

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

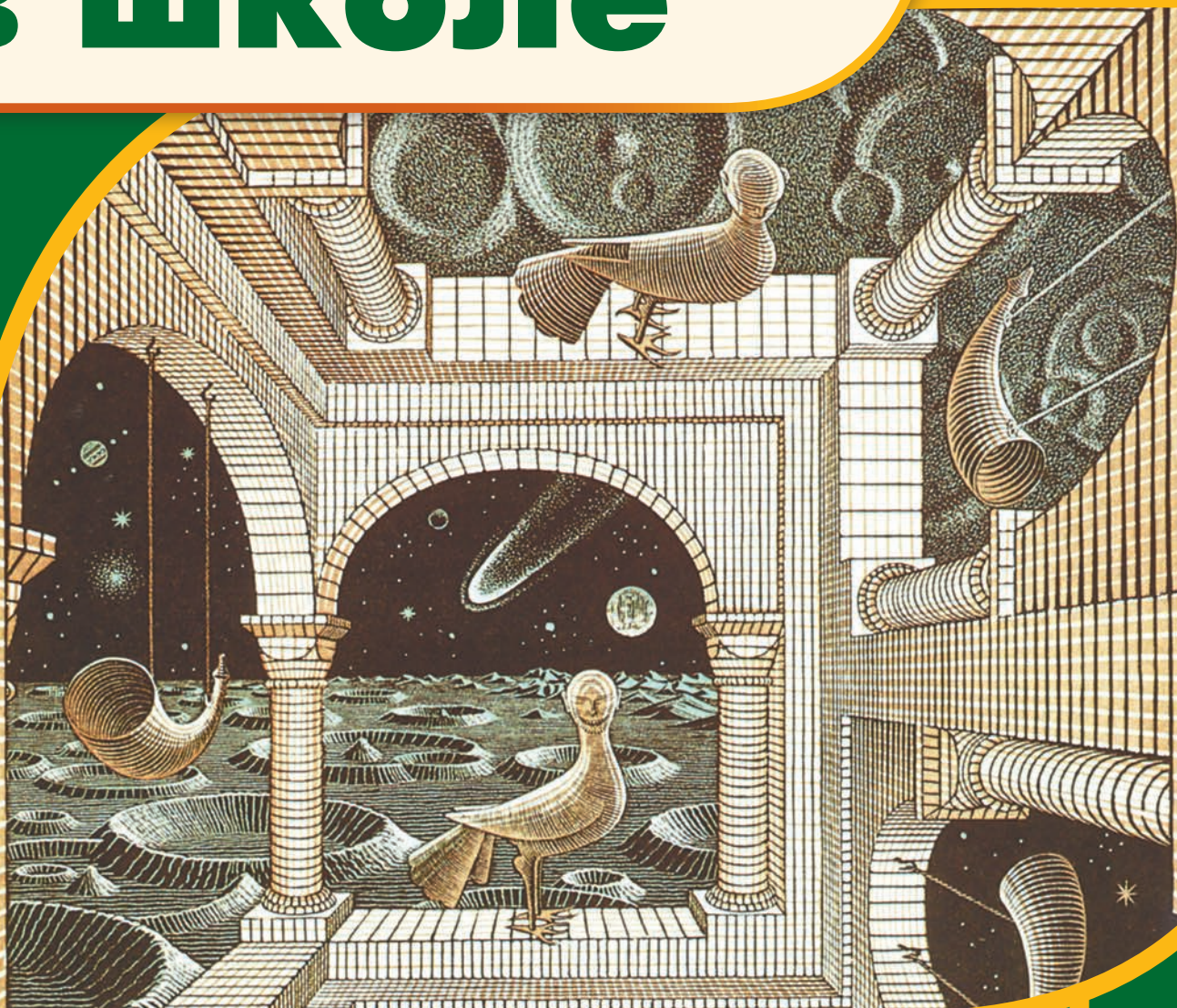


научно-теоретический и методический журнал

8 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



**Как научить детей точно формулировать
геометрические определения и теоремы?**

Методическое наставничество: цели, условия организации, опыт

**Критическое мышление и учебные действия
при обучении математике**

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



СТАНДАРТ И РАЗНООБРАЗИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Удивительный всё-таки у нас предмет! Когда в новые стандарты и программы школьной математики заглядывают учителя других предметов, они не могут скрыть не-

которой зависти: в математике вроде бы мало что меняется, основная часть материала — та же, что была и прежде, когда мы сами учились в школе. И, пожалуй, примерно то же было в программе, когда учились и наши родители, и даже бабушки-дедушки. Конечно, эта «математическая константа» отличает нас от учителей многих других «переменных» предметов, где так часто меняется и само содержание, и угол зрения. А в математике даже новые темы (наглядная геометрия, логика, вероятность, статистика) не так уж и новы, ведь в той или иной форме они включались в содержание школьной математики на протяжении всего последнего столетия...

Однако настоящего учителя такое постоянство не может успокаивать. С каждым новым поколением ребят, с каждым новым учебным годом, с каждым новым классом идут поиски новых подходов, новых форм и методов. И, конечно, наш журнал, наши авторы помогают в этих поисках.

Именно необходимости учёта особенностей разных учеников и в связи с этим возможным различиям в построении предметного материала, в планируемой деятельности учителя и учеников посвящена статья И.Н. Семенов и А.В. Слепухина, где предложены варианты решения проблемы на примере конкретной темы школьного курса.

К самым серьёзным проблемам школьного курса математики можно отнести трудности начального периода изучения геометрии, когда вопрос стоит не только в понимании учащимися чисто математических задач, но и в постижении проблем метаматематических и даже философских: логического построения науки, смысла аксиоматики, точности определений, теорем, необ-

ходимости доказательств... Путям решения этих проблем посвящён материал Е.М. Нифонтовой.

Одной из важнейших целей математического образования в школе является развитие критического мышления. Этому посвящена статья О.А. Петровой, рассматривающая ошибки ребят, которые неизбежны и даже полезны.

Увы, гораздо реже на уроках математики мы думаем о развитии образного мышления школьников, хотя в век, когда наиболее важные открытия происходят на стыках наук, это необходимо. Тем интереснее посвящённый этому нечасто на страницах нашего журнала вопросу материал А.Н. Калашникова.

И, продолжая панораму разнообразных и не всегда привычных возможностей уроков математики, О.Г. Игнатова и Н.В. Хаустова предлагают «Бинарный урок-путешествие для 6-го класса «Странствия Садко», методику проведения такого непривычного урока, посвящённого старинным мерам длины и переводам единиц измерения.

Несомненно, отрадной особенностью нашего журнала является качество и актуальность многих фундаментальных материалов, опубликованных на протяжении нашей почти девяностолетней истории. К ним относятся, конечно, и статьи выдающегося математика и методиста Г.В. Дорофеева. Вот и появившаяся в нашем журнале в 1969 году статья «Обобщение метода интервалов», публикуемая ныне в рубрике «Методическое наследие», не теряет сегодня ни своей актуальности, ни уровня математической и методической мысли и культуры.

Ну, и традиционно во всех номерах мы обсуждаем актуальные темы и печатаем дискуссионные статьи о государственной итоговой аттестации, предлагаем материалы олимпиад, набор отдельных тем школьного курса и методов решения задач. В этом номере — задачи такого популярного раздела работы кружков и факультативов, проведения олимпиад, как теория чисел, целые числа и делимость.

Евгений Бунимович

АКТУАЛЬНАЯ ТЕМА

- 3 Малышев И.Г.
Хождение по граблям

ОЛИМПИАДЫ

- 8 Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Голубев М.О., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Королёв Н.Ю., Останкин П.А., Подлипский О.К., Саулин С.М., Скубачевский А.А., Терёшин Д.А.
Заключительный этап олимпиады «Физтех-2023» по математике. Часть 2

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 17 Семёнова И.Н., Слепухин А.В.
Структурирование содержания геометрического материала в зависимости от характеристик образовательной среды
- 23 Нифонтова Е.М.
Как научить детей точно формулировать геометрические определения и теоремы?

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ

- 33 Малова И.Е., Абатурова В.С., Малинникова Н.А.
Методическое наставничество: цели, условия организации, опыт
- 39 Калашников А.Н.
Применение материальных моделей транспортиров для развития образного мышления школьников при изучении темы «Измерение углов» на уроках геометрии

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 47 Петрова О.А.
Критическое мышление и учебные действия при обучении математике

ПРОФИЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ

- 55 Панкратова Л.В.
Вернёмся к задаче об эллипсе...

ОТКРЫТЫЙ УРОК

- 58 Игнатова О.Г., Хаустова Н.В.
Бинарный урок-путешествие для 6-го класса «Странствия Садко»

МЕТОДИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ

- 64 *Дорофеев Г.В.*
Обобщение метода интервалов

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 71 *Карпушина Н.М.*
«Перспективы далёкие и близкие» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 75 *Подзаев М.В.*
Задачи по теории чисел
- 77 **Указатель статей, опубликованных в журнале «Математика в школе» в 2023 году**

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 80 *Карпушина Н.М.*
Мастера нумерации

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3814. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 8 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ХОЖДЕНИЕ ПО ГРАБЛЯМ

WALKING ON A RAKE

Основной экзамен этого года в регионе прошёл в один день, чего не было уже два года. Напомню читателям, что результаты первого дня ОГЭ 2021 и 2022 гг. получились великолепными по сравнению с результатами второго дня, о чём подробно изложено в статье автора [1]. Три четверти учащихся сдавали экзамен в первый день. Усреднённые цифры по области в 2022 году следующие: 8,8% (первый день) и 21,1% (второй день) неудовлетворительных отметок. Точно так же было и в 2021 году. Наступил 2023-й. Как и в прошлом году на некоем стандартном бланке ответов (см. рис.1) для 52 региона (Нижегородская

область) выпускникам предлагается сначала найти свой вариант, ориентируясь на числа в 10-м и 15-м заданиях, ну а дальше, следует пару раз временно покинуть аудиторию и, ... тестовая часть экзамена готова на оценку «4». Это прекрасно видно на рисунке 2, где по оси абсцисс отложены первичные баллы, по оси ординат процент выпускников, получивших эти баллы в 2022 (первый день) и 2023 гг. Закрашены области, соответствующие оценкам «3» и «4».

Впечатляет скачок с 19 баллов до 20-ти. Это называется тестовая часть закончилась. В региональном министерстве, разумеется, в восторге от результатов. Ещё

ОГЭ: Математика (52 регион)						
№	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1	421	321	421	421	123	423
2	23	14	23	23	28	46
3	10	17	10	10	34	20
4	55,2	62,6	55,2	55,2	51	48
5	829	1316	829	829	599	438
6	0,8	0,8	17,5	4,9	17,5	2,8
7	3	2	3	3	1	3
8	125	64	64	125	81	16
9	-0,7	-1,2	0,5	-0,6	0,5	-0,7
№10	20 билетов	20 билетов	50 билетов	50 билетов	30 билетов	25 билетов
10	0,9	0,9	0,86	0,86	0,7	0,84
11	123	213	132	312	123	231
12	6	2	4	6	4	2
13	2	1	2	2	3	4
14	50	48	50	50	47	46
№15	AC=9, AB=25	AC=10, AB=40	AC=13, AB=20	AC=8, AB=40	AC=13, AB=20	AC=9, AB=25
15	0,36	0,4	0,65	0,2	0,65	0,36
16	13	52	14	32	14	13
17	5	10	10	1	5	3
18	35	35	35	25	36	21
19	1	1	23	23	23	23
ОРИЕНТУЙТЕСЬ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАНИЯ №10 И №15						

Рис. 1

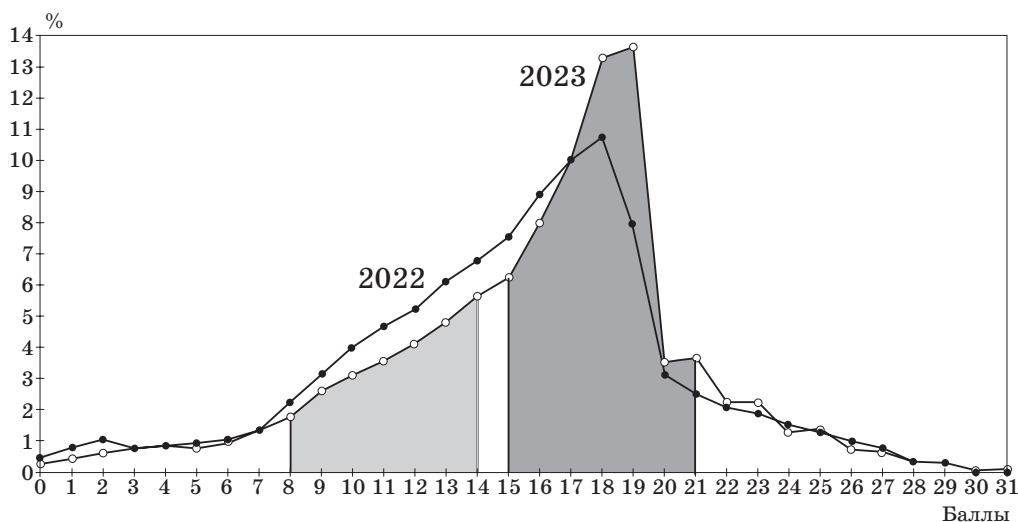


Рис. 2

бы, среднее число не сдавших снизилось с 11,9% в 2022-м до 8% в текущем году. И вот теперь, третий год подряд, федеральное министерство будет делать вид, что ничего не происходит. Между тем, где-то рядом фигурирует структура, связанная невидимыми нитями с министерством (или ФИПИ), снабжающая выпускников правильными ответами на первую часть экзамена во всех регионах. И этим пользуются не меньше трети выпускников. До второй части никому нет дела. Главное обеспечить массовую сдачу экзамена. В регионе только 8% не сдавших экзамен, вместо 20-ти.

Как всегда, анализировать результаты выпускников по отдельным заданиям первой части не имеет смысла. При этом авторы из ФИПИ итогового отчёта по ОГЭ, собранного из статистических данных регионов, будут с серьёзным видом преподносить результаты по отдельным заданиям. И зачем ФИПИ собирает отчёты по результатам экзамена? Они что хотят там увидеть, истинную картину? А по ОГЭ её никогда не было.

В таблице 1 представлены данные по выполнению всеми выпускниками и вы-

пускниками лицеев отдельных заданий письменной части. В отличие от первой части, задания второй части можно проанализировать в силу большей объективности.

Таблица 1

№	20	21	22	23	24	25
1 балл, %	1,72	2,49	1,83	2,86	1,41	0,1
2 балла, %	11,85	5,47	2,31	14,67	2,15	0,4
Лицеи						
1 балл, %	4,35	8,86	10,76	5,38	6,96	1,03
2 балла, %	48,89	32,36	20,41	55,46	15,51	4,91

Рассмотрим отдельные задания второй части. Задание № 21: «Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения S км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения u , если скорость теплохода в неподвижной воде равна v км/ч, стоянка длится t_0 час, а в пункт отправления теплоход возвращается через t часов после отплытия из него». После составления уравнения

$$\frac{S}{v-u} + \frac{S}{v+u} = t - t_0$$

выпускник решает алгебраический пример и, по правилам, должен записать ограничения. Например, самое разумное это $0 < u < v$. Ответом будет являться следующее выражение:

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{2Sv}{t - t_0}}.$$

Хотя в критериях специально на этом не акцентируется внимание эксперта, но самая распространённая ошибка, которая встречается в работах, это отсутствие ОДЗ. В связи с этим, может, стоит обратить внимание учителей, чтобы в процессе учёбы они приводили контрпримеры, когда ограничение просто необходимо, например для уравнения

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 5x - 4.$$

Хотя есть случаи, когда это совершенно не обязательно делать. Но тогда нужно как-то классифицировать подобные примеры и прийти к общему соглашению, а этим

никто не занимался. Вот и в случае задания № 21 наказывать выпускника за это сразу на два балла – не правильно.

Следующее задание № 22 на построение графика, например.

Постройте график функции

$$y = 1 - \frac{x+5}{x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

И вот здесь возникает много вопросов. Что подразумевается под заданием – построить график? Например, график, который представлен в критериях (рис. 3), является графиком? Или, график, который часто рисуют выпускники (рисунок 4, только в худшем исполнении), является графиком? Стоит обратить внимание на то, что в критериях даже не упомянута асимптота $y = 1$.

В понимании человека, имеющего опыт работы в КБ и НИИ, графиком может являться только рис. 5. Но ведь это нигде не

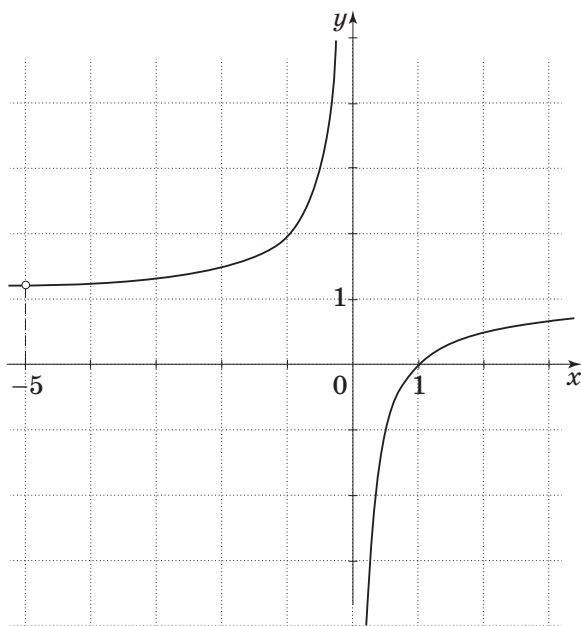


Рис. 3

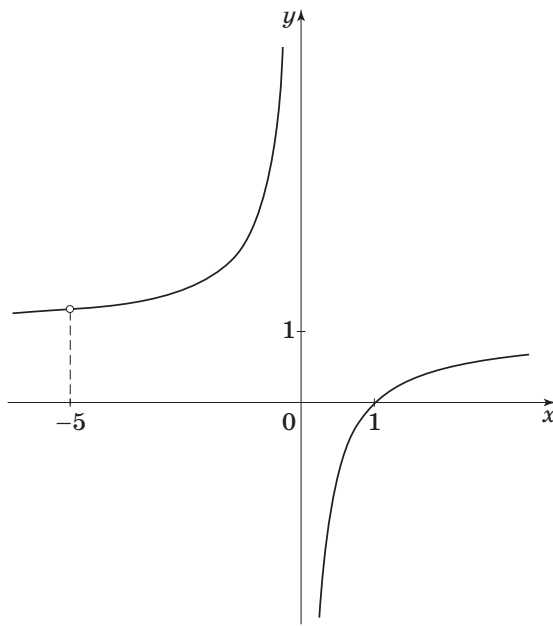


Рис. 4

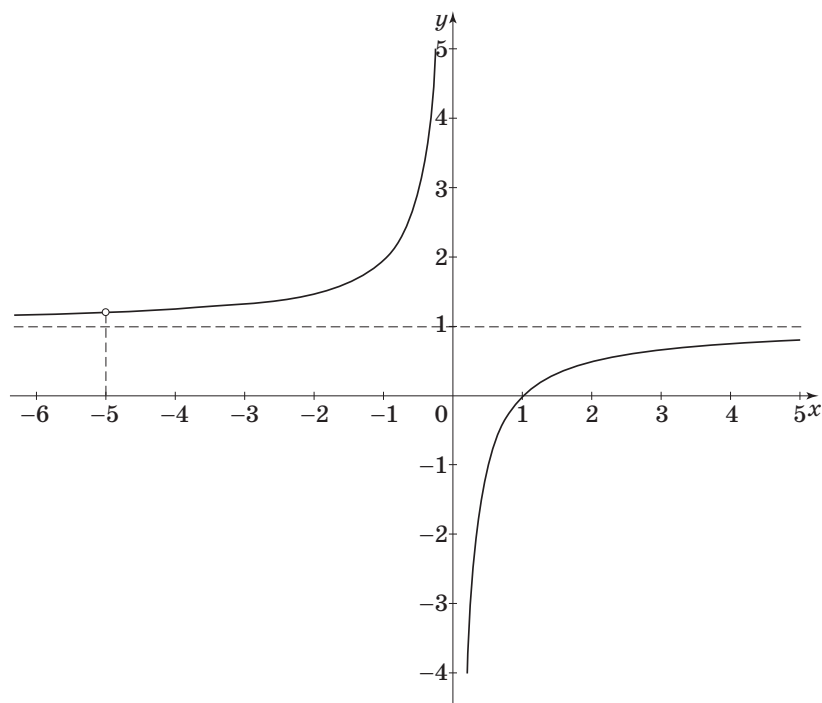


Рис. 5

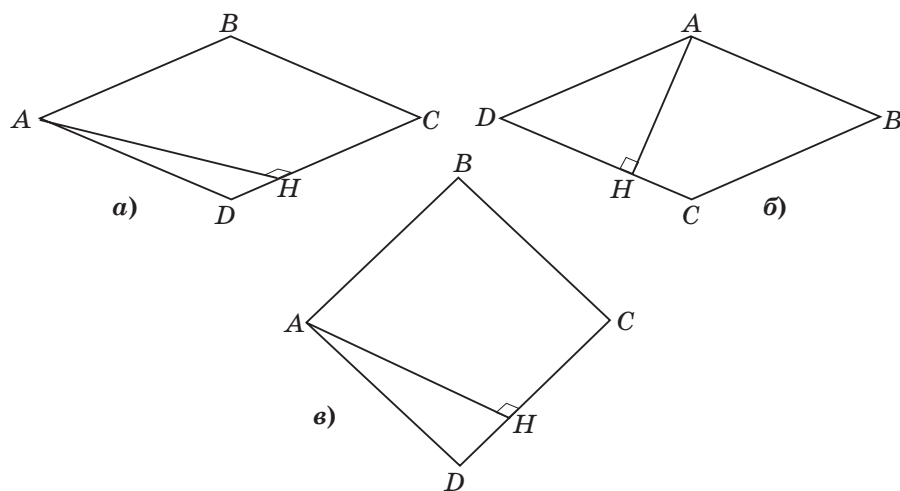


Рис. 6

прописано. Должно быть различие в требованиях построить график и нарисовать эскиз (как на рисунках 3 и 4). И только после этого давать такие задания.

Следующие вопросы возникают при решении задания № 23: Высота AH ром-

ба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 12$ и $CH = 3$. Найдите высоту ромба.

И опять, что считать «правильным» рисунком и какой балл следует ставить? В моём понимании, даже если представлено правильное решение задачи, но при этом

изображён в работе рисунок 6а или 6в, то это соответствует 0 баллов. Пусть бы авторы ОГЭ представили свои соображения на этот счёт. В критериях ничего подобного про описанные ошибки (или недостатки, или опiski?) в этих трёх заданиях, которые совершает абсолютное большинство выпускников, нет. Вопросы важны, так как связаны с оценением работы.

Подведём итог. Во-первых, зачем такой перегруженный тестовыми заданиями экзамен, если половина выпускников его элементарно списывают как минимум уже три года подряд? Во-вторых, в связи с этим, зачем нужна вторая часть экзамена, если по факту его пытаются выполнить не более 20% выпускников? Самое интересное, что этот экзамен-монстр (для 90% выпускников основной школы) намного сложнее (вдумайтесь!) базового ЕГЭ, а по

части некоторых заданий поспорит и со второй частью профильного ЕГЭ. Зачем эти детские игры в секретность, не лучше ли этот по сути региональный экзамен сделать из 10 письменных заданий и проводить его в родных школах, с проверкой муниципальными комиссиями. Неужели до сих пор не стало ясным, что тестовый характер экзаменов не способствует развитию детей?

Список источников

1. *Мальшев И.Г.* Дежавю // Математика в школе. – 2022. – № 7. – С. 3–6.

И.Г. Мальшев,

Лицей № 40

(г. Нижний Новгород), migniro@mail.ru

Статья поступила в редакцию

03.07.2023.

