9}.$$

О т в е т: $P(A) = \frac{2}{9}.$

Здесь мы подходим к желанию учащихся построить самую короткую модель, зафиксировав положение девочки Д1, как при решении задачи 1 (рис. 4).



Рис. 4. Варианты рассадки двух девочек задачи 2

Но предлагаем подумать, будут ли в этом случае у девочки Д2 одинаковые шансы сесть рядом с Д1, что ясно продемонстрировано на рис. 4 (ответ: нет, так как если Д1 заняла крайнее положение слева, то у Д2 одна возможность, а если Д1 заняла место внутри, то у Д2 есть две возможности сесть рядом).

После базовой постановки задачи и поиска наиболее простых моделей, можно предлагать более сложные раскладки и вопросы для расчёта вероятностей, таких как: между двумя девочками будет сидеть один мальчик, обе девочки не будут сидеть рядом, присутствие трёх девочек в раскладке и т.д. [12, варианты 19, 20, 31, 32]. Для закрепления учащимися данной темы далее приведены авторские задачи.

Авторская задача 1. Десять хомяков и два зельюка решили исповедовать здоровый образ жизни. Для этого они выстроились в очередь на беговое колесо. Известно, что если два зельюка окажутся рядом друг с другом или через одного хомяка, то они дерутся, а хомяки миролюбивы.

А) Сколькими способами все животные могут распределиться в очереди, чтобы не было драк? (Довести решение только до формулы.)

Б) После пробежки животные расселись по кругу, чтобы спеть гимн перед приёмом здоровой пищи. Найти вероятность, что начнётся драка.

О т в е т: А) $12! - 10! \cdot 11 \cdot 2! \cdot 10 \cdot 2!$;

Б) $\frac{4}{11}$.

Авторская задача 2. Восемь шарьков и две влюблённые морские свинки решили исповедовать здоровый образ жизни. Они выстроились в очередь за принесённым им салатом. Известно, что если две влюблённые свинки окажутся на расстоянии более чем один шарек, то они плачут, а если окажутся вместе, то забудут про еду.

А) Сколькими способами все животные могут распределиться в очереди, чтобы свинки не плакали и поели? (Довести решение только до формулы.) После обеда животные расселись по кругу рассказывать сказки.

Б) Найти вероятность, что свинки забудут

про еду, либо будут плакать во время рассказа.

О т в е т: А) $8! \cdot 8 \cdot 2!$;

Б) $\frac{7}{9}$.

Примечание: названия некоторых персонажей в авторских задачах взяты из книги Льюиса Кэрролла [12].

Дискуссия

Рассмотренный подход к построению разных математических моделей позволяет понять учащимся, что:

- приведённый в литературных источниках самый простой рецепт не является часто единственно возможным,
- чтобы найти наиболее короткую математическую модель, иногда приходится строить более сложные модели и путём поиска элементов, которые возможно не учитывать, её упростить.

Важным продолжением такого разговора с учащимися служит формирование разных подходов к расчёту условной вероятности и построению гипотез при применении формулы полной вероятности (как правило, уже в университетском курсе). Приведём пример, когда формирование навыков построения разных математических моделей существенно упрощает поиск, например, условной вероятности.

Задача 3. Мастер разложил 10 деталей, 6 из которых нестандартные. Мастер проверяет детали одну за другой. Найти вероятность, что вторая деталь будет стандартной, при условии, что первая была нестандартной.

Решение. Пусть $A = \{\text{вторая деталь стандартная}\}$, $B = \{\text{первая деталь нестандартная}\}$. Требуется найти $P(A|B)$.

Отметим, что вместо применения известной формулы условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

где $P(B) \neq 0$, можно построить пространство элементарных исходов с учётом знания, что первая деталь была нестандартной, и тем самым упростить решение. Приведём основные этапы такого решения.

1) $\Omega = \{\text{всевозможные детали, изъятые вторыми по очереди}\}$.

2) Так как Ω – конечно, а исходы равно-возможны (на втором месте изначально может оказаться любая деталь), то можно применять классический подход к расчёту:

$$P(A|B) = \frac{n(A|B)}{n(\Omega)}.$$

3) Очевидно, что $n(\Omega) = 9$, $n(A|B) = 4$.

$$\text{Тогда } P(A|B) = \frac{n(A|B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{О т в е т: } P(A|B) = \frac{4}{9}.$$

В демо-версиях ЕГЭ-2022 появились задачи, которые были восприняты учащимися как более сложные [13, 7]. Основная проблема этого лежит в плоскости подбора модели. Разберём одну такую задачу.

Задача 4 ([13], вариант 35). В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвёртый раунд?

Формирование навыка построения разных моделей, в том числе для расчёта условной вероятности, как было отмечено в решении задачи 3, позволит учащимся догадаться построить пространство элементарных исходов с учётом знания, что команда А выиграла первые три партии.

Р е ш е н и е. Приведём основные этапы.

Пусть $C = \{\text{команда А выигрывает в четвёртой игре}\}$, $B = \{\text{команда А выигрывает в трёх играх}\}$. Надо найти $P(C|B)$.

Очевидно, что необходимо расставить команды по силе. При этом известно, что перед командой А по силе стоит как минимум три команды (рис. 5).



Рис. 5. Расстановка четырёх команд по силе в задаче 4

Тогда построение пространства элементарных исходов будет основано на положении пятой команды для четвёртой игры.

1) $\Omega = \{\text{всевозможные положения пятой по участию в игре команды по силе}\}$.

2) Ω – конечно, а исходы равно-возможны: пятая команда, отмеченная вертикальной чертой на рисунке 6, может занимать по силе равновероятно одно из возможных оставшихся пяти мест.

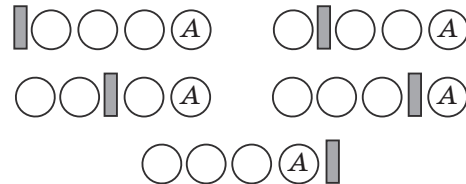


Рис. 6. Расстановка пяти команд по силе в задаче 4

Можно применять классический подход к расчёту:

$$P(C|B) = \frac{n(C|B)}{n(\Omega)}.$$

3) Очевидно, что $n(\Omega) = 5$.

Отметим, что $n(C|B)$ характеризует число способов расположения пятой команды, чтобы команда А выиграла четыре партии подряд. Тогда из рисунка выше понятно, что $n(C|B) = 4$.

$$\text{Тогда } P(C|B) = \frac{n(C|B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\text{О т в е т: } P(C|B) = 0,8.$$

При формировании навыков построения разных математических моделей в одной и той же задаче позволит учащимся находить подходы к решению и отходить от запоминания предлагаемых в открытом доступе готовых рецептов.

Заключение

Предложен подход к формированию навыков построения разных математических моделей учащимися при решении одной и той же вероятностной задачи. Рассмотрены задачи, в том числе авторские, которые позволяют поэтапно вводить упрощение математической модели на примере реализации классического подхода расчёта вероятности. В рамках школьного курса, и часто на ЕГЭ, именно такие задачи вызывают затруднения.

Приобретение навыков построения различных математических моделей даст возможность учащемуся:

- понимать, что для решения вероятностной задачи можно строить разные математические модели;
- вести самостоятельно поиск наиболее коротких путей, в том числе, к решению задач в других темах, таких как: условная вероятность, формула полной вероятности.

Список источников

1. Богомолова Е.П. От математической малограмотности к математическим компетенциям // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. 2015. № 3. С. 3–20. DOI 10.51314/2073-2635-2015-3-3-20.
2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Яценко. М.: Национальное образование, 2015. 272 с.
3. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоц-

кий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика. М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004. 256 с.

4. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. 5–9 кл. Электронное учебное пособие. М.: Дрофа, 2007.

5. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность. 5–11 кл.: учебное пособие. М.: Дрофа, 2008.

6. Бунимович Е.А., Тюрин Ю.Н., Булычев В.А., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Семёнов И.В., Яценко П.В. О теории вероятностей и статистике в школьном курсе // Математика в школе. 2009. № 7. С. 3–14.

7. Булычев В.А. Вероятность и статистика в школе: чему учим и что проверяем? // Математика в школе. 2023. № 6. С. 44–54.

8. Богомолова Е.П., Максимова О.В. Проблемы оценивания результатов ЕГЭ по математике // Alma Mater (Вестник высшей школы), 2014. № 9. С. 56–60.

9. Хургин Я.И. Да, нет или может быть...: Рассказы о стат. теории управления и эксперимента. – М.: Наука, 1983. 207 с.

10. Реньи А.А. Трилогия о математике / Пер. с венг. под ред. и с предисл. Б.В. Гнеденко. – М.: Мир, 1980. 376 с.

11. Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями. – М.: Издательский дом «МЭИ», 2013. 408 с.

12. Кэрролл Л. История с узелками: игры, головоломки, задачи, парадоксы: [перевод]. – М.: Центрполиграф, 2011. 155 с.

13. ЕГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Яценко. М.: Национальное образование, 2022. 224 с.

Статья поступила в редакцию	17.08.2023.
Принята к публикации	16.10.2023.

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

A UNIVERSAL PROBLEM-SOLVING METHOD OF CALCULATING THE DISTANCE BETWEEN SKEW LINES

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_33

У.А. Чернышева, канд. пед. наук, доцент,
Кубанский государственный университет
(филиал в г. Славянск-на-Кубани),
yakovleva_ulyana@mail.ru;

А.Н. Чернышев, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Кубанский государственный университет
(филиал в г. Славянск-на-Кубани),
tchernychov@mail.ru

U.A. Chernysheva, PhD (Pedagogy), associate
Prof., Kuban State University (branch in Slavyansk-
on-Kuban),
yakovleva_ulyana@mail.ru;

A.N. Chernyshev, PhD (Phys&Math), associate
Prof., Kuban State University (branch in Slavyansk-
on-Kuban),
tchernychov@mail.ru

Аннотация: в данной статье авторами предложен оригинальный, но в то же время простой и, главное, универсальный вариант применения координат и векторов к решению задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Описан алгоритм и приведены примеры его применения к решению задач. Статья также содержит методические рекомендации по выбору прямоугольной системы координат при решении стереометрических задач, в том числе задач профильного уровня Единого государственного экзамена по математике, координатно-векторным методом

Abstract: in this article, the authors proposed an original, but at the same time simple and, most importantly, universal version of the application of coordinates and vectors to the solution of the problems of calculating the distance between skew lines. The algorithm is described and examples of its application to the problems is given. The article also contains methodical recommendations on how to choose rectangular coordinate system for using coordinate-vector method of the solution stereometric problems, including problems of the profile level of the Unified State Exam in mathematics

Ключевые слова: стереометрические задачи, координатно-векторный метод, расстояние между скрещивающимися прямыми, Единый государственный экзамен по математике

Keywords: stereometric problems, coordinate-vector method, the distance between crossing lines, the Unified State Examination in Mathematics

© У.А. Чернышева, А.Н. Чернышев 2023

Среди многообразных задач стереометрии большой интерес представляют задачи на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Такие задачи широко представлены в контрольно-измерительных материалах для профиль-

ного уровня Единого государственного экзамена по математике (задание С2). Так, например, в 2016 году найти расстояние между скрещивающимися прямыми было предложено в вариантах 509, 512 основной волны; в 2017 году – в вариантах 401,

402 основной волны; в 2018 году – в варианте 751, 991 основной волны; в 2019 году – в вариантах 1 и 2 досрочной волны, вариантах 316, 324, 405, 409, 992 основной волны; в 2021 году – в вариантах 401, 402 основной волны; в 2022 году – в вариантах 1 и 2 досрочной волны; в 2023 году – в варианте Восток-2 основной волны [1].

Согласно спецификации контрольных измерительных материалов Единого государственного экзамена по математике задание С2 является заданием повышенного уровня сложности, и максимальный первичный балл, предусмотренный за выполнение этого задания – 3 [2]. В прилагаемых к заданиям критериях оценивания уточняется, что за получение обоснованного ответа в пункте б (а рассматриваемый тип задач содержится в пункте б), предусмотрено 2 первичных балла [3].

Однако, как показывает анализ результатов, школьники неохотно берутся за решение таких задач и недостаточно хорошо с ними справляются. Так, по данным Федерального института педагогических измерений (далее – ФИПИ), в 2023 году только 0,66% выпускников справились с задачей 13. Это наименьший процент, меньше даже, чем за 4-балльные задания 17 и 18 (задания высокого уровня сложности), где процент выполнения 3,7 и 1,7 соответственно [4].

Такой неутешительный результат не является удивительным, так как в школьных учебниках задачи данного типа представлены слабо. В единственном включённом на данный момент в федеральный перечень учебнике [6] по геометрии для 10–11 классов такие задачи можно пересчитать на пальцах одной руки. Это задачи: №№ 150, 194, 215, 292, 787. Так что у выпускников просто нет достаточной практики работы с подобными заданиями.

В методических рекомендациях для учителей, подготовленных ФИПИ, говорится: «Даже стандартная стереометрическая задача 13 у хорошо подготовленного и мотивированного участника экзамена занимает больше времени, чем, скажем, задача 15, которая требует объективно намного большего времени для обработки информации, иногда составления таблицы, применения нескольких алгоритмов и арифметических вычислений с многозначными числами. Можно предположить, что участник экзамена, выполняющий задание 15 и пропускающий задание 13 или выполняющий его с ошибкой, не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках. При хорошей подготовке решение задачи 13 занимает в 1,5–2 раза меньше времени, чем задача 15, и не больше, чем задача 14» [4, 5], и далее: «Очень обидно видеть, как трудно и тяжело школьники решают задачи, которые можно было бы решить очень кратко, применяя соответствующий аппарат» [5].

Действительно, поиск решения таких задач, как и других задач стереометрии, классическими методами осложнён отсутствием единого алгоритма, требует хорошего знания широкого диапазона теорем школьного курса и развитого пространственного воображения.

Между тем, существует с десяток различных способов решения таких задач: метод ортогонального проецирования (метод «экрана»), метод объёмов, векторный метод и другие (см., например, [7, 8]). Причём для решения некоторых задач наиболее эффективными становятся одни методы, а при решении других задач – иные. Это определяет ещё одну трудность, которая возникает у школьника в процессе поиска решения задачи – выбор метода. Встаёт проблема поиска

«панацей» – универсального метода, который гарантированно даст результат, если всего лишь следовать чёткому алгоритму. При этом желательно, чтобы этот метод был достаточно простым, не требовал знаний, сверх полученных в школьном курсе геометрии, высокоразвитого пространственного мышления, а также не был бы слишком громоздким.

Решение стереометрических задач классическими методами, как правило, начинается с построения искомого объекта, обоснования этого построения, а затем уже проведения необходимых вычислений. Чаще всего загвоздка заключается как раз в построении, вычисления же не представляют для учащихся большой трудности. В задачах рассматриваемого типа, например, требуется построить либо общий перпендикуляр для двух скрещивающихся прямых, чтобы затем вычислить его длину, либо построить или выделить на чертеже плоскость, проходящую через одну из прямых и параллельную другой, либо выделить или построить плоскость, перпендикулярную одной из прямых, а затем построить проекцию другой прямой на эту плоскость и т. д. Но построить, а тем более обосновать это построение, далеко не каждому школьнику под силу. Однако, пока не построишь, нечего будет вычислять.

Всем хорошо известно, что применение координатно-векторного метода помогает избежать трудностей, связанных с построением, и позволяет, минуя этот этап, сразу переходить к вычислениям. Суть метода заключается в том, что сначала к заданной фигуре присоединяют прямоугольную систему координат, затем вычисляют координаты нужных точек и векторов относительно этой системы, при необходимости находят уравнения фигур, например, плоскостей или прямых, и да-

лее, используя соответствующие формулы векторной алгебры и аналитической геометрии, вычисляют нужные углы и расстояния.

К решению задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми применяют разные модификации координатно-векторного метода, из которых, пожалуй, самыми распространёнными являются две, основанные на использовании скалярного произведения векторов [7, 8]. Суть их заключается в том, что нужное расстояние между прямыми определяют как длину их общего перпендикуляра MN : на основании условия ортогональности векторов составляют два векторных равенства; решая их в системе, находят координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, а затем и его длину. Отличие между двумя вариациями лишь в том, что в одном случае вводится система координат, а затем идёт работа с векторами и их координатами, а в другом – координаты не вводятся, идёт работа только с векторами.

Действительно, этот метод в обеих вариациях можно считать универсальным: он алгоритмичен и не требует «индивидуального подхода» к каждой отдельной задаче, поскольку для её решения школьнику достаточно владеть довольно ограниченным набором фактов о координатах и векторах, теорем планиметрии и стереометрии и умениями их применять. Однако, на наш взгляд, такой способ решения слишком громоздок.

Нам представляется более простым другой путь решения таких задач, также основанный на применении векторов и координат. Согласно определениям, которые приведены в учебнике [6], расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из них до плоскости, проходящей через другую прямую параллельно первой; расстояни-

ем между прямой и параллельной ей плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до этой плоскости. Таким образом, задачу вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми логично свести к задаче вычисления расстояния от точки до плоскости. При этом и общее уравнение плоскости, и формула для вычисления такого расстояния представлены в цитируемом учебнике. Так что применение такого метода, с одной стороны, посилено даже среднему ученику, с другой, соответствует пункту, присутствующему в указаниях по оцениванию развёрнутых ответов участников ЕГЭ для эксперта, который допускает возможность для ученика «использовать без доказательства математические факты и формулы, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников» [3].

Предлагаемый нами алгоритм таков. Пусть дано некоторое геометрическое тело (многогранник или круглое тело) и требуется найти расстояние между прямыми AB и CD .

1. Присоединяем к данному телу прямоугольную декартову систему координат (далее – ПДСК).

2. Рассматриваем плоскость γ , проходящую через любую из этих прямых, пусть для определённости через CD , параллельно другой прямой, в нашем случае AB , и составляем её уравнение.

3. Находим расстояние от любой точки прямой AB , пусть, например, это будет точка A , до плоскости γ по формуле

$$\rho(A, \gamma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки A , a, b, c, d – коэффициенты из уравнения плоскости γ (см. [6]). Это расстояние и будет искомым.