Принята к публикации

14.09.2023.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Из истории отрицательных чисел

Вся история отрицательных чисел в западной цивилизации связана с непониманием и неприятием. Большинство математиков XV–XVII веков не принимало их как таковые и лишь иногда признавало в качестве истинных решений уравнений. Так, Николя Шюке и Михаэль Штифель называли эти числа абсурдными. Лишь одному математику было известно правило знаков – Джероламо Кардано. Франсуа Виет полностью отвергал отрицательные числа. Рене Декарт признавал их лишь частично.

Блез Паскаль считал результат вычитания 4 из 0 абсолютной бессмыслицей, а его друг богослов и математик Антуан Арно выдвинул определяющий аргумент против отрицательных чисел. Арно поставил под сомнение равенство $-1 : 1$ и $1 : (-1)$. Он указывал, что -1 меньше $+1$, следовательно, как может отношение меньшего числа к большему равняться отношению большего числа к меньшему? Эта проблема широко обсуждалась математиками той эпохи. Лейбниц признал такое возражение верным, но указал, что произвести вычисления с помощью этих отношений возможно, так как по форме они верны. Другой любопытный взгляд на отрицательные числа высказал Джон Валлис. Он утверждал, что поскольку отношение $\alpha : 0$ при положительных α является бесконечным, то при замене знаменателя отрицательным числом β отношение $\alpha : \beta$ должно быть больше бесконечности.

По книге: *Ламберто Гарсия дель Сид.* Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии (М., Де Агостини, 2014).

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ «ФИЗТЕХ–2023» ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 2

OLYMPIAD «PHYSTECH-2023» ON MATHEMATICS THE FINAL. PART 2

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 1047639/0130-9358_2023_8_8

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов,
М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская,
Н.Ю. Королёв, П.А. Останин, О.К. Подлипский,
С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин
(Московский физико-технический институт),
Москва, nazar_ag@mail.ru

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov, I.V. Glukhov,
M.O. Golubev, S.E. Gorodetskiy, V.Yu. Dubinskaya,
N.Yu. Korolev, P.A. Ostanin, O.K. Podlipskii,
S.M. Saulin, A.A. Skubachevskii, D.A. Tereshin
(Moscow Institute of Physics and Technology),
nazar_ag@mail.ru

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) заключительного этапа олимпиады «Физтех» по математике 2023 года

Abstract: problems with solutions of the final stage of the Olympiad «Phystech» on mathematics held in 2023 are provide

Ключевые слова: Российские олимпиады школьников, математическая олимпиада, олимпиада «Физтех», олимпиадная задача

Keywords: Russian Olympiad for school students, mathematics Olympiad, Olympiad «Phystech», Olympiad problem

© Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин 2023

Заключительный этап олимпиады «Физтех» по математике проводился в феврале 2023 года, и он прошел в 35 городах России и зарубежья. В олимпиаде приняли участие около 3,5 тысяч учащихся 9–11-х классов. В предыдущей статье был представлен один вариант заданий олимпиады для 11-го класса и ряд задач вариантов 9-х и 10-х классов. В данной статье представлен ещё один вариант заданий олимпиады для 11-го класса, а также избранные задачи вариантов 9-х и 10-х классов.

Условия задач 11 класс

1. Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. Сколько существует троек целых чисел (a, b, c) таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и

CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xuz .

7. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

- объём пирамиды;
- радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

10 класс

8. Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

9. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

10. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

9 класс

11. Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество

кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

12. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 3x + 3 = 6^y$.

13. Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω . Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC , пересекает повторно Ω в точке E . Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

14. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2 + (2a + 9)x + 7a - 10b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 такие, что $5 \leq x_1 \leq 10$ и $14 \leq x_2 \leq 15$.

15. Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $A(3; 5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A , кузнечик останавливается.)

Решения задач

11 класс

1. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Уравнение имеет смысл при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим два случая.

1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы

и

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

(Отметим, что при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, левые части формул определены, а правые не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{6\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \frac{4\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

Все полученные значения переменной принадлежат ОДЗ.

2. Ответ: 20402.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a = 2^{x_1} 3^{y_1}$, $b = 2^{x_2} 3^{y_2}$, $c = 2^{x_3} 3^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 150$ и $y_1 + y_2 + y_3 = 150$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$, откуда следует, что $2x_2 = x_1 + x_3$ и $2y_2 = y_1 + y_3$. Из полученных уравнений вытекают равенства $x_2 = y_2 = 50$, $x_1 + x_3 = 100$, $y_1 + y_3 = 100$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 101 способ выбрать пару чисел $(x_1; x_3)$. Действительно, x_1 может быть любым целым числом из отрезка $[0; 100]$ (а таких чисел – 101), после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1; y_3)$ тоже можно выбрать 101 способом. Пере-

множая, получаем $101^2 = 10201$ способ.

2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a; b; -c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае.

Поэтому окончательно имеем 20402 тройки.

3. Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x &= \\ = \ln^2 x - (x-1)\ln 2 - (x-1)\ln x + (\ln 2)\ln x &= \\ = (\ln 2)(\ln x - x + 1) + (\ln x)(\ln x - x - 1 + 1) &= \\ = (\ln x - (x-1))(\ln x + \ln 2) &= \\ = (\ln x - x + 1)\ln(2x). \end{aligned}$$

Заметим, что $\ln x - x - 1 + 1 \leq 0$ при всех $x > 0$, причём равенство достигается только при $x = 1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x) = \ln x - x + 1$. Она определена при $x > 0$, а её производная равна $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. На интервале $(0; 1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(1; +\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(1) = 0$, то отсюда следует, что $\psi(x) < 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему условию:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln x - x + 1 = 0, \\ \ln(2x) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 0 < 2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}. \end{aligned}$$

4. Ответ: $a = \frac{257}{60}$, $S = \frac{289}{30}$.

Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.

По условию, точка B лежит на прямой $y = -4x$. Если x_0 – абсцисса точки B , то $x_0 > 0$, а координаты точки B – это $(x_0; -4x_0)$. Так как точка A получается из B поворотом на 90° против часовой стрелки, то её координаты есть $(4x_0; x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике функции $y = x^3 - ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} -4x_0 = x_0^3 - ax_0, \\ x_0 = 64x_0^3 - 4ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4a = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4x_0^2 + 16 = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{17}{60}, \\ a = \frac{257}{60}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда

$$d^2 = OA^2 = (4x_0)^2 + x_0^2 = 17x_0^2,$$

а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, то есть

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{289}{30}.$$

5. Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \arccos \frac{1}{7}$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{7}$.

Решение. CG – биссектриса угла ACB , поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды (рис. 1). Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. Но DE – средняя линия треугольника ABC , поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда

$$CF = \frac{2a}{\cos \alpha}, \quad AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha},$$

$$CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}, \quad DF = 2CF = \frac{4a}{\cos \alpha}.$$

По теореме косинусов для треугольника CDF получим равенство $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos \alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше,

получаем уравнение

$$\frac{16a^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} -$$

$$- 2 \frac{2a}{\cos \alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha} \cos \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

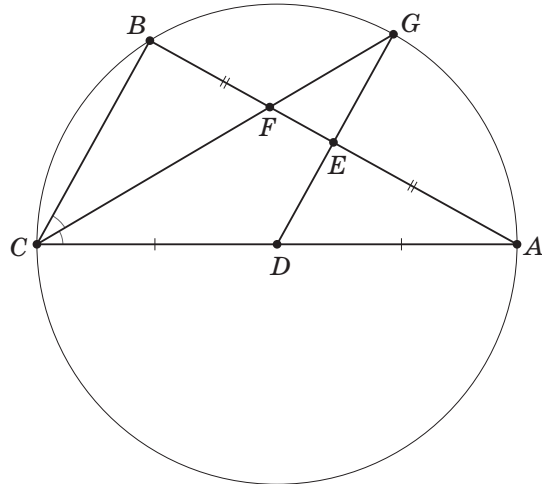


Рис. 1

Умножаем обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha \cos^2 \alpha$:

$$24\cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 8\cos 2\alpha \cos^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) +$$

$$+ 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 28\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos \frac{1}{7}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin \frac{1}{7}$.

6. Ответ: -2 .

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7}{z^3} - \frac{7}{y^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = \frac{7(y^3 - z^3)}{y^3 z^3}, \\ y^3 - z^3 = \frac{7(z^3 - x^3)}{x^3 z^3}, \\ z^3 - x^3 = \frac{7(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z = x$, то третье уравнение системы принимает вид $0 = \frac{7(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}$, поэтому $x = y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, получим равенство

$$(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3) = \frac{343(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)}{x^6 y^6 z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6 = 343$, то есть $xyz = \pm\sqrt[6]{7}$.

Покажем теперь, что у исходной системы существует решение $(x_0; y_0; z_0)$ такое, что $x_0 y_0 z_0 = -\sqrt[6]{7}$ (строго говоря, выше мы показали, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz = \sqrt[6]{7}$, либо $xyz = -\sqrt[6]{7}$, но может оказаться так, что у системы решений нет вовсе, или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt[6]{7}$).

Возьмём, например, $y_0 = -\sqrt[6]{7}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3 + \sqrt[6]{7} = \frac{7}{z^3} + \sqrt[6]{7}, \\ -\sqrt[6]{7} - z^3 = \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{7}{z^3}, \\ 2z^6 + \sqrt[6]{7}z^3 - 7 = 0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $z_0 = \sqrt[6]{\frac{7}{4}}$, $x_0 = \sqrt[6]{28}$. Итак, для тройки чисел

$\left(\sqrt[6]{28}; -\sqrt[6]{7}; \sqrt[6]{\frac{7}{4}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $-\sqrt[6]{7}$.

7. Ответ: а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}$.

Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда

$$\begin{aligned} BD &= EB + ED = \\ &= \sqrt{AB^2 - \frac{AC^2}{4}} + \sqrt{AD^2 - \frac{AC^2}{4}} = 2 + 1 = 3, \end{aligned}$$

значит,

$$DA + DB = 3 + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{5} = SA + SB.$$

Однако $SA > DA$ и $SB > DB$ (SDA и SDB – прямоугольные треугольники с прямым углом при вершине D), то есть $SA + SB > DA + DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD < AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC (рис. 2).

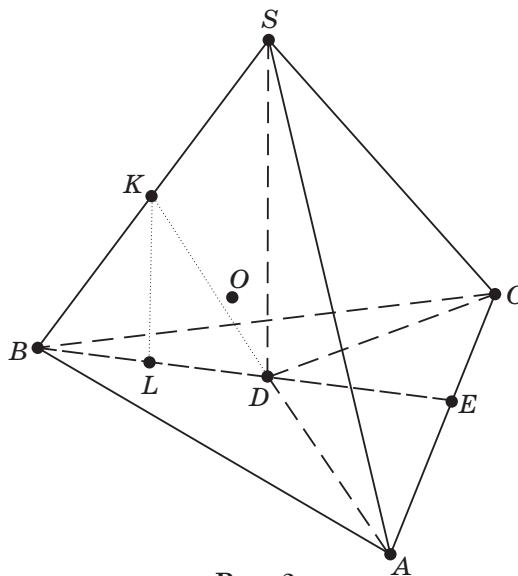


Рис. 2

Далее находим $BD = EB - ED = 2 - 1 = 1$, откуда получаем уравнение

$$SA + SB = \sqrt{SD^2 + AD^2} + \sqrt{SD^2 + DB^2} = \\ = \sqrt{SD^2 + 2} + \sqrt{SD^2 + 1} = 2 + \sqrt{5}.$$

Его корнем будет $SD = \sqrt{3}$, а следовательно, $SB = 2$, $SA = SC = \sqrt{5}$. Тогда $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 1$, и в итоге находим объём пирамиды

$$V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD , а он касается отрезков SD и BD . Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD .

Пусть L – основание перпендикуляра, проведённого из точки K на отрезок BD . Тогда из подобия треугольников BKL и BSD и свойства биссектрисы DK находим

$$KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BD}{BD + SD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}.$$

Значит, расстояние от точки O до прямой BD (то есть радиус шара) равно

$$KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}.$$

С другой стороны, мы можем найти радиус шара как расстояние от точки O до плоскости SBC . Для этого сначала найдём длину высоты DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен

$$V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \text{Из равенств } SC = BC = \sqrt{5} \text{ и } SB = 2 \text{ получаем } S_{SBC} = 2.$$

Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда

$$DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \text{Тогда расстояние от точки } O \text{ до плоскости } SBC \text{ равно}$$

$$DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right).$$

Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Rightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}.$$

Таким образом, радиус шара равен

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}}.$$

10 класс

8. Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$.

Решение. Заметим, что разность выражений под модулями в левой части неравенства равна выражению под модулем в правой части. Поэтому имеет смысл замена $u = x^3 + 4$, $v = x^2 - 1$. В результате неравенство принимает вид $|u| + |v| \leq |u - v|$. Так как обе его части неотрицательны, возведение обеих частей в квадрат является равносильным преобразованием. В итоге имеем $u^2 + 2|uv| + v^2 \leq u^2 - 2uv + v^2 \Leftrightarrow |uv| \leq -uv \Leftrightarrow uv \leq 0$. Значит, исходное неравенство равносильно следующему:

$$(x^3 + 4)(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt[3]{4})(x + 1)(x - 1) \leq 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$.

9. Ответ: (6; 2).

Решение 1. Перепишем уравнение в виде $y(x^2 - 13x + 44) = 2x^2 - 27x + 94$. Коэффициент при y в левой части уравнения – это квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом, поэтому он не обращается в нуль ни при каких значениях x , а значит, уравнение равносильно следующему:

$$y = \frac{2x^2 - 27x + 94}{x^2 - 13x + 44} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{2(x^2 - 13x + 44) - x + 6}{x^2 - 13x + 44} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 - \frac{x-6}{x^2-13x+44}.$$

Так как дробь в правой части последнего уравнения должна быть целым числом, то возможны следующие два варианта:

1) дробь равна нулю, тогда её числитель равен нулю, и получаем решение $x = 6$, $y = 2$;

2) дробь равна целому числу, отличному от нуля, тогда её числитель по модулю не меньше знаменателя, откуда получаем

$$\begin{aligned} |x-6| &\geq |x^2-13x+44| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-6)^2 &\geq (x^2-13x+44)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2-12x+38)(x^2-14x+50) &\leq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство не имеет решений, и этот случай невозможен.

Решение 2. Если $y = 2$, то $x = 6$, и пара (6; 2) удовлетворяет условию.

Если же $y \neq 2$, то уравнение является квадратным относительно переменной x . Для того, чтобы оно имело решение, необходимо, чтобы его дискриминант $D = -7y^2 + 26y - 23$ был неотрицателен. Последнее выполняется, если

$$y \in \left[\frac{13-\sqrt{8}}{7}; \frac{13+\sqrt{8}}{7} \right].$$

Но на этом промежутке нет целого значения y , кроме $y = 2$, которое мы не рассматриваем.

Следовательно, единственным решением будет пара (6; 2).

10. Ответ: $\frac{527}{2}$.

Решение. Углы EAD и ECD равны как вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу (рис. 3). Значит, смежные с ними углы XAF и YCF также равны. А так как $AX = CF$, $AF = CY$, то треугольники AXF и FCY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $XF = YF$, то есть точка F равноудалена от концов отрезка XY , следовательно, точка F лежит

на серединном перпендикуляре к нему.

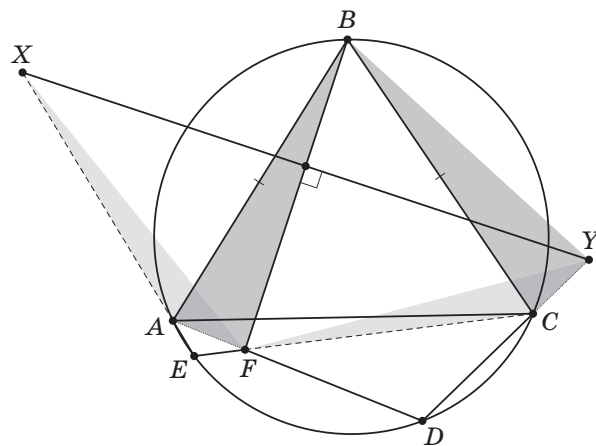


Рис. 3

Четырёхугольник $BADC$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна 180° . Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$, $\angle BCY = 180^\circ - \angle BCD = \alpha$. Но тогда треугольники AFB и CYB также равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $BY = BF$. Аналогично доказывается равенство $\triangle BAX = \triangle BCF$, откуда $BX = BF$, поэтому $BX = BY$. Значит, точка B также лежит на серединном перпендикуляре к XY . Следовательно, $BF \perp XY$, а площадь четырёхугольника $BXFY$ равна

$$\frac{BF \cdot XY}{2} = \frac{527}{2}.$$

9 класс

11. Ответ: 135.

Решение. Общее число кубиков равно $22N + 3$. Это число делится на $N - 1$, поэтому число $\frac{22N+3}{N-1} = 22 + \frac{25}{N-1}$ — целое, что возможно только, если $N - 1 = 1$, $N - 1 = 5$ или $N - 1 = 25$. В первом случае у Васи 47 кубиков, во втором — 135, в третьем — 575. Подходит второй вариант.

12. Ответ: $(-2; 0)$, $(-1; 0)$.

Решение. Уравнение можно переписать

сать в виде $x(x+3) = 6^y - 3$. При любом целом x множители в левой части уравнения – числа разной чётности, поэтому их произведение чётно. При $y < 0$ левая часть – целое число, а правая – нет. При $y > 0$ правая часть нечётна. Оба эти случая не подходят. Остаётся рассмотреть случай, когда $y = 0$. Тогда уравнение принимает вид $x^2 + 3x + 2 = 0$. Следовательно, $x = -2$ или $x = -1$. Получаем две пары чисел, удовлетворяющие условию: $(-2; 0)$, $(-1; 0)$.

13. Ответ: $\sqrt{110} + \frac{22\sqrt{22}}{5}$.

Решение. AE – биссектриса угла ACB , поэтому дуги BE и EC равны (на них опираются равные вписанные углы), а также равны одноимённые им хорды (рис. 4). По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{BED}}{S_{CED}} = \frac{5}{6}.$$

Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC (тогда BH является также его медианой). Обозначим $\angle BAH = \beta$. Из треугольника ABH находим

$$\cos \beta = \frac{AH}{AB} = \frac{AC/2}{AB} = \frac{3}{5};$$

тогда $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$. Четырёхугольник $ABEC$ вписан в окружность, поэтому $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \beta$. Площадь треугольника BCE равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} BE \cdot EC \sin \angle BEC &= \\ &= \frac{1}{2} BE^2 \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} BE^2 \cdot \frac{4}{5}, \end{aligned}$$

а по условию она равна 11, значит, $BE = \frac{\sqrt{110}}{2}$. По теореме косинусов для треугольника BEC находим

$$\begin{aligned} BC^2 &= 2BE^2 - 2BE^2 \cos(180^\circ - \beta) = \\ &= 2 \cdot \frac{55}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 88. \end{aligned}$$

Тогда $BC = 2\sqrt{22}$, $AC = \frac{6}{5}AB = \frac{6}{5}BC$. В итоге периметр четырёхугольника $ABEC$ равен

$$\begin{aligned} (BE + EC) + (AB + AC) &= \\ &= 2BE + \frac{11}{5}BC = \sqrt{110} + \frac{22\sqrt{22}}{5}. \end{aligned}$$

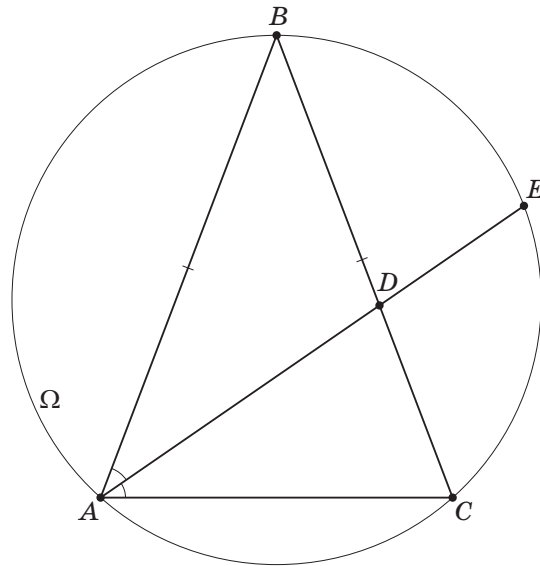


Рис. 4

14. Ответ: $a \in [-67; -52]$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{2a+9}{5}$. Сложив два неравенства, данные в условии, приходим к неравенствам $19 \leq x_1 + x_2 \leq 25$. Следовательно, $19 \leq -\frac{2a+9}{5} \leq 25 \Leftrightarrow -67 \leq a \leq -52$.

Покажем, что все эти значения a удовлетворяют условию задачи. Если $a \in [-67; -52]$, то $-\frac{2a+9}{5} \in [19; 25]$, поэтому можно выбрать такие числа x_1 и x_2 , что $x_1 + x_2 = -\frac{2a+9}{5}$, $5 \leq x_1 \leq 10$, $14 \leq x_2 \leq 15$. Выберем значение параметра b , удовлетворяющее равенству $x_1 x_2 = \frac{7a-10b}{5}$. Такое значение существует, так как относи-

тельно b это уравнение линейное. При этом b по теореме, обратной теореме Виета, квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 , что и требовалось доказать.

15. Ответ: 504.

Решение. Для того, чтобы попасть из начала координат в точку A , кузнечику нужно сместиться на 3 клетки вправо и на 5 вверх. Следовательно, самое малое количество шагов, которое он может совершить, – это 8. В данном случае кузнечик каждый раз делает шаг вверх или вправо, не возвращаясь назад. Число таких путей равно C_8^3 (из 8 шагов кузнечика надо выбрать, те 3, которые будут сделаны вправо).

Второй вариант пути содержит 10 шагов, из которых 9 совершается в сторону приближения к точке A , и один шаг – назад. Если возврат произошёл влево, то дальше кузнечик будет вынужден обязательно переместиться вверх, т.к. в точке справа он уже был, и туда ему путь закрыт. Аналогично, возвратившись вниз, кузнечик должен будет следующий шаг совершить вправо, так как в точке сверху он уже был. Таким образом, каждый путь длиной в 10 шагов можно получить из пути длиной в 8 шагов, совершив в какой-то одной его точке (кроме точки A) отклонение на 1 шаг в единственную допустимую сторону, и затем вернувшись назад. Значит, таких путей $C_8^3 \cdot 8$. Итого получаем, что различных путей –

$$C_8^3 + C_8^3 \cdot 8 = C_8^3 \cdot 9 = 504.$$

Список источников

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головки А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кожевников П.А., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ». МАТЕМАТИКА (задачи 2015–2020 гг.). – М.:Физматкнига, 2022. – 344 с.

2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2018. № 6. С. 8–15.

3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2018. № 7. С. 22–28.

4. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головки А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2019. № 8. С. 11–22.

5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головки А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2020. № 1. С. 31–42.

6. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головки А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2020. № 6. С. 21–29.

7. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головки А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2020. № 7. С. 16–25.

Статья поступила в редакцию

10.06.2023.

Принята к публикации

01.07.2023.

СТРУКТУРИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

STRUCTURING THE CONTENT OF GEOMETRIC MATERIAL DEPENDING ON THE CHARACTERISTICS OF THE EDUCATIONAL ENVIRONMENT

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_17

И.Н. Семёнова, к.п.н., доцент, ГОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», Екатеринбург, semenova_i_n@mail.ru,

А.В. Слепухин, к.п.н., доцент, ГОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», Екатеринбург, ikto2016@gmail.com

I.N. Semenova, PhD (Pedagogy), associate professor, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, semenova_i_n@mail.ru,

A.V. Slepukhin, PhD (Pedagogy), associate professor, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, ikto2016@gmail.com

Аннотация: на примере конкретной темы «Признаки равенства треугольников» показаны варианты организации учебно-познавательной деятельности школьников, которые иллюстрируют сущность изменения структуры и содержания материала. Предлагаемые конфигурации основываются на учёте сформулированных целей обучения и определенных психолого-педагогических характеристик обучающихся, демонстрируя существенную разницу как в построении и наполнении самого предметного материала, так и в деятельности учителя и учеников при изучении темы

Abstract: the example of a specific topic «Signs of equality of triangles», options for organizing the educational and cognitive activity of schoolchildren are shown, which illustrate the essence of changing the structure and content of the material. The proposed configurations are based on taking into account the formulated learning objectives and certain psychological and pedagogical characteristics of students, demonstrating a significant difference both in the construction and filling of the subject material itself, and in the activities of the teacher and students when studying the topic

Ключевые слова: структура предметного материала, образовательные категории, мыслительные операции

Keywords: subject material structure, educational categories, mental operations

© И.Н. Семёнова, А.В. Слепухин, 2023

Формирование у учителя умения определённым образом структурировать и наполнять содержанием учебно-познавательный материал любой темы школьного курса математики определяется не только потребностью достижения постоянно обновляющихся результатов образования на федеральном уровне (изменение требований в ФГОС ООО-3 [6] по

сравнению с требованиями ФГОС ООО-2), но и значимостью локального «приспособления» материала к различным группам учащихся в современной ситуации активной миграции населения для включения в образовательный процесс обучающихся с разным уровнем и объёмом знаний, пониманий, умений и навыков в предметной области.