Дадим методические комментарии к каждому пункту алгоритма.

Во-первых, следует обратить внимание учеников на выбор ПДСК. На рисунках 1–9 представлены рекомендуемые варианты присоединения ПДСК к многогранникам и круглым телам.

В качестве координатной плоскости Oxy для большинства фигур удобно выбрать плоскость основания (рис. 1–8); для сферы (рис. 9) – любую её экваториальную плоскость. Поскольку ось аппликат Oz должна быть перпендикулярна плоскости Oxy , то для прямых призм естественно направить её вдоль бокового ребра, при этом в качестве начала координат выбрать одну из вершин основания (рис. 1–3); для пирамид и конусов ось Oz удобно направить вдоль высоты, начало координат при этом – центр основания (рис. 4–6, 8), для цилиндра – либо также, вдоль высоты, и началом координат будет служить центр основания (рис. 7а), либо вдоль образующей, а начало координат будет тогда в одной из точек окружности основания (рис. 7б); в случае сферы осью аппликат послужит ось сферы, перпендикулярная выбранной экваториальной плоскости (рис. 9).

Следует также обеспечить взаимную перпендикулярность оси абсцисс Ox и оси ординат Oy . В случае прямоугольного параллелепипеда, в частности куба, оси Ox и Oy направляем по рёбрам (рис. 1а). Такая же возможность есть и для прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, – в таком случае оси следует пустить по катетам прямоугольного треугольника-основания. Если же в основании прямой четырёхугольной призмы будет ромб, оси Ox и Oy следует направить по диагоналям основания (рис. 1б). Для правильной четырёхугольной пирамиды оси Ox и Oy либо содер-

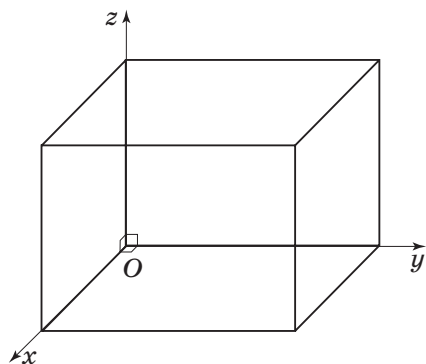


Рис. 1а

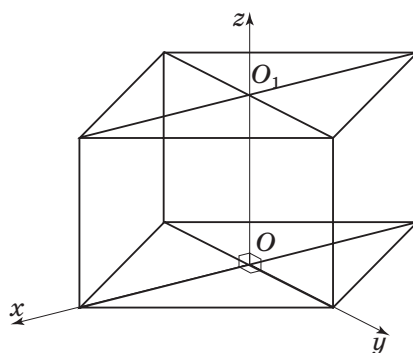


Рис. 1б

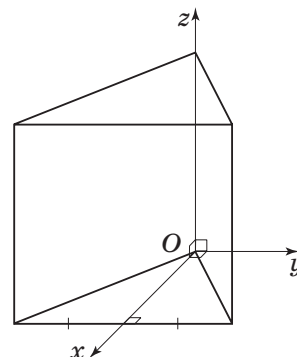


Рис. 2а

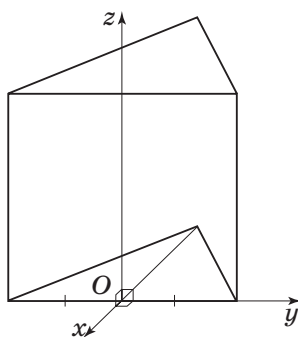


Рис. 2б

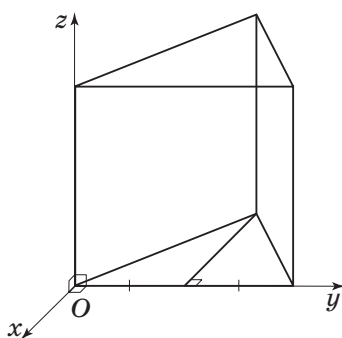


Рис. 2в

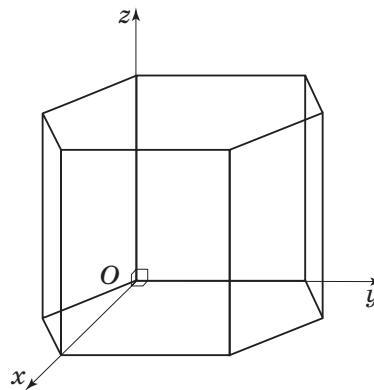


Рис. 3

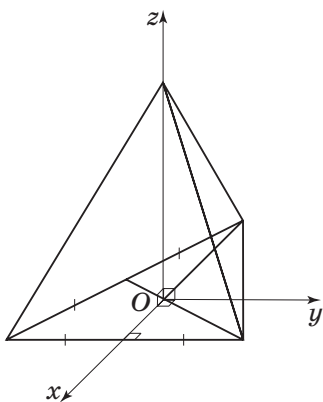


Рис. 4

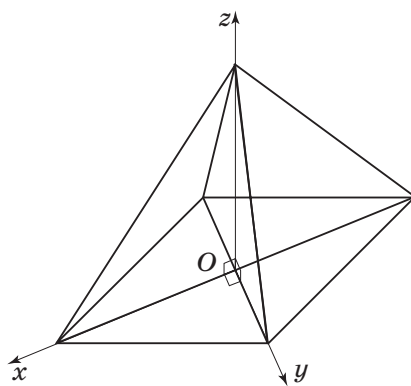


Рис. 5а

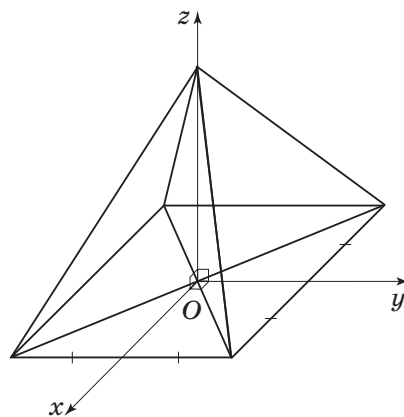


Рис. 5б

жат диагонали основания (рис. 5а), либо параллельны рёбрам основания (5б). Первый вариант возможно использовать также для пирамиды, основанием которой служит ромб, а второй – для пирамиды, в основании которой – прямоугольник.

Как можно задать направления осей

Ox и Oy для правильной шестиугольной призмы, показано на рис. 3. В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Поэтому для таких многогранников одну ось логично направить вдоль одного из рёбер основания, а другую – в направлении ме-

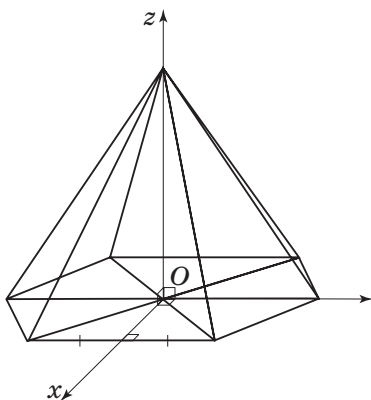


Рис. 6

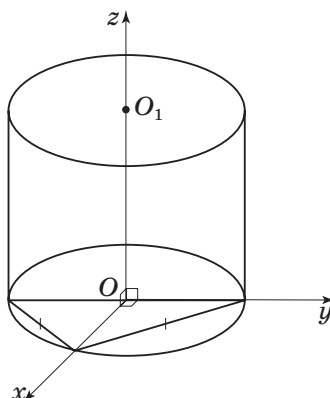


Рис. 7а

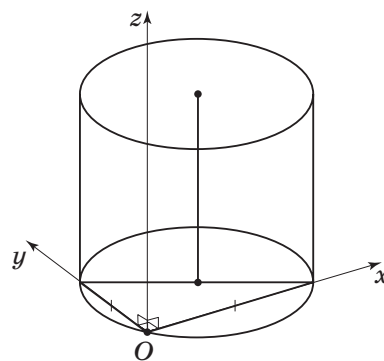


Рис. 7б

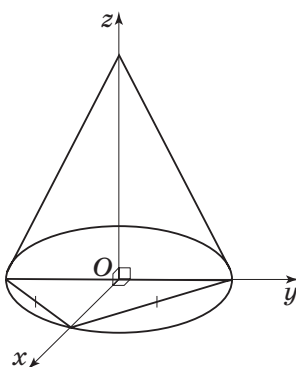


Рис. 8

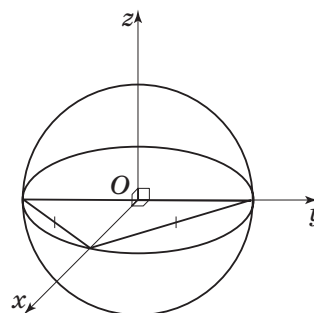


Рис. 9

дианы (она же является высотой), проведенной к этому ребру. При этом возможны различные варианты, представленные на рисунках 2а, 2б, 2в. Та же идея используется для правильной треугольной пирамиды (рис. 4) и правильной шестиугольной пирамиды (рис. 6).

Для круглых тел одну из осей можно направить по некоторому диаметру основания (в случае сферы речь идет об экваториальной плоскости), а вторую — по высоте равнобедренного треугольника, основанием которого служит этот диаметр, а вершина лежит на окружности основания (рис. 7а, 8, 9). В случае цилиндра оси Ox и Oy можно направить по сторонам некоторого угла, вписанного в окружность основания и опирающегося на диаметр (рис. 7б).

Разумеется, эти рекомендации можно применить не только к рассматриваемому типу задач, но и к любым другим, решаемым координатным методом.

Следующий шаг заключается в составлении уравнения плоскости. Строить каким-либо образом эту плоскость (например, её следы на гранях), а тем более обосновывать построение, не требуется. Достаточно, руководствуясь исключительно соображениями наглядности, схематично изобразить её на чертеже, например, овалом, чтобы было лишь видно, через какие точки она проходит и в каком направлении.

Далее нужно составить уравнение плоскости. В самом простом случае, когда плоскость задана тремя точками, для составления её уравнения требуется под-

ставить поочерёдно координаты этих трёх точек вместо x, y, z в искомое уравнение плоскости и решить полученную систему уравнений относительно неизвестных a, b, c . Учитывая тот факт, что уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ определяется с точностью до пропорциональных коэффициентов, коэффициент d принимаем равным 1 (или другому удобному для данного конкретного случая числу, не равному 0), если плоскость не проходит через начало координат; и равным 0, если проходит.

Однако в задачах на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми чаще всего плоскость определяется по-другому. Эта плоскость проходит через одну из скрещивающихся прямых и параллельна другой. Поэтому её можно задать двумя точками, лежащими на первой прямой и направлением, определяемым второй прямой. При этом нетрудно получить координаты ещё одной (третьей) точки, лежащей в этой плоскости и свести задачу к рассмотренному выше простейшему случаю. При этом бояться выхода «за границы» заданного в условии тела, не стоит, поскольку, напоминаем, точного построения следов плоскости этот метод не требует. Проиллюстрируем данную идею подробнее.

Пусть прямые AB и CD скрещиваются (рис. 10). Найти расстояние между ними.

Рассмотрим плоскость CDP (обозначим её γ), где точка $P(x, y, z)$ такова, что $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}$. Тогда плоскость γ будет параллельна прямой AB (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Пусть данные точки имеют следующие координаты: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3), D(d_1, d_2, d_3)$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3),$$

$$\overrightarrow{CP}(x - c_1, y - c_2, z - c_3).$$

Учитывая, что $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}$, получим:

$$x = b_1 - a_1 + c_1,$$

$$y = b_2 - a_2 + c_2,$$

$$z = b_3 - a_3 + c_3.$$

Теперь можно составить уравнение плоскости γ традиционным путём, используя координаты трёх её точек C, D и P .

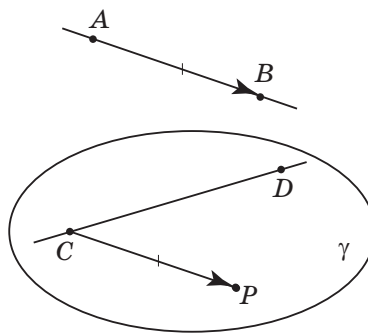


Рис. 10

В заключение продемонстрируем применение предложенного нами алгоритма для решения задач.

Задача 1 (прототипом данной задачи является задача № 642348 [1]). Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, в основании которой лежит ромб $ABCD$ со стороной 10. Известно, что $AC = 10, SB = 20$, а ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние между прямыми AC и SB .

Решение. Так как $ABCD$ – ромб, то $BD \perp AC$. Пусть K – точка пересечения диагоналей основания (рис. 11). По свойству диагоналей параллелограмма

$$AK = \frac{1}{2} AC = 5.$$

Треугольник AKB прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}.$$

Тогда $DB = 10\sqrt{3}$. Действуя аналогично в отношении прямоугольного треугольника SDB , будем иметь:

$$SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{20^2 - (10\sqrt{3})^2} = 10.$$

$$E_1(\sqrt{3}, 1, 1), D_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

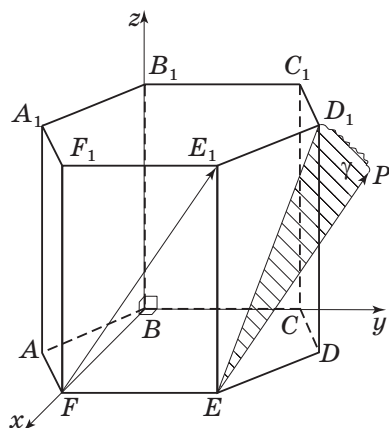


Рис. 12

Так как ED_1 лежит в плоскости DED_1 , а FE_1 пересекает эту плоскость в точке $E_1 \notin ED_1$, то прямые ED_1 и FE_1 скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых). Из определения скрещивающихся прямых следует: $\rho(ED_1, FE_1) = \rho(F, \gamma)$, где γ – плоскость, которая проходит через ED_1 параллельно FE_1 .

Пусть $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{FE_1}$, тогда $P(x, y, z) \in \gamma$. Найдём координаты точки P . $\overrightarrow{BP}(x - \sqrt{3}, y - 1, z - 0) = \overrightarrow{FE_1}(0, 1, 1)$, отсюда $x = \sqrt{3}$; $y = 2$; $z = 1$. Таким образом, $P(\sqrt{3}, 2, 1)$.

Уравнение плоскости γ будем искать в виде $ax + by + cz + d = 0$. Учитывая, что $E, D_1, P \in \gamma$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b + d = 0, \\ \sqrt{3}a + 3b + 2c + 2d = 0, \\ \sqrt{3}a + 2b + c + d = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, будем иметь: $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}b$; $c = -b$; $d = 0$ (это означает, что плоскость γ проходит через начало коор-

динат B , хотя по рисунку это не очевидно). Пусть $b = -\sqrt{3}$. Тогда $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, а уравнение плоскости γ имеет вид:

$$x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0.$$

Воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до плоскости. Будем иметь:

$$\rho(E, \gamma) = \frac{|1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Итак, } \rho(ED_1, FE_1) = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Задача 3 (прототипом данной задачи является задача № 520659 [1]). Образующая конуса с вершиной S равна 5. На окружности основания отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$, AC – диаметр этой окружности. Точка M – середина отрезка SC . Найдите расстояние между прямыми AM и SB , если $AC = 8$.

Р е ш е н и е. Пусть O – центр окружности основания. Тогда $AO = OC$ (рис. 13).

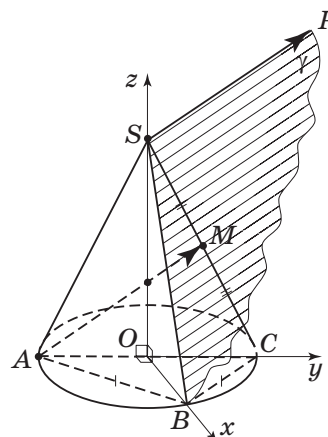


Рис. 13

Так как треугольник ABC равнобедренный, то его медиана BO является высотой. Тогда $BO \perp OC$. Треугольник ASO прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 3.$$

Присоединим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$: $Ox \uparrow \overline{OB}$, $Oy \uparrow \overline{OC}$, $Oz \uparrow \overline{OS}$. Относительно этой системы координат $A(0, -4, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $S(0, 0, 3)$, $M(0, 2, 1,5)$.

Так как AM лежит в плоскости ASC , а BS пересекает эту плоскость в точке $S \notin AM$, то прямые AM и BS скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых). Из определения скрещивающихся прямых следует: $\rho(AM, BS) = \rho(A, \gamma)$, где γ – плоскость, которая проходит через BS параллельно AM .

Пусть $\overline{SP} = \overline{AM}$, тогда $P(x, y, z) \in \gamma$. Найдём координаты точки P .

$$\begin{aligned}\overline{SP}(x-0, y-0, z-3) &= \\ &= \overline{AM}(0-0, 2+4, 1,5-0),\end{aligned}$$

отсюда $x = 0$; $y = 6$; $z = 4,5$. Таким образом, $P(0, 6, 4,5)$.

Уравнение плоскости γ будем искать в виде $ax + by + cz + d = 0$. Учитывая, что $B, S, P \in \gamma$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a + d = 0, \\ 3c + d = 0, \\ 6b + 4,5c + d = 0. \end{cases}$$

Так как $O \notin \gamma$, то $d \neq 0$. Положим $d = -12$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a - 12 = 0, \\ 3c - 12 = 0, \\ 6b + 4,5c - 12 = 0. \end{cases}$$

Получим: $a = 3$, $b = -1$, $c = 4$. Таким образом, $\gamma: 3x - y + 4z - 12 = 0$.

Воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до плоскости. Будем иметь:

$$\rho(A, \gamma) = \frac{|3 \cdot 0 - 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Итак, } \rho(AM, BS) = \frac{8}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{8}{\sqrt{26}}.$$

Список источников

1. Гушин Д.Д. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. Варианты. URL: <https://ege.sdamgia.ru/methodis> (дата обращения 20.06.2023).

2. Спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2023 году Единого государственного экзамена по математике, профильный уровень // Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. Демоверсии, спецификации, кодификаторы: Единый государственный экзамен по математике в 2023 г.. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory# (дата обращения 20.06.2023).