Кроме того, ставя задачу перенесения акцентов с категории «знание» (по О.Б. Епишевой, в трактовке «знает» – запомнил и воспроизводит [3]) на категорию «понимание» (там же: «понимает» – готов к интерпретации, устанавливает связь, приводит примеры) в связке «знает и понимает», формирование которой требует развития конкретных мыслительных операций, по-новому выделяется значимость содержательного обобщения понятий, идеология которого рассмотрена В.В. Давыдовым.

В контексте сказанного приведём примеры вариантов структурирования материала по теме «Признаки равенства треугольников», анонсируя изменения последовательности изучения и наполнения по сравнению, например, с [1], [5] и др.

Первый вариант.

Элементы психолого-педагогической характеристики обучающихся: низкий и средний уровни потенциальной предметной обучаемости, низкий и средний уровни актуальной обученности, низкая мотивация к изучению математики.

Цель личностного уровня: овладение языковой и читательской культурой.

Цель метапредметного уровня: формирование умения устанавливать основания для обобщения и сравнения, анализировать информацию различных видов (в рамках следования результатам Х.Ж. Ганеева [2]), эффективно запоминать и систематизировать информацию.

Цель предметного уровня: формирование понимания структуры признаков и формирование умения оперировать понятиями «равенство фигур», «равенство треугольников», «признаки равенства треугольников».

Содержание учебно-познавательной деятельности.

Формулировка проблемы, связанной с необходимостью установления равенства (или неравенства) треугольников при невозможности выполнения процедуры «наложения».

Выделение основных элементов треугольника (количественно – шесть: три стороны и три угла).

Одновременное предъявление всех признаков равенства треугольников.

Анализ структуры признаков. Выделение общего в структуре, а именно: в каждом признаке выбираются для сравнения три элемента (три стороны, две стороны и угол, два угла и сторона). При этом выделение элементов в каждом признаке следует сопровождать работой (тактильной или визуальной) по самостоятельно выполняемым учащимися чертежам. При анализе и сравнении содержания признаков на следующем этапе выделяется общее, а именно: в каждом признаке присутствует обязательно сторона треугольника.

Полученная информация создает основу запоминания признаков: в каждом признаке следует называть три элемента треугольника, при этом в качестве одного элемента должна быть названа сторона. Основываясь на использовании чертежа, таких вариантов может быть три: три стороны, два угла и сторона, две стороны и угол.

Следующий этап состоит в уточнении связи расположения угла и сторон и выделении важности слова «соответствующие».

Заключительный этап – самостоятельная формулировка признаков с использованием различных языков (вербального и / или) знаково-символического).

Продолжая работу с предметным материалом в рамках первого подхода, формулируются учебные задания (в скобках

укажем предполагаемые ответы обучающихся):

- выделить основание для сравнения формулировок признаков (структура формулировки – наличие условия о равенстве каких-либо элементов двух треугольников и заключения «треугольники равны»);

- выделить основания для анализа формулировок признаков (количество элементов треугольника, указанных в формулировке; обязательное наличие хотя бы одного линейного элемента – стороны);

- выделить механизмы для запоминания материала (логический механизм: количество сравниваемых элементов в каждом признаке – три; вербальный механизм: совпадение слов и словосочетаний: «если какие-то элементы одного треугольника», «соответственно равны», указание этих же элементов другого треугольника, «треугольники равны»; визуальный механизм: выделение элементов, входящих в признаки, на чертеже);

- выделить общее в формулировках признаков (сравнение двух треугольников, указание трёх элементов при сравнении, обязательное наличие хотя бы одной стороны) и др.

По аналогии с представленным конкретным материалом выделенный подход для указанной категории обучающихся при формировании «знания и понимания» можно реализовать при изучении других тем школьного курса математики, например, «Тригонометрические функции» (при выделении основного слова-действия в определении тригонометрических функций – «отношение», которое всякий раз связывает две стороны прямоугольного треугольника).

Второй вариант.

Элементы психолого-педагогической характеристики обучающихся:

высокий уровень актуальной обученности и потенциальной предметной обучаемости, интерес к исследовательской деятельности.

Цель личностного уровня: овладение языковой и читательской культурой, овладение навыками исследовательской деятельности, установка на осмысление опыта, наблюдений.

Цель метапредметного уровня: формирование умения устанавливать основания для обобщения и сравнения, анализировать информацию различных видов, эффективно запоминать и систематизировать информацию.

Цель предметного уровня: формирование понимания структуры признаков и формирование умения оперировать понятиями «равенство фигур», «равенство треугольников», «признаки равенства треугольников», «подобие фигур (n -угольников)».

Содержание учебно-познавательной деятельности.

1. Введение определений (с опорой на [4]):

- «коэффициент определяемости фигуры» (число, равное минимальному количеству элементов фигуры для её задания),

- «задание фигуры с точностью до равенства» (фигура считается заданной до равенства, если указывается не только её форма, но и размеры, например, равнобедренный треугольник с углом при основании, равным 30° , и боковой стороной 15 см),

- «задание фигуры с точностью до подобия» (фигура считается заданной до подобия, если указывается только её форма, например, равнобедренный треугольник с углом при основании, равным 30°).

2. Формулировка проблемы, связанной с необходимостью установления равенства (или неравенства) фигур при невозмож-

ности выполнения процедуры «наложения»: сколько элементов нужно измерить для того, чтобы утверждать, что фигуры равны?

Выделение проблемы, связанной с конкретной фигурой – «треугольник», имеющей коэффициент определяемости, равный трём.

Решение исследовательской задачи (с использованием готового чертежа-основы) по самостоятельному выделению и формулировке возможных признаков равенства треугольников, а также признака подобия треугольников при использовании в признаках следующих элементов: стороны и углы.

Выделение следующих элементов в треугольнике: высоты, биссектрисы, медианы.

Формулировка новых признаков равенства треугольников с использованием выделенных элементов.

Сравнение полученных количественных результатов с материалом, изложенным в учебнике.

Заполнение таблицы (фрагмент варианта таблицы – табл. 1). Выделение по табл. 1 индивидуального профиля для самостоятельного доказательства признаков равенства треугольников.

Постановка проблемы в общем виде (для выделения признаков равенства, например, четырёхугольников).

Выделение плана (алгоритма) предметных действий для формулирования признаков равенства четырёхугольников (с приведением формулировок признаков для конкретных видов, например, «квадрат», «прямоугольник», «параллелограмм», «равнобедренная трапеция, у которой меньшая сторона равна боковой стороне», «равнобедренная трапеция» и др.).

Формулировка не приведённых в учебнике признаков равенства треугольников с использованием различных языков (вербального, например, «если три высоты одного треугольника соответственно равны трём высотам другого треугольника, то такие треугольники равны» или «если медиана, высота и угол, из которого они проведены, одного треугольника равны медиане, высоте и углу, из которого они проведены, другого треугольника, то эти треугольники равны»; знаково-символического, например, «если $\angle C$, h_a , h_b в $\triangle ABC$ соответственно равны $\angle C_1$, h_{a1} , h_{b1} в $\triangle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ »).

Выделение тематики и содержания практико-ориентированного про-

Таблица 1

Информационная база для получения формулировок признаков равенства треугольников

признаки (формулировка)	элементы треугольника											
	a	B	c	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	h_a	h_b	m_a	l_a	l_b	...
1	+	+	+									
2	+	+				+						
3	+				+	+						
4	+	+		+								
5	+						+		+			
...												

екта, продукт которого будет состоять в составлении сборника признаков равенства n -угольников с доказательством некоторых из них и составлением сборника и решебника задач, основывающихся на установленных результатах предметного материала.

Продолжая работу с предметным материалом в рамках второго подхода, формулируются учебные задания (в скобках укажем предполагаемые ответы учащихся):

- выделить основания для получения формулировок признаков равенства треугольников (четырёхугольников) (коэффициент определяемости фигуры, структура формулировки);

- выделить основания для сравнения полученных формулировок признаков (структура формулировки – наличие условия о равенстве каких-либо элементов двух треугольников и заключения «треугольники равны», наличие в каждой формулировке стороны треугольника – линейного элемента);

- сформулировать гипотезу о существовании признаков, в формулировке которых участвуют другие элементы треугольников (если в условии для сравнения двух треугольников указать три элемента, среди которых есть хотя бы один линейный, например, сторона, высота, медиана, биссектриса, то получится формулировка признака равенства треугольников);

- указать методы для доказательства гипотезы, а также опровержения, если гипотеза не верна (составление примеров формулировки признаков, самостоятельное проведение доказательства для некоторых из полученных примеров или поиск доказательства в информационных источниках, поиск и изучение предметной литературы, подтверждающей или опровергающей гипотезу в общем виде);

- проиллюстрировать план действий по запоминанию определённого материала (с выделением его структурной и содержательной особенности) не только в контексте образовательной деятельности, но и, например, в бытовой жизни, профессиональной сфере (выделить основной материал и значимые термины; представить, если это удобно, материал на другом языке – рисунком, схемой, диаграммой, таблицей);

- выделить основание(я) для систематизации признаков равенства фигур (количество сравниваемых элементов – коэффициент определяемости фигуры, вид или свойства сравниваемых фигур).

Использование представленной идеологии для описанной во втором варианте категории обучающихся может быть применено при структурировании и наполнении предметным содержанием следующих тем школьного курса математики: «Параллельность плоскостей» при сравнении, анализе и обобщении материала темы «Параллельность прямых»; «Перпендикулярность плоскостей» при сравнении, анализе и обобщении материала темы «Перпендикулярность прямых»; «Объёмы многогранников» при сравнении с материалом темы «Площади фигур»; «Векторы и координаты в пространстве» при сравнении с материалом темы «Векторы и координаты на плоскости» и др.

Список источников

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия: Учебник для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2000. 335 с.
2. Ганеев Х.Ж. Теоретические основы развивающего обучения математике. Урал. гос. пед. ун-т. Екатеринбург, 1997. 160 с.
3. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода:

книга для учителя. М.: Просвещение, 2003. 224 с.

4. *Людмилов Д.С.* Задачи без числовых данных: Пособие для учителей. М.: Учпедгиз, 1961. 240 с.

5. *Погорелов А.В.* Геометрия. 7–9 кл.: Учебник для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2014. 240 с.

6. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» URL: www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/.

Статья поступила в редакцию 27.10.2022.

Принята к публикации 26.08.2023.

Требования к содержанию и оформлению авторских материалов в журнале «Математика в школе»

Требования к содержанию авторского материала

1. К рассмотрению не принимаются: авторские программы; фрагменты из диссертационных работ; элективные и пр. курсы в полном объеме.

2. К рассмотрению принимаются материалы, соответствующие тематике и содержанию журнала:

- научные статьи, где в водной части должны быть обоснованы актуальность темы (научной проблемы или задачи) и целесообразность её разработки. В основной части необходимо раскрыть исследуемую проблему, пути её решения, дать обоснования полученных результатов. В заключительной части следует подвести итог, сформулировать выводы, дать рекомендации, указать возможные направления дальнейших исследований;
- практические (методические) статьи, связанные с разработкой уроков и внеклассных мероприятий, проведением математических конкурсов, олимпиад и т.п.;
- обзорные статьи, в которых должны быть проанализированы, сопоставлены и выявлены наиболее важные и перспективные направления развития науки (практики), её отдельных разделов, явлений, событий и пр. Материал должен носить проблемный характер, демонстрировать противоречивые взгляды на развитие научных (практических) знаний, содержать выводы, обобщения, сводные данные;
- рецензии на публикации, учебники и учебно-методические комплекты, которые должны содержать критический разбор, анализ и оценку.

Требования к оформлению авторского материала

Материал, направляемый в редакцию, должен соответствовать следующим требованиям.

1. Заглавие – краткое, отражающее содержание материала (с переводом на английский язык).
2. В сведениях об авторах перечисляются (с переводом на английский язык):
 - фамилия, инициалы автора (-ов) в именительном падеже. В коллективных работах имена приводятся в принятой авторами последовательности;
 - учёная степень, учёное звание;
 - профессия или должность;
 - место работы или учёбы; страна (для иностранных авторов), населённый пункт, наименование учреждения (ВУЗ, школа), подразделение (факультет, кафедра).
3. Аннотация (не более 500 знаков, с переводом на английский язык) кратко знакомит с содержанием статьи, раскрывает её актуальность, научную и практическую значимость. В аннотации следует употреблять значимые слова из авторского материала для обеспечения автоматизированного поиска, а также стандартную терминологию, свойственную языку научной литературы.
4. Ключевые слова (с переводом на английский язык) выбирают из текста материала, приводят в именительном падеже, помещают перед текстом.
5. Требования к набору формул.
Набирать формулы следует в формульном редакторе, например: $\sqrt{f}, \frac{t}{2}, \left\{ \begin{matrix} w \\ 4 \end{matrix} \right.$.
Латинские буквы, прописные и строчные, а также верхние и нижние индексы в тексте необходимо набирать с клавиатуры, а не в формульном редакторе. Например: ABC, a^1, b_2 .
6. Иллюстрации должны быть представлены в виде отдельных файлов в формате tif или jpg качеством не ниже 300 dpi.
7. Список использованных источников оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.7–2021. Автор отвечает за достоверность сведений и ссылок на официальные документы и другие источники.
8. Рукописи (в формате Word 2010, шрифт Times New Roman, размер шрифта – 14, межстрочный интервал 1,5, объём не более 20 печатных страниц) следует присылать в редакцию журнала по адресу: matematikavskole@bk.ru
К рукописям, содержащим задачи, необходимо приложить решения всех задач!

Примечание

Материалы, направленные в редакцию без выполнения вышеуказанных требований, не рассматриваются.

КАК НАУЧИТЬ ДЕТЕЙ ТОЧНО ФОРМУЛИРОВАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ?

HOW TO TEACH CHILDREN TO ACCURATELY FORMULATE GEOMETRIC DEFINITIONS AND THEOREMS?

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_23

Е.М. Нифонтова, учитель математики НЧОУ СОШ «Русская классическая школа», г. Екатеринбург, lizan@e1.ru

E.M. Nifontova, mathematics teacher NCHOU SOSH «Russian classical school» (Yekaterinburg), lizan@e1.ru

Аннотация: в статье выделены трудности начального изучения геометрии; поставлены две методические задачи и показаны возможные их решения с учётом характерных ошибок учащихся

Abstract: the article highlights the difficulties of the initial study of geometry; two methodological tasks are set and their possible solutions are shown taking into account the characteristic mistakes of students

Ключевые слова: введение новых геометрических понятий, точность формулировок определений и теорем

Keywords: introduction of new geometric concepts, accuracy of formulations of definitions and theorems

© Е.М. Нифонтова 2023

На начальном этапе изучения геометрии ученики сталкиваются с некоторыми трудностями, так как этот предмет имеет свою специфику, абсолютно новую для детей.

Во-первых, новыми для них являются сами математические предложения: определения, аксиомы, теоремы. Необходимость доказательства теорем поначалу вызывает недоумение у учеников. «Зачем доказывать-то, и так всё понятно», – говорят они. Действительно, первые теоремы, доказываемые в курсе геометрии, очень просты и очевидны. Но это тема отдельного разговора.

Во-вторых, новым является необходимая точность формулировок математических предложений, которая раньше не встречалась при изучении других предметов. Например, при формулировании

определения какой-либо геометрической фигуры важно каждое смысловое слово, его нельзя пропустить, часто нельзя заменить синонимом, нельзя добавлять лишнего.

Как же научить ребёнка точно формулировать геометрические определения и теоремы? Может быть, достаточно выучить формулировки наизусть? Но в этом случае есть опасность механического зазубривания. Если формулировка выучена формально, то через короткий промежуток времени ученик не в состоянии её воспроизвести, а тем более применить для доказательства и решения задач. Для понимания и усвоения определения какой-нибудь геометрической фигуры ученик сначала должен представить её мысленно, а затем сформулировать само определение.

Таким образом, можно выделить две методические задачи: сформировать у ученика чёткое представление о геометрическом понятии и научить кратко и точно формулировать свои мысли.

Рассмотрим сначала вопрос о введении нового понятия на примере первых геометрических определений в седьмом классе, так как именно с них начинается планомерная и систематическая работа учителя над решением поставленных методических задач.

При знакомстве с каким-либо геометрическим понятием важно выделить все его существенные признаки. Сделать это можно в ходе беседы с учениками. Возьмём для примера понятие смежных углов.

Учитель. Рассмотрим два чертежа (рис. 1). Что общего имеют $\angle AOB$ и $\angle BOC$?

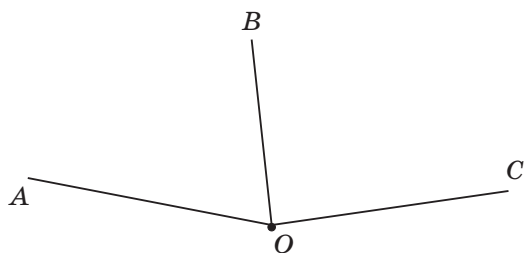


Рис. 1

Ученики. У них есть общая сторона OB .

Учитель. Что общего имеют $\angle A_1O_1B_1$ и $\angle B_1O_1C_1$?

Ученики. У них есть общая сторона O_1B_1 .

Учитель. В чём сходство пар углов на этих двух чертежах?

Ученики. У каждой пары углов есть общая сторона.

Учитель. В чём различие?

Ученики. В расположении двух других сторон этих углов.

Учитель. Какую особенность в расположении сторон O_1A_1 и O_1C_1 вы видите?

Ученики. Эти стороны лежат на одной прямой.

Учитель. Можно ли сказать, что эти стороны являются продолжением одна другой?

Ученики. Да.

Учитель. Углы $A_1O_1B_1$ и $B_1O_1C_1$ называются смежными. Дайте определение смежных углов.

Ученики. Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются продолжением одна другой.

Учитель. Будут ли углы AOB и BOC смежными?

Ученики. Нет.

Учитель. Почему?

Ученики. Их стороны OA и OC не являются продолжением одна другой.

Введение определения нового понятия мы выполнили конкретно-индуктивным методом, который стимулирует активность учеников, даёт возможность сравнивать, сопоставлять, выявлять существенные признаки понятия и, наконец, самостоятельно формулировать определение. Этот метод предпочтительнее абстрактно-дедуктивного ввиду возрастных особенностей учащихся седьмого класса.

Далее полезно предложить ученикам несколько заданий и задать ряд вопросов по готовым чертежам.

1. Являются ли углы MPN и NPQ смежными (рис. 2)? Почему?

Данные углы смежные, но расположены иначе, не так, как на предыдущем рисунке. Это очень полезный приём, так

как расположение смежных углов не является существенным признаком в их определении.

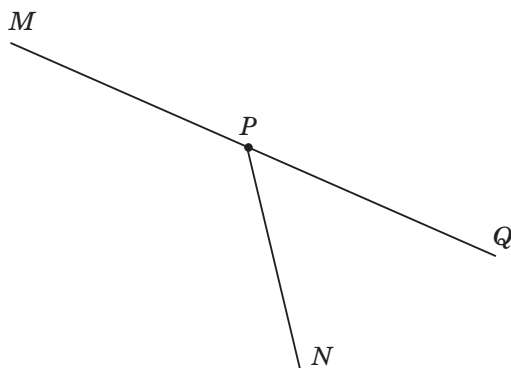


Рис. 2

2. Являются ли углы 1, 2 и 3 смежными (рис. 3)? Почему?

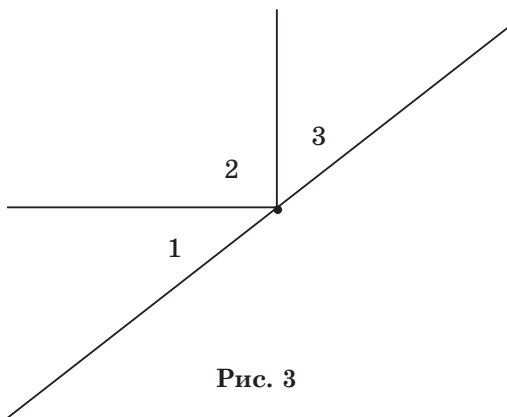


Рис. 3

Углы 1, 2 и 3 не являются смежными, так как смежными бывают только два угла (согласно определению).

3. Являются ли углы 1 и 2 смежными (рис. 4)? Почему?



Рис. 4

Эти углы не являются смежными, так как у них нет общей стороны.

4. Начертите острый угол. Построй-

те угол, смежный с ним. Сколько углов, смежных с данным, можно построить?

Далее необходимо выполнить задание, в котором нужно найти на рисунке смежные углы в различных положениях. Для этого рассматривается более сложная конфигурация.

5. Укажите все пары смежных углов на рисунке 5.

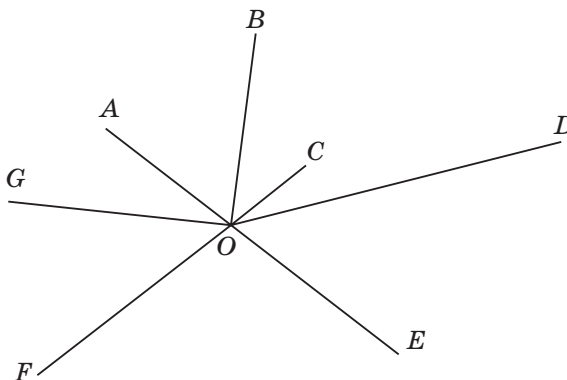


Рис. 5

В ходе дальнейшей работы ученики выполняют достаточное количество чертежей со смежными углами, при этом необходимо избегать стереотипов в расположении фигур. Изменение положения геометрических фигур помогает ученикам отделить существенные признаки понятия от несущественных.

Также можно задействовать в работе наглядное пособие.

6. Если один из смежных углов острый (рис. 6), то каким будет второй угол?



Рис. 6

7. Если один из смежных углов тупой (рис. 7), то каким будет второй угол?

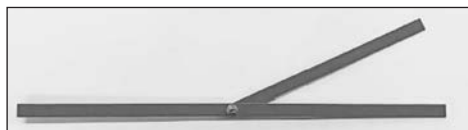


Рис. 7

8. Если один из смежных углов прямой (рис. 8), то каким будет второй угол?

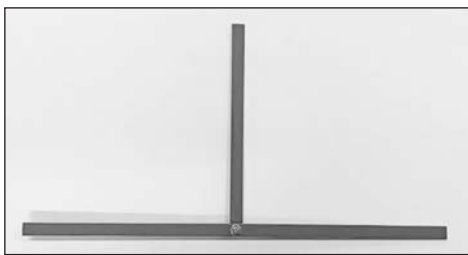


Рис. 8

Аналогичную работу можно провести при введении понятия вертикальных углов. Для этого используются такие чертежи (рис. 9).

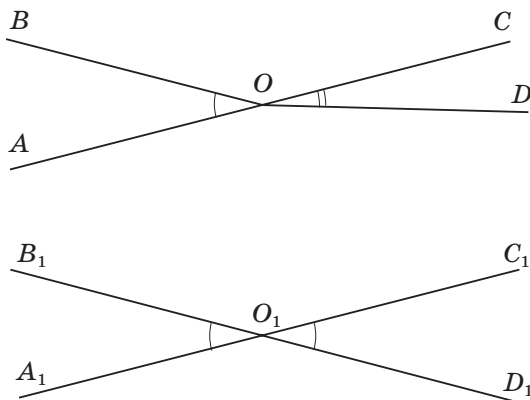


Рис. 9

После доказательства теоремы о равенстве вертикальных углов полезно поработать со следующим чертежом (рис. 10). Равны ли углы 1 и 2? Почему? Одна из моих учениц утверждала, что $\angle 2$ больше, чем $\angle 1$, так как у него длиннее стороны. Очевидно, что она не усвоила понятие угла и принципы его изображения.

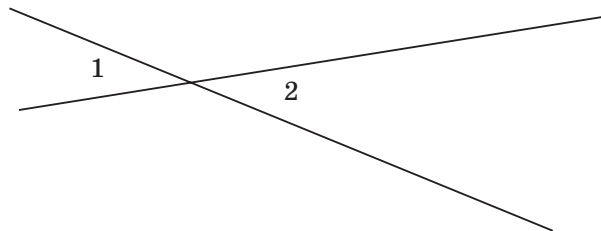


Рис. 10

В старых учебниках геометрии было более удачное изображение лучей: с помощью пунктирной линии показывалось, что стороны угла продолжаютсся дальше (рис. 11). Увидев однажды такой чертёж, ученики вряд ли допустили бы указанную ошибку. Возможно, имеет смысл на первых этапах изучения геометрии пунктирной линией изображать продолжение лучей и прямых.

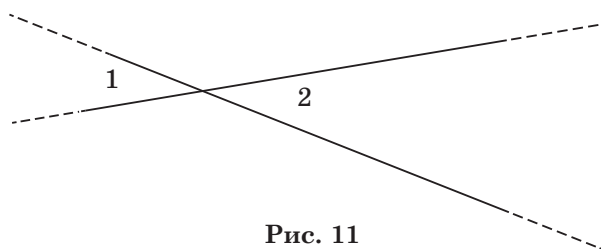


Рис. 11

При введении новых геометрических понятий целесообразно использовать наглядные пособия.

Появление их на уроке всегда вызывает повышенное внимание и любопытство у учеников. Запоминанию нового способствуют действия школьников с простыми моделями.

Как можно организовать работу с наглядным пособием, рассмотрим на примере введения понятия точек, симметричных относительно некоторой прямой.

Учитель. Как вы думаете, какие пары точек совпадут, если чертёж перегнуть по прямой (рис. 12), то есть какие пары точек будут симметричны относительно данной прямой (оси симметрии)?

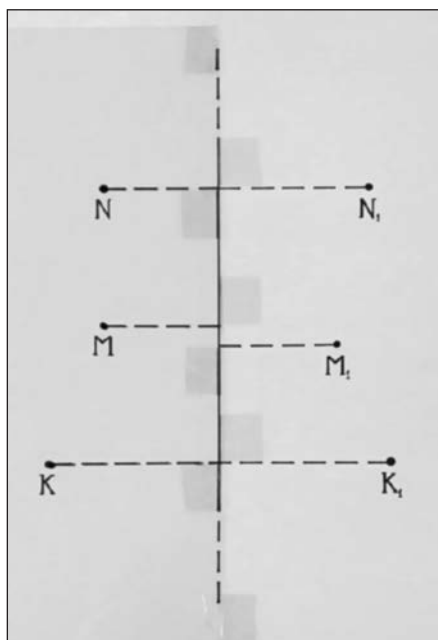


Рис. 12

Перевернём прозрачную часть пособия, на которой отмечены те же отрезки и точки, что и слева от прямой на рисунке 12, проверим, совпадут ли точки N , M и K с точками N_1 , M_1 и K_1 соответственно (рис. 13).

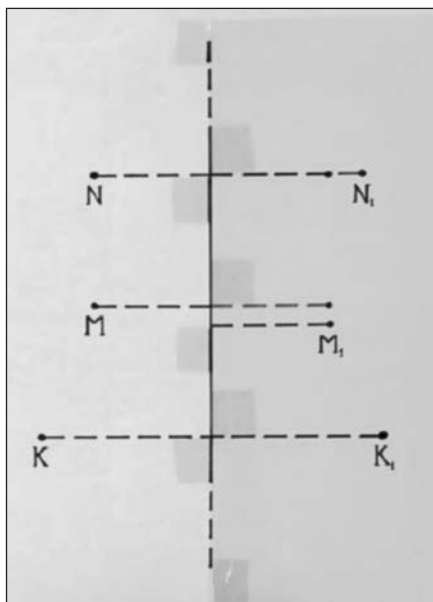


Рис. 13

Учитель. Какие точки оказались симметричны относительно прямой?

Ученики. Точки K и K_1 .

Учитель. Почему не совпали точки N и N_1 ?

Ученики. Они находятся на разных расстояниях от прямой.

Учитель. Почему не совпали точки M и M_1 ?

Ученики. Они находятся на разных прямых, перпендикулярных данной прямой.

Учитель. Какие условия должны выполняться, чтобы точки были симметричны относительно некоторой прямой?

Ученики. Точки должны лежать на прямой, перпендикулярной данной, по разные стороны и на одинаковом расстоянии от данной прямой.

Учитель. Дайте определение точек, симметричных относительно прямой.

Ученики. Две точки называются симметричными относительно прямой, если они расположены на прямой, ей перпендикулярной, по разные стороны и на одинаковом расстоянии от данной прямой.

Далее нужно выполнить аналогичное задание, но ось симметрии расположить иначе, например горизонтально. После этого перейти к упражнениям на построение точек, симметричных относительно каждой из заданных прямых, всякий раз по-разному располагая ось симметрии.

Итак, при введении нового понятия (определении новой фигуры) для формирования чёткого представления о нём можно выделить следующие шаги.

1. Введение понятия конкретно-индуктивным методом через выявление всех его существенных признаков.

2. Выполнение упражнений по усвоению понятия, в которых по готовым чертежам необходимо определить, подходит ли данный объект под понятие или нет.

3. Выполнение учащимися достаточного количества чертежей данной геометрической фигуры (объекта, подходящего под новое понятие) в различных расположениях.

Перейдём теперь ко второй методической задаче. Часто ученики, даже поняв и усвоив новое определение, затрудняются его сформулировать и говорят: «Я знаю, но сказать не могу». Как их научить кратко и точно выражать свои мысли? Рассмотрим несколько приёмов работы.

Когда ученик формулирует определение неточно, учитель на доске изображает фигуру, подходящую под данное определение.

Пример 1. Ученик: «Хорда – это отрезок, проходящий через две точки окружности». В данном определении ученик заменил слово «соединяющий» словом «проходящий», и смысл определения изменился. Учитель делает следующий чертёж (рис. 14) и спрашивает: «Отрезок AB проходит через две точки окружности. Будет ли он хордой?» Ученик отвечает: «Нет». После чего даёт правильное определение хорды.

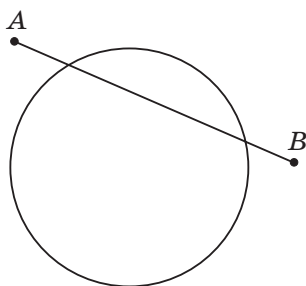


Рис. 14

Пример 2. Ученик: «Биссектриса угла – это луч, делящий угол пополам». Он дал неполное определение, что является довольно распространённой ошибкой. Учитель делает такой рисунок (рис. 15). Теперь ученику становится очевидна не-

точность определения, он исправляет свою ошибку: «Биссектриса угла – это луч, *выходящий из вершины угла* и делящий этот угол пополам».

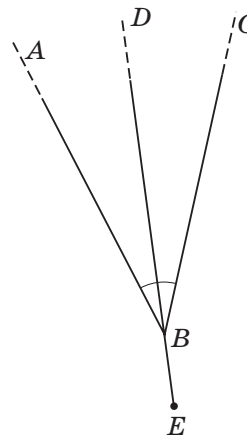


Рис. 15

Пример 3. Ученик: «Высота треугольника – это отрезок перпендикуляра, проведённого из вершины треугольника к его противоположной стороне». Но оно верно не для всякого треугольника. Учитель предлагает начертить тупоугольный треугольник и провести высоту из вершины острого угла. Сделанный чертёж (рис. 16) помогает уточнить определение высоты треугольника. Ученик: «Высота треугольника – это отрезок перпендикуляра, проведённого из вершины треугольника к его противоположной стороне *или к её продолжению*».

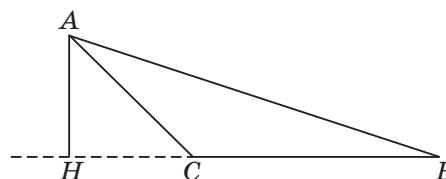


Рис. 16

Пример 4. Ученик: «Два треугольника называются равными, если при наложении они полностью совпадут». Такой слу-

чай легко проиллюстрировать с помощью вырезанных из бумаги равных фигур (рис. 17 и 18). Берём те же два треугольника и накладываем один на другой так, чтобы они не совпали (рис. 19). Задаём вопрос: «Значит ли это, что треугольники не равны?» Предлагаем взять эти треугольники и проверить, совпадут ли они. Если да, то как изменить определение, чтобы оно стало верным? Ученик: «Два треугольника называются равными, если их *можно наложить* один на другой так, что они полностью совпадут». Согласитесь, что это достаточно тонкий момент.

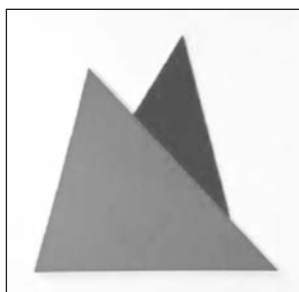


Рис. 17



Рис. 18

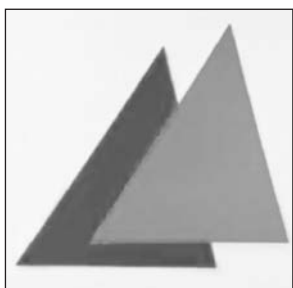


Рис. 19

Одно из самых сложных определений курса геометрии в седьмом классе – это определение выпуклой ломаной линии: «Ломаная называется выпуклой, если она расположена по одну сторону от каждого входящего в её состав отрезка, продолженного неограниченно в обе стороны». Распространённая ошибка при его формулировке – пропуск слова «каждого». В этом случае опять поможет рисунок. Возвращаясь к ранее сказанному: как ученик может воспроизвести эту формулировку, не представляя мысленно выпуклой ломаной линии?

Возможна ещё одна ошибка, которую можно назвать «зацикливанием определений».

Ученик: «Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью».

Ученик: «Окружность – это граница круга».

В моей практике встречалась и другая ошибка в формулировке определения круга.

Ученик: «Круг – это часть поверхности, ограниченная окружностью».

Я взяла кольцо и продела в него часть шейного платка, получив модель совсем не плоской поверхности (рис. 20). С тех пор этот ученик давал определение круга правильно.



Рис. 20

Чертёж поможет и в том случае, когда ученик неточно формулирует какую-то теорему. Приведу простой пример. Ученик: «Биссектриса равнобедренного треугольника является его медианой и высотой». Учитель: «Это неверно. Почему?» Ответ ясен из рисунка 21.

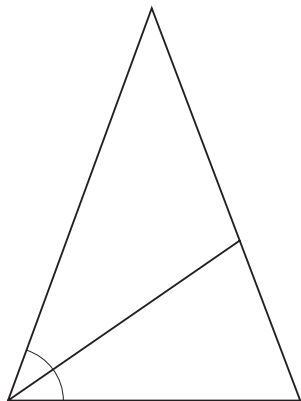


Рис. 21

Помните, как в сказке «Золушка», когда одной из сестёр удалось надеть хрустальную туфельку, король спросил: «Что же теперь делать?» А ему ответили: «Танцевать, конечно!» Так и в обучении геометрии: ученик ошибся в формулировке, что делать? Рисовать, конечно!

Как видим, можно применять разнообразные приёмы при устной работе по оттачиванию формулировок. Главное — задавать вопросы таким образом, чтобы оказать ученику помощь именно в том объёме, в котором это необходимо для того, чтобы ребёнок осознал и исправил ошибку. Следует требовать от ученика повторять формулировку до тех пор, пока он не сделает это абсолютно правильно.

Ещё одно полезное упражнение — на определение того, какие из данных утверждений верны, а какие нет. Неверные высказывания составляются, исходя из типичных ошибок учащихся. Приведу несколько примеров.

7 класс

Верно ли утверждение?

1. Угол — это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки.

2. Если угол составлен из двух лучей AB и AC , то его можно обозначить как BAC .

3. Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

4. Длины сторон углов можно измерить.

5. Сложение углов обладает сочетательным свойством.

6. Вычитание углов обладает переместительным свойством.

7. Два угла называются равными, если один из них можно наложить на другой так, что они полностью совпадут.

8. Между стрелками часов, когда они показывают 6 часов, развёрнутый угол.

9. Если прямой угол увеличить в четыре раза, то получится полный угол.

10. Биссектриса — это прямая, которая делит данный угол пополам.

Верно ли утверждение?

1. Треугольник — это многоугольник, у которого три угла.

2. У тупоугольного треугольника нет острых углов.

3. Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

4. Медиана треугольника — это отрезок, проходящий через вершину треугольника и середину противоположной стороны.

5. Биссектриса треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной и делящий эту сторону пополам.

6. Высота треугольника — это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к противоположной стороне.

7. Медиана равнобедренного треуголь-

ника является его биссектрисой и высотой.

8. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является биссектрисой и медианой.

9. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

10. В равностороннем треугольнике все углы равны.

8 класс

Какие из данных утверждений верны?

1. Окружность – это геометрическое место точек, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки.

2. В описанном около окружности четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

3. Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис его углов.

4. Касательная к окружности – это прямая, которая имеет с окружностью одну общую точку.

5. Касательные, проведённые к данной окружности из одной точки, равны.

6. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от соответствующей стороны.

7. Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через его конец, то она является касательной к данной окружности.

8. Угол, вершина которого лежит внутри круга, равен полусумме дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая – между продолжениями его сторон.

9. Угол, вершина которого лежит вне круга, измеряется полуразностью дуг, заключённых между его сторонами.

10. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.

В этом задании неверными являются утверждения 1, 5, 6, 7 и 9.

Утверждение 1 – это определение сферы, а не окружности. Необходимо уточнить, что окружность – это геометрическое место точек *плоскости*.

В утверждении 5 речь должна идти не о касательных, а об *отрезках касательных*. Касательные – это прямые, говорить об их длине некорректно.

В утверждении 6 допущена фактическая ошибка.

Утверждение 7 требует уточнения: прямая проходит через конец радиуса, *лежащий на окружности*.

В утверждении 9 необходимо уточнение: стороны угла *пересекают границу круга*.

Подобные упражнения можно выполнять как устно, так и письменно. Дети на листочках ставят знак «+», если считают, что утверждение верно, или знак «–», если считают, что утверждение неверно. Затем учитель проверяет работы и выставляет оценки, вместе с учениками разбирает типичные ошибки.

Ещё одной формой обучающего контроля, которую я использую в своей работе, является «честный диктант». Суть его в следующем. Предварительно ученикам выдаётся список вопросов, по которым будет проходить диктант. На уроке учитель зачитывает все вопросы по порядку, а ученики ставят «+», если знают ответ на вопрос, и «–», если не знают. Затем учитель собирает работы и озвучивает критерии оценки.

Как правило, я ставлю оценку «5» только в том случае, когда у ученика все вопросы отмечены знаком «+». Критерии других оценок варьируются в зависимости от количества вопросов. Обычно при наличии одного или двух знаков «–» ставится оценка «4», а трёх или четырёх знаков

«—» — оценка «3». На следующем этапе выполняется выборочная проверка: задаётся несколько вопросов каждому ученику. Если на какой-то вопрос ученик не смог дать правильный ответ, хотя отметил этот вопрос знаком «+», он получает оценку «2» и позже устно пересдаёт все вопросы диктанта. Если ученик правильно отвечает на все выборочные вопросы, он тем самым подтверждает свою оценку.

При проверке от учеников требуется точность формулировок. Такая система работы позволяет быстро и эффективно проверить знания учеников, обобщить и закрепить изученный материал. Целесообразно использовать «честный диктант» при повторении и обобщении изученного материала.

Приведу примеры вопросов «честного диктанта».

8 класс

1. Определение окружности.
2. Теорема об окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.
3. Определение хорды окружности.
4. Определение диаметра окружности.
5. Теорема о диаметре, перпендикулярном хорде.
6. Теорема о дугах, заключённых между параллельными хордами.
7. Теоремы о зависимости между дугами, хордами и расстояниями этих хорд от центра.
8. Определение касательной.
9. Свойство касательной.
10. Признак касательной.
11. Теорема о касательной, параллельной хорде окружности.
12. Теорема об отрезках касательных, проведённых к окружности из одной точки.

13. Определение центрального угла.
14. Теорема об измерении центрального угла.
15. Определение вписанного угла.
16. Теорема об измерении вписанного угла.
17. Теорема об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга.
18. Теорема об измерении угла, вершина которого лежит вне круга.
19. Теорема об угле между касательной и хордой.
20. Теорема об описанном около окружности треугольнике.
21. Теорема о вписанном в окружность треугольнике.
22. Теорема об описанном около окружности четырёхугольнике.
23. Теорема о вписанном в окружность четырёхугольнике.
24. Четыре замечательные точки треугольника.
25. Теорема о пересечении медиан треугольника.
26. Теорема Пифагора.

Ещё одним приёмом работы является ведение словаря терминов. Ученики заводят специальную тетрадь, в которую записывают определения и теоремы по мере их изучения. Запись математических предложений удивительным образом способствует их запоминанию. Такой словарь обычно составляется в седьмом классе, в начале изучения курса геометрии.

В данной статье я поделилась своим опытом, рассказала о том, как я учу детей точно формулировать определения и теоремы. Надеюсь, что эти идеи будут вам полезны.

Статья поступила в редакцию

29.06.2023.

Принята к публикации

05.09.2023.

МЕТОДИЧЕСКОЕ НАСТАВНИЧЕСТВО: ЦЕЛИ, УСЛОВИЯ ОРГАНИЗАЦИИ, ОПЫТ

METHODOLOGICAL MENTORING, PURPOSES, ORGANIZATION CONDITIONS, EXPERIENCE

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_33

И.Е. Малова, доктор пед. наук, профессор,
Брянский государственный университет имени
академика И.Г. Петровского,
mira44@yandex.ru,

В.С. Абатурова, канд. пед. наук,
Старший научный сотрудник Южного математи-
ческого института – филиала ФГБУН ФНЦ «Вла-
дикавказский научный центр Российской акаде-
мии наук», veronika-abaturova@yandex.ru,

Н.А. Малинникова, канд. пед. наук,
доцент, Брянский государственный университет
имени академика И.Г. Петровского,
nasom68@mail.ru

I.E. Malova, SciD (Pedagogy), Professor,
Bryansk State Academician I.G. Petrovski
University,
mira44@yandex.ru,

V.S. Abaturova, PhD (Pedagogy),
Senior researcher of the Southern Mathematical
Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific
Centre of Russian Academy of Sciences,
veronika-abaturova@yandex.ru,

N.A. Malinnikova, PhD (Pedagogy), Associate
Professor, Bryansk state university named after
academician I.G. Petrovsky,
nasom68@mail.ru

Аннотация: обозначены цели организации ме-
тодического наставничества. Выделены условия
эффективной организации наставничества. Рас-
крыт опыт организации методического настав-
ничества в Брянской и Владикавказской школах
учителя математики

Abstract: the objectives of the organization of
methodological mentoring are outlined. The con-
ditions for the effective organization of mento-
ring are highlighted. The experience of organiz-
ing methodological mentoring in Bryansk and
Vladikavkaz schools of a mathematics teacher is
revealed

Ключевые слова: методика обучение матема-
тике, методическая среда, повышение квалифи-
кации

Keywords: methods of teaching mathematics,
methodological environment, professional devel-
opment

© И.Е. Малова, В.С. Абатурова, Н.А. Малинникова 2023

2023 год объявлен в России годом пе-
дагога и наставника. И это вызвано не
только задачей повышения роли педагога
в жизни общества, но и необходимостью
усиления внимания к организации на-
ставничества. Однако организация на-
ставничества должна иметь научную ба-
зу, чтобы наставничество реально реша-
ло методические проблемы учителя, а не
превращалось в набор мероприятий.

Представим некоторые идеи организа-
ции наставничества, которые опублико-
ваны в научных статьях.

И.В. Руденко и И.В. Саркисова в ста-
тье [10] рассматривают наставничество
как форму научно-методического сопро-
вождения профессионального развития
педагогов. По их мнению, наставничество
не только решает проблемы начинающих
педагогов (поскольку способно компенсиро-

ровать дефицит практических умений), но и развивает самого наставника. Для реализации наставничества рекомендуется выполнение следующих организационных условий:

- создание центров наставничества;
- создание образовательной среды в каждом образовательной организации, в которой есть место инициативе;
- формирование базы наставников и их обучение в системе дополнительного профессионального образования;
- формирование наставнических пар;
- определение сроков и плана наставничества с учётом индивидуальности наставника и наставляемого;
- стимулирование для достижения положительных результатов наставнической деятельности; информирование о достижениях наставника и наставляемого.

В статье [1] противопоставляются понятия «наставничество» и «коучинг» по трём позициям: цель; ситуация использования; существующие ограничения. При этом, по мнению автора, наставничество ограничивается решением задач через обмен опытом; отмечается, что «готовые» решения и «мудрость прошлого» редко способствуют развитию новых инициатив. В отличие от этого, коучинг решает задачи через развитие профессиональной самостоятельности и ответственности за результат у учителя. На наш взгляд, наставничество может быть разных уровней, поэтому мы не используем термин «коучинг». К более высокому уровню наставничества отнесём указанные в статье условия его организации при подготовке учителей к профессиональным конкурсам:

- условие непосредственного включения (участие учителя в очных профессиональных испытаниях);
- условие взаимосвязи (учитель пред-

ставляет учебное занятие в контексте своего педагогического опыта);

- условие аргументированного обсуждения (обсуждение основных педагогических проблем предусматривает дебаты);
- условие эффективной трансляции педагогического опыта (в качестве формы обмена педагогическим опытом участников конкурса рекомендуется использовать мастер-классы);
- условие активного слушания (применяется «матрица ключевых вопросов»);
- условие педагогического прогнозирования (представление презентации учебного занятия);
- условие метапредметности (включение метапредметных номинаций, исходя из целей образования).

Заметим, что условия, разработанные нами в ходе исследования, созвучны представленным в статьях других авторов, хотя и были получены независимо и не относились к подготовке учителя к профессиональным конкурсам.

Статья [5] посвящена проблеме выбора форм организации наставничества в целом и сетевого, в частности: сопровождение и сотрудничество через создание банка наставнических разработок, в котором молодые специалисты могут найти ответы на возникающие вопросы у нескольких наставников; через размещение опытными учителями на собственных сайтах материалов, имеющих методическую значимость для начинающих коллег. Процесс наставничества рассматривается как взаимообучение, в котором меняются ролевые позиции каждого из участников. Так, информационными технологиями лучше владеют молодые учителя, поэтому они могут оказывать помощь своим наставникам, в то время как наставники помогают в освоении содержания учебного предмета, методики

обучения предмету, организации учебного процесса.

В статье [6] отмечается, что «управление персоналом должно рассматриваться не как совокупность методов командования работниками, а как деятельность, направленная на удовлетворение потребностей не только коллектива организации, но каждого отдельного сотрудника», при этом важна личная мотивация работника. В качестве мероприятий для решения задачи удовлетворения потребностей работников образовательных организаций предлагаются: закрепление куратора, ответственного за процесс адаптации нового работника; проведение открытых уроков учителей первой и высшей квалификационных категорий для всех остальных педагогов; привлечение педагогов к проектной исследовательской деятельности, составление плана самообразовательной деятельности; закрепление учителя-наставника высшей категории за молодым педагогом.

В статье [7] рассматривается региональная модель системы сетевого наставничества, условия реализации которой созвучны с условиями, определёнными в исследовании И.В. Руденко и И.В. Саркисовой. Предлагаемая система организации наставничества включает такие формы работы: беседы, презентации, представление коллективу своего опыта, информирование, консультации, совместные разработки сценариев уроков, открытые уроки с последующим анализом и самоанализом и др.