3. Яценко И.В., Высоцкий И.П., Семёнов А.В., Трепалин А.С., Черняева М.А. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2023 года. Математика // Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. ЕГЭ. Для предметных комиссий субъектов РФ. – Москва, 2023. URL: https://doc.fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf/2023/matematika_mr_ege_2023.pdf (дата обращения 20.06.2023).

4. Яценко И.В., Высоцкий И.П., Семёнов А.В. Методические рекомендации для учителей, на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике // Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. ЕГЭ. Аналитические и методические материалы. – Москва, 2023. URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2023/ma_mr_2023.pdf (дата обращения 10.10.2023).

5. Яценко И.В., Высоцкий И.П., Семёнов А.В. Методические рекомендации для

учителей, на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2022 года по математике // Официальный сайт Федерального института педагогических измерений. ЕГЭ. Аналитические и методические материалы. – Москва, 2022. URL: <https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy> (дата обращения 20.06.2023).

6. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутусов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2013. 255 с.

7. В.И. Рыжик. О расстоянии вообще и рас-

стоянии между скрепляющимися прямыми в частности // Математика для школьников. 2008. № 2. С. 45–51. URL: <http://www.school.ioffe.ru/library/online/geometry/ryzhik/distance2.pdf> (дата обращения 20.06.2023).

8. А.Г. Корянов, А.А. Прокофьев. Многогранники: типы задач и методы их решения (типовые задания C2). URL: <https://alexlarin.net/ege/2013/C22013.pdf> (дата обращения 20.06.2023).

Статья поступила в редакцию: 28.06.2023.

Принята к публикации: 10.10.2023.

К ЮБИЛЕЮ ЖУРНАЛА!

Я работаю в журнале с марта 2021 года, т.е. два с половиной года. Мне нравится макет и оформление журнала: достаточно современно, но не слишком формально и официально. С большой теплотой я отношусь и к содержанию журнала.

Как в годы аспирантуры, так и сейчас при работе с редактурами, материалы «Математики в школе» вдохновляют и дарят новые идеи для внедрения в свою преподавательскую деятельность.

Хотелось бы, чтобы журнал был более экономически доступен для учителей в регионах. Возможно, помогут скидки для авторов статей на подписку или гранты для школ. В этой ситуации большим плюсом является возможность купить на сайте издательства нужные статьи отдельно.

В перспективе необходимо уделять больше внимания молодому поколению педагогов, которое ориентировано на Интернет и соцсети. Например, неплохо было бы создать Телеграм-канал, в котором можно освещать аспекты истории журнала, публиковать анонсы выпусков, аннотации к статьям, интересные факты. В существующих соцсетях сейчас низкая активность, нужно больше рекламы как для читателей, так и для потенциальных авторов.

Соколова А.Н.,

к. пед. н., редактор журнала.

Я работаю в редакции журнала «Математика в школе» 12 лет и за эти годы настолько прониклась к нему, что считаю себя его частичкой.

Мне нравится, что журнал не только освещает опыт и инновации математической науки, но и поднимает насущные проблемы, от решения которых напрямую зависит общий процесс развития образования в нашей стране. Особо мне импонируют статьи, дающие сравнительный анализ методики преподавания математики, а также проведения математических олимпиад в нашей стране и за рубежом. Также считаю, что в журнале помимо научных статей должно быть больше материалов, вызывающих интерес к математике, т.е. я – за популяризацию предмета.

Мне повезло работать в окружении неравнодушных к издательскому делу людей. Желаю журналу дальнейшего развития и совершенствования!

Моргунова И.А.,

выпускающий редактор

СПРЯМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

STRAIGHTENING OF PLANE CURVES

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_44

И.Г. Малышев,Лицей №40 (г. Нижний Новгород),
migniro@mail.ru**I.G. Malyshev,**Liceum №40 (Nizhny Novgorod),
migniro@mail.ru

Аннотация: в статье приведён расчёт длин некоторых плоских кривых. Предлагается ввести данные задачи в школьную практику при освоении материала, связанного с применением понятия интеграла и вычислением площадей криволинейных трапеций в программе углублённого изучения математического анализа

Abstract: the paper presents the calculation of the lengths of some plane curves. It is proposed to introduce these tasks into school practice when mastering the material related to the application of the concept of an integral and the calculation of the areas of curvilinear trapezoids in the program of in-depth study of mathematical analysis

Ключевые слова: спрямление кривых, приложение интеграла, фигуры вращения

Keywords: curve straightening, integral application, rotation figures

© И.Г. Малышев 2023

В учебниках для углублённого изучения математики приводятся формулы для вычисления длин кривых, площадей поверхностей вращения и объёмов тел вращения. Однако примеров на эту тему не так много. Даже то, что какой-то раздел упомянут в программе, в настоящее время мало что означает, так как всё диктует тематика заданий ЕГЭ. Автор, в ожидании того, что когда-нибудь вместо брошюр ЕГЭ станут востребованы учебники и тема интеграл займёт достойное место в заданиях профильного ЕГЭ, предлагает обратиться к вопросу вычисления длин кривых. Почему к этим задачам? Как правило, приложения интеграла в школьных задачах связаны с нахождением площади криволинейных трапеций. Это интересный материал и он должен быть в тематике экзаменационных заданий, как это было в период с

середины 70-х годов XX века по 2008 г. Но на уроке в 11 классе со стороны ученика вполне закономерен вопрос – если мы нашли площадь под кривой, то почему бы не найти и длину кривой. Однако вычисление длин кривых, площадей поверхностей вращения и объёмов тел вращения – уже другой уровень сложности и представляет больше факультативный материал. У учащихся должно быть полное представление о характеристиках классических кривых. В статье «Плоские кривые и их свойства» из журнала «Математика в школе» [1] были рассмотрены задачи на приложение интеграла в физике и геометрии. В частности, это касалось механических свойств известных плоских кривых: параболы, параболы Нейля, циклоиды. А теперь обратим внимание на геометрические параметры кривых, что тоже представляет интерес

для учащихся. Если объём и площадь поверхности тел вращения больше относятся к вопросам геометрии, то такие понятия, как длина кривой, площадь под кривой ближе к вопросам математического анализа. По крайней мере, задания на вычисление объёмов и площадей поверхностей тел встречаются именно в учебниках геометрии, как, в свою очередь, задачи на вычисление площадей криволинейных трапеций – в учебниках математического анализа. Прежде чем обратиться к конкретным примерам, рассмотрим табличные интегралы. В школьной практике под табличными интегралами понимаются интегралы от простейших элементарных функций: x^a , a^x , $1/x$, $\sin x$, $\cos x$. В то же время в программе первых курсов институтов список табличных интегралов шире, часть этого списка может быть распространена на классы с углублённым изучением математики. Это связано с интересными приложениями интеграла, упомянутыми выше. Вычислим два интеграла, которые понадобятся в дальнейшем.

Вначале рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

который вычисляется с помощью замены $x = \operatorname{tg} t$. После подстановки $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ и тригонометрических преобразований получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} + C = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + C. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались тем, что

$$\int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin t} + \frac{1}{1 - \sin t} \right) d \sin t,$$

затем представили этот интеграл в виде

суммы двух интегралов и применили формулы для интегрирования простейших дробей:

$$\int \frac{dz}{1+z} = \ln |1+z| + C, \quad \int \frac{dz}{1-z} = -\ln |1-z| + C.$$

Итак, имеет место равенство

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + C. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим второй интеграл $\int \sqrt{1+x^2} dx$, который вычисляется интегрированием по частям [2]:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1-1)dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая предыдущий результат (1), получаем, что

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{2} + C. \quad (2)$$

А теперь обратимся к конкретным примерам. Перед нами «простая» кривая, например, дуга синусоиды $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$. Площадь под кривой равна $S = \int_0^\pi \sin x dx = 2$, объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox данной кривой, равен

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Вычислить этот интеграл предлагается в одном из заданий учебника [3, № 1011].

Но если объём этой «бусинки» было достаточно просто получить, то вычисление площади поверхности вращения представляет собой уже более сложную задачу, особенно если ещё не знать формулы (2):

$$\begin{aligned}
 S_{\text{вр}} &= 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.
 \end{aligned}$$

Так как

$\int \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -\int \sqrt{1 + \cos^2 x} d \cos x$, то в результате применения формулы (2) имеем одну из первообразных:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= -\pi(\cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \\
 &+ \ln(\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x)).
 \end{aligned}$$

После подстановки пределов интегрирования получаем требуемую площадь: $S_{\text{вр}[0, \pi]} = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$. Мы воспользовались шаблонными интегралами, полученными выше. А вот длину дуги синусоиды получить в элементарных функциях не удастся, так как интеграл $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$, значение которого равно a длине графика функции $y(x)$, где $x \in [a; b]$, при кажущейся простоте

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx
 \end{aligned}$$

представляет собой специальную функцию. Точнее, интеграл

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$$

есть эллиптический интеграл второго рода, значения которого даются в виде таблиц. Численный результат можно получить с помощью программы Advanced Grapher: $l \approx 3,8202$. Приближённый ответ можно оценить с помощью формулы Симпсона [4]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right);$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \\
 &= \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{\frac{3}{2}} \right) \approx 3,8292.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько линий, представляющих собой графики функций на заданных промежутках. При нахождении длин этих линий возникают интегралы, вычисление которых опирается на формулы (1) и (2), что позволяет найти точные значения определённых интегралов.

1. Пусть линия задана функцией $y = \frac{x^2}{2}$ на отрезке $[0; 1]$. Применим равенство (2) для вычисления её длины:

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left(\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2} \approx 1,1478.
 \end{aligned}$$

2. Пусть кривая является графиком функции $y = 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 1]$, тогда её длина равна интегралу $l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$. После замены $x = t^2$ получим

$$\int 2\sqrt{1+t^2} dt = t\sqrt{1+t^2} + \ln(\sqrt{1+t^2} + t) + C,$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 2,2956.$$

3. Рассмотрим функцию $y = \ln x$ на отрезке $[1; 2]$. Длина дуги выразится интегралом $l = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$. После замены $x = \operatorname{tg} \varphi$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi} &= \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi} = \\
 &= -\int \frac{d \cos \varphi}{(1 - \cos^2 \varphi) \cdot \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} - \int \frac{d \cos \varphi}{(1 - \cos^2 \varphi)}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int \frac{d \cos \varphi}{(1 - \cos^2 \varphi)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{1 - \cos \varphi} \right) d \cos \varphi = \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} + C,$$

окончательно получим

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \left(\sqrt{1 + x^2} - \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{x} \right) \Big|_1^2 = \\ = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{5} + 1} \approx 1,222.$$

Подсчитаем длину части графика этой же функции ещё на одном промежутке $[1; e]$:

$$l_{[1;e]} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^2} + \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1} \right) \approx \\ \approx 2,0035.$$

4. Рассмотрим график функции $y = e^x$ на отрезке $[0; 1]$. Для вычисления его длины требуется найти интеграл

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx. \text{ После замены } x = \ln t, \text{ полу-} \\ \text{чаем } \int \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t} dt = \sqrt{1 + t^2} - \ln \frac{\sqrt{1 + t^2} + 1}{t} + C.$$

При интегрировании воспользовались результатом из пункта 3. Таким образом, имеем равенства:

$$l(x) = x + \sqrt{1 + e^{2x}} - \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} + 1),$$

и

$$l_{[0;1]} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^2} + \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1} \right) \approx \\ \approx 2,0035,$$

что согласуется с предыдущим результатом, так как $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$, и $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, – это взаимобратные функции.

Существуют и другие примеры линий, длину дуги которых можно получить в виде точных значений. Однако они уже будут задаваться искусственными функ-

циями, представляющими из себя комбинации элементарных функций, графики которых не так наглядны и требуют специального построения. В то же время, сами интегралы выглядят гораздо проще, чем в случае самих элементарных функций. В качестве примеров найдём длины дуг кривых, заданных следующими функциями:

$$5. y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} \text{ на отрезке } [1; 2]. \text{ Тогда}$$

$$l(x) = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{2x} \right)^2} dx.$$

В итоге получаем любопытный результат:

$$l(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\ln x}{2} \text{ и } l_{[1;2]} = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$6. y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \text{ на отрезке } [0; 1]. \text{ Тогда}$$

$$l(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx = \\ = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{1 + x}} dx.$$

В результате вычислений имеем:

$$l(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{1 + x} \text{ и } l_{[0;1]} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

$$7. y = \ln \cos x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{6} \right]. \text{ Полу-}$$

чаем интеграл $l(x) = \int \sqrt{1 + (\operatorname{tg} x)^2} dx$.

Вычисляем:

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)} = \\ = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) d \sin x.$$

Таким образом,

$$l(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \text{ и } l_{\left[0; \frac{\pi}{6} \right]} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

При вычислении длин дуг обязательно

нужно упомянуть кривую $y^2 = ax^3$. Это уравнение полукубической параболы или параболы Нейля, названной в честь английского математика Уильяма Нейла, который в 1657 г. вычислил длину дуги этой кривой, что тогда стало большим достижением. В настоящее время это вычисление можно воспроизвести на уроке, зная требуемую формулу и владея основными приёмами интегрирования. Выбрав удобные пределы интегрирования, считая, что размерность x и y одинакова и равна размерности $\frac{1}{a}$, получаем:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9ax}{4}} dx = \left. \begin{array}{l} t = 4 + 9ax \\ dt = 9adx \\ x = 0 \rightarrow t = 4 \\ x = \frac{1}{4a} \rightarrow t = \frac{25}{4} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_4^{\frac{25}{4}} \frac{1}{9a} \sqrt{t} dt = \frac{61}{216a}.$$

Пусть $a = \frac{1}{8}$. Тогда уравнение одной ветви кривой Нейля задаётся функцией $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, длина части этой кривой при

$0 \leq x \leq 2$ будет равна $l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9x}{32}} dx = \frac{61}{27}$, а площадь под графиком функции выразится числом $S = \int_0^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}$.

Список источников

1. *Малышев И.Г.* Плоские кривые и их свойства // Математика в школе. – 2017. – № 8. – С. 41–47.
2. *Алгебра и начала математического анализа.* 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010. – 463 с.: ил.
3. *Алгебра и начала математического анализа.* 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 463 с.: ил.
4. *Малышев И.Г.* Формула Ньютона-Симпсона // Математика в школе. – 2017. – № 7. – С. 46–50.

Статья поступила в редакцию 21.12.2022.
Принята к публикации 15.03.2023.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Земля на кончике пера

Метод координат позволил французскому астроному и математику Урбену Леверье (1811–1877), исследуя неправильности в движении планеты Уран, то есть отклонения траектории планеты от той, которую она должна была бы иметь согласно закону всемирного тяготения, высказать предположение о влиянии на её движение неизвестной планеты. Вскоре новая планета была открыта. Это был, как все прекрасно знают, Нептун. Радости учёных не было предела. Ура! Леверье открыл новую планету «на кончике пера»! О Леверье говорят все, когда хотят подчеркнуть могущество математики. Однако мы почему-то забываем о том, что его открытие было вовсе не единственным в своём роде. Ещё в XVII столетии, опираясь на свою теорию тяготения, Исаак Ньютон высказал предположение, что Земля не является шаром, позже подтверждённое. Ньютон установил сплюснутость Земли, не выходя за дверь. На кончике пера!

По книге: *Кованцов Н.И.* Математика и романтика (Киев, Вища школа, 1976)

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНСТРУМЕНТ И КРИЗИС ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

COMPUTER TOOL AND CRISIS IN SCHOOL MATHEMATICAL EDUCATION

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_49

С.Г. Иванов, к.п.н., доцент,
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»,
sg_ivanov@mail.ru;

В.И. Рыжик, к.п.н.,
Лицей «Физико-техническая школа»
им. Ж.И. Алферова, Санкт-Петербург,
rvi@inbox.ru

S.G. Ivanov, PhD (Pedagogy), associate Professor,
Saint-Petersburg Electrotechnical University «LETI»,
sg_ivanov@mail.ru;

V.I. Ryzhik, PhD (Pedagogy),
Liceum «Physical-Technical High School» named
after Zh.I. Alferov, Saint-Petersburg,
rvi@inbox.ru

Аннотация: предлагается использование компьютерных инструментов для ослабления кризиса в школьном математическом образовании на основе:

- 1) толкования школьной математики как введения в науку,
- 2) внедрения экспериментальной математики,
- 3) изучения планиметрии на основе аксиоматики А.Д. Александрова на ограниченном участке плоскости,
- 4) использования динамической геометрии,
- 5) включения исследовательской деятельности

Abstract: it is proposed to use computer tools to mitigate the crisis in school mathematics education based on:

- 1) interpretation of school mathematics as an introduction to science,
- 2) introduction of experimental mathematics,
- 3) study of planimetry based on the axiomatics of A.D. Alexandrov on a limited area of the plane,
- 4) use of dynamic geometry,
- 5) inclusion of research activities

Ключевые слова: школьное геометрическое образование, компьютерный инструмент, GeoGebra

Keywords: school geometric education, computer tool, GeoGebra

© С.Г. Иванов, В.И. Рыжик, 2023

Кризис школьного математического образования известен давно. В книге [1] сказано: «Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе...» В статье [2] приведены соображения, относящиеся к американскому школьному математическому образованию, но многое из перечисленного можно отнести и к российскому образованию.

«Главная проблема школьной математики в том, что в ней нет задач. Да, я

знаю, что выдаётся за задачи на уроках: эти безвкусные, скучные упражнения. “Вот задача. Вот как её решить. Да, такие бывают на экзамене. На дом задачи 1–15”.

Но задача – настоящий, честный до мозга костей естественный человеческий вопрос – это нечто другое. Какова длина диагонали куба? Закончатся ли простые числа? Бесконечность – число или нет? Сколькими способами можно симметрич-

но покрыть поверхность плитками? История математики – это история решения этих вопросов, не бессмысленного пережевывания формул и алгоритмов вместе с натянутыми упражнениями, чтобы их применять.

Как же нам учить детей математике? Выбирая интересные и естественные задачи в соответствии с их вкусами, интересами и опытом. Давая им время делать открытия и строить гипотезы. Помогая им выстраивать доказательства и создавая атмосферу здорового и живого математического критицизма. Улавливая, как меняется их интерес. В общем, выстраивая честные и открытые интеллектуальные отношения с учениками. Это требует слишком большой ответственности и слишком большой открытости, короче, это слишком много работы!