В статье [11] рассмотрены возможности виртуальных методических кабинетов образовательных организаций для поддержки непрерывного повышения квалификации и самообразования сотрудников. Рекомендована должность куратора его контента и видеооператора

для документальных съёмок интервью с преподавателями и фрагментов реальных занятий с использованием активных методов обучения.

Статья [4] посвящена анализу проблем внедрения целевой модели наставничества применительно к школьникам. Отметим важность для наставничества применительно к учителям и таким вопросам, как трудности в коллективном взаимодействии (нет опыта советских школ), перенос акцентов с результатов на процесс взаимодействия, возможность наставляемых стать наставниками в последующем.

Важен также анализ наставничества в рамках экспериментальной работы. Такая работа была проведена в рамках двух методических школ в Брянске и Владикавказе.

Организованная В.С. Абатуровой во Владикавказе серия мастер-классов учителей математики для студентов Северо-Осетинского государственного университета имени К.Л. Хетагурова по проблеме реализации базовых методик обучения математике, связанных с формированием математического понятия, формированием математического умения, изучением теорем, решением задач впервые состоялась в 2022 году в рамках Владикавказского математического научно-образовательного форума. Мастер-классы проводились с участием школьников и привели к следующим выводам:

1) учителя заинтересованы в совершенствовании опыта реализации методических требований в конкретных математических темах;

2) методическая помощь учителю в конструировании урока математики является значимой;

3) необходимо согласовывать методическую помощь с опытом учителя.

Так родилась идея создания Школы учителя математики (ШУМ) «Методическая среда» в Брянском государственном университете имени академика И.Г. Петровского. В 2022–2023 учебном году ШУМ окончили 4 учителя Брянской области, 5 учителей Северной Осетии и 1 учитель Пензы. За каждым учителем был закреплён куратор из числа кандидатов наук (В.С. Абатурова, Ю.А. Еловинова, М.А. Корпачева, Н.А. Малинникова, С.В. Чиспияков), научным руководителем ШУМ являлась И.Е. Малова.

Были определены и достигнуты цели:

1) раскрыть способы решения методических проблем обучения учащихся математическим темам, выбранным учителями;

2) выявить возможности математических тем и организации их изучения для обогащения опыта учащихся не только в предметной, но и в метапредметной деятельности;

3) раскрыть методический потенциал каждого участника процесса наставничества;

4) апробировать различные способы взаимодействия в триаде (учитель – куратор – научный руководитель) наставничества.

Занятия проходили в смешанном формате (очно и дистанционно) 1 раз в месяц в течение двух часов. Структура каждого занятия включала:

1) обзор методических приёмов, разработанных в рамках выпускных квалификационных работ студентов;

2) комментарий научного руководителя ШУМ по результатам выполнения домашнего задания (задание включало либо отчёт по результатам внедрения того или иного методического приёма в практику, либо изучение методических текстов, либо представление учителем своего методического опыта);

3) выступления учителей по решению некоторой методической проблемы с методическим комментарием куратора;

4) подведение итогов и постановка домашнего задания.

Были определены условия организации наставничества.

Условие 1. Содержание наставничества должно быть связано с разработкой и анализом урока математики, поскольку только урок может служить критерием методической результативности учителя.

Математические темы выбирали учителя в соответствии со своим тематическим планированием.

Условие 2. Направленность наставничества на решение конкретной проблемы методики обучения математике, поскольку наставничество должно быть не только полезным, но и интересным, творческим процессом.

Кроме проблем реализации требований базовых методик при изучении той или иной математической темы, рассматривались проблемы мотивации учащихся, способов систематизации знаний и др.

Условие 3. Заинтересованность учителя математики и наличие индивидуальных и коллективных наставников, поскольку требуется большой труд над решением методических проблем, решение проблем должно быть обоснованным, т.е. иметь опоры на фундаментальные основы методики обучения математике, значит, необходимо соединение практиков и теоретиков.

Как видим, предлагаемые нами условия организации наставничества в большей степени связаны с содержанием наставничества, а не с организационными формами.

Представим этапы работы ШУМ над проблемами-темами.

На *первом этапе* учителем выбиралась

тема урока, а с помощью беседы с научным руководителем и куратором определялась методическая проблема, решение которой хотелось бы показать на уроке.

На *втором этапе* учитель составлял конспект урока. Этот конспект рассматривался как диагностическая работа, позволяющая увидеть идеи учителя и проблемные моменты урока.

На *третьем этапе* научный руководитель ШУМ анализировал конспект урока учителя и давал список рекомендаций по его совершенствованию.

На *четвёртом этапе* учитель совместно с куратором работал над совершенствованием конспекта урока, и учителем готовилась компьютерная презентация, отражающая каждый этап урока. Презентация должна была быть такой, чтобы её можно было использовать в классе на уроке.

На *пятом этапе* научным руководителем анализировалась компьютерная презентация, и вносились необходимые изменения.

На *шестом этапе* учителем и куратором готовилось выступление на занятии в ШУМ. Задача учителя заключалась в представлении этапов урока, задача куратора – в методическом комментарии каждого из них. При необходимости, предварительно осуществились консультации с научным руководителем.

На *седьмом этапе* осуществлялось выступление учителя и куратора на занятии ШУМ, организовывалось обсуждение выступления.

На *восьмом этапе* учителем готовилась публикация по методической проблеме урока.

На заключительном занятии ШУМ участники раскрыли понятие «методическая среда», представили карту приобретённых методических умений.

Обозначены результаты работы ШУМ:

- Выявлены **проблемы** конструирования уроков математики по различным темам и типам уроков.
- Разработаны **способы решения** проблем.
- Получены **дидактические материалы**, готовые к распространению.
- Подготовлены научно-методические **публикации** [2, 3, 8, 9].

Список источников

1. Агапова С.А. Коучинговое сопровождение в процессе построения индивидуальной траектории профессионального развития учителя // Вестник Московского университета МВД России. 2012. № 4. С. 189–191.
2. Боцьева А. Задачи на однокруговые турниры // Математика | Декабрь | 2022. С. 4–15.
3. Гусалова Ф., Малова И. Реализация базовой методики формирования умений // Математика | Март | 2023.
4. Илакавичус М.Р. Внедрение целевой модели наставничества: проблемы и решения // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review. 2021. № 4 (38). С. 15–24.
5. Кириллова И.О. Наставничество: модный тренд или осознанная необходимость? Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review. 2017. 4 (18). – С. 75–80.
6. Кузьмина Л.П., Давыдова А. В. Актуальные вопросы управления персоналом в общеобразовательном учреждении // Вестник экономики, права и социологии. 2022. № 3. С. 108–110.
7. Лыжина Н.П., Сарычева М.О. Региональная система педагогического наставничества Томской области: механизмы формирования и развития. Профессиональное образование в России и за рубежом. 2018. 4 (32). – С. 47–55.
8. Малова И.Е., Охват Л.П. Проблемы реализации методики формирования понятий // Дидактика математики: проблемы и иссле-

дования. Международный сборник научных работ. Выпуск 1 (57), 2023. С. 60–68.

9. *Охват Л.* Изучение темы «Декартова система координат» // Математика | Сентябрь | 2022. С. 30–37.

10. *Руденко И.В., Саркисова И.В.* Наставничество как форма научно-методического сопровождения профессионального развития

будущих педагогов. Научен вектор на Балканите. 2021. Т. 5. № 2(12). – С. 15–20.

11. *Ряшенцев И.В., Стародубцев В.А.* Виртуальный методический кабинет // Открытое образование. 2014. № 4. С. 34–38.

Статья поступила в редакцию:

28.06.23.

Принята к публикации:

15.08.23.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Кельты и число 3

В кельтской культуре часто повторяются тройки. Вопросы задаются трижды, боги объединены по трое, а приносящие удачу каменные фигурки духов или богов, чьи лица закрыты капюшонами, всегда располагаются по три, поскольку это число увеличивает их магическую силу. Для кельтов возраст лошади был в три раза больше возраста собаки, возраст человека – в три раза больше возраста лошади, возраст ворона – в три раза больше возраста человека, а возраст орла – в три раза больше возраста ворона.

Юлий Цезарь упоминал, что кельты предпочитали передавать знания устно, больше полагаясь на свою память, чем на письменность. Для запоминания использовались сложные приёмы мнемотехники, в которых наиболее часто применялся принцип объединения предметов в тройки. По этой причине законы, правила стихосложения и традиционные знания кельты обычно объединяли по три: «Есть три вещи, которые лучше делать быстро: ловить на себе блоху, уступать дорогу бешеной собаке и примирять спорящих»; «Мудрость имеет три источника: мысль, интуиция, обучение» и т. д.

По книге: *Ламберто Гарсия дель Сид*. Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии (М., Де Агостини, 2014).

Приближённая оценка в супермаркете

Придя в магазин, вы когда-нибудь интересовались общей суммой покупки до того, как кассир пробил чек? Для оценки общей суммы я использую технику округления цен до ближайших 50 центов. Например, пока кассовый аппарат складывает 11 чисел из левой колонки, я мысленно суммирую 11 чисел из правой колонки.

1,39	1,50	0,20	0,00
0,87	1,00	1,17	1,00
2,46	2,50	0,65	0,50
0,61	0,50	2,93	3,00
3,29	3,50	<u>3,19</u>	<u>3,00</u>
2,99	3,00	19,75	19,50

Моя итоговая цена, как правило, колеблется в пределах одного доллара от точного значения.

По книге: *А. Бенджамин, М. Шермер*. Магия чисел.

Моментальные вычисления в уме и другие математические фокусы (М., МИФ, 2015).

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТИРОВ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ОБРАЗНОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ» НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

APPLICATION OF MATERIAL MODELS OF PROTRACTORS FOR DEVELOPMENT FIGURATIVE THINKING OF SCHOOLCHILDREN DURING THE STUDY OF MEASURING ANGLES IN GEOMETRY LESSONS

Научная статья 5.8.7

Scientific article 5.8.7

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_39

А.Н. Калашников, учитель математики, МБОУ «СОШ № 8» Ленинск-Кузнецкий ГО Кемеровской области, Почётный работник общего образования РФ, ветеран труда, alextwo@yandex.ru

A.N. Kalashnikov, mathematics teacher, «Secondary school with in-depth study of individual subjects No.8» Leninsk-Kuznetsky CD Kemerovo region, Honorary Worker of General Education of the Russian Federation, Veteran of labor, alextwo@yandex.ru

Аннотация: в статье рассматриваются авторские методические находки, основанные на применении динамических моделей двух видов транспортиров, созданных автором. Использование на уроках геометрии большого транспортира позволит увеличить наглядность при пошаговом решении задач, а работа школьников с маленькими (индивидуальными) транспортирами обеспечивает закрепление полученных знаний при условии сохранения времени урока. Кроме этого, индивидуальные транспортиры дают возможность учителю своевременно увидеть и исправить ошибки, которые могут допустить ученики на каждом этапе решения задачи

Abstract: the article discusses the author's methodological findings based on the use of dynamic models of two types of transporters created by the author of the article. The use of a large conveyor in geometry lessons will increase visibility in step-by-step problem solving. The use of small (individual) transporters will allow students to consolidate their knowledge while saving lesson time. In addition, individual transporters enable the teacher to timely see and correct mistakes that student may make at each stage of the decision

Ключевые слова: большой транспортир с лучами, маленький (индивидуальный) транспортир с лучами, измерение углов, градусная мера угла, луч, угол, вычисление неизвестных углов

Keywords: large protractor with rays, small (individual) protractor with rays, measurement of angles, degree measure of an angle, ray, corner, calculation of unknown angles

© А.Н. Калашников 2023

Большую роль в развитии математического мышления играет наглядность, особенно при решении геометрических задач. Решение любой задачи требует от ученика умения образно мыслить. Формирование

образного мышления является важным элементом любого урока математики и геометрии, т.к. именно оно позволяет в общем виде видеть будущий алгоритм решения любых задач. К.Д. Ушинский

говорил о том, что единственным источником наших знаний может быть «опыт, сообщаемый нам через посредство внешних чувств» [4]. Именно внешнее воздействие позволяет эффективно развивать образное мышление учеников. Для формирования условий, которые могут оказать помощь в развитии необходимых навыков решения геометрических задач, человечеством было создано большое количество различных средств наглядности: от плакатов и рисунков до компьютеров и интерактивных комплексов с прикладными программами к ним. Именно в применении наглядности видел путь в развитии образного мышления профессор П.Я. Гальперин в своей работе над решением вопроса о создании таких условий обучения, чтобы каждый психически здоровый ребёнок не только легко мог бы преодолеть путь от незнания к знанию, но при этом можно было бы создать условия для успешного получения новых знаний. На основе проведённых исследований он пришёл к выводу, что «следует найти средства, которые позволили бы уверенно и без потерь перенести предметное действие во внутренний план» [2].

Чтобы реализовать на практике описанный подход, следует понять, что может вызвать интерес ученика на уроке и чем можно привлечь внимание к решению задач и изучению предмета.

С одной стороны, бурное развитие информационных технологий и внедрение интерактивных комплексов в образовательный процесс показало, что их применение достаточно эффективно. Но, несмотря на это, остались вопросы, на которые в наш информационный век до сих пор приходится искать ответы. Например, что делать школам, у которых нет возможности на каждом уроке использовать современные информационные технологии?

Однако даже при наличии современного оборудования найдётся немало других задач, которые приходится решать каждому учителю при подготовке к уроку. Одной из главных задач остаётся эффективная помощь ученику.

На уроках математики ученики отрабатывают навыки выполнения арифметических действий с числовыми примерами, учатся выполнять преобразования алгебраических выражений на основе изученных законов и свойств, решают задачи, связанные с вычислением неизвестных величин в геометрических задачах. Для них любая помощь актуальна, но особенно ученикам требуется помощь при решении геометрических задач, где им необходимо видеть пути решения. Правильно выполненное построение чертежа – это один из важных этапов решения задачи. При выполнении построения у учеников могут возникнуть вопросы, на которые необходимо дать соответствующие пояснения. А это, в свою очередь, увеличивает время на решение задачи. Может оказаться так, что найдётся хотя бы один ученик, который не совсем понял выполненное построение и ход решения. Тогда учителю приходится искать способ эффективного воздействия на развитие образного мышления.

Решение данной проблемы не зависит от технической оснащённости школы, поскольку интерактивный комплекс в кабинете учителя математики обычно существует в единственном экземпляре, а это значит, что перед учителем стоит проблема: как помочь всем ученикам и каждому в отдельности именно сейчас, именно на этом уроке.

Размышления автора над обозначенной проблемой побудили проанализировать интересы современных школьников. Что привлекает их внимание? Чем они увлекаются?

Наблюдения показали, что ученики достаточно много времени проводят в виртуальном пространстве, где их привлекает динамика. Значит, требуется дать им эту динамику, но лучше в материальной форме. Но как это сделать? Для этого учителю необходимо «видеть» мысли ученика, то есть образ, созданный на основе условия задачи.

Размышляя об уроке и представляя возможные способы его проведения, неожиданно пришла идея, которая воплотилась в виде материальной модели большого транспорта (рис. 1). Для хорошего обзора и подвижности он был поставлен на подставку с колёсами. Такая конструкция сразу привлекла внимание учеников, а значит, одна из целей была достигнута.



Рис. 1. Большой транспортир с лучами

Большой транспортир состоит из двух частей: собственно транспорта, сделанного на основе алюминиевого композитного материала алюкобонда с использованием пластика и прозрачного оргстекла, и подставки, выполненной из дерева.

Передняя часть транспорта закрыта прозрачным оргстеклом, что позволяет подписывать маркером для белой доски обозначения и величины углов. После разбора задачи эти записи легко стираются и модель снова готова к использованию. К корпусу транспорта подвижно крепятся лучи: четыре основных и два дополнительных. В зависимости от условия задачи можно прикрепить от двух до четырёх основных лучей. Дополнительные два луча имеют вид пунктирной линии и являются быстросъёмными. Они используются для более наглядного, полного понимания материала, т.к. имеют в основании С-образное крепление, которое позволяет устанавливать эти лучи на ось вращения и при необходимости их снимать.

Деревянная подставка для удобной транспортировки разбирается, а снизу прикреплены мебельные колёсики, что позволяет развернуть большой транспорт в любую сторону для хорошего обзора.

Стало понятно, что при отсутствии интерактивных комплексов их можно заменить материальными моделями, которые так же привлекают внимание учеников и дешевле обходятся при создании. Но помощь может потребоваться многим, большой транспорт один, а значит, проблема была решена только наполовину, и нужно было придумать и создать индивидуальные материальные модели для каждого ученика, тогда при изучении темы «Измерение углов» можно проводить работу значительно эффективнее. Когда были разработаны маленькие индивидуальные транспортеры, с теми же возможностями, что и у большого, проблема была решена окончательно (рис. 2). У учителя появилась возможность, наблюдать за ходом решения задач у каждого ученика в отдельности, индивидуально.

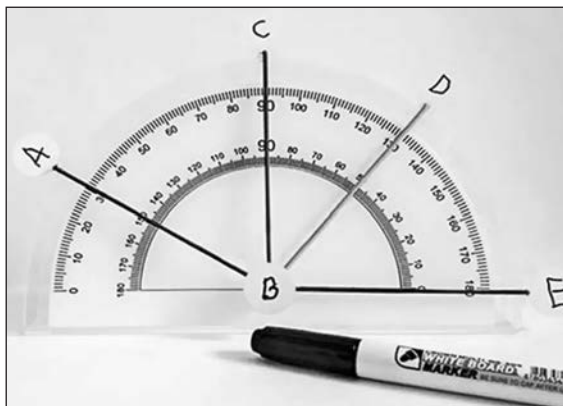


Рис. 2. Маленький (индивидуальный) транспортир с лучами

Маленький индивидуальный транспортир выполнен из оргстекла и закреплён на несъёмной подставке. Лучи сделаны на основе резинок для шапок, крепятся сверху и к оси в центре транспортира. На нём можно маркером писать обозначения, указывать дужками углы, а остальные записи выполняются учениками в тетрадях. Для разбора решения задач достаточно четырёх лучей, но в зависимости от условия можно оставить три луча.

Преимущества материальных моделей в сравнении с интерактивными комплексами заключаются в следующем.

1. Экономия времени на подготовку динамической иллюстрации по сравнению с использованием презентации с анимацией. Так, например, в программе Microsoft PowerPoint на создание тридцатисекундной анимации может уйти не один час, а примерно до 10 часов работы, т.к. придется искать эффективные способы визуализации желаемого действия. Если обратить внимание на презентации, которые можно найти в открытом доступе в сети Интернет, то в основном – это статичные изображения, не отличающиеся принципиально от картинок в учебнике.

При наличии материальных моделей,

не приходится создавать анимацию заранее, т. к. модель транспорта динамична и задачи решаются сразу на ней без дополнительной подготовки слайдов, что экономит личное время учителя.

2. На материальной модели транспорта легко показать свойства вписанных и центральных углов. Для этого на лучах есть крепления, которые позволяют прикрепить дополнительную нить, на основе резинки для головных уборов. Таким образом, модель транспорта может использоваться при изучении разных тем геометрии.

3. Предположим, что в какой-то день отключили электроэнергию в школе. Что делать учителю, если урок опирается на программное обеспечение или презентацию? Материальная модель не зависит от электроэнергии и всегда под руками, ход урока ничто не останавливает.

4. Дополнительным преимуществом является малая стоимость таких моделей. Стоимость интерактивных комплексов значительно превышает стоимость материальной модели транспорта.

5. Обычно интерактивный комплекс – один на весь класс. Маленькие (индивидуальные) транспортиры могут быть на столе у каждого ученика.

6. Начать решение задачи можно сразу на самой модели. Для этого нужно расставить лучи по условию задачи, ввести их обозначения, далее, внимательно читая условие задачи и перемещая лучи по шкале, легко понять способ решения. Это облегчает восприятие материала и отличает работу с моделью от традиционных чертежей, причём каждый ученик может работать в своём темпе.

7. Удобство использования материальных моделей заключается ещё в том, что скорость восприятия материала у детей разная. Один ученик понимает решение

сразу, другому надо эту задачу не только прочесть, но и потрогать руками, буквально увидеть, куда и как перемещаются лучи. Что в этот момент происходит у ученика в его сознании? «Эврика», как однажды сказал Архимед при решении задачи. Пусть ученик и не скажет этого слова, но про себя он отметит, что понял ход решения задачи. Это является маленьким шагом на большом пути дальнейшего познания.

8. Можно отметить, что наличие такой модели у каждого ученика даёт возможность создавать и проводить уроки разного типа.

Перечисленные достоинства позволяют заключить, что применение материальных моделей делает решение задач по геометрии более наглядным и понятным, решение выполняется гораздо быстрее, сохраняя время урока. Удобство применения моделей также заключается в чётком понимании тех действий, которые должен выполнить ученик в процессе решения задачи. Учитель сразу «видит» ход мыслей всех учеников на моделях и при необходимости может оказать помощь как отдельному взятому ученику, так и всему классу.

Созданные автором модели были представлены на различных конкурсах профессионального мастерства от городского уровня до всероссийского. Также они успешно применяются на уроках в МБОУ «СОШ № 8» Ленинск-Кузнецкого ГО Кемеровской области. Такой подход позволяет эффективно воздействовать на развитие образного мышления, а это в свою очередь позволит любому школьнику шаг за шагом, без принуждения, пройти путь от незнания к знанию.

В качестве иллюстрации изложенного подхода рассмотрим ход решения нескольких задач на основе применения материальных моделей транспортных. Все

действия выполняются как на большом транспорте с лучами, так и на маленьких (индивидуальных) транспортных.

Задача 1 [3, № 48]. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC , если $\angle AOB = 155^\circ$, а угол AOC на 15° больше угла COB .

Ход решения:

1. На транспортных с лучами вводим обозначения основного угла AOB и устанавливаем лучи так, чтобы данный угол был равен 155° , как сказано в условии задачи (рис. 3а).

2. Добавим луч OC (рис. 3б), который разделит угол AOB на два угла.

3. По условию задачи угол AOC больше угла COB на 15° . Поэтому переместим луч OA к значению 140° , что на 15° меньше 155° . На транспорте, маркером, сделаем надпись -15° , на это значение мы сместили луч OA (рис. 3в).

4. Учитывая, что в предыдущем действии мы убрали из основного угла 15° , которые отличали один угол AOB от угла AOC , то эти углы стали равны между собой, то есть $\angle AOC = \angle COB = 70^\circ$. Следовательно, луч OC переместим к значению 70° . Луч OC – это биссектриса угла AOB (рис. 3г).

5. Вспомним, что в пункте 2 мы переместили луч OA от 155° к значению 140° и что по условию задачи $\angle AOC$ больше $\angle COB$ на 15° , поэтому добавим 15° к полученным на предыдущем шаге 70° (рис. 3д). Мы видим, что искомый угол AOC равен 85° .

Задача 2 [3, № 50]. Угол AOB является частью угла AOC . Известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB .

Ход решения:

1. Введём обозначение основного угла AOC и построим этот угол на транспорте (рис. 4а).