В математике есть и захватывающая дух глубина, и щемящая сердце красота, а вышло так, что люди противопоставляют математику творчеству» [2].

С появлением компьютерных инструментов открываются новые возможности для ослабления кризиса. Теперь подробнее.

Кризис школьного математического образования порождён имеющимися в нём противоречиями [3]. Здесь мы обращаем внимание на те из них, которые можно, по нашему мнению, смягчить введением идеологии, использующей компьютерные инструменты.

- Противоречия между ценностями и целями математического образования.

Ныне мы довольствуемся математикой в первую очередь как утилитарным знанием, приспособленным для решения чисто технических задач. Красота математических идей, её стремление к логической чёткости, присущая ей потрясающая интеллектуальная фантазия, освоение бес-

конечности – всё это сейчас недоступно громадному большинству школьников.

Мы учим не столько математике и её реальным приложениям, сколько рафинированному математическому ремеслу.

Пример 1. Понятно, какую роль играет изучение симметрии. Но мы отдаём явное предпочтение многочисленным тривиальным соотношениям в треугольнике и в окружности вместо того, чтобы знакомить школьников с окружающим миром и современной наукой.

Пример 2. В реальности почти все вычисления имеют приближённый характер. Точное значение – исключение, однако мы работаем почти всегда с точными значениями.

- Противоречия между двумя видами деятельности: учебной и исследовательской.

В то время как в учебной деятельности известны начало и окончание работы по решению задачи, в исследовательской деятельности начало или окончание такой работы неизвестны.

- Противоречия между последовательным дедуктивным изложением теории и использованием рациональных рассуждений.

Согласно мнению В.А. Успенского [4], доказательство – это способ убеждения человека X , такой что затем человек X готов убеждать тем же способом человека Y . Но способы убеждения могут быть различными. Это не только дедуктивное рассуждение, но и рациональное рассуждение (используются аналогия, соображения наглядности, даётся практическое толкование) или компьютерный эксперимент.

Ослабление кризиса, по нашему мнению, должно произойти в результате корректировки существующей парадигмы школьного математического образования. Этого можно достичь:

1) толкованием школьной математики как введения в науку;

2) внедрением экспериментальной математики;

3) изучением планиметрии на основе идей и аксиоматики А.Д. Александрова.

Введение в науку подразумевает первоначальное знакомство с основными понятиями, теоремами, методами, поэтому даёт возможность учителю для более свободного выбора действий.

Экспериментальная геометрия использует компьютерный инструмент, который дополняет мысленный математический эксперимент включением динамического изменения созданного рисунка. При этом возрастает роль наблюдения.

Использование компьютерного эксперимента в геометрии наиболее эффективно:

а) для поиска объекта, удовлетворяющего условию;

б) для наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами;

в) для исследования свойств объекта.

Особое внимание уделяем модельным задачам (текстовой, сюжетной). При решении таких задач строят несколько последовательных моделей: сначала понятный рисунок, соответствующий условию, далее рисунок, на который нанесены рассматриваемые величины и указаны наложенные на них ограничения, а затем составляют уравнение (систему уравнений). При этом на заключительном этапе используется динамическая модель.

Что касается изучения планиметрии на основе аксиоматики А.Д. Александрова, то в этой аксиоматике исходным понятием вместо прямой является отрезок, потому геометрия разворачивается на конечном куске плоскости, а теперь – на экране компьютера.

В основу аксиоматики могут быть по-

ложены возможности построений с помощью компьютерных инструментов. Этот вопрос требует специального исследования.

Вот пример задачи из начала курса геометрии. На какое количество частей могут разбить плоскость три окружности (не обязательно одного радиуса)? Приведите все варианты ответа и объясните, почему других нет.

Рекомендуется использовать компьютерный инструмент, но при этом надо следить за обоснованием ответа. Сначала школьники могут экспериментально получить то или иное количество частей – от четырёх (рис. 1) до восьми (рис. 2). Затем самостоятельно или в процессе дискуссии обосновать, почему другие варианты невозможны. Например, добавляя окружности по одной и рассматривая различные конфигурации, которые при этом получаются.

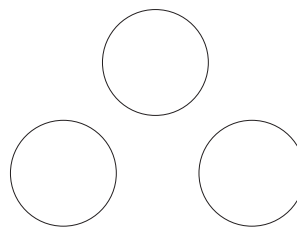


Рис. 1

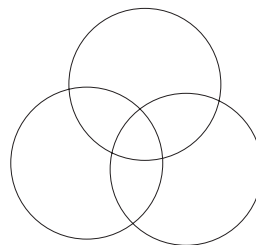


Рис. 2

Мы составили исследовательские задачи, соответствующие нашим предложениям (опубликованы две книги на эту тему, в одной [5] использовалась среда «Живая математика», в другой [6] – среда GeoGebra).

Приведём сценарий работы с такими задачами.

1. Выбор сюжета прикладного содержания.
2. Создание геометрической модели.
3. Эвристика в стиле Д. Пойа.
4. Формулировка гипотезы.
5. Компьютерный эксперимент.
6. Корректировка гипотезы.
7. Рациональное (неформальное) рассуждение.
8. Дедуктивное доказательство.

Поясним эту схему.

Берётся содержательная задача. Желательно, чтобы она имела прикладной характер. Ученикам предлагается дать её геометрическую формулировку.

На первом этапе решения предлагаем ученикам мысленно представить описанную ситуацию и предвосхитить возможный результат.

Затем подключаем наводящие на гипотезу соображения (используем индукцию, аналогию, разбор частных случаев и пр.).

Если гипотеза появилась на этом этапе, то далее компьютер работает как инструмент для её проверки, то есть на доказательном уровне.

Далее подключаем компьютер. В результате моделирования и наблюдения за происходящим на экране, возможно, появляется разумная гипотеза, которая проверяется компьютерным экспериментом.

После такой проверки проводится рациональное (неформальное) рассуждение из соображений симметрии, непрерывности, монотонности – хорошо бы получить ещё одно подтверждение тому, что мы наблюдали.

Далее – при желании или необходимости – проводится дедуктивное доказательство.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Клад на острове

Однажды на острове пираты закопали клад. Для того чтобы потом найти клад, они приметили на острове две высокие горы и пальму. Впоследствии запись с описанием поиска клада попала к историкам. Запись гласила: «От пальмы идите к первой горе и считайте шаги. Затем поверните под прямым углом направо, сделайте столько же шагов и воткните палку. Вернитесь к пальме и идите ко второй горе, считая шаги. Поверните под прямым углом налево и сделайте столько же шагов. Воткните другую палку. Клад находится посередине между двумя палками». Историки нашли обе горы, но пальмы на месте уже не было. Можно ли найти клад?

Рисунок к задаче выглядит так (рис. 3).

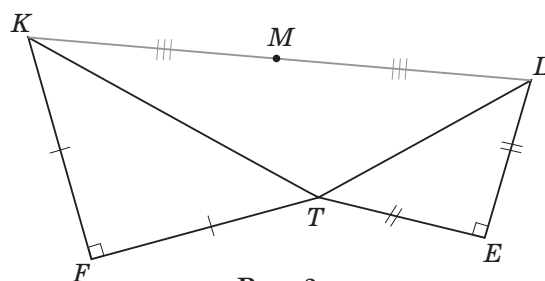


Рис. 3

Геометрическая формулировка

Два равнобедренных прямоугольных треугольника KFT ($KF = FT$) и LET ($LE = ET$) имеют общую вершину T . Точка M – середина отрезка KL . Зависит ли положение точки M от положения точки T ?

Эвристика в стиле Д. Пойа (наводящие соображения)

Если точка T – середина отрезка FE , то точка M находится на серединном перпендикуляре к отрезку FE и удалена от точки T на расстояние, равное половине длины отрезка FE (рис. 4).

Пусть точка T совпадает с точкой F .

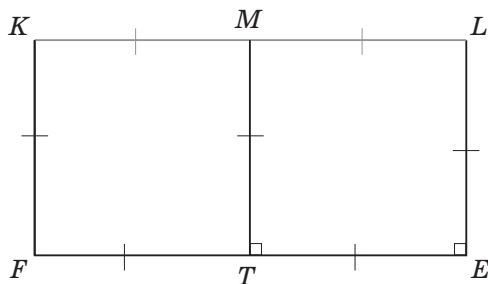


Рис. 4

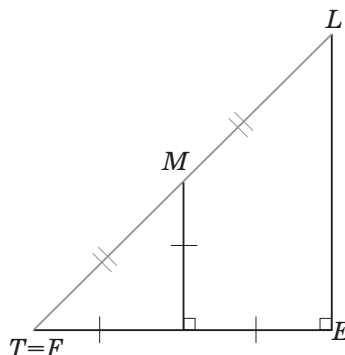


Рис. 5

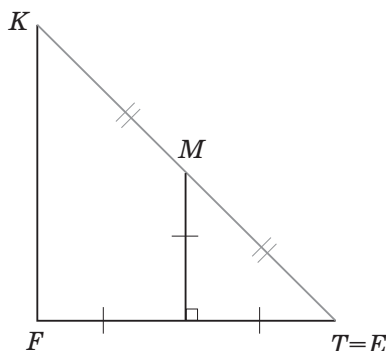


Рис. 6

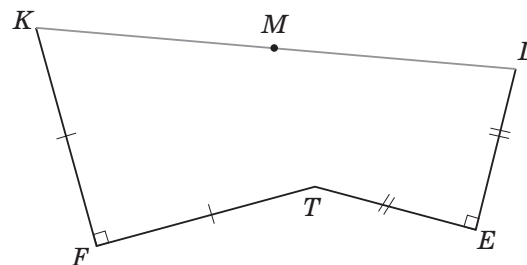


Рис. 7

Тогда точка M находится в середине гипотенузы FL (рис. 5).

Пусть точка T совпадает с точкой E , тогда точка M – середина гипотенузы KE (рис. 6).

Точка, полученная во всех трёх случаях, – это одна и та же точка, так как она находится на серединном перпендикуляре к отрезку FE и удалена от середины отрезка на расстояние, равное половине длины отрезка FE .

Компьютерный эксперимент

Выберите произвольные точки T, E, F , не лежащие на одной прямой. Постройте точку L , повернув точку T на 90° вокруг точки E по часовой стрелке. Затем постройте точку K , повернув точку T на 90° вокруг точки F против часовой стрелки (рис. 7).

Теперь постройте середину отрезка KL – точку M . Перемещайте точку T и

убедитесь, что положение точки M не меняется.

Рациональное рассуждение

Геометрические закономерности, встречающиеся в задачах, в подавляющем большинстве случаев описываются линейной либо квадратичной функцией.

Расстояние от точки M до прямой FE трижды принимает одно и то же значение, следовательно, соответствующая функция квадратичной быть не может. Значит, эта функция линейная. Поскольку она трижды принимает одно и то же значение, она является постоянной функцией.

Дедуктивное доказательство

Доказательство ясно из рисунка 8. Пусть точка A – середина отрезка FE и $K_1F = EL_1$. Тогда точка A – середина отрезка K_1L_1 .

Приведём также пример модельной задачи.

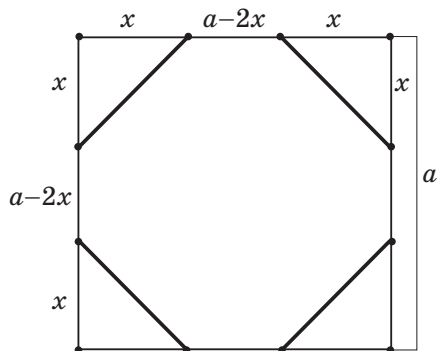


Рис. 13

укажем накладываемые на них ограничения. Модель 2 – рисунок 13.

$$a - 2x > 0, 0 < x < \frac{a}{2}.$$

Модель 3 – уравнение на основе равенства $S_1 = 2S_2$.

Из свойств квадрата следует, что

$$A_3A_8 \parallel A_2A_1, A_3A_8 \parallel A_4A_7, A_3A_8 \perp A_8A_7.$$

Тогда $A_7A_8A_3A_4$ – прямоугольник, а $A_8A_1A_2A_3$ – трапеция. Пусть S_1 – площадь прямоугольника, а S_2 – площадь трапеции (рис. 14).

Тогда

$$S_1 = a(a - 2x), S_2 = (a - x)x.$$

Так как $S_1 = 2S_2$, то

$$a(a - 2x) = 2(a - x)x.$$

Решим уравнение $a^2 - 2ax = 2ax - 2x^2$. Оно имеет два корня:

$$x = \frac{a}{2 \pm \sqrt{2}}.$$

Корень $x = \frac{a}{2 - \sqrt{2}}$ не удовлетворяет ограничениям.

Корень $x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$ удовлетворяет ограничениям.

При найденном значении x стороны A_1A_8 и A_1A_2 равны.

Углы восьмиугольника равны, поскольку каждый из них равен 135° .

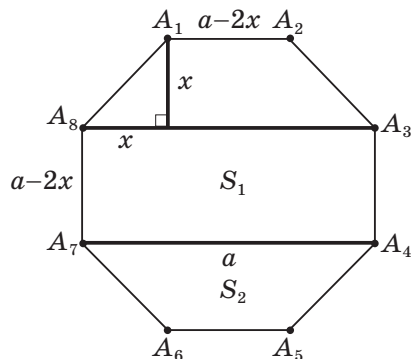


Рис. 14

Отсюда следует, что условие $S_1 = 2S_2$ выполнено для правильного восьмиугольника, и только для него.

Мы полагаем, что использование наших предложений поможет ослабить кризис в школьном математическом образовании.

Список источников

1. Успенский В.А. Предисловие к математике. – СПб.: Амфора, 2015.
2. Paul Lockhart. A Mathematician's Lament. Bellevue Literary Press, 2009.
3. Рыжик В.И. Кризис среднего математического образования глазами учителя // Математика в школе. – № 10, 2013 (часть 1); № 1, 2014 (часть 2).
4. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. – М.: МЦНМО, 2009.
5. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». – М.: Просвещение, 2013.
6. Люблинская И.Е., Рыжик В.И. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды Geogebra Classic. – СПб.: СММО Пресс, 2020.

Статья поступила в редакцию

01.10.2023.

Принята к публикации

21.10.2023.

ЖЕРАР ДЕЗАРГ – «ОТЕЦ» ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ И УЧИТЕЛЬ БЛЕЗА ПАСКАЛЯ

Статья впервые опубликована в журнале
«Математика в профильной школе. Фрактал» № 1–2013 г.



Портрет Декарта –
рисунок

Военный инженер и архитектор из Лиона Жерар Декарт (1591–1661) был блестящим геометром, стоявшим у истоков *проективной геометрии*. Правда, чтобы понять это, человечеству понадобилось почти 200 лет, когда соотечественник Декарта Жан Виктор Понселе (1788–1867) издал в 1822 году «Трактат о проективных свойствах фигур». В этой работе Понселе фактически восстановил и развил идеи Декарта, ничего не зная о них. Вскоре член Парижской Академии наук Мишель Шаль нашел копию сочинения Декарта, после чего математический мир ахнул... И Жерара Декарта стали называть «отцом» проективной геометрии.

За свою жизнь Декарт написал два сочинения по геометрии – новаторских по своей сути, зовущих к новым открытиям. Первое было написано в 1636 году и посвящено построению *перспективных изображений*. Вопросами перспективы занимались крупнейшие художники:

*Узнать законы перспективы я желал более,
чем получить королевство.*
А.Дюрер

Пьеро дела Франческа, Альбрехт Дюрер, Леонардо да Винчи и многие другие, поскольку это было первейшим делом для композиционного решения картины. Декарт же постарался заложить основы математической теории перспективы. Наряду с достаточно известным *графическим* методом, Декарт впервые предложил метод *аналитический*, который давал возможность по известным координатам точек осуществить построение их перспективных изображений. Это было особенно удобно при больших расстояниях от центра перспективы до картинной плоскости, когда некоторые точки могли оказаться за пределами чертежа. *Аналитический метод Декарта* впоследствии был положен в основу известного сегодня *аксонометрического метода*. Но современники Декарта восприняли его более чем сдержанно. А на практике и вовсе отказались от него, продолжая работать по старинке.

Второе сочинение Декарта посвящено учению о конических сечениях. Дело в том, что Декарт очень высоко ставил труд древнегреческого математика Аполлония Пергского «Конические сечения». В нём Аполлоний рассматривал окружность, эллипс, параболу, гиперболу (рис. 1) – как возможные виды сечения конуса плоскостью, выявлял геометрические свойства

этих линий – так называемых кривых второго порядка. (Заметим в скобках, что *теория конических сечений Аполлония стала отправным пунктом для создания как аналитической, так и проективной геометрии*).

Так вот, в 1639 году Дезарг написал сочинение «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью». Хотя некоторые понятия проективной геометрии мы встречаем у Паппа Александрийского, именно в сочинении Дезарга впервые идеи *проективной геометрии* были изложены систематически.

Проективная геометрия занимается проективными преобразованиями, отображающими фигуру у одной плоскости на другую плоскость при помощи центрального проектирования (или ряда последовательных проектирований). В частном случае плоскости могут быть совмещены (планиметрический вариант проективной геометрии). Отметим, что проективные преобразования *искажают величины отрезков и углов*, то есть не сохраняют метрических свойств фигур

(рис. 2). Это существенно отличается от осевой и центральной симметрий, поворота и даже гомотетии, которая изменяет размеры, но сохраняет углы и, стало быть, форму предмета. Какие же тогда свойства остаются неизменными (инвариантными) при проективных преобразованиях? Сюда следует отнести такие:

- а) принадлежность точки прямой и прямой плоскости;
- б) принадлежность трёх и более точек одной прямой;
- в) пересечение трёх и более прямых в одной точке.

Дезарг представил свой труд на кружке Марена Мерсенна (1588–1648), у которого по четвергам собирались лучшие умы Франции (членами кружка были Ферма, Декарт, Э. Паскаль, Б. Паскаль, Дезарг, Роберваль и другие). Кружок назывался «Парижская академия», и на его основе через некоторое время действительно была создана Парижская Академия Наук.