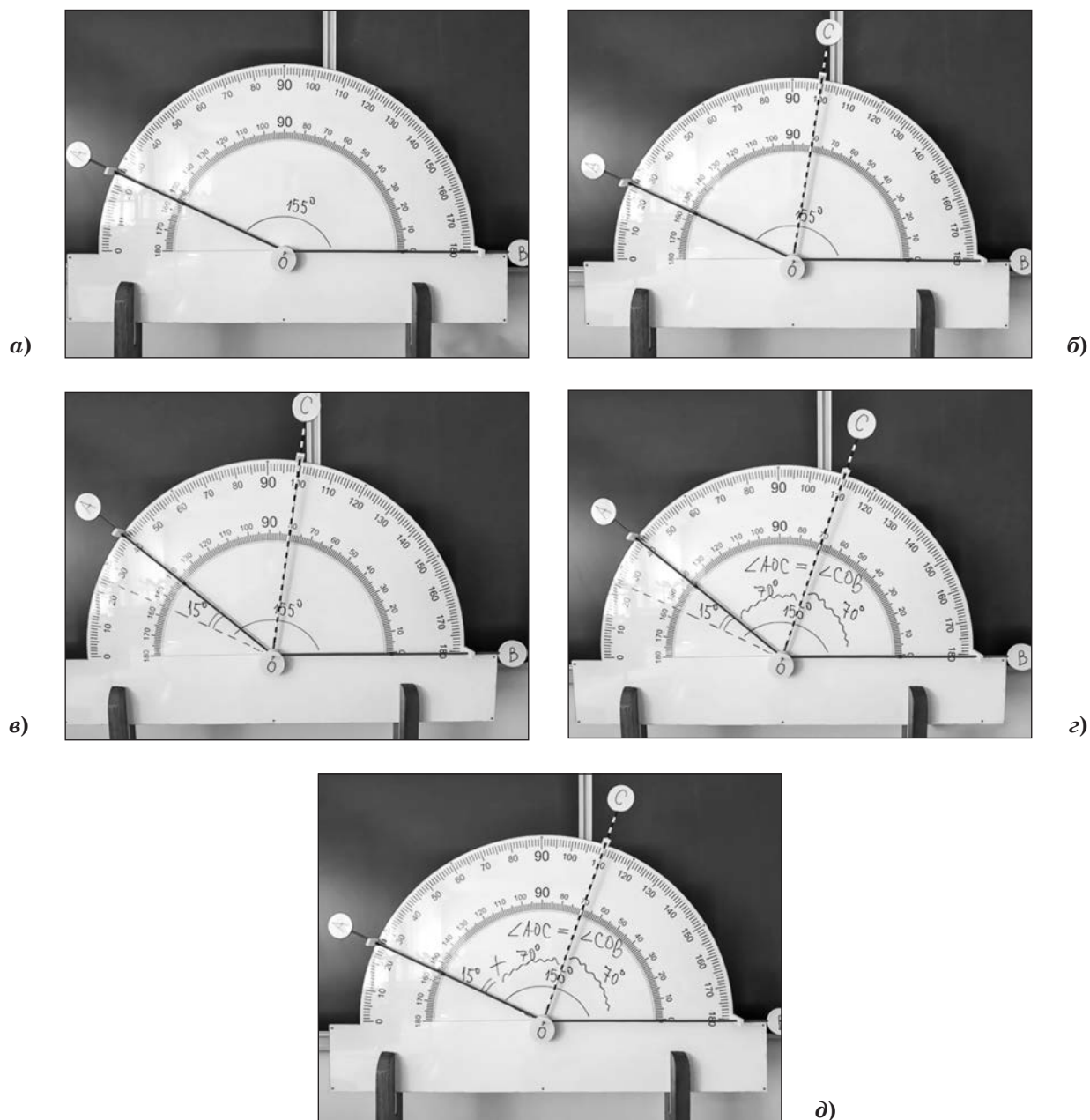


Рис. 3. Иллюстрации к решению задачи 1

2. Дополним модель лучом OB , который разобьёт угол AOC на два угла.

Из условия известно, что угол AOB больше угла BOC .

Поэтому построение выполняем в соответствии с условием задачи (рис. 4б).

3. Нам известно, что угол AOB равен трём $\angle BOC$ (рис. 4в).

4. Из условия известно, что $\angle AOC = 108^\circ$, тогда из равенства $\angle AOC = 4\angle BOC$ следует, что $\angle BOC = 108^\circ : 4 = 27^\circ$. Из равенства $\angle AOB = 3\angle BOC$ следует, что $\angle AOB = 3 \cdot 27 = 81^\circ$ (рис. 4г).

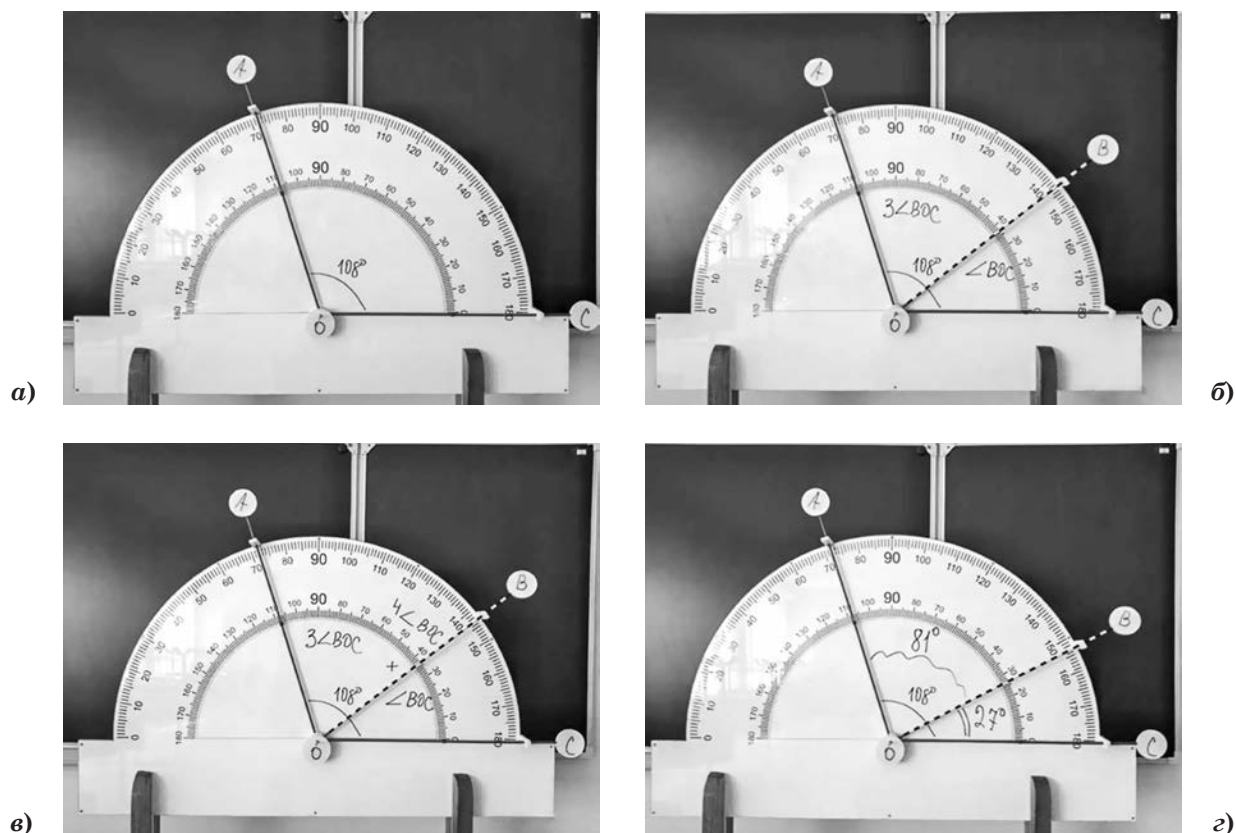


Рис. 4. Иллюстрации к решению задачи 2

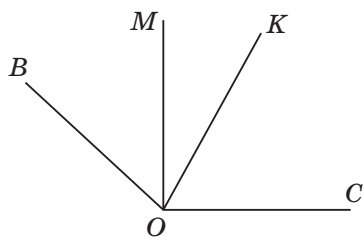
Задача 3 [1, № 6].Дано: $\angle BOC = 148^\circ$, $OM \perp OC$, OK – биссектриса $\angle COB$ (рис. 5).

Рис. 5

Найти: $\angle KOM$.

Варианты ответа:

а) 32° ; б) 16° ; в) 58° ; г) 24° .**Ход решения:**

1. Построим по внутренней шкале

транспортира основной угол BOC , равный 148° (рис. 6а).2. Из условия известно, что луч OK – это биссектриса угла BOC . Следовательно, проведём луч OK через значение 74° (рис. 6б).3. Установим на транспортир луч OK , перпендикулярный лучу OC (рис. 6в). Таким образом, мы создали на транспортире модель, которая является повторением условия предложенной задачи. Требуется найти угол KOM .4. Из построений, выполненных на транспортире, видно, что искомый угол равен разности углов MOC и KOC , что составляет 16° .

О т в е т: б).

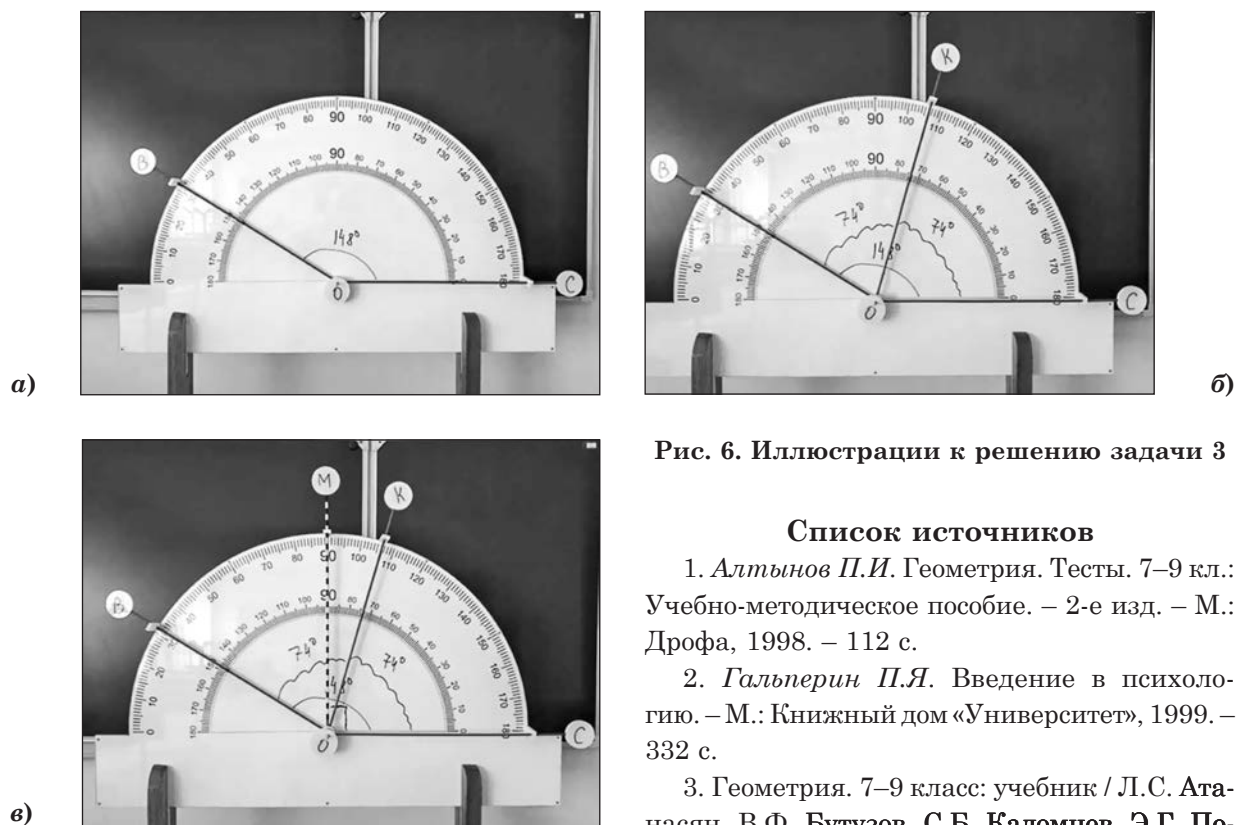


Рис. 6. Иллюстрации к решению задачи 3

Список источников

1. Алтынов П.И. Геометрия. Тесты. 7–9 кл.: Учебно-методическое пособие. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 1998. – 112 с.
2. Гальперин П.Я. Введение в психологию. – М.: Книжный дом «Университет», 1999. – 332 с.
3. Геометрия. 7–9 класс: учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 2017. – 383 с.
4. Ушинский К.Д. Педагогические сочинения: В 6 т. / Сост. С.Ф. Егоров. – Т. 2. – М.: Педагогика, 1998. – 350 с.

Статья поступила в редакцию

03.04.2023.

Принята к публикации

11.08.2023.

Применение описанных в статье материальных моделей транспортеров позволяет не просто быстро решать задачи, а может рассматриваться как методический подход к созданию благоприятных условий для развития образного мышления школьников на уроках математики.

Наклонные башни

Современный Мадрид может похвастаться богатой коллекцией небоскрёбов, ставших визитной карточкой города. Среди этих зданий благодаря особой форме выделяются башни «Ворота Европы», спроектированные архитектором Филиппом Джонсоном совместно с Джоном Бурже. Эти башни идеально симметричны относительно центральной плоскости площади, на которой они расположены. Башни построены из стекла, гранита и металла, имеют 27 этажей, насчитывают 114 м в высоту и наклонены (друг к другу) относительно вертикали на 15° . Благодаря Джонсону стала знаменита фраза «Нужно покончить с прямыми углами, если мы не хотим умереть от скуки».

По книге: Клауди Альсина. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники (М., Де Агостини, 2014).

КРИТИЧЕСКОЕ МЫШЛЕНИЕ И УЧЕБНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

CRITICAL THINKING AND LEARNING ACTIONS IN TEACHING MATH

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_47

О.А. Петрова,

МБОУ Псковский технический лицей (Псков),
ps.olga.kov@gmail.com

O.A. Petrova,

MBEI Pskov Technical Lyceum (Pskov),
ps.olga.kov@gmail.com

Аннотация: статья посвящена проблеме развития критического мышления на уроках математики; даны рекомендации по изложению материала и проработке ошибок, ориентированные на развитие у школьников критического мышления

Abstract: the article is devoted to the problem of the formation of critical thinking in mathematics lessons; recommendations are given on the presentation of the material and the study of errors, focused on the development of this type of thinking in schoolchildren

Ключевые слова: критическое мышление, учебное действие, ошибка

Keywords: critical thinking, learning action, mistake

© О.А. Петрова 2023

В последнее время всё больше говорится о том, что миру нужны специалисты с развитым критическим мышлением. Это связано с тем, что в XXI веке возрастает темп жизни, профессии быстро устаревают, человеку необходимо не только повышать квалификацию, но и осваивать принципиально новые виды деятельности. При этом социальная ситуация в мире, экономические кризисы, экологические проблемы, изменение климата требуют от человеческого сообщества быстрого принятия серьёзных решений в нестандартных ситуациях. Во многих странах мира отмечается снижение мыслительной активности у выпускников школ, у студентов. Учителя школ, преподаватели вузов говорят о повышении уровня формализма знаний. Появились понятия «клиповое мышление», «цифровое слабоумие» и другие.

Существуют разные определения кри-

тического мышления. Мы ограничимся следующим определением: «Критическое мышление – это процесс соотнесения внешней информации с имеющимися у человека знаниями, выработка решений о том, что можно принять, что необходимо дополнить, а что – отвергнуть. При этом иногда приходится корректировать собственные убеждения или даже отказываться от них, если они противоречат новому знанию» [4]. Стоит обратить внимание на такой момент. В западной литературе, в глобальной сети критическое мышление часто называют навыком. В отечественной психологии под навыком понимается действие, доведённое до автоматизма. Поэтому более корректно под критическим мышлением понимать процесс.

Разработана и признана технология развития критического мышления через

письмо и чтение (РКМЧП). В основе её лежит построение процесса обучения по трём стадиям: вызов – осмысление – рефлексия. Подробно с этой технологией, историей её возникновения, примерами конструирования уроков по данной методике можно ознакомиться в работе [4]. Авторы предлагают перенести эту технологию на другие школьные предметы, в том числе на математику. При этом оговаривают, что приспособить технологию РКМЧП к математике довольно затруднительно.

«Технология развития критического мышления учит ориентироваться в потоке окружающей информации, прививает культуру работы с текстом. Вот тут-то и начинают возникать проблемы, так как тексты по математике сильно отличаются от текстов по истории, географии, литературе. Они более “сухие”, то есть более информационные, насыщенные различными понятиями и сложными терминами, и, что самое главное, не всегда написаны на понятном учащимся языке... Поэтому первая трудность, которая возникает у учителей математики, – как приспособить приёмы, разработанные авторами технологии, к этому предмету. Вторая трудность – это выработка “чутья”, какие приёмы и стратегии технологии РКМЧП будут наиболее эффективными для конкретных детей и данной темы. Возникают, конечно, и другие проблемы» [4].

Остановимся на мысли о том, что технологию РКМЧП приспособить к обучению математике сложно, да и нужно ли?

Бесспорно, развивать критическое мышление необходимо комплексно, в разрезе разных дисциплин, различных ситуаций, на конкретном содержании. При этом методики развития критического мышления могут быть разными. Каждый школьный предмет имеет свои особенности. Для развития критического мышления на уроках

математики необходимо создать определённую методику обучения.

Отметим, что само содержание школьного курса математики является хорошей «почвой» для развития критического мышления. Этому способствуют:

- выстраивание логических рассуждений;
- аксиоматическое построение теории;
- математическое моделирование (возможны разные модели одного явления);
- задания с «разветвлёнными» ситуациями.

Для построения методики обучения математике, ориентированной на развитие критического мышления, в первую очередь необходимо выделить составляющие критического мышления и провести анализ тех учебных действий, которые способствуют их развитию. Этот анализ представлен в таблице.

Кроме указанных учебных действий можно обозначить также стремление решать сложные математические задачи, доводить решение до конца, что развивает такие черты характера, как настойчивость и целеустремлённость.

Некоторые позиции, представленные в таблице, не вызовут трудностей у учителя. Например, построение логических умозаключений при решении задач, доказательстве теорем, выводе формул, можно сказать, выполняется по умолчанию. Логические операции в состоянии выполнить практически все ученики, аттестованные по математике. Остановимся на более интересных моментах.

Умение сравнить, выделить и выбрать наиболее рациональный способ решения задачи – довольно сложное учебное действие. Чаще всего ученики довольствуются одним способом решения задания. Например, решая квадратное уравнение, боль-

Основные составляющие критического мышления и учебные действия на уроках математики

Составляющие критического мышления	Учебные действия
Способность к проведению анализа и сравнения	Уметь проверять условия математической задачи на непротиворечивость данных, на их полноту, на наличие лишних данных; уметь сравнить, выделить и выбрать наиболее рациональный способ решения задачи
Способность к построению логических умозаключений	Уметь доказывать теоремы и решать задачи по геометрии, опираясь на аксиомы и ранее доказанные факты; уметь в определённой (логической) последовательности выводить алгебраические формулы
Способность к разумному сомнению	Уметь подвергать сомнению решение задачи, полученный результат; владеть способами проверки ответа; понимать и применять метод доказательства «от противного»
Способность оценивать ситуацию, решение, результат; способность к рефлексии	Уметь решать уравнения и неравенства с учётом ОДЗ, уметь отбирать корни при решении уравнений (систем) с модулем; уметь оценивать ответ в задаче, исходя из здравого смысла
Способность видеть одно и то же явление (объект, процесс) с разных сторон	Уметь решать одну и ту же задачу разными способами
Гибкость мышления; умение объективно оценивать и принимать чужие решения	Уметь слушать и слышать учителя (одноклассника); стараться понять решение задачи, отличное от своего собственного; стремиться рассмотреть как можно больше различных решений задачи и отметить их сильные стороны; пытаться отыскать наиболее рациональное решение
Конструктивная позиция в работе над ошибками	Умение проводить работу над ошибками: находить и исправлять все математические ошибки, выявлять вид ошибки

шинство учеников действуют стандартно: вычисляют дискриминант и корни по известным формулам. Однако в школьном курсе алгебры изучаются и другие способы решения квадратных уравнений: разложение на множители, выделение полного квадрата, теорема Виета и обратная ей теорема, формулы для уравнения с чётным вторым коэффициентом. В классах с углублённым изучением математики рассматриваются метод введения вспомогательного аргумента, графический способ для случая оценки корней и другие.

Разнообразие методов решения и осо-

знанный выбор того или иного способа решения уравнения развивает мышление, заставляет человека мыслить шире. Это не так просто, этому тоже надо учиться. Вспоминается пример из «Педагогической психологии» Л.С. Выготского: «Курица, беспорядочно мечущаяся перед садовой оградой, пробуящая проникнуть в каждое отверстие, чтобы наконец попасть на нужное, не представляет примера мышления. Пробы в мышлении перенесены внутрь. Оно характеризуется задержкой, прекращением внешних движений (раздумье), усилением внутреннего напряже-

ния нервных токов и внезапным появлением решения...» [2].

Чтобы научиться осознанно выбирать, например, способ решения уравнения, школьнику необходимо для начала пройти «метод проб». Задача учителя – показать разнообразие этих способов и создать мотивацию к их принятию.

Пример 1. Как мотивировать учеников к применению при решении квадратных уравнений теоремы, обратной теореме Виета, которая позволяет подобрать корни?

Можно предложить решить такое уравнение:

$$2020x^2 - 2019x - 1 = 0.$$

Дать время посчитать корни уравнения стандартным способом (через дискриминант). Возможно, смущённые ученики догадаются сделать красивые вычисления, что тоже полезно:

$$\begin{aligned} D &= 2019^2 + 4 \cdot 2020 = \\ &= (2020 - 1)^2 + 4 \cdot 2020 = (2020 + 1)^2 = 2021^2, \\ x_{1,2} &= \frac{2019 \pm 2021}{2 \cdot 2020}, \\ x_1 &= 1; x_2 = -\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Далее следует показать, что данное уравнение можно решить устно, зная теорему, обратную теореме Виета. Школьники, как правило, впечатляются таким заявлением и заинтересованно слушают новый материал. Практика показывает, что большинство учеников благополучно забывают эту теорему, не освоив её применение для нахождения корней квадратных уравнений. Сами школьники объясняют это тем, что они умеют решать квадратные уравнения с помощью формулы корней.

Данная ситуация возникает по причине отсутствия поддержки интереса к разным способам решения квадратного уравнения. Можно предложить простой выход. При решении текстовых задач, построении графиков функций, решении других видов

уравнений (тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических) часто возникает промежуточное действие – решение квадратного уравнения, учитель при этом может сделать паузу и спросить: «Сколько способов решения квадратного уравнения вы знаете? Что это за способы? Какой из них наиболее рационально использовать при решении данного квадратного уравнения?»

Пример 2. При решении показательного уравнения

$$2^{1-x} - 2^{3+x} - 15 = 0$$

возникает квадратное уравнение

$$8t^2 + 15t - 2 = 0. \quad (*)$$

Его удобно решить способом «переброски» (первый коэффициент «перебрасывают» на последний, переходя к уравнению вида $x^2 + bx + ac = 0$, подбирают его корни, а затем каждый из них делят на коэффициент a).

Рассмотрим уравнение

$$t^2 + 15t - 16 = 0.$$

Найдём его корни по теореме, обратной теореме Виета: -16 и 1 . Разделим каждый из них на 8 , получим корни уравнения (*):

$$t_1 = -2; t_2 = \frac{1}{8}.$$

Пример 3. При решении неравенства

$$t^2 - 20t - 96 \leq 0$$

корни квадратного трёхчлена можно быстро найти по формуле для уравнения с чётным вторым коэффициентом.

$$D_1 = (-10)^2 - (-96) = 196,$$

$$t_{1,2} = 10 \pm 14,$$

$$t_1 = -4, t_2 = 24.$$

Если учитель на уроках практикует разные способы решения уравнений, то ученики перенимают стиль учителя и со временем сами выбирают наиболее рациональный способ решения уравнения. Такая же ситуация возникает при изучении других тем школьного курса матема-

тики. Например, возможны разные способы построения параболы: по пяти точкам, по вершине и точкам пересечения с осью абсцисс, с помощью преобразования графиков. Тригонометрические уравнения можно решать методом замены переменной, путём приведения к однородному уравнению, с помощью разложения на множители, универсальной подстановки, введения вспомогательного угла и др.

Не менее важным для развития мышления, в том числе критического, представляется решение одной задачи принципиально разными способами. Примеров таких решений можно найти множество. Проблема видится в другом. Современные школьники неохотно принимают «чужие» решения, ленятся решать задачу другим способом. Здесь учитель может поступить по-разному. Например, если при проверке работ учеников он увидел три разных способа решения одной задачи, то перед началом следующего урока можно попросить авторов этих решений оформить их на доске. Далее с классом обсудить сильные и слабые стороны каждого способа решения, а авторов поощрить хорошими оценками.