Все 56 экземпляров изданной брошюры Дезарг дарит участникам кружка, друзьям. (Сегодня сохранилось два экземпляра сочинения Дезарга). Отзывы самые

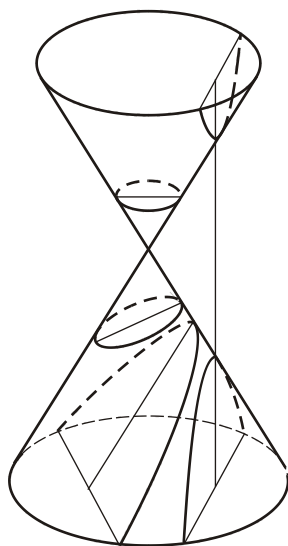


Рис. 1

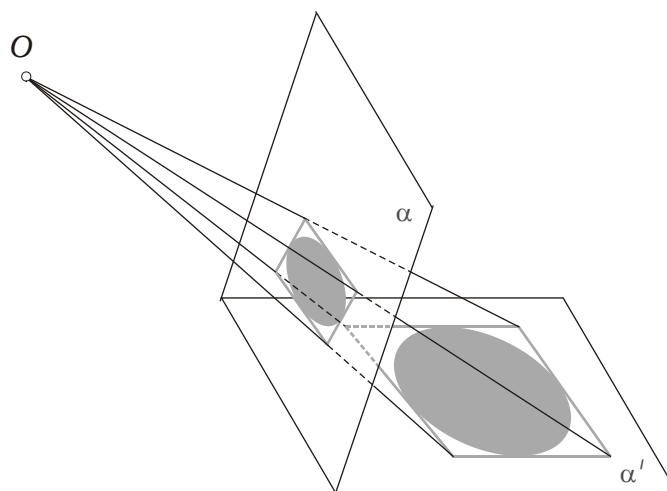


Рис. 2

лестные – от Ферма, Декарта, других математиков. Юный Блез Паскаль с восхищением говорит о работе Дезарга, считает его своим Учителем!

В следующем году, вдохновлённый сочинением Дезарга, Паскаль доказывает свою знаменитую *теорему о вписанном шестиугольнике*. И метод Паскаля соответствует методу Дезарга: сначала доказательство идёт для окружности, затем распространяется на любое коническое сечение. Вот уж действительно *Дезарг позвал Паскаля дерзать!*..

В своём сочинении Дезарг вводит и обосновывает теорию поляр точки относительно окружности. Рассматривает двойное отношение четырёх точек прямой. Показывает, что пучок прямых и параллельные прямые имеют одну и ту же природу – просто точка пересечения параллельных прямых удалена в бесконечность. И, наконец, главное в этой работе – сама *теорема Дезарга*, о которой мы поведём наш дальнейший разговор.

Постараемся только сначала ответить на вопрос: почему, несмотря на высокие оценки современников, сочинение Дезарга не было по достоинству оценено? Среди

ряда причин выделим три:

- а) малое количество экземпляров;
- б) трудный язык сочинения, множество новых терминов, к которым непросто привыкнуть;
- в) большое внимание научного мира к «Геометрии» Декарта, вышедшей в 1637 году большим тиражом и затмившей на то время труды других математиков.

Теорема Дезарга

(планиметрическая)

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами. Известно, что прямые A_1A ; B_1B и C_1C пересекаются в точке Q (рис. 3). Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1 ; BC и B_1C_1 ; AC и A_1C_1 – точки N , K и T соответственно – принадлежат одной прямой.

Применим теорему Менелая для $\triangle ABQ$ и секущей $A_1 - B_1 - N$:

$$\frac{QA_1}{A_1A} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BB_1}{B_1Q} = 1. \quad (1)$$

По теореме Менелая для $\triangle BCQ$ и секущей $B_1 - C_1 - K$ имеем:

$$\frac{QB_1}{B_1B} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CC_1}{C_1Q} = 1. \quad (2)$$

Вновь применим теорему Менелая для $\triangle ACQ$ и секущей $A_1 - C_1 - T$:

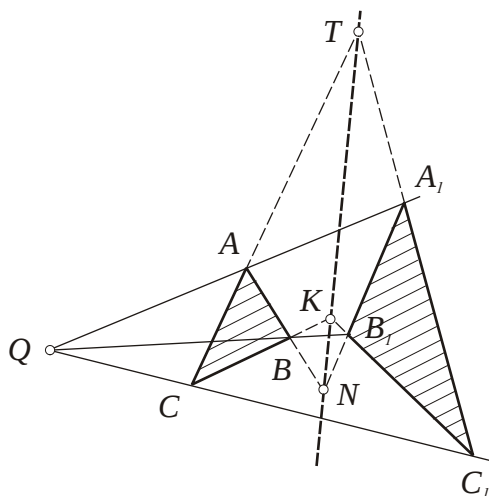


Рис. 3

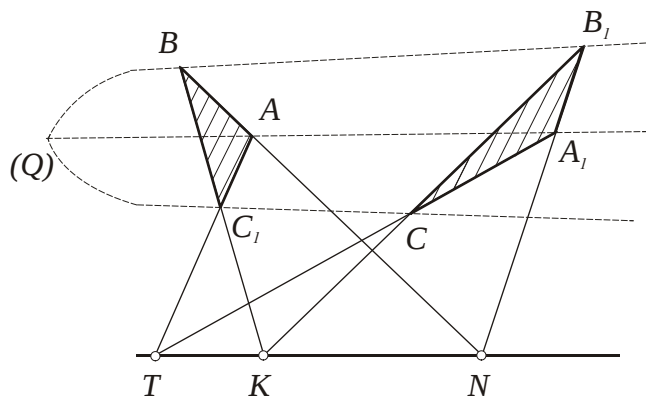


Рис. 4

$$\frac{QC_1}{C_1C} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AA_1}{A_1Q} = 1. \quad (3)$$

Перемножим левые и правые части равенств (1); (2); (3). Поскольку

$$\frac{QA_1}{A_1A} \cdot \frac{AA_1}{A_1Q} = 1; \frac{BB_1}{B_1Q} \cdot \frac{QB_1}{B_1B} = 1; \frac{CC_1}{C_1Q} \cdot \frac{QC_1}{C_1C} = 1,$$

после сокращения получим следующее:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1. \quad (4)$$

По обратной теореме Менелая равенство (4) для $\triangle ABC$ и точек N ; K ; T означает, что точки N ; K и T принадлежат одной прямой.

Заметим, что теорема Дезарга верна и в случае, когда точка Q находится в бесконечности (рис. 4).

Теорема Дезарга (стереометрическая)

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ находятся в разных плоскостях α и α_1 . Прямые AA_1 ; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке Q (рис. 5). Докажите, что прямые AB и A_1B_1 ; BC и B_1C_1 ; AC и A_1C_1 (при условии их непараллельности) пересекаются соответственно в точках N , K и T , лежащих на одной прямой.

Доказательство.

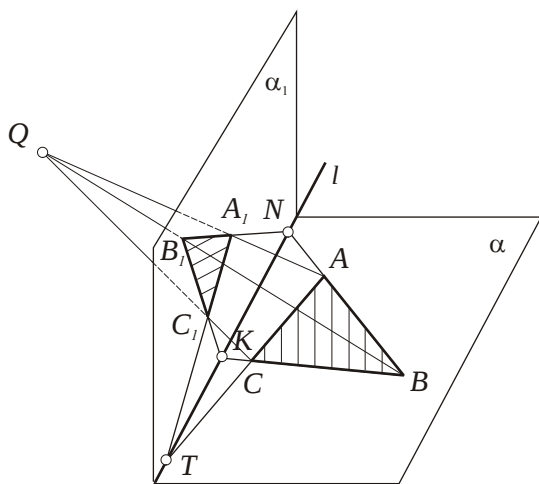


Рис. 5

Поскольку AB и A_1B_1 непараллельны и лежат в одной плоскости – плоскости треугольника QAB , то они пересекаются в некоторой точке N . При этом точка N должна принадлежать как плоскости α ($AB \in \alpha$), так и плоскости α_1 ($A_1B_1 \in \alpha_1$). Значит, $N \in l$, где l – прямая, по которой пересекаются плоскости α и α_1 . Аналогично $K \in l$ и $T \in l$. Значит, все три точки N , K и T лежат на одной прямой – прямой l .

Замечание 1. Стереометрическая теорема Дезарга, как видим, доказывается при помощи проективной геометрии. Планиметрическая же теорема Дезарга – с помощью метрических соотношений (теоремы Менелая). Доказать планиметрическую теорему Дезарга только проективной геометрией невозможно без «выхода в пространство» (в стереометрию), что доказал немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943).

Замечание 2. Одним из основных понятий проективной геометрии является принцип двойственности, обоснованный при помощи свойств поляр математиками Ж.В. Понселе и Ж.Д. Жергонном (1771–1859). Согласно этому принципу все теоре-

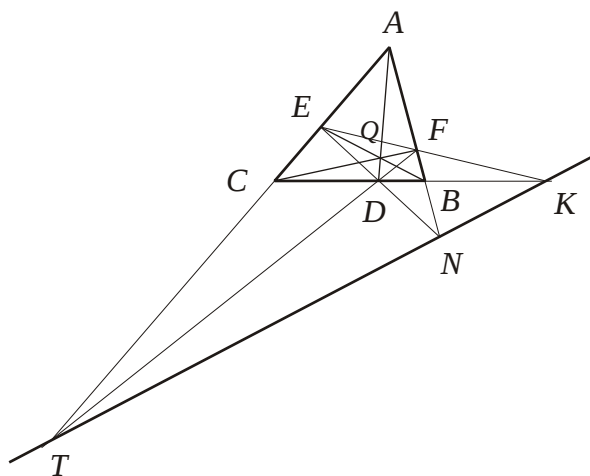


Рис. 6

мы проективной геометрии группируются попарно, причём теоремы одной группы сходны между собой. Например, *провести прямую через точку и отметить точку на прямой* – операции двойственные. Если исходная теорема истинна, то истинна и двойственная ей теорема. Явление двойственности – отличительная особенность проективной геометрии – в метрической геометрии двойственности не существует.

Таким образом, верна теорема, двойственная *планиметрической теореме Дезарга*:

Если точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке.

В данном случае двойственная теорема совпадает с *обратной теоремой Дезарга*.

Решим несколько задач, в которых успешно может быть применена теорема Дезарга (прямая или обратная).

Задача 1.

Отрезки AD , BE и CF пересекаются в точке Q внутри треугольника ABC (рис. 6). $K = BC \cap EF$, $N = AB \cap ED$ и $T = AC \cap FD$. Докажите, что точки K , N и T принадлежат одной прямой.

Доказательство.

Поскольку отрезки, соединяющие со-

ответствующие вершины треугольников ABC и DEF пересекаются в одной точке – точке Q , то, согласно теореме Дезарга, точки K , N и T пересечения соответствующих сторон этих треугольников лежат на одной прямой.

Задача 2.

Воспользовавшись *теоремой Дезарга*, докажите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Проведём в $\triangle ABC$ медианы AM_1 ; BM_2 ; CM_3 (рис. 7). Поскольку $M_2M_3 \parallel BC$, $M_1M_3 \parallel AC$ и $M_1M_2 \parallel AB$, то можно считать, что точки пересечения соответственных прямых треугольников ABC и $M_1M_2M_3$ лежат на одной бесконечно удаленной прямой (так называемой несобственной прямой плоскости данного $\triangle ABC$). Тогда, по *обратной теореме Дезарга*, прямые AM_1 ; BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке.

Задача 3.

Дан угол A с недоступной вершиной и точка K внутри угла. Пользуясь только линейкой, проведите прямую KA .

Решение.

Через K проведём произвольно прямые BC и DE (рис. 8).

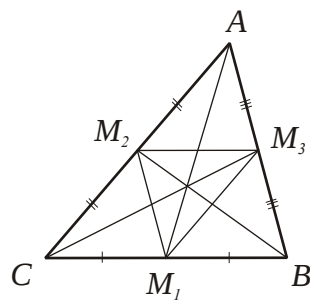


Рис. 7

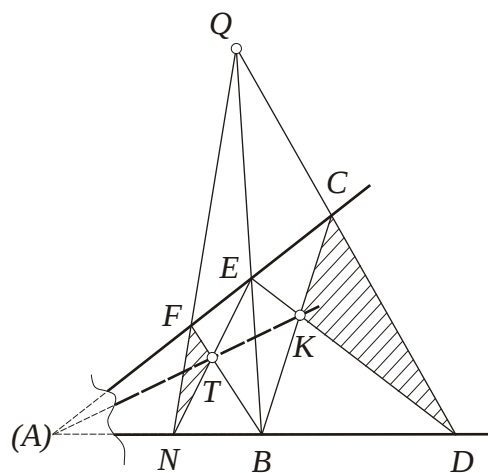


Рис. 8

Пусть $Q = BE \cap DC$. Проведём также произвольно $Q - F - N$. Обозначим через T точку пересечения прямых BF и EN . Соответствующие стороны треугольников DCK и NFT пересекаются в точках B ; E ; Q , вершины пересекаются в одной точке – точке A (*обратная теорема Дезарга*). Следовательно, прямая KT совпадает с прямой KA ,

Задача 4.

Прямые m и n пересекаются в недоступной точке E , а прямые k и t – в недоступной точке F . Одной линейкой постройте доступную часть прямой EF .

Решение.

Пусть прямые m и k пересекаются в точке A , а прямые n и t – в точке A_1 (рис. 9). Отложим произвольно отрезок AB на прямой m и отрезок A_1B_1 на n . Пусть также $Q = A_1A \cap B_1B$. Внутри угла A_1QB_1 проведём произвольно прямую, пересекающую k и t соответственно в точках C и C_1 . Поскольку прямые AA_1 ; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке Q (отвечают условию *теоремы Дезарга*), то точка D пересечения BC и B_1C_1 лежит на одной прямой с точками E и F . Проведём внутри угла A_1QB_1 ещё одну прямую,

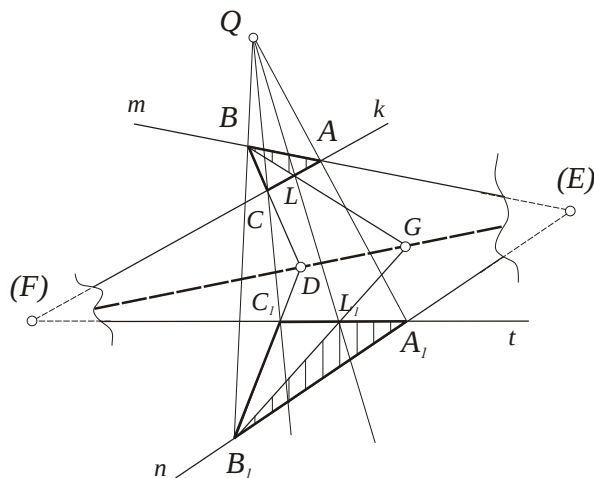


Рис. 9

пересекающую k и t соответственно в точках C и C_1 . Поскольку прямые AA_1 ; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке Q (отвечают условию *теоремы Дезарга*), то точка D пересечения BC и B_1C_1 лежит на одной прямой с точками E и F . Проведя внутри угла A_1QB_1 ещё одну прямую, пересекающую k и t в точках L и L_1 соответственно, и применив *теорему Дезарга* к треугольникам ABL и $A_1B_1L_1$, получим точку G , которая также лежит на прямой EF . Стало быть, прямая DG совпадает с искомой.

Задача 5.

Точки K , N , T лежат соответственно на сторонах BC , AC и AB треугольника ABC . $D = AK \cap CT$; $F = AK \cap NT$ $Q = NK \cap AB$ и $E = FQ \cap TK$ (рис. 10). Докажите, что точки D , E , B принадлежат одной прямой.

Доказательство.

Точки пересечения соответствующих сторон треугольников TFD и KQB лежат на одной прямой. Действительно, $C = TD \cap BK$, $N = TF \cap QK$ и $A = DF \cap QB$. Тогда, согласно *обратной теореме Дезарга*, прямые, соединяющие соответственные вершины этих треуголь-

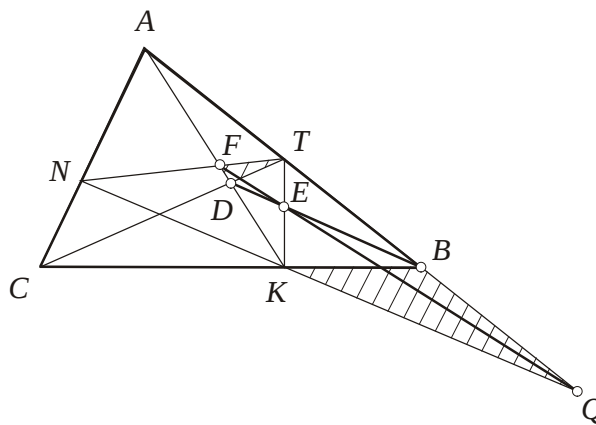


Рис. 10

ников, пересекаются в одной точке. Таким образом, TK , FQ и DB пересекаются в одной точке. Но TK и FQ пересекаются в точке E . Значит, и DB проходит через эту точку, то есть $D-E-B$ – одна прямая.

Задача 6.

Дан тетраэдр $DABC$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точку A_1 на ребре DA , а также прямую l , находящуюся в плоскости треугольника ABC (рис. 11).

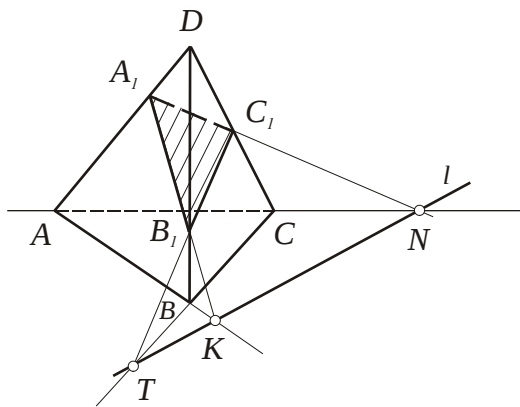


Рис. 11

Построение.

Пусть $K = AB \cap l$ и $N = AC \cap l$. Пусть также $B_1 = A_1K \cap DB$ и $C_1 = A_1N \cap DC$. Треугольник $A_1B_1C_1$ является искомым сечением. Действительно, соответствующие вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке D . А прямые, содержащие соответствующие стороны этих треугольников, лежат на одной прямой – прямой l ($T = BC \cap B_1C_1$).

Замечание. Как мы видим, теорема Дезарга обосновывает построение сечения многогранников *методом следов*.

Ещё несколько задач предложим для самостоятельного решения.

Задача 7. Докажите *обратную планиметрическую теорему Дезарга*, не используя принцип двойственности.

Задача 8. Докажите, не используя

принцип двойственности, *обратную стереометрическую теорему Дезарга*.

Задача 9. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке, а также три точки. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через три данные точки.

Задача 10. Даны крайние точки отрезка AB и короткая линейка, длина которой меньше AB . Пользуясь только этой линейкой, проведите прямую AB .

И последнее. Хорошая получается рифма: *Дезарг – дерзать!*

Список источников

1. Баран О.И. Математичні мініатюри. – К.: Ленвіт, 2007.
2. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2006.
3. Глейзер Г.И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1983.
4. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.
5. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
6. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967.
7. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
8. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979.
9. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Вища школа, 1988.
10. Чистяков В.Д. Старинные задачи. – Минск: Высшая школа, 1966.
11. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой. – М.: Просвещение, 1979.

Г.Б. Филипповский,
г. Киев, Украина

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ XVII КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ, ПОСВЯЩЁННАЯ 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА АНДРЕЯ НИКОЛАЕВИЧА КОЛМОГОРОВА

Введение. 14–15 сентября 2023 года в г. Кирове были проведены XVII Колмогоровские Чтения на актуальную для Года учителя и наставника тему «Наставничество в математике и в математическом образовании». Они состоялись в корпусе «Инженериум» Вятского государственного университета (ВятГУ), где расположена кафедра фундаментальной математики ВятГУ, традиционно являющаяся организатором математических форумов. Международная научно-практическая конференция Колмогоровские Чтения, далее Конференция, зародилась в г. Ярославле в год 100-летия великого русского советского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987). И настоящая Конференция посвящена уже 120-летию юбилею учёного.

В общей сложности в Конференции приняло участие 80 человек из 16 регионов России (Вологда, Глазов, Екатеринбург, Казань, Киров, Кострома, Москва, Нальчик, Пермь, Ростов-на-Дону, Самара, Санкт-Петербург, Стерлитамак, Сыктывкар, Шуя, Ярославль), причём очно около 60. В их числе 16 докторов наук (9 педагогических, 6 физико-математических, 1 технических), включая члена-корреспондента РАН А.А. Махнёва и члена-корреспондента РАО Ю.А. Саурова, и 36 кандидатов наук. Состоялось 7 пленарных и 10 секционных докладов.

К началу работы Конференции был выложен в Elibrary.ru электронный сбор-

ник материалов [3], который постоянно проиндексирован в РИНЦ. Сборник материалов, Программа Конференции и другая полезная информация размещены на сайте ВятГУ: mathconf.vyatsu.ru.

Пленарное заседание. Конференцию открыл председатель оргкомитета Конференции, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшего образования РФ, заведующий кафедрой фундаментальной математики Е.М. Вечтомов. С приветственным словом выступил сопредседатель оргкомитета Конференции, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии и алгебры Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д. Ушинского (ЯГПУ) В.В. Афанасьев. Именно Владимир Васильевич в 2003 г., будучи ректором ЯГПУ, основал Колмогоровские Чтения. Участников Конференции приветствовали также заместитель директора института математики и информационных систем ВятГУ А.В. Земцов и декан факультета компьютерных и физико-математических наук Н.А. Бояринцева. Они отметили значение математики и математического образования, а также роль академика А.Н. Колмогорова в развитии науки.

Первый пленарный доклад «Вводное слово об академике Андрее Николаевиче Колмогорове» сделал профессор Е.М. Вечтомов. Евгений Михайлович перечислил

ряд математических достижений Колмогорова, охарактеризовал его как выдающегося научного наставника, учениками которого являются десятки видных российских и зарубежных математиков, а многие другие математики считают его своим учителем, вдохновившим их на исследования. Велика роль Андрея Николаевича в математическом образовании школьников и студентов – это открытие физико-математической школы-интерната № 18 при МГУ в 1963 г. (которая сейчас носит имя Колмогорова), и создание журнала «Квант» в 1970 г., и написание школьных и вузовских учебников (он является автором или соавтором 35 книг), и реформа школьного математического образования в 1960–1970 годы (со всеми её плюсами и издержками). Математические результаты академика А.Н. Колмогорова (его идеи, понятия, теоремы, теории) продолжают обсуждаться в мировом математическом сообществе, применяться и развиваться. Так, классическая теорема Гельфанда–Колмогорова (*Максимальный спектр кольца непрерывных действительнозначных функций на произвольном тихоновском пространстве канонически гомотопен стоун-чеховской компактификации этого пространства*) послужила основой развития теории колец непрерывных функций и функциональной алгебры [2]. Заметим, что академик Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009) является учеником Колмогорова.

Свой доклад профессор В.В. Афанасьев и кандидат физико-математических наук, доцент Сергей Александрович Тихомиров (Ярославль) посвятили истории Колмогоровских Чтений. Сначала форум проводился ежегодно в Ярославле на базе ЯГПУ (2003–2015). Начиная с 14-х, Колмогоровские Чтения проходят раз в два года: в Коряжме (2017), в Арзамасе (2019), в Костроме (2021), в Кирове (2023). По итогам Кол-

могоровских Чтений издано 17 сборников материалов общим объёмом 360 печатных листов. Авторы констатируют, что на Колмогоровских Чтениях рассматривается и развивается творческое наследие Андрея Николаевича, анализируются и применяются его математические, педагогические и философские идеи, исследуется жизнь и деятельность великого математика. Было отмечено, что на Ярославской земле трепетно хранят имя великого земляка: установлена мемориальная доска на месте, где прошли детские годы Андрюши; одна из улиц города носит имя Колмогорова. И в XXI веке в городском общественном транспорте можно услышать почти ласковое объявление «следующая остановка – улица академика Колмогорова».

В докладе доктора физико-математических наук, учителя математики школы № 179 г. Москвы В.М. Имайкина анализируются замысел и функции возглавляемого им журнала «Математическое образование», являющегося периодическим учебно-методическим изданием в области математического образования. Валерий Марсович выделил и охарактеризовал 5 функций деятельности журнала «Математическое образование»: образовательную, просветительскую, публицистическую, научную и социальную.

Доклад доктора педагогических наук, кандидата физико-математических наук, профессора С.И. Калинина (Киров) называется «О сотрудничестве академика А.Н. Колмогорова с журналом “Математика в школе”». Сергей Иванович отмечает, что последние 20 лет жизни Андрей Николаевич входил в редколлегия журнала «Математика в школе», в период 1965–1986 гг. регулярно печатал в нём свои статьи по самым разным вопросам обучения школьников математике. Заметим, что С.И. Калинин уже три года является заместителем

главного редактора научно-теоретического и методического журнала для учителей и учащихся «Математика в школе».

Доктор физико-математических наук, профессор П.Н. Михайлов (Уфа) в соавторстве с кандидатом физико-математических наук, доцентом Геннадием Анатольевичем Клековкиным (Самара) выступил с докладом «Вспоминая прошлое, смотрим в будущее». Павел Никонович сравнил подготовку учителей математики в советской высшей школе и в современных педвузах и университетах. Проведённый авторами доклада анализ убедительно показал деградацию высшего педагогического образования в России. В сфере подготовки учителей математики и информатики необходимы кардинальные изменения с учётом богатого и проверенного опыта предыдущих поколений математиков-педагогов.

О развитии уральской академической алгебраической школы рассказал доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН А.А. Махнёв (Екатеринбург). Александр Алексеевич охарактеризовал этапы деятельности школы, её тематику (теория групп, дискретная математика), рассказал о видных представителях школы и их достижениях.

С завершающим пленарным докладом «"Проблемные зоны" и парадигма сложности в математическом образовании» выступил доцент С.А. Тихомиров в соавторстве с доктором педагогических наук, кандидатом физико-математических наук, профессором, заведующим кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике ЯГПУ Евгением Ивановичем Смирновым. В докладе анализируются актуальные проблемы школьного математического образования

в контексте рассматриваемой авторами парадигмы сложности. За подробностями отсылаем читателя к статье, опубликованной в сборнике материалов Конференции [3, с. 45–58].

Лекция В.В. Афанасьева. В первый день Конференции профессор Афанасьев прочитал актовую лекцию «О вероятности в играх», адресованную студентам и преподавателям факультета компьютерных и физико-математических наук. Лекция вызвала большой интерес воодушевлённой аудитории. Отметим, что Владимир Васильевич является знатоком, исследователем и пропагандистом теории вероятностей, автором известного, основательного вузовского учебника [1]. Благодарная аудитория познакомилась с авторским подходом к возможному введению в среднюю школу материала по теории вероятностей в игровой и наглядной форме. Лектором были представлены варианты вероятностных игр «со сгорающими» очками и игра на числовые характеристики случайных величин (моду, медиану, математическое ожидание). Впервые апробирован подход к введению новой дискретной случайной величины – «пропорциональная» – с выводом основных её числовых свойств.

Секционные заседания. В подготовленных аудиториях Инженериума состоялись заседания двух секций «Математика в вузе» (руководитель – профессор С.И. Калинин) и «Математика в школе» (руководитель – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики ВятГУ Лариса Валерьевна Панкратова). Выступили все желающие. В программе Конференции было заявлено по 12 докладов по каждой из секций. В сборнике материалов [3] опубликованы 23 соответствующие статьи. К сожалению, не все секционные докладчики смогли приехать в Киров. Наибольший

интерес вызвали доклады профессора В.В. Афанасьева «Треугольник Лейбница и его квадраты» и старшего преподавателя Алексея Андреевича Олехова (Пермь) «Об опыте организации исследовательской деятельности по математике в проектной школе TESTO 2.0».

Культурная программа. После секционных докладов для гостей Конференции была организована двухчасовая пешая прогулка-экскурсия по центру губернского града Кирова (бывшей Вятки). Запоминающуюся экскурсию провёл постоянный гид на вятских математических форумах, кандидат педагогических наук, доцент, краевед и эколог Анатолий Александрович Хохлов.

Во второй день Конференции, 15 сентября, состоялся выезд на 9 легковых автомобилях в историческое вятское село Ошеть, расположенное в 70 километрах от Кирова. Поездка была инициирована координатором Конференции Верой Ивановной Варанкиной, кандидатом физико-математических наук, доцентом, доцентом кафедры фундаментальной математики ВятГУ. Участники Конференции познакомились с историей и окрестностями Ошети, её постепенно восстанавливающейся Спасской церковью (деревянная церковь поставлена в 1690 г., а каменная в 1753 г.), музеем, двухвековой «васнецовской липой», усадьбой известных кировских скульпторов Леденцовых и др. Село Ошеть было основано одним из предков Васнецовых и стало родовым гнездом этой семьи. В Спасской церкви служили священниками предки и родственники великих русских художников Виктора Михайловича и Апполинария Михайловича Васнецовых. Заметим, что священники Васнецовы были в родстве со священниками Вечтомовыми; трижды прадед Е.М. Вечтомова Александр Григорьевич Вечтомов был

прадедом художников Васнецовых. В качестве экскурсовода по достопримечательностям Ошети выступал Е.О. Виноградов – кировский священник, бакалавр теологии, аспирант факультета истории, политических наук и культурологии ВятГУ.

Заключение. Конференция прошла на высоком математическом, методическом и коммуникационном уровне. Были тёплые встречи, новые знакомства, обмен книгами, полезные обсуждения, рекомендации по подготовке кандидатских диссертаций. Участники конференции поделились своими научными достижениями и методическими наработками в сфере математики.

Очередные 18-е Колмогоровские Чтения, планируется провести в 2025 г. в Тверском государственном университете.

Список источников

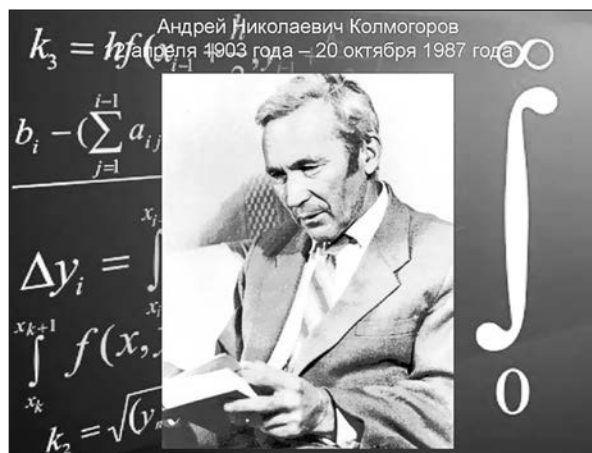
1. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей: учебник для вузов. – М.: Владос, 2007. 350 с.
2. *Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Сидоров В.В., Чупраков Д.В.* Элементы функциональной алгебры: монография. В 2-х т. – Киров: ВятГУ, 2016. Т. 1, 384 с.; Т. 2, 316 с.
2. Наставничество в математике и в математическом образовании: Материалы Международной научно-практической конференции XVII Колмогоровские чтения, посвящённые 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова. 14–15 сентября 2023 года. – Киров: ВятГУ, 2023. 234 с.

Афанасьев В.В.,

сопредседатель оргкомитета Конференции, д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, ФГБОУВО «Ярославский государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского», afvv2018@mail.ru;

Вечтомов Е.М.,

председатель оргкомитета Конференции, д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУВО «Вятский государственный университет» (г. Киров), vecht@mail.ru.



АКАДЕМИК А.Н. КОЛМОГОРОВ И ЖУРНАЛ «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Многогранная научная и педагогическая деятельность выдающегося учёного с мировым именем, 120-летие со дня рождения которого приходится на прошедший год, включала в себя и такую составляющую, как активное сотрудничество с нашим журналом.

Так, с января 1968 года и до последних дней своей жизни Андрей Николаевич входил в состав членов редколлегии журнала, посвятив его функционированию без малого два десятка лет. Кроме того, он был активным автором журнала, опубликовавшим на его страницах более полусотни статей.

Заметим, первые работы А.Н. Колмогорова, подготовленные совместно с П.С. Александровым, восходят ещё к 1941 году. Так, в № 2 журнала за указанный год была опубликована статья «Свойства неравенств и понятие о приближённых вычислениях», а в следующем выпуске – №3 – статья «Иррациональные числа». Для данных статей характерно строгое, лаконичное изложение затрагиваемого материала, однако их содержание совершенно доступно для читателя. Эти статьи

именитых авторов нацелены на повышение уровня математического образования педагогов, они могут оказывать помощь учителю математики в подготовке к урокам и сегодня.

Особенно активно академик Колмогоров А.Н. свои работы в «Математике в школе» публиковал в период 1965–1986 гг. Иногда в журнале выходило до шести его статей в год (так было, например, в 1971 г.).

Актуальными по сей день остаются следующие работы автора, вышедшие в рубрике «Научные основы школьного курса математики»:

- «Современные взгляды на природу математики» (1969, № 3);
- «Натуральные числа» (1969, № 5);
- «Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа» (1970, № 2).

Перечисленные работы Андреем Николаевичем подготовлены на основе лекций, прочитанных им в Центральном лектории общества «Знание» в 1968/1969 учебном году.

Перу Андрея Николаевича принадле-

жат методические работы, посвящённые целому ряду наиважнейших тем школьного курса математики. Отметим их, соблюдая хронологический принцип.

Алгебра и начала математического анализа: 1965, № 6 – в статье рассматриваются предел функции, непрерывные функции, а также понятие производной; 1966, № 2 – понятие тождества; 1968, № 1 – понятие степени и показательная функция; 1971, № 2 – основные понятия и обозначения в школьном курсе математики; 1975, № 1 – метод математической индукции; 1975, № 2 – действительные числа и пределы; 1975, № 2 – комбинаторика; 1976, № 1 – тригонометрические функции и их производные; 1976, № 6 – интеграл; 1979, № 6 – показательная и логарифмическая функции; 1982, № 5 – предел; 1984, № 1 – понятие множества; 1986, № 3 – скалярные величины.

Геометрия: 1965, № 2 – обсуждаются геометрические преобразования; 1970, № 5 – осевая симметрия, углы и повороты, параллельность; 1972, № 6 – конгруэнтность и равенство фигур; 1973, № 1 – параллельность и параллельный перенос; 1981, № 3 – понятие вектора в курсе средней школы, свойства векторов.

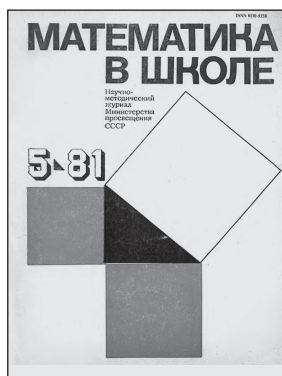
Особенно много статей А.Н. Колмогорова, помещённых в журнале, связано с

характеризацией и совершенствованием учебников, учебных пособий, программ школьного курса математики: 1966, № 3; 1967, № 1; 1967, № 2; 1967, № 6; 1968, № 2; 1970, № 4; 1971, № 4–6; 1972, № 1; 1973, № 2, № 5; 1979, № 3; 1980, № 4; 1981, № 5; 1983, № 2. Работы данного направления оказывали значительную помощь учителю математики в его практической деятельности по обучению школьников.

Несколько статей Андрея Николаевича посвящены персоналиям: 1973, № 4 – о Петровском И.Г.; 1978, № 6 – о Соболеве С.Л.; 1982, № 1 – о Гнеденко Б.В.; 1982, № 2 – о Канторовиче Л.В.; 1983, № 1 – об Александрове П.С.; 1984, № 1 – статья «С.Л. Соболев и современная математика», а его статьи «О содержании школьного курса математики» (1965, № 4); «Современная математика и математика в современной школе» (1971, № 6); «О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения» (1978, № 3) затрагивают мировоззренческий аспект проблем математического образования.