Стимулировать учеников искать разные способы решения задачи можно не только оценками, но и вниманием класса: «Посмотрите, Николай нашёл способ, отличный от авторского решения, от моего (учителя), он единственный в классе, кто решил задачу векторным способом». Учеников впечатляют простые и короткие решения. Допустим, решение ученика занимает целую страницу, а учитель показывает ему другое, буквально в две строки.

Задачи по стереометрии часто вызывают трудности из-за недостаточно хорошо развитых пространственных представлений учащихся, им сложно представить угол между скрещивающимися прямыми, построить угол между плоскостями и т. п.

Для некоторых учеников является спасением метод координат в пространстве. Учитель может в 10 классе требовать от учеников решать задачи геометрическим методом, в 11 классе показать решение тех же задач методом координат.

Наконец, можно потратить несколько минут урока на беседу с учениками и предложить им обсудить, почему важно решать задачу разными способами, как при этом развивается мышление человека, рассказать о понятиях клипового мышления, шаблонного мышления, формализма знаний. Старшеклассники всегда оживлённо реагируют на вызов: «Нам роботы дышат в затылок и вам выбирать: обслуживать их или создавать». Можно предложить дискуссии для классного часа на разные темы: «В чём уникальность человека по сравнению с роботом?», «Какую задачу не сможет решить искусственный интеллект?» и т. п.

Выделяя функции учебной задачи как организатора деятельности учащихся, Е.И. Лященко говорит: «Для формирования обобщённых знаний до уровня метода необходима определённая организация учебного материала. Так как основным средством организации деятельности учащихся при изучении математики являются математические задачи, то существенную роль играет определение набора задач либо выбор типичной задачи. Если наборы задач будут решаться без установки на обобщение, то даже в случае хорошей их систематизации они не смогут в полной мере выполнить роль средства формирования знаний, обобщённых до уровня метода» [6].

Если говорить о развитии критического мышления на уроке математики как о методе обучения, то в разрезе вышеприведённой цитаты учителю нужно уметь подбирать задачи, ориентированные на

развитие критического мышления, при этом необходимо уметь обобщать разного вида задачи, выделять их суть, определять «ядро». Часто показателем того, что задача развивает критическое мышление, являются ошибки учеников. Если большинство учеников класса попадает в одну «ловушку», то задачи данного типа однозначно заслуживают внимания и с большой вероятностью могут быть отнесены к классу задач, развивающих критическое мышление.

Приведём примеры задач с «ловушками».

Задача 1 [1]. Используя свойства монотонности функций, решите уравнение

$$\frac{x^4 + 5x - 6}{x} = 10.$$

Разделим почленно числитель на x :

$$x^3 + 5 - \frac{6}{x} = 10.$$

Большинство школьников рассуждают так. Функции $y = x^3 + 5$ и $y = -\frac{6}{x}$ возрастающие. Значит, функция $y = x^3 + 5 - \frac{6}{x}$ (отвечающая левой части уравнения) возрастающая. Функция $y = 10$ (отвечающая правой части уравнения) постоянная. Графики их будут иметь одну общую точку, которую можно легко угадать. Далее угадывается корень уравнения, который и указывается в ответе. На самом деле корней два.

Ошибка в рассуждениях кроется в том, что функция $y = -\frac{6}{x}$ не является возрастающей на всей области определения, она монотонно возрастает на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. На каждом интервале уравнение может иметь не более одного корня. В данном случае корень будет на каждом интервале.

О т в е т: $-1; 2$.

Задача 2 (демоверсия ЕГЭ-2022). Решите уравнение

$$\sqrt{2x + 3} = x.$$

Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наименьший из них.

Многие ученики возводят обе части уравнения в квадрат, решают квадратное уравнение, получают корни -1 и 3 , в ответе пишут -1 . Ошибка очевидна: не учтена область допустимых значений (ОДЗ). Тем не менее такая ошибка повторяется из года в год, при этом попадают в эту «ловушку» и сильные ученики. Проблема при таких рассуждениях кроется в стереотипном мышлении.

У школьников проверка ОДЗ часто ассоциируется с делением на ноль (на ноль делить нельзя) и подкоренным выражением (корень чётной степени можно извлекать только из неотрицательного числа на множестве действительных чисел). Это наиболее типичные ситуации с ОДЗ.

Задача 3 [3]. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{x} + 4)^2 - 16\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x} - \frac{4}{\sqrt[4]{x}}}$$

и найдите его значение при $x = \frac{16}{81}$.

В процессе преобразования получаем выражение

$$\frac{\sqrt[4]{x} \sqrt{(\sqrt{x} - 4)^2}}{\sqrt{x} - 4}. \quad (**)$$

Возникает ситуация с извлечением квадратного корня из выражения, содержащего переменную. Здесь ученики забывают о «коварстве» чётной степени. Даже указанное в условии значение переменной, которое явно подсказывает, что значение выражения в скобках при данном x будет отрицательным, не спасает ситуацию. Практика показывает, что только единицы учеников (в среднем 2–3 ученика из 50) помнят о правильном извлечении корня чётной степени.

При данном значении переменной

$$\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2} = |\sqrt{x}-4| = 4-\sqrt{x}.$$

В итоге исходное выражение (**) упрощается до $-\sqrt[4]{x}$, его значение при $x = \frac{16}{81}$ будет равно $-\frac{2}{3}$.

В чём кроется «ловушка»? Почему ученики профильных классов (задача 3 уровня выше среднего) теряют бдительность? Вновь пересиливает шаблонность мышления: в дроби (**) так и хочется сократить похожие, почти одинаковые выражения.

Учителя обращают внимание на опасные ситуации: «Ставим на полях восклицательные знаки! В преобразованиях с корнями чётной степени надо быть осторожными. Свойства корня n -й степени верны для *неотрицательных* подкоренных выражений». К сожалению, сам по себе поставленный восклицательный знак на полях тетради не оставляет следа в голове. Это, конечно, не единственная причина массовых ошибок. Многие ученики стараются услышать учителя и внимательно относиться к расставленным акцентам, но редкое повторение материала приводит к элементарной забывчивости и невнимательности.

Задача 4 [7]. Сколько корней может иметь уравнение

$$(a^2 - a)x^2 + 2ax - 3a^2 + 4a = 0?$$

Популярное рассуждение учеников: «Данное уравнение квадратное, а значит, оно может иметь либо два корня, либо один корень, либо не иметь корней». Такой поверхностный анализ исключает случай «превращения» уравнения в линейное, а линейное уравнение может иметь бесконечно много корней.

В данном уравнении x может быть любым числом при $a = 0$.

Практически любые задачи с параметрами развивают критическое мышление ученика. Вот что говорится о них в пособии [5]: «*Нельзя* научиться решать *любые* задачи с параметрами, как нельзя научиться решать и любую задачу без параметра, потому что всегда можно придумать более “хитрую” задачу. Мы привыкли всюду применять формулы, а в задачах с параметрами не сразу можно понять, какую формулу надо применить. Бывает, что проще обойтись без всяких формул, а может быть, и не существует формул, с помощью которых решается задача, и нужно выбрать какой-то другой способ решения. При решении задач с параметрами надо всегда *активно* использовать соображения, исходящие из *здорового смысла*».

В статье американского профессора когнитивной психологии Дэниэла Уилингхэма [8] говорится о том, что трудно мыслить критически и столь же сложно этому обучать. В начале статьи ставится вопрос о том, можно ли вообще научить критическому мышлению. Автор аргументирует свои сомнения тем, что в США после доклада «Нация под угрозой», сделанного в 1983 году, во многих штатах были разработаны разные программы по обучению критическому мышлению, но спустя двадцать лет ситуация не изменилась. Уилингхэм анализирует ситуацию с разных сторон, высказывает интересные идеи о независимости уровня развития критического мышления от возраста человека, говорит о том, что критическое мышление не является навыком. Рассуждает об эмоциональном отвлечении учеников, предлагает применять метапознавательные стратегии для развития критического мышления. Говорит о том, что способность мыслить критически зависит от конкретного знания и опыта, приводит интересные примеры, когда человек с научным

мышлением «теряется» в бытовых ситуациях, когда студенты демонстрируют критическое мышление в одной ситуации, но «цепенеют» в другой.

Уилингхэм отмечает, что развитие мышления тесно связано со знаниями и практическим опытом конкретного человека (группы людей). Это важно знать и понимать педагогу, который ориентирован на развитие у учеников критического мышления посредством своего предмета. Если учитель предлагает решить квадратное уравнение разными способами, то естественно предполагается, что ученики владеют по крайней мере тремя-четырьмя приёмами решения подобных уравнений. Разбирать уравнения с параметрами возможно в группе учеников, которые хорошо решают частные случаи подобных уравнений.

Мощным фактором для развития критического мышления учащихся является установка самого учителя. Если учитель математики понимает необходимость развития критического мышления (в первую очередь у себя), знает его компоненты, то он будет стремиться развивать его и у своих учеников. При такой установке педагогический опыт и интуиция подсказывают, какой материал способствует развитию критического мышления, как лучше построить урок и расставить акценты.

Подведём итоги. Критическое мышление возможно развивать на определённом учебном материале, в разрезе конкретного учебного предмета. Школьный курс математики имеет ряд особенностей, которые, с одной стороны, способствуют развитию критического мышления, а с другой, требуют своей методики обучения. Успешное освоение курса математики в основной школе создаёт благоприятные условия для развития критического мышления у старшеклассников, а достаточный багаж их знаний позволяет учителю по-

добрать подходящую систему заданий.

Учитель математики, знающий основные составляющие критического мышления, принимающий установку на его развитие, при определённом педагогическом опыте может самостоятельно проводить анализ учебного материала на предмет развития критического мышления. Развивая критическое мышление у себя и у своих учеников, он закладывает основу для подготовки высококвалифицированных специалистов в любой области.

Список источников

1. Макарычев Ю.Н. и др. Алгебра. 9 класс: учебное пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2019.
2. Выготский Л.С. Педагогическая психология. – М.: Педагогика, 1991.
3. Глизбург В.И. Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Контрольные работы для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2020.
4. Заир-Бек С.И., Муштавинская И.В. Развитие критического мышления на уроке: пособие для учителей общеобразоват. учреждений. – 2-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2011.
5. Колесникова С.И. Задачи с параметром. ЕГЭ. Математика. – 2-е изд., стер. – М.: ООО «Азбука-2000», 2019.
6. Лященко Е.И. и др. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. – М.: Просвещение, 1988.
7. Шестаков С.А. ЕГЭ-2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2022.
8. Willingham Daniel T. Critical Thinking: Why Is It So Hard to Teach? American Educator, American Federation of Teachers. P. 8–19.

Статья поступила в редакцию

12.06.2023.

Принята к публикации

20.09.2023.

ВЕРНЁМСЯ К ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЛИПСЕ...

BACK TO THE PROBLEM OF THE ELLIPSE...

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_55

Л.В. Панкратова,Вятский государственный университет (Киров),
pankratovalaris19@rambler.ru**L.V. Pankratova,**Vyatka State University (Kirov),
pankratovalaris19@rambler.ru**Аннотация:** статья посвящена решению задачи, предлагавшейся на вступительном экзамене на один из факультетов Белградского университета**Abstract:** the article is devoted to solving the problem offered at the entrance exam to one of the faculties of the University of Belgrade**Ключевые слова:** среднее арифметическое, среднее гармоническое, касательная, эллипс**Keywords:** arithmetic mean, harmonic mean, tangent, ellipse

© Л.В. Панкратова 2023

В [2] была приведена задача, предлагавшаяся абитуриентам электротехнического факультета Белградского университета. Авторы статьи не заострили внимание на её решении, отчасти потому, что эллипс в курсе математики рядовой российской школы не рассматривается. Однако, они предоставили эту возможность читателям.

Напомним формулировку задачи.

Задача [2, с. 11]. Минимальная длина отрезка касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b > 0$) в точке первого квадранта, заключённого между осями координат, равна:

- A) $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$; B) $\frac{ab}{a+b}$; C) $\sqrt{a^2 + b^2}$;
D) $\frac{b(a+b)}{2}$; E) $a + b$; N) Не знаю.

Видно, что задача относится к классу «оптимизационных». В данной связи при её решении естественно обратиться к производной функции.

Решение 1. [1, с. 161–162]. Пусть

$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ – уравнение верхней половины эллипса, а $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ – уравнение касательной к нему в точке $(x_0; y_0)$ (рис. 1). Значит,

$$OB = \frac{b^2}{y_0}, \quad OA = \frac{a^2}{x_0} \quad \text{и} \quad AB^2 = \frac{b^4}{x_0^2} + \frac{a^4}{y_0^2}.$$

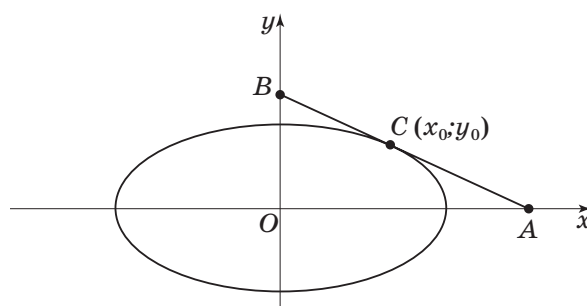


Рис. 1

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{b^4}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{a^4}{x^2},$$

где $x \in (0; a)$. При этом

$$f'(x) = \frac{2a^2b^2x}{(a^2 - x^2)^2} - \frac{2a^4}{x^3} = \\ = \frac{2a^2(b^2x^4 - a^2(a^2 - x^2)^2)}{x^3(a^2 - x^2)^2}.$$

Заметим: $f'(x) > 0$ при $x > \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$ и

$f'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$, то есть в точке

$x_0 = \sqrt{\frac{a^3}{a+b}}$ функция f принимает своё наименьшее значение, равное $(a+b)^2$. Итак, наименьшая длина отрезка AB равна $a+b$.

Решение 2. Найдём наименьшее значение функции $g(x) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}$ при условии $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Заметим, что $g(x)$, как и $f(x)$ в решении 1, выражает квадрат длины отрезка касательной к эллипсу.

Представим выражение $\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}$ в виде $a\left(\frac{a^3}{x^2}\right) + b\left(\frac{b^3}{y^2}\right)$ и применим к полученному выражению обобщённое неравенство $\tilde{A}_2 \geq \tilde{H}_2$ между средним арифметическим $\tilde{A}_2 = \frac{p_1a_1 + p_2a_2}{p_1 + p_2}$ и средним гармоническим

$$\tilde{H}_2 = \left(\frac{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2}}{p_1 + p_2} \right)^{-1}$$

двух положительных чисел с положительными весами p_1 и p_2 .

Положив $a_1 = \frac{a^3}{x^2}$, $a_2 = \frac{b^3}{y^2}$, $p_1 = a$, $p_2 = b$, будем иметь:

$$\frac{a\left(\frac{a^3}{x^2}\right) + b\left(\frac{b^3}{y^2}\right)}{a+b} \geq \left(\frac{a\left(\frac{x^2}{a^3}\right) + b\left(\frac{y^2}{b^3}\right)}{a+b} \right)^{-1} = \\ = \left(\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{a+b} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{a+b} \right)^{-1} = a+b.$$

Таким образом, $g(x) = \frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} \geq (a+b)^2$, то есть минимальная длина отрезка касательной к эллипсу равна $a+b$.

Решение 3. Не будем забывать, что задание сформулировано в тестовой форме. Попробуем «отсечь» заведомо ложные варианты.

Отрезок длиной $\sqrt{a^2 + b^2}$ соединяет две вершины эллипса, лежащие на осях Ox и Oy , поэтому не может быть отрезком касательной к нему. Значит, ответ С) неверен.

Если положить, что $a = b$, то есть эллипс является окружностью, то $\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{2}$, где a – радиус окружности. Отрезок касательной к окружности, заключённый между осями координат, не может иметь такую длину. Исключаем вариант В). Вариант D) не устраивает своей «размерностью», выражающейся в квадратных единицах, а N), очевидно, верным быть не может.

Остаются варианты А) и Е). Поскольку $a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, проверим, может ли отрезок, о котором идёт речь в задаче, иметь длину $a+b$. Воспользуемся обозначениями, принятыми в решении 1. Система

$$\begin{cases} \frac{b^4}{y_0^2} + \frac{a^4}{x_0^2} = (a+b)^2, \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

где $(x_0; y_0)$ – точка касания, должна иметь единственное решение, если наше предположение верно. Проведём преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} + \frac{a^4}{x_0^2} &= (a+b)^2 \Leftrightarrow b^2 x_0^2 + a^4 - \\ &- a^2 x_0^2 - (a+b)^2 x_0^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^4 - 2a(a+b)x_0^2 + \left(\frac{a+b}{a}\right)^2 x_0^4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(a^2 - \frac{a+b}{a} x_0^2\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Итак, система действительно имеет единственное решение. Следовательно,

правильный вариант ответа – Е).

Список источников

1. Задачи и упражнения по началам математического анализа: Пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внеклассных занятий математикой / Сост. Е.С. Канин, С.И. Калинин. Под общей редакцией Е. С. Канина. Киров, 1997. 203 с.

2. Калинин С.И., Соколова А.Н. О вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения Сербии // Математика в школе. 2023. № 5. С. 3–12.

Статья поступила в редакцию

17.08.2023.

Принята к публикации

06.09.2023.

АНОНС

Читайте в четвёртом номере журнала «Математика для школьников» статьи следующих авторов

ИДУ НА ЭКЗАМЕН

Файнштейн А.С. (г. Магнитогорск)

ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ В ФИНАНСОВЫХ ЗАДАЧАХ НА КРЕДИТ

Статья посвящена решению финансовых задач на кредит, встречающихся в материалах профильного ЕГЭ по математике. Предлагаются теоремы и формулы для обоснования решений таких задач. Рассмотрены аннуитетная схема и различные варианты дифференцированной схемы кредитования. Приведены примеры решений задач и упражнения для самостоятельного выполнения.

КЛУБ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Златопольский Д.М. (г. Москва)

РАЗМЕЩАЕМ ЧИСЛА

Некоторые, казалось бы, простые задачи дают удивительные результаты при дальнейшем изучении. В статье приведены примеры двух таких задач, простые варианты которых решаются достаточно легко, а решение более сложных требует от учащегося проведения своеобразного исследования.

Карпушина Н.М. (г. Москва)

НЕОЖИДАННЫЙ ПАСКАЛЬ

400 лет назад родился Блез Паскаль (1623–1662), блестящий французский математик, физик, изобретатель, философ и публицист XVII века. Первые открытия в математике он совершил ещё в юности, а в историю этой науки вошёл как один из основоположников теории вероятностей. Однако на счету Паскаля немало других замечательных достижений. Поговорим о его вкладе в геометрию, арифметику, теорию чисел и комбинаторику.

БИНАРНЫЙ УРОК-ПУТЕШЕСТВИЕ ДЛЯ 6-ГО КЛАССА «СТРАНСТВИЯ САДКО»

BINARY LESSON-JOURNEY «SADKO'S WANDERINGS» FOR THE 6TH GRADE

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_58

О.Г. Игнатова,
markovka0@mail.ru;**Н.В. Хаустова,**
МОУ Быковская СОШ № 14, Московская область,
nxayctova@mail.ru**O.G. Ignatova,**
markovka0@mail.ru;**N.V. Haustova**
municipal educational institution Bykovskaya
school № 14, Moscow region, nxayctova@mail.ru

Аннотация: в статье представлена методика проведения бинарного урока-путешествия по решению задач на перевод из одних единиц измерения длины в другие для 6-го класса. Урок посвящён старинным мерам длины

Abstract: the article presents a methodology for conducting a binary lesson-journey to solve problems for the translation of measurement values for the 6th grade. The lesson is devoted to ancient measures of length

Ключевые слова: урок-путешествие, старинные меры длины, перевод единиц измерения длины

Keywords: lesson-journey, old measures of length, unit conversion

© О.Г. Игнатова, Н.В. Хаустова 2023

В литературных произведениях, мультипликационных и художественных фильмах, научно-популярных передачах на ТВ дети часто встречаются со старинными мерами или единицами измерения длины, которые традиционно применяются в других странах. Для организации работы по изучению и отработке навыка перевода в традиционные меры целесообразно проведение бинарного урока.

Под бинарным уроком понимают нетрадиционный вид урока, который позволяет эффективно реализовать межпредметные связи и интеграцию, казалось бы, несовместимых учебных предметов [1]. Обычно такой урок планируют и проводят несколько педагогов-предметников, например, математики и литературы. Бинарные уроки наиболее целесообразно проводить на этапе творческого применения изученного материала, поскольку на таких уроках решаются практически значимые и доступные учащимся проблемы на основе межкультурного и межпредметного взаимодействия. Наибольшее преимущество при проведении бинарного урока можно получить при формировании функциональной грамотности.

В данной статье представлен бинарный урок по математике с привлечением материала из курса литературы. Задания ориентированы на отработку умения оперировать со старинными мерами длины. В процессе выполнения заданий обучающиеся приобретают опыт перевода старинных мер длины в традиционную метрическую систему.

Для организации обобщающего повторения в конце обучения в 6-м классе целе-

сообразно проведение бинарного урока-путешествия «Странствия Садко». Основная образовательная цель такого урока – повторить обобщённые принципы перевода из одних единиц измерения длины в другие.

Урок «Странствия Садко» построен как путешествие, где за основу взят литературный персонаж, причём в зависимости от специфики того или иного класса в качестве персонажа-путешественника может выступать как сам купец Садко, так и Синдбад-мореход или даже Васко да Гама (для исторически подкованных обучающихся).

Для организации работы на уроке обучающихся следует заранее разбить на команды по 4–5 человек. Применение групповой формы работы способствует развитию таких метапредметных умений, как умение сотрудничать с товарищами при выполнении заданий в группе, умение соблюдать очередность действий, умение выслушивать партнёра, корректно сообщать об ошибках, высказывать своё мнение при обсуждении, а также распределять задачи внутри коллектива.

Путешествие состоит из пяти этапов, каждому из которых соответствует своя задача, предлагаемая для решения.

Первый этап урока – актуализация знаний.

Цель данного этапа: повторение изученного материала, необходимого для работы на уроке.

В процессе выполнения заданий учащиеся многократно практикуют перевод одних единиц измерения в другие, знакомятся с информационной схемой по переводу старинных мер длины, таким образом повторяя алгоритм решения данной задачи. Каждая команда получает бортовой журнал, в котором фиксируется состав команды, имя капитана, а также название корабля.

Пример бортового журнала:

Выручка _____ Название команды _____

Капитан _____

	Состав команды	
1		
2		
3		
4		

В дальнейшем именно капитан команды будет сдавать карточки с выполненными заданиями учителю, а также он выполняет функцию лидера в команде, распределяет роли и задания, подводит итоги путешествия и распределяет прибыль между членами команды.

Можно подготовить условный маршрут путешествия и обозначить таким образом план урока для учеников (рис. 1).



Рис. 1

Второй этап урока – постановка учебной задачи. Учитель сообщает основную цель урока: ещё раз поработать с различными единицами измерения длины и повторить способы перевода из одних единиц измерения в другие.

Однако на данном уроке происходит не только повторение алгоритма перевода из одних единиц измерения в другие, но и знакомство со старинными мерами длины. Ученикам предлагается задание базового уровня сложности. Основная цель этого задания – отработка навыка работы со схемой. Капитаны получают карточки с заданием № 1, на каждой карточке обозначено название команды, что не только украсит урок, но и даст возможность вспомнить различные названия мест, которые встречаются в произведениях по литературе. Например, Царьград, Ильмень-озеро, Волхов, Ладога и Нева. Условно задание первое можно назвать «Знакомство с системой мер длины».

Для организации работы ученикам предлагается справочная схема по переводу старинных мер длины в современную метрическую систему (рис. 2). Дополнительно ребятам выдается калькулятор для выполнения вычислений. Обращаем внимание на то, что калькуляторы ученики получают только после выполнения 1-го и 2-го заданий.