С.И. Калинин,

заместитель главного редактора
журнала «Математика в школе»



К ЮБИЛЕЮ ЖУРНАЛА. ВЗГЛЯД ИЗ РЕГИОНА

TO THE ANNIVERSARY OF THE MAGAZINE. VIEW FROM THE REGION

Дискуссионная статья 5.8.1

Discussion article 5.8.1

УДК: 51

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_69

А.В. Якубов, кан. пед. наук, доцент, ведущий научный сотрудник КНИИ им. Х.И. Ибрагимова РАН (г. Грозный); ayakubov@mail.ru

A.V. Yakubov, PhD (Pedagogy), associate Professor, Leading Researcher of the Kh.I. Ibragimov Research Institute of the Russian Academy of Sciences (Grozny); ayakubov@mail.ru

Аннотация: автор, читатель и почитатель журнала со стажем, превышающим половину жизни журнала, рассказывает о своём опыте работы с журналом, приводит пример действий, рассматривая статью при отрицательной рецензии. Здесь также приведены некоторые факты из жизни учителя, взгляд автора на настоящее журнала и пожелания на будущее

Abstract: the author, reader and admirer of the magazine with experience of using more than half the life of the magazine, talks about his experience of working with the magazine, gives an example of actions, considering an article with a negative review. It also contains some facts from the life of the teacher, the author's view of the present of the magazine and wishes for the future

Ключевые слова: жизнь журнала, рубрики журнала, роль в работе учителя, редакторы журнала, защиты диссертаций по методике

Keywords: life of the magazine, sections of the magazine, role of the teacher in the work, editors of the magazine, defense of dissertations on methodology

© А.В. Якубов 2024

«Журнал «Математика в школе» – самое авторитетное периодическое издание для учителей математики, история которого насчитывает 90 лет. Не одно поколение учителей считало и считает его верным советчиком и надёжным помощником в своей работе.

Каждый год перед началом занятий учитель размышляет над тем, как построить ход урока и спланировать изложение той или иной темы. Как наиболее грамотно составить поурочное планирование учебного материала по разным профилям школьного курса математики и оптимально подобрать задания для проверки знаний школьников?

На эти «вечные» учительские вопросы вы найдёте квалифицированные отве-

ты на страницах журнала «Математика в школе». В рубриках «Консультация» и «Открытый урок» опытные учителя, методисты, педагоги поделятся с вами своими секретами преодоления трудностей, помогут разобраться со сложными темами курса, организовать работу с отстающими учениками, развить интерес у школьников к математике [1].

90 лет – возраст более чем солидный. Казалось бы, всё сказано, написано. Ан нет, издание выходит, не повторяется. Журнал пережил многое: и Великую Отечественную войну 1941–1945 гг., и распад СССР, и даже период, когда, в относительно стабильное время конца 80-х годов, из-за нехватки средств был вынужден печататься в формате А5.

Математика и школа. Возвышенное и обыденное. Математика – в вечном поиске новых задач и решений, а школа – исторически консервативна. При формировании знаний кавалерийским наскоком, маханием саблей проблему не решишь.

Содержание школьной программы по математике претерпело целый ряд изменений за эти 90 лет, методика преподавания – тоже. Но не настолько радикальные, как некоторым хотелось бы (я имею в виду учёных-математиков), и не настолько простые для тех, кто должен был реализовывать это на практике (здесь уже предполагаются учителя математики).

В журнале со временем сформировались стабильные рубрики, некоторые из которых прошли испытание временем. Также появились и новые рубрики. Хотел бы отметить ту огромную роль, которую сыграл журнал при введении в школьный курс математики стохастической линии, когда не только школьные учителя, но и преподаватели-методисты в вузах не были готовы к введению элементов теории вероятностей в программу по математике. Серия статей, опубликованных в тот период, помогла учителям и методистам менее болезненно принять инновации.

Сегодня с огромным удовольствием читается «Слово главного редактора», анонсирующее темы номера журнала и взгляды на важные аспекты школьной жизни без всякого ретуширования реалий.

В 1978 году меня, по окончании механико-математического факультета Чечено-Ингушского государственного университета, направили в школу в предгорном селе Урус-Мартановского района ЧИАССР на три года отработки. В первые же дни работы возникли проблемы, связанные с составлением календарно-тематического плана (сказались упущения при обучении в вузе). Опытные учи-

теля адресовали меня к журналу «Математика в школе», где я нашёл, и без особого труда переписал примерные планы, от которых в дальнейшем старался не отступать. Учебная нагрузка в тот год у меня была чуть ли не запредельная – 46 часов в дневной школе и 9 часов в вечерней. С тех пор, уже 45 лет, правда, с небольшим перерывом в 90-е годы, журнал остаётся моим надёжным помощником в работе.

Через год, переведясь в восьмилетнюю школу своего села, ныне ставшего городом, я дал себе зарок, больше 24-х часов нагрузки не брать (насколько тяжёлым был урок того года).

Через четыре месяца меня назначили завучем в той же школе. Нагрузка в 24 часа осталась. Кстати, у меня в те годы была зарплата выше, чем у министра просвещения ЧИАССР. Насколько помню, у него зарплата была 250 рублей, у меня – больше. Да, у министра были возможности получения не декларируемых доходов, но зарплата министра была меньше, чем у завуча сельской восьмилетней школы, который имел ещё дополнительно 24 часа учебной нагрузки (разрешёнными для завучей были 12, при учительской норме в 18 часов). Это так, для сведения, о значимости учителя в стране. Хотя и тогда были жалобы на низкие зарплаты учителей.

В новой роли уже я рекомендовал вновь набираемым коллегам активно использовать в организации учебного процесса научно-методические журналы.

Самый интересный период использования журнала был, когда через несколько лет я взял параллель четвёртых классов (в то время они относились к среднему звену) и поставил задачу довести их до выпускного 10 класса. Текучесть кадров всегда болезненно отражается на детях, а методика преподавания конкретного учителя приводит к тому, что дети привыка-

ют к его приёмам организации и ведения урока, к его строгости и юмору на взаимной основе. Так было и в этом случае.

Мы довольно быстро нашли общий язык и уже к седьмому классу стали проводить чуть ли не каждый вечер в школе.

К тому времени я уже поступил в заочную аспирантуру МГПИ им. В.И. Ленина, где пересекался лично с главным редактором журнала Р.С. Черкасовым, участником ВОВ, профессором кафедры методики преподавания математики. До Ростислава Семёновича, редактором был А.Н. Барсуков, автор известных школьных учебников, например, [2]. После Черкасова Р.С. главным редактором журнала был А.И. Верченко, а теперь – Е.А. Бунимович. Было бы интересно написать о главных редакторах ведущего журнала к его юбилею, тем более, что статьи про некоторых из них ранее были уже опубликованы. Освежить и отдать долг памяти, как мне представляется, было бы достойным поступком.

В 1987 году в моей школе появился первый в республике компьютерный класс КУВТ-86. Мне надо было осваивать компьютер, заниматься научной работой, поэтому я ушёл с должности завуча, снизил учебную нагрузку, чтобы сосредоточиться на диссертации. А дети вечерами продолжали приходить ко мне в школу, но у меня язык не поворачивался рассказать им о моей загруженности, и, тем более, прекратить вечернее общение. И встречи продолжились. Контакты с выпускниками сохраняются и сейчас, спустя более 30-ти лет.

Итак, мне надо было писать программы для экспериментальной части исследования, статьи и диссертацию. Диссертация, кстати, была полностью написана в вечернее и ночное время в стенах школы на этих компьютерах. Главным помощником во время встречи со школьниками стал жур-

нал «Математика в школе». На наших «вечерах», я задавал детям задачи из соответствующего раздела журнала «Математика в школе». Чтобы работать (точнее – играть) в компьютерном классе, тоже нужно было решить задачи из журнала.

Желание работать на диковинках (в то время они действительно были раритетами) преобладало, и дети сидели в школе допоздна, роясь в учебниках и решая задачи. У меня в этот промежуток появлялось свободное время для своих занятий. А как радовались дети, когда в их решении задачи были несовпадающие части с журнальным вариантом при правильном ответе. Некоторые решения задач отсылались в редакцию. В двух номерах журнала мы «засветились» в «Сводке решений». Это были, по-моему, единственные случаи, когда представители из Чеченской Республики появились в сводке. В 1990 году эти дети окончили школу, а я полностью погрузился в свою работу.

Моя первая статья, посвящённая итогам республиканской олимпиады по математике, была опубликована в журнале в 1988 году. В тот год на этой олимпиаде появился практический тур, впоследствии канувший в лету. Именно ему и был посвящён материал. А вторая статья, по материалам диссертации, появилась уже в 1989 году в четвёртом номере журнала, под названием «ЭВМ в сельской школе».

Интересным было прохождение рецензии к этой статье. В тексте я изложил форму использования персональных компьютеров как средства повышения качества уроков, систематизации и обобщения знаний в традиционной системе обучения за счёт информационного обеспечения учителя. Уровень усвоения учащимися пройденной темы определяется, как известно, контрольной работой. Перед контрольной работой проводится урок

систематизации и обобщения знаний по теме, на котором у учителя есть возможность попытаться устранить упущения в освоении темы путём более качественной организации урока. Компьютеры в то время имели временные ограничения на использование в 15–20 минут в неделю (!). Статью отдали на рецензию, как впоследствии выяснилось, доктору физико-математических наук, профессору В.Г. Болтянскому. Насколько я помню, в его рецензии было такое предложение: «Это пример того, как не надо использовать компьютер». Получив такой ответ, я предположил, что рецензент, видимо, не работал в общеобразовательной школе и далёк от реальных задач и проблем учителей. После моих претензий статью направили другому рецензенту и, как видим, она всё же увидела свет.

Для повышения квалификации некоторые учителя направлялись на курсы мехмата МГУ. Мне посчастливилось дважды принимать участие в работе этих курсов, где некоторые занятия великолепно проводил В.Г. Болтянский (автор многих методических пособий, в т.ч. и [3], которые помогали учителям в практической работе).

Работая в педвузе, я регулярно обращался к журналу сам и рекомендовал это делать студентам. На занятиях мы разбирали некоторые статьи. Раздел «Задачи», важный компонент журнала, также являлся объектом внимания студентов. Особенно важными были и остаются статьи, посвящённые аттестации учащихся (ОГЭ, ЕГЭ и даже материалы для контрольных работ). Также интересны материалы содержания программ по математике и организации учебного процесса в зарубежных странах.

В журнале освещается деятельность учителей-новаторов, что привлекает пре-

подавателей-методистов вузов. Они, в свою очередь, доводят это до студентов. У журнала был период, когда возносили и шельмовали В.Ф. Шаталова [4, 5]. Здесь я хотел бы отметить один момент. Есть такая структура, которая раньше называлась АПН СССР (ныне РАО). Сколько среди членов этой организации лиц, работающих в школе, на деле показывающих реальные результаты, а не сидящих в тёплых помещениях и расписывающих свои гипотетические воображения/фантазии? Почему академиками не становятся учителя школ, которых называют учителями-новаторами, стабильно и без очковтирательства показывающие высокие результаты? Их опыт изучается в вузовском курсе теории и методики обучения математике. Почему не были членами этой Академии В.Ф. Шаталов, А.А. Окунев? Ведь, про эффективность их работы написано немало книг и статей. Почему тот же Хазанкин Р.Г., учитель математики Белорецкой школы № 14 Республики Башкортостан, не член РАО? Его опыт освещён в ряде публикаций, в частности, [6]. В Википедии на его страничке написано, что из его учеников более двухсот человек окончили ведущие вузы страны. Более 60-ти стали кандидатами наук, 4 – докторами наук. На мой взгляд, фактические академики в педагогических науках эти лица, а не те, которые не знают, как практически спланировать урок.

Считал бы чисто символически правильным, как это делается в ряде других изданий, в ежегодной нумерации журнала в скобках указывать порядковый номер от первого выпуска. За основу нужно взять 1934 год.

Были времена, когда тираж журнала в бумажном варианте достигал сотен тысяч экземпляров. Например, тираж журнала из моей библиотеки № 4 за 1988 год составлял 464160 экз. В более ранний период, к примеру, при редакторе Барсуко-

ве А.Н. тираж № 5 за 1954 г. составлял 90450 экз.

Общеизвестно, что ни один читатель журнала не читает подряд все статьи. Инструктивно-нормативная база руководящих структур ныне доступна в интернете сразу же после принятия. Сегодня в условиях всеобщей компьютеризации, информатизации и цифровизации, наверное, вполне достаточен тираж, обеспечивающий журналом авторов статей, подписчиков, ведущие библиотеки и педагогические вузы страны, ибо любую статью теперь можно заказать на сайте издательства.

Отмечу ещё пару моментов.

Я бы лично хотел, чтобы на страницах журнала не менее активно, чем раньше, освещались все этапы уроков, проводимых реально работающими в школах учителями, как столичными, так и региональными. Пусть даже с некоторыми повторами, пусть в соавторстве с учёными-педагогами, хотя, желательно, самостоятельно (тогда можно будет и квалификацию повысить, и узнать о реальных проблемах учителя). Освещались уроки, использующие современные технологии, которые, возможно, впоследствии смогут подменить, а может быть даже заменить реального учителя для определённой категории учащихся (слишком сильны возможности новых технологий).

Как-то, проведя анализ данных по защитах диссертаций по педагогическим наукам среди земляков, я обнаружил, что в советское время в стране соотношение методики и остальных направлений педагогической науки было 5:1. Сегодня – наоборот.

По данным страницы «Объявления о защитах» сайта ВАК РФ, при задании параметров поиска защит с 01.01.2021 по 2023 год по шифру 5.8.2, за два с половиной года, выставлено к защите пример-

но 1200 диссертаций по педагогическим наукам. По теории и методике обучения и воспитания их всего 180. А из этих 180-ти по теории и методике обучения математике лишь десятая часть, т.е. их число незначительно.

Я хотел бы, чтобы на страницах журнала, как это делается в разделе «Сводка решений задач», анонсировались или публиковались сведения и о защитах диссертаций по методике обучения математике. Это, на мой взгляд, могло бы содействовать формированию интереса и вовлечению в научную деятельность молодёжи, желательно молодых учителей-практиков. Диссертации таких учителей-практиков будут привязаны к учебному процессу и смогут реально отражать фактическую картину.

Пользуясь случаем, желаю коллективу редакции и всем сотрудникам, задействованным в подготовке и выпуске журнала, здоровья и творческих успехов!

Список источников

1. https://www.elibrary.ru/title_about_new.asp?id=8822 / Дата обращения 21.05.2023/
2. Барсуков А.Н. Алгебра. Учебник для VI–VIII классов. Под ред. С.И. Новоселова. Изд. 6-е, перераб. И доп. М.: Учпедгиз. 1961, 296 с.
3. Болтянский В.Г. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1974. – 576 с.
4. Гладкий А.В. О методической системе В.Ф. Шаталова, Математика в школе, № 4, 1988, с. 38–42.
5. Дадаян А.А., Кузнецов Е.П. Ошибки на экране. Математика в школе, № 4, 1988, с. 42–44.
6. Халомайзер А. Я. Об опыте работы учителя Р.Г. Хазанкина. Математика в школе, 1987, № 4, с. 16–21.

Статья поступила в редакцию 27.05.2023.

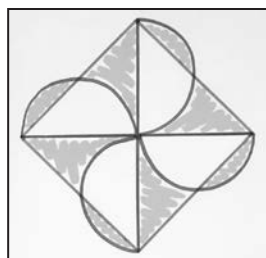
Принята к публикации 17.08.2023.

СМОТРИ И РЕШАЙ В УМЕ!

Красочные геометрические головоломки Катрионы Агг (Ширер), учителя математики из Великобритании, давно завоевали популярность в социальных сетях. Они идейно просты, лаконичны и визуально привлекательны. Все рисунки ручной работы и выполнены обычными фломастерами. Это придаёт задачкам особую прелесть, как и то, что многие из них решаются в уме, требуя прежде всего догадки и озарения. Достаточно всмотреться в рисунки, попробовать мысленно преобразовать фигуры – и ответ станет очевиден! Предлагаем четыре красивые и нехитрые головоломки из коллекции Катрионы*.

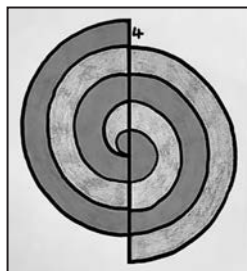
1. Дольки апельсина

На рисунке изображены квадрат и полукруги. Какова площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждого полукруга равен 5?



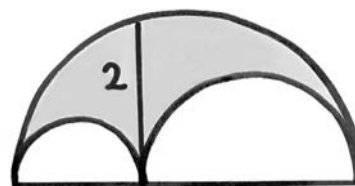
2. Двойная спираль

Десять равноотстоящих друг от друга точек (расстояние между соседними точками равно 4), связаны полукругами, которые образуют фигуру из двух спиралей разного цвета. Какая её часть больше: тёмного или светлого цвета? На сколько?



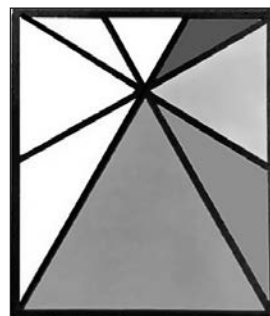
3. Арбелос

Вертикальный отрезок перпендикулярен диаметрам трёх кругов. Длина отрезка равна 2. Какова площадь закрашенной фигуры – арбелоса?



4. Сравним площади

Прямоугольник разбит на восемь треугольников. Четыре из них, раскрашенные в разные цвета, – равносторонние. Какую часть прямоугольника они покрывают?



Ответы см. на с. 3 обложки.

* По материалам theguardian.com и twitter.com/Cshearer41. – Прим. ред.