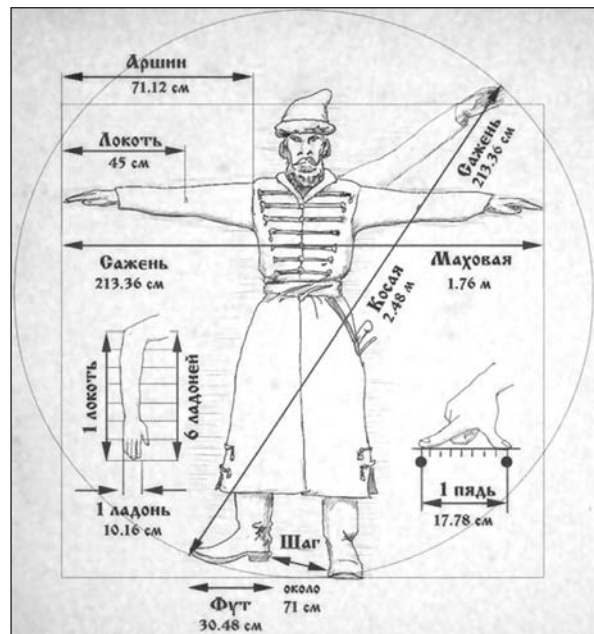


Рис. 2

Задание № 1. Сравните представленные меры длины.

Заполнить карточки сравнения мер используя слова «больше, меньше, длиннее, короче».

АРШИН _____	ВЕРШОК _____
ЛОКОТЬ _____	ЛАДОНЬ _____
ВЕРШОК _____	ПЯДЬ _____
ЛОКОТЬ _____	ФУТ _____
АРШИН _____	ШАГ _____
МАХОВАЯ САЖЕНЬ _____	КОСАЯ САЖЕНЬ _____

Первое задание оценивается в 7 баллов, при этом 1 балл ставится при верном выполнении сравнения, дополнительный седьмой балл команда получает, если были использованы все четыре предложенных слова для описания сравнения. На выполнение задания даётся 4 минуты.

Этап третий – это составление стратегии решения задач и осуществление избранной стратегии. На данном этапе основная цель – организовать работу в команде для наиболее эффективного выполнения предложенных заданий. Команды получают задание № 2, условно его можно обозначить как «Загрузка судна», в этом задании обучающимся

предлагается перевести меры загружаемого на корабль товара в метры, используя данные схемы.

Задание № 2. Переведите в метры:

№	Наименование товара	Количество	Количество (в метрах)
1	Канитель	100 локтей	
2	Пенька	5000 шагов	
3	Шёлк	110 сажень	
4	Бархат	200 локтей	
5	Санда	2 косых сажени	

На выполнение задания отводится 6 минут. За верное выполнение каждого пункта в задании начисляется по 1 баллу. Итого, за верное выполнение можно получить максимум 5 баллов. Немаловажно, что на данном этапе, после выполнения задания или в процессе выполнения, включается лингвистическая составляющая: с командами проходит обсуждение значений слов, которые им встретились.

Следующий этап путешествия – прибытие в новую гавань и торговля. Команды получают задание № 3 «Торговля на базаре», на расчёт выручки после продажи товара. Учащимся необходимо вычислить, какую выручку получают они от продажи товара при условии, что они знают количество товара и цену за 1 метр. Данное задание направлено на отработку умения работать с данными, представленными в табличной форме.

Задание № 3. Сколько золота и серебра можно выручить после продажи товара?

№	Наименование товара	Цена за метр	Количество в метрах	Итого за товар
1	Канитель	1 г золота	60,96	
2	Канат	0,2 г серебра	3550	
3	Шёлк	1,5 г золота	234,696	
4	Бархат	0,75 г серебра	121,92	
5	Санда	943 г золота	4,96	
		Итого золота		
		Итого серебра		

Обращаем внимание, что карточка с заданием построена так, чтобы обучающимся предоставлялась возможность проверить правильность выполнения предыдущего задания.

Для выполнения этого и последующих заданий командам выдаются калькуляторы. На выполнение задания даётся 5 минут. За верное выполнение каждого пункта в задании начисляется по 1 баллу. Итого за верное выполнение можно получить максимум 7 баллов, поскольку требуется отдельно вычислить выручку в золоте и серебре.

В следующем задании № 4 «Меняльная лавка» учащимся предлагается провести работу по обмену полученного золота и серебра от продажи товара на деньги.

Задание № 4. Переведите полученное количество золота и серебра в местную валюту. Результат округлите до двух знаков после запятой.

1 динар = 4,25 г золота

1 дирхем = 3,125 г серебра

Серебра – 801,44 грамма – _____ дирхема

Золота – 5090,284 грамма – _____ динара

Следует отметить, что для верного выполнения данного задания мало умения просто перевести из одних единиц измерения в другие. От учеников требуется умение округлять до ближайшего целого числа, поскольку при обмене золота и серебра на деньги они могут получить только целое число денежных единиц.

На выполнение задания даётся 4 минуты. Оценивается задание 4-мя баллами. Один балл начисляется за верный перевод единиц, второй – за правильное округление.

Заключительный этап урока — это рефлексия деятельности. Данный этап разбит на два смысловых блока.

В первом блоке команда получает задание № 5 «Итоги путешествия», в котором им нужно провести анализ тех заданий, которые они выполняли по ходу занятия.

Задание № 5. Закончите предложения.

Самым трудным было _____

Самым лёгким было _____

Самым интересным было _____

Что нового узнали? _____

Нам надо ещё поработать над _____

На выполнение данного задания даётся 4 минуты. Оно не оценивается в баллах. Пока ребята выполняют данное задание, учитель может провести подсчёт баллов, которые набрала каждая команда. Итог озвучивается перед классом капитаном каждой команды.

Во втором блоке рефлексии капитан команды должен распределить выручку, которую получила команда в результате плавания и продажи товара. Условно данное задание можно обозначить как «Распределение выручки». Члены команды могут давать капитану советы, но основное решение по распределению выручки остаётся за капитаном. Капитан вписывает суммы в пустой столбец бортового журнала. На выполнение этого блока даётся ещё 5 минут.

После окончательного заполнения карточки задания № 5 и бортового журнала капитаны команд выходят к доске и рассказывают, какие они дали ответы и почему. Члены команды могут дополнить ответ капитана.

Организованный таким образом этап рефлексии помогает оценить не только выявленные трудности (то есть над какими заданиями следует ещё поработать), но и провести анализ деятельности на уроке каждого ученика за счёт информации о распределении выручки.

В рамках проведения урока-путешествия учащиеся ещё раз погружаются в мир литературного произведения, повторяют названия городов, рек, знакомятся с названиями товаров (канитель, сандал), которые редко встречаются в повседневной действительности.

При описании бинарного занятия в данном случае был сделан упор именно на математическую составляющую. Отметим, что проведение бинарных уроков в полной мере способствует развитию функциональной грамотности. Отличительной особенностью бинарного урока служит то, что он делится на дополняющие друг друга части, которые, с одной стороны, показывают независимость предметов, а с другой, – дают возможность увидеть взаимное проникновение одних предметных знаний в другие. Это помогает избежать дублирования информации, ученики могут понять, как знания из математики могут быть применены на уроке литературы. Например, когда при описании внешности литературного персонажа использовались старинные меры длины: «Из числа всей её челяди самым замечательным лицом был дворник Герасим, мужчина двенадцати вершков роста, сложенный богатырём...» (И.С. Тургенев «Му-му»).

Описывая методику проведения урока-путешествия, отметим, что у авторов имеется опыт его проведения для учащихся 6-го и 7-го классов. При проведении рефлексии обучающиеся 6-го класса отметили необходимость знакомства со старинными мерами длины для того, чтобы лучше понимать литературные произведения или исторические факты. Ученики 7-го класса отметили недостаточность предметных знаний и умений, которые были необходимы для решения поставленных перед ними задач. Таким образом, можно сделать вывод, что проведение подобных занятий полностью достигает поставленных предметных, метапредметных и личностных результатов обучения, при этом бинарный урок не является сложным в организации и подготовке и не требует от учителя применения сложных технических средств обучения.

Список источников

1. Овчаренко В.А., Карасева Л.М. Бинарный урок как одна из форм интеграции дисциплин и реализации межпредметных связей // Проблемы и перспективы развития образования в России. – 2015. – № 34. – С. 51–55.

Статья поступила в редакцию 15.03. 2023.

Принята к публикации 11.06. 2023.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Открытие: «чистая математика» является частью эволюционной генетики

Исследователи выявили взаимосвязь между теорией чисел и эволюционной генетикой, предположив, что чисто математические принципы могут влиять на биологию. Это открытие, основанное на фенотипической устойчивости, показывает, что генотипы могут быть организованы в соответствии с математическими закономерностями. Эта перспектива открывает новое направление исследований, указывая на то, что чистая математика может быть более неразрывно связана с жизнью, чем считалось ранее.

Источник: New-Science.ru <https://new-science.ru/otkrytie-chistaya-matematika-yavlyaetsya-chastju-evoljucionnoj-genetiki/>

Мы продолжаем публикацию ранее опубликованных на страницах нашего журнала статей Дорофеева Г.В. Данная статья была помещена в третьем номере журнала «Математика в школе» за 1969 год, однако она не потеряла своей актуальности и в наши дни.

Г.В. Дорофеев

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ

Известно, что неравенства вида

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — различные (действительные) числа, экономнее всего решаются так называемым методом интервалов. Теоретическая основа этого метода состоит в том, что при любом x , большем наибольшего из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, данное неравенство, очевидно, выполняется, поскольку все сомножители в левой части положительны, а в дальнейшем, когда x «движется» справа налево, левая часть меняет знак при переходе через каждый корень x_i , поскольку при этом меняет знак ровно один сомножитель — именно $x - x_i$.

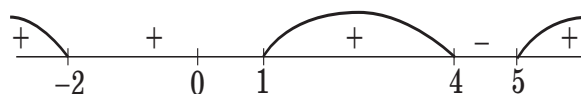
На практике для применения этого метода достаточно лишь отметить на числовой оси числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, поставить знак «+» над бесконечным интервалом, состоящим из x , больших, чем все эти числа, знак «−» — на следующем влево интервале, затем знак «+» и т. д. После этого в качестве решений неравенства берутся значения x из интервалов, над которыми стоит знак «+».

Так, например, решение методом интервалов неравенства

$$(x - 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) > 0$$

состоит из чертежа 1 и ответа: $x < -2$, $1 < x < 4$, $x > 5$.

Метод интервалов применим, естественно, и к неравенствам с другими зна-



Черт. 1

ками: $<$, $\leq$, $\geq$. Соответствующие изменения в технике его применения очевидны.

Главное преимущество метода интервалов по сравнению с перебором всех логически возможных случаев распределения знаков сомножителей — существенная экономия в вычислениях, экономия, без которой иногда практически очень трудно или невозможно довести решение до конца. В то же время метод интервалов имеет значительно более узкую область применения: перебор приводит к цели, хотя бы в принципе, при решении любого неравенства, где левая часть разложена на множители¹, а для применения метода интервалов нужно ещё, чтобы эти множители были линейными двучленами, то есть левая часть должна быть целой алгебраической функцией (многочленом), разложенной на множители. Правда, метод интервалов очевидным образом обобщается на рациональные функции (частные двух многоч-

¹ Здесь и в дальнейшем мы считаем, если не указано противное, что в правой части решаемого неравенства стоит нуль.

ленов), но это обобщение не так уж широко раздвигает рамки его применения².

Возникает естественная мысль – научиться «рационализировать» неравенства, то есть заменять сложные, трансцендентные неравенства на равносильные целые алгебраические неравенства. Другими словами, для каждой нерациональной функции следует попытаться подобрать такую рациональную функцию, знак которой при любом x совпадает со знаком исходной функции.

Так, знак функции $a^x - b$ при $b > 0$ совпадает, очевидно, со знаком рациональной функции $(a - 1)(x - \log_a b)$, поэтому в любом неравенстве трансцендентный множитель $a^x - b$ можно заменить на рациональное выражение $(a - 1)(x - \log_a b)$, получив при этом неравенство, равносильное исходному.

Однако такая «равносильная» рационализация возможна далеко не всегда даже для самых простых функций. Например, уже для функции $\log_a x$ нельзя подобрать рациональную функцию, обладающую нужным свойством: это следует хотя бы из того, что рациональная функция может не иметь смысла лишь в конечном числе точек – в корнях знаменателя, а $\log_a x$ не определён для всех $x \leq 0$. Поэтому при замене $\log_a x$ на любую рациональную функцию не может не произойти расширения области допустимых значений (ОДЗ) неравенства. Если же допустить расширение

ОДЗ, то множитель $\log_a x$ можно заменить на $(a - 1)(x - 1)$.

Согласившись на расширение ОДЗ, мы можем провести рационализацию для достаточно широкого набора функций. Укажем наиболее употребительные замены (ниже мы будем называть их стандартными)³:

$$a^a - b \text{ на } (a - 1)(a - \log_a b),$$

$$\log_a b - a \text{ на } (a - 1)(b - a^a),$$

$$\sqrt[2k]{a} - b \text{ на } a - b^{2k},$$

$$|a| - b \text{ на } a^2 - b^2.$$

(В этих формулах везде считается, что $b > 0$. В двух последних допускается ещё $b = 0$.)

Два замечания по поводу практического применения этих замен.

Во-первых, в примерах, как правило, a , b и α являются функциями, и потому каждая из указанных замен приводит обычно к изменению ОДЗ, причём, и это очень важно, ОДЗ нового неравенства шире, чем у исходного, так что потери решений не произойдёт, а полученные в конце решения надо ещё проверить на вхождение в ОДЗ исходного неравенства. Другими словами, решениями исходного неравенства будут те из полученных решений, которые лежат в его ОДЗ – в такой ситуации мы будем говорить, что новое неравенство равносильно исходному в его ОДЗ. Имея это в виду, целесообразно начинать решение с вычисления ОДЗ исходного неравенства.

Во-вторых, когда a , b и α зависят от x , получаемое после замены неравенство вовсе не обязательно будет рациональным: скажем, при решении неравенства $\log_x(x + 1) - x > 0$ мы ни на шаг не продвинемся вперёд, заменив его левую часть

² Можно также сформулировать некоторые условия применимости метода интервалов для произведения функций сколь угодно общего вида, но эти условия будут включать в себя такие понятия, как непрерывность функций, кратность корней, а для их доказательства потребуются теоремы дифференциального исчисления, далеко выходящие за пределы школьной математики, и, в частности, формула Тейлора.

³ Этот список нетрудно пополнить, но мы ограничиваемся только теми заменами, которые ниже используются в примерах.

на $(x-1)(x+1-x^x)$. Однако в случаях более простых, например, если в первой формуле a и b постоянны, после замены мы получаем неравенство хотя и не обязательно рациональное, но, по крайней мере, более «близкое» к рациональному, чем исходное.

С помощью стандартных замен легко решаются комбинированные неравенства, подобные следующему:

$$(2^{x^2+1} - 32)(|3x+1| - 4) \times \\ \times (\sqrt[4]{x+1} - 1) \log_{x+3}(x^2 - 6x + 6) < 0.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями:

$$x+1 \geq 0, x+3 > 0, x+3 \neq 1, \\ x^2 - 6x + 6 > 0,$$

или

$$-1 \leq x < 3 - \sqrt{3}, x > 3 + \sqrt{3}.$$

Сделав все необходимые замены, мы получаем неравенство, равносильное исходному в его ОДЗ:

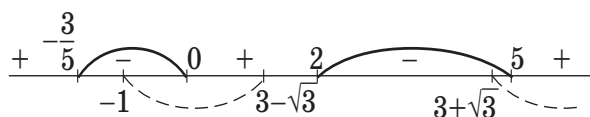
$$(x^2 + 1 - 5)[(3x+1)^2 - 16][(x+3) - 1] \times \\ \times [(x^2 - 6x + 6) - 1][(x+1) - 1] < 0,$$

из которого последовательно будем иметь:

$$(x+2)(x-2)(3x+5)(3x-3)(x+2) \times \\ \times (x^2 - 6x + 5)x < 0,$$

$$(x+2)^2(x-1)^2(x-2) \times \left(x + \frac{5}{3}\right)(x-5)x < 0,$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)(x-2)(x-5)x < 0.$$



Черт. 2

Последнее неравенство решаем методом интервалов (черт. 2), и на этом же чертеже отбираем те из его решений, ко-

торые входят в найденную вначале ОДЗ исходного неравенства. В результате получаем ответ:

$$-1 \leq x < 0, 3 + \sqrt{3} < x < 5.$$

После этого искусственного примера, иллюстрирующего технику приёма рационализации, рассмотрим несколько примеров из практики вступительных экзаменов в МГУ. Как видно из этих примеров, рационализация быстро ведет к цели не только в случаях, когда левая часть уже разложена на множители, но и для приведения неравенства к такому виду. Кроме того, в предлагаемых решениях мы используем не только указанные выше стандартные замены, но и некоторые другие, специальные приёмы рационализации.

1. (Механико-математический факультет, 1963): $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

ОДЗ этого неравенства состоит из $x \neq 0$. После записи неравенства в виде $|x|^{x^2-x-2} - 1 < 0$ рационализация достигается с помощью первой и четвертой замен:

$$(|x| - 1)(x^2 - x - 2) < 0, \\ (x^2 - 1)(x^2 - x - 2) < 0, \\ (x-1)(x+1)(x+1)(x-2) < 0, \\ (x-1)(x-2) < 0.$$

Решения последнего неравенства – значения x из промежутка $1 < x < 2$ – входят в ОДЗ исходного неравенства и потому являются его решениями.

Приведённое решение, по-видимому, проще, по крайней мере, компактнее, чем два других решения, возможных здесь: использование свойств степени с основанием, большим и меньшим 1, и логарифмирование с последующим решением двух систем неравенств. Безусловно, из-за крайней простоты примера преимущество рационализации здесь не очень заметно.

В следующем примере компактность предлагаемого способа по сравнению с

обычным перебором случаев видна гораздо лучше.

2. (Физический факультет, 1966):

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} > 1.$$

ОДЗ неравенства состоит из промежутков $0 < x < \frac{1}{2}$ и $x > 1$. Теперь записываем цепочку неравенств:

$$\log_x \frac{2x-1}{x-1} - 1 > 0,$$

$$(x-1) \left(\frac{2x-1}{x-1} - x \right) > 0,$$

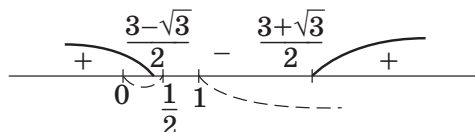
$$(x-1) \frac{x^2-3x+1}{x-1} < 0, \quad x^2-3x+1 < 0.$$

Из решений последнего неравенства

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

отбираем входящие в ОДЗ исходного неравенства. Это будет

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad 1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{черт. 3}).$$



Черт. 3

3. (Физический факультет, 1966):

$$\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}} \left(\frac{x}{3} \right) > 0,$$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x > 0$, $2x^2 - 7x + 6 > 0$, $2x^2 - 7x + 6 \neq 1$, или, что то же самое,

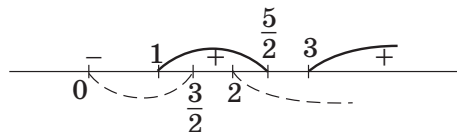
$$0 < x < \frac{3}{2}, \quad x > 2, \quad x \neq 1, \quad x \neq \frac{5}{2}.$$

Применяя вторую и третью замены, получаем цепочку неравенств, равносильных исходному в его ОДЗ:

$$(\sqrt{2x^2-7x+6}-1) \left(\frac{x}{3} - 1 \right) > 0,$$

$$(2x^2-7x+5)(x+5)(x-1) > 0,$$

$$(x-1) \left(x - \frac{5}{2} \right) (x-3) > 0.$$



Черт. 4

Решая последнее неравенство методом интервалов (черт. 4) и совмещая его решения с ОДЗ исходного неравенства, получаем ответ:

$$1 < x < \frac{3}{2}, \quad 2 < x < \frac{5}{2}, \quad x > 3.$$

4. (Химический факультет, 1965):

$$\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями: $x > 0$, $x \neq 1$. Перенеся все члены неравенства в левую часть, после несложных преобразований получим цепочку неравенств:

$$\frac{\log_2 \frac{x+2}{x^2}}{\log_2 x \cdot \log_2 (x+2)} \leq \frac{x+2-x^2}{x^2(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0, \quad \frac{x-2}{x-1} \geq 0,$$

каждое из которых равносильно исходному в его ОДЗ. Решения последнего неравенства — $x < 1$, $x \geq 2$. В ОДЗ входят значения x из промежутков $0 < x < 1$ и $x \geq 2$.

По поводу этого примера сделаем несколько замечаний. Если не считать предложенного некоторыми поступающими грубо ошибочного решения, в котором неравенство сразу переписывалось в виде $\log_2 \sqrt{x+2} \leq \log_2 x$, то в подавляющем большинстве решений возникала, как и у нас, дробь с тремя логарифмами, после чего авторы этих решений рассматривали

четыре логически возможных случая распределения знаков между этими логарифмами. При этом многие, не владея в достаточной степени логикой и техникой решения систем неравенств, допустили большое количество ошибок.

В то же время этот пример допускает решение столь же короткое, как и приведённое нами. Именно, легко заметить, что при любом допустимом значении x правая часть положительна, и, следовательно, при $0 < x < 1$, когда левая часть отрицательна, неравенство выполняется. Если же $x > 1$, то оба знаменателя положительны, и данное неравенство равносильно неравенству $\log_2 \sqrt{x+2} \leq \log_2 x$, решение которого уже не представляет труда. Однако, несмотря на лёгкость, с которой можно понять это решение, придумать его оказалось не под силу большинству решавших неравенство; дело объясняется скорее всего тем, что это решение использует несколько искусственный приём – исследование знаков частей неравенства и рассмотрение отдельных случаев расположения x относительно 1⁴.

Кроме того, это решение несколько менее универсально: оно уже не проходит так просто в случае, когда, скажем, число 2 в правой части заменено на $3/4$, в то время как для решения, использующего рационализацию, замена 2 даже на параметр $a > 0$ не составила бы практически дополнительных трудностей.

Для рационализации неравенств, содержащих корни и модули, обычно можно

⁴ Впрочем, этот приём не так искусствен: знаки частей, как правило, исследуются при решении иррациональных неравенств, а различные возможности для основания логарифмов – при потенцировании логарифмических неравенств. Однако в таких случаях этот приём «навязывается» самим видом неравенства, чего нельзя сказать о данном примере.

не пользоваться стандартными заменами и применять индивидуальные приёмы.

Даже в случае, когда такая замена возможна, проще применить индивидуальный приём, чем соображать, для каких именно a и b воспользоваться стандартной заменой.

Так, например, для решения неравенства

$$|x^2 + 3x - 3| \leq |x^2 - 2x - 2|$$

проще всего заметить, что обе его части неотрицательны, так что после возведения в квадрат мы получим равносильное ему неравенство

$$|x^2 + 3x - 3|^2 \leq |x^2 - 2x - 2|^2,$$

или, что то же самое,

$$(x^2 + 3x - 3)^2 \leq (x^2 - 2x - 2)^2.$$

Переносим все члены в левую часть и раскладывая разность квадратов в произведение, мы получим неравенство

$$(2x^2 + x - 5)(5x - 1) \leq 0,$$

решения которого легко находятся методом интервалов:

$$x \leq -\frac{1 + \sqrt{41}}{4}, \quad \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{\sqrt{41} - 1}{4}.$$

Разумеется, возведение в квадрат, которым мы здесь воспользовались, есть, по существу, четвёртая стандартная замена при $a = x^2 + 3x - 3$, $b = |x^2 - 2x - 2|$, но осознавать это, как видим, вовсе не обязательно. Отметим ещё, что обычное решение этого неравенства – рассмотрение различных возможностей для знаков квадратных трёхчленов, стоящих под знаком модуля, – было бы технически довольно сложным – в нём пришлось бы сравнивать по величине иррациональные числа (корни этих трёхчленов) и, кроме того, корни трёхчлена $2x^2 + x - 5$.

В следующих примерах мы применяем для рационализации как стандартные замены, так и индивидуальные приёмы.

5. (Экономический факультет, 1967):

$$\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2 - 3x + 1) \geq 0.$$

ОДЗ неравенства определяется условиями:

$$x^2 - 3x + 1 > 0, x > 1,$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 0,$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \neq 1,$$

или, что то же самое,

$$x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \neq 1.$$

Мы оставляем второе условие в «неразрешённом» виде, не желая, пока нет необходимости, решать иррациональное уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ и сравнивать его решения с $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Сделав вторую стандартную