Портрет педагога

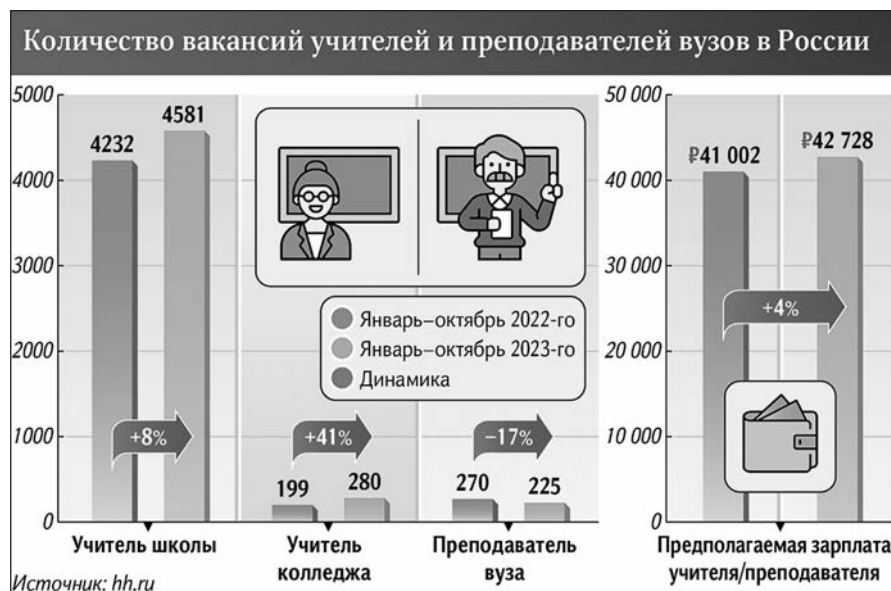
УТЕЧКА КАДРОВ

(в двух из пяти российских школ не хватает учителей)

* По данным мониторинга и опроса директоров школ, проведённых общественным движением «Народный фронт», порядка 40% школ в России имеют открытые вакансии преподавателей. Во всех этих школах сообщили о нехватке учителей математики, и в половине из них нет учителей физики. В последние годы проблема усугубилась. В ближайшем будущем замещать уходящих на пенсию учителей будет просто нечем.

* В 2023 году из государственных педагогических вузов выпустились 46 тыс. студентов, заявили в Минпросвещения. Уровень трудоустройства выпускников – почти 80%. Но стоит ли рассчитывать на такой кадровый резерв? По прогнозу РАО, в 2029 году в школах будут работать не более 6% учителей моложе 30 лет. До 25% учителей уходят из школы в первые пять лет работы. Школы проигрывают в борьбе за выпускников вузов и молодых учителей, у которых сегодня много альтернатив. Например, очень востребованы репетиторы и преподаватели онлайн-школ. Часть педагогов уходит в бизнес-тренеры, сферу услуг и пр. Там нагрузка намного меньше, а доход больше.

* Дополняет картину статистика сервисов по поиску работы. Так, согласно данным HeadHunter (HH), число вакансий учителей в 2023 году по сравнению с прошлым годом увеличилось: для школ на 8%, для колледжей – на 41%. На платформе «Авито. Работа» отметили, что в третьем квартале 2023 года спрос вырос и на учителей (более чем в 4 раза, если сравнить с таким же периодом 2022 года), и на студентов старших курсов педвузов и колледжей (за полгода он увеличился в 2,6 раза).



Подробности: iz.ru.

Перспективы далёкие и близкие

ТРЕБУЮТСЯ ГЕОАНАЛИТИКИ И ТЕХНОЭТИКИ

(куда податься и чему учиться?)

* Ещё в 2018 году Ирландская ассоциация промышленников и работодателей (IBEC) провела исследование и сделала два интересных прогноза, обусловленных бурным развитием технологий и ростом спроса на новые умения и навыки. Во-первых, более 60% нынешних детей получают профессии, которых пока не существует. Во-вторых, рынок занятости станет куда более гибким и переменчивым. Нормой будет ситуация, когда к 40 годам человек имеет за плечами опыт работы в десятке разных мест. Преимущество будет у людей, способных к быстрой адаптации и переквалификации. Школьникам и студентам нужно готовиться к тому, что их учёба с получением университетского диплома не закончится, а только начнётся.

* Вот что прогнозируют сегодня специалисты Института статистических исследований и экономики знаний ВШЭ: две трети детей, поступивших в школу в 2016 году, будут работать по профессиям, которых ещё не существует, а половине работающих потребуется переподготовка уже в ближайшие годы. По оценке экспертов, через пять лет должны измениться 40% основных навыков работников. Уже наблюдается тренд на специалистов с широким спектром навыков, сотрудников, обладающих развитым критическим мышлением и способностью проводить глубокий анализ, а также быстро и результативно обучаться. Будут востребованы представители новых профессий: геоаналитики, архитекторы мультиоблачных решений, техноэтики и др.

* Эксперты ВШЭ считают, что после 2025 года численность студентов, выбирающих традиционное обучение в университете, сократится, а к 2030 году классическая модель получения высшего образования и последующей работы по специальности на протяжении жизни утратит актуальность. Ожидается переход к концепции обучения на протяжении всей жизни и развитие сферы профессиональной переподготовки. К слову, сегодня в России в образовательных программах участвуют 15% трудоспособного населения, тогда как в развитых странах – 40%.

Подробности: tass.ru, rbc.ru.

Хроники

ВКАЛЫВАЮТ РОБОТЫ, А НЕ ЧЕЛОВЕК

(педвуз одобрил использование нейросети, а ChatGPT научили проверять ЕГЭ)

* С этого года МГПУ легализовал для студентов использование чат-ботов и других инструментов искусственного интеллекта (ИИ) при подготовке выпускных квалификационных работ (для получения данных и генерирования текстов при работе над дипломом). Решение приняли на заседании Учёного совета. «Де-факто и студенты, и преподаватели этим уже пользуются, – заявил ректор вуза Игорь Реморенко. – Если в будущем нашим выпускникам всё равно не избежать использования этого инструмента, лучше научиться грамотно его использовать, уже обучаясь в вузе». Он также отметил, что университет вводит строгие правила для недопущения прямого списывания с помощью ИИ. Что за правила и как они будут работать на практике, не уточняется.

* В онлайн-школе английского языка Skyeng научили чат-бот на основе ChatGPT прове-

рять ЕГЭ и предлагают внедрить нейросети в систему проверки Единого госэкзамена. В компании считают: это может устранить погрешности, связанные с человеческим фактором при проверке работ. Чат-бот прошёл слепое тестирование с участием членов предметной комиссии и показал хорошие результаты при проверке разных аспектов ответов. В 68% случаев он оценил критерии ответов не хуже эксперта. В 61% случаев качественно аргументировал поставленную оценку и объяснил, почему снижен балл.

Подробности: mgpu.ru, iz.ru.

Из жизни учёных

ПОД АККОМПАНЕМЕНТ

(как музыка влияет на оценки по математике)

Усвоение математики детьми происходит лучше, если сочетать её с музыкой. К такому выводу пришли в Белекском университете (Турция), проанализировав и обобщив результаты 55 исследований по этой теме, опубликованных в период с 1975 по 2022 год. В исследованиях приняли участие почти 78 тыс. детей и подростков со всего мира – от воспитанников детских садов до студентов университетов. Учитывалось и обучение музыке в рамках школьной программы, и использование её на уроках математики. Тестирование учащихся показало, что в обоих случаях это приводило к улучшению оценок по математике. Посещение уроков музыки повысило показатели успеваемости по математике у 59% учеников. Около 73% ребят, присутствовавших на интегрированных уроках математики и музыки, решали задачи лучше, чем подростки, вообще не сталкивающиеся с музыкой в школе. Наибольший эффект музыка оказывала на учеников младших классов, изучающих арифметику и базовые математические понятия. Авторы отметили, что математика и музыка имеют много общего, обе требуют абстрактного мышления и количественных рассуждений.

Подробности: naked-science.ru.



Житейские истории

ДЕТСКАЯ ЗАДАЧА

(как поставить в тупик профессора математики)

Следующий любопытный случай попал на страницы британского издания The Mirror. Мама семилетнего школьника пожаловалась в Facebook на задачу из учебника математики, которую задали её сыну. Вопрос оказался настолько сложным, что сбил с толку пользователей и даже поставил в тупик профессора математики, он вообще



не понял, что требуется от ребёнка. Вот эта задача. Карла сказала: «У меня есть 3 фишки с числом сто, 17 фишек с числом десять и ещё 16 – с числом 1». а) Может ли Карла составить два равных трёхзначных числа? Если да, нарисуйте фишки, чтобы показать их. б) Может ли она составить два равных трёхзначных числа, используя все фишки? Если да, нарисуйте фишки, чтобы показать их. Журналисты обратились за помощью к эксперту, которая назвала правильные ответы на вопросы. Она подсчитала, что сумма чисел на всех фишках равна 486. Тогда ответ на первый вопрос: любое трёхзначное число от 100 до 243. Ответ на второй вопрос: число 243.

Подробности: lenta.ru.

Пополняем ресурсы

ОТ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ПАРАШЮТА – ДО ПОИСКА ВНЕЗЕМНЫХ ЦИВИЛИЗАЦИЙ

(о пользе уравнений и формул просто и с юмором)

Представляем новую книгу британского учителя математики и популяризатора науки Криса Уоринга «Формулы на все случаи жизни» (М., Альпина Паблишер, 2022). Ранее на русском языке вышел его сборник «Математика на ладони» (2020). «Абсолютно всё – от образования галактик до расположения веснушек на носу ребёнка – есть результат решения уравнений, – утверждает Крис Уоринг. – Нравится вам это или нет, предпочитаете ли вы “метод научного тыка” или упорядоченные действия – уравнения сопровождают каждый аспект вашей жизни... Так, может быть, пора поближе познакомиться с миром математики?» Автор живо и доходчиво расскажет о пользе школьных формул и уравнений – математических вроде формулы площади сферы или числа сочетаний и физических, выражающих разные законы, – и не только. Чего стоит одна только оригинальная формула для варки яиц, сложно устроенная и оттого «жутковато» выглядящая.

Подробности: nplus1.ru/blog/2022/04/21/an-equation-for-every-occasion (фрагмент книги).



Нетривиальные суждения

За что я люблю математику, так это за то, что я – самый обычный человек, проживающий на небольшом острове в Северном полушарии, – стою на вершине пирамиды знания, уходящего корнями в тысячелетия человеческих исследований и культур. Я знаю, что существует огромное количество людей, чьи пирамиды в разы выше моей, и я решил посвятить свою жизнь тому, чтобы помогать другим людям возводить свои собственные.

Крис Уоринг

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Научная статья: 5.8.2

Scientific article: 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_79

Сегодня мы поговорим о задачах по планиметрии, связанных с четырёхугольниками. Задачи преимущественно взяты из разных этапов олимпиады им. Л. Эйлера и ориентированы на обучающихся 8-го класса. Здесь можно наблюдать разнообразие методов – счёт углов, отображения, симметрии и много других.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Поддаеву Михаилу Валерьевичу по адресу podaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя. Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

1. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D . На стороне AB выбрана точка P . Отрезки PC и AD пересекаются в точке Q . Точка R – середина отрезка AP . Докажите, что существует фиксированная точка X , через которую прямая RQ проходит при любом выборе точки P .

А. Кузнецов

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AD и CE пересекаются в точке X . Оказалось, что $ABCX$ – параллелограмм и $BD = CX$; $BE = AX$. Докажите, что $AE = CD$.

С. Берлов

3. CL – биссектриса треугольника ABC . $CLBK$ – параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P . Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geq CL$.

С. Берлов

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и AQ пересекаются в точке R .

Оказалось, что $AR = CR = PR + QR$. Докажите, что из отрезков AP , CQ и PQ можно составить треугольник, один из углов которого равен углу B .

С. Берлов

5. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K . Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M , что $MBC = MAD$, $MCB = MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции.

М. Кунгожин

Решения заданий из № 8–2023 Задачи по теории чисел

1. Найдите все целые a такие, что следующее уравнение имеет целочисленное решение $x^3 + 2ax + 1 = 0$.

Решение. Перепишем в виде

$$\begin{aligned} x^3 + 2ax &= -1, \\ x(x^2 + 2a) &= -1. \end{aligned}$$

Произведение двух целых чисел равно -1 , значит, наши множители это 1 и -1 . То есть $x = 1$ или $x = -1$. Значит, $x^2 = 1$,

$1 + 2a = \pm 1$, $a = -1$ или $a = 0$.

2. Верно ли, что если две положительные несократимые дроби в сумме дают 1, то их знаменатели равны?

Решение.

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = 1,$$

$$p + \frac{r}{s}q = q$$

$\frac{r}{s}q$ – натуральное, r и s не имеют общих делителей, значит, q кратно s .

Аналогично s кратно q . То есть $q = s$. Доказано.

3. Докажите, что $a^4 + 64$ составное число при любых натуральных a . (Задача Софи Жермен).

Решение. Добавим и вычтем $16a^2$:

$$\begin{aligned} a^4 + 16a^2 + 64 - 16a^2 &= \\ &= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = \\ &= (a^2 - 4a + 8)(a^2 + 4a + 8). \end{aligned}$$

Как видим, выражение представимо в виде произведения двух многочленов. Оно будет простым только тогда, когда одна из скобок равна 1, а другая при данном a – простое число. Проверим каждую скобку на возможность равняться 1.

$$a^2 - 4a + 8 = 1,$$

$$a^2 - 4a + 7 = 0,$$

$$D = 16 - 28 < 0.$$

Как видим, ни при каких натуральных a первая скобка не будет равняться 1.

$$a^2 + 4a + 8 = 1,$$

$$a^2 + 4a + 7 = 0,$$

$$D = 16 - 28 < 0.$$

Аналогично вторая скобка ни при каких натуральных a не может равняться 1. Значит, число $a^4 + 64$ будет составным при любом натуральном a .

4. Докажите, что при любом натуральном n число $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ – это точный квадрат.

Решение. Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= \\ &= (n^2 + n)(n^2 + 5n + 6) + 1 = \\ &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

5. Покажите, что любое нечётное число представимо в виде разности квадратов двух целых чисел.

Решение. Добавим и вычтем n^2 :

$$2n + 1 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2.$$

Задачи подготовил

Подает М.В.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

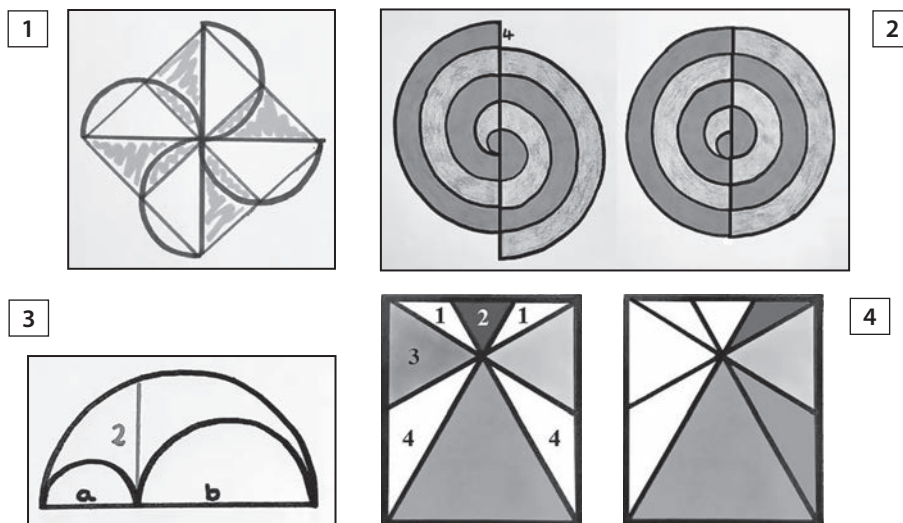
Мопертью против Кассини

В 1730-х годах Парижская академия наук организовала серию экспедиций, имевших целью путём непосредственных измерений на земной поверхности выяснить характер искривлённости меридиана. Экспедиции проводились на разных широтах. Одну из них возглавил молодой академик Пьер Мопертью (1698–1759). Его доклад на заседании академии произвёл сенсацию. Дело в том, что незадолго до этого экспедиция академии, возглавляемая Джованни Кассини (1625–1712), производила градусные измерения меридиана на территории Франции и получила результаты касательно искривлённости меридиана на этой территории. Экстраполировав эти результаты на весь меридиан, Кассини пришёл к выводу: Земля не сжата, а наоборот, вытянута вдоль оси. Открытие Мопертью с блеском опровергало этот в высшей степени курьёзный вывод.

По книге: *Кованцов Н.И.* Математика и романтика (Киев, Вища школа, 1976).

СМОТРИ И РЕШАЙ В УМЕ!

Ответы к головоломкам, приведённым на с. 74



1. Дольки апельсина

Проведём средние линии квадрата и закрасим фигуры иначе [1]. Четыре закрашенных треугольника, сложенные вместе, образуют квадрат со стороной, равной диаметру полукруга, то есть 10, а его площадь равна 100.

2. Двойная спираль

Перекроем фигуру в круг, как показано на рисунке [2]. Новая фигура состоит из трёх двухцветных колец, половина их площади закрашена тёмным цветом, а другая половина – светлым, а также малого круга из неравных частей разного цвета, и площадь тёмной части на 4π больше, чем площадь светлой.

3. Арбелос

Пусть длины диаметров малых полукругов равны a и b [3].

Площадь арбелоса

$$S = (\pi(a + b)^2 - \pi a^2 - \pi b^2) : 8.$$

Среднее геометрическое a и b равно 2, тогда

$$ab = 4 \text{ и } (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab = 8.$$

Значит, $S = 8\pi : 8 = \pi$.

4. Сравним площади

Пронумеруем части данного прямоугольника, равные фигуры обозначим одинаково [4]. Треугольники 1 и 4 – равнобедренные. Треугольники 1 и 2, а также 3 и 4 – равновеликие между собой. Тогда закрашенные на обоих рисунках фигуры – «крест» и прямоугольная трапеция – имеют одинаковую площадь. Легко видеть, что она равна двум третьим от площади прямоугольника.

ПОДПИСКА 2024. II ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



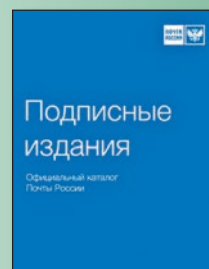
Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2024, № 1, 1–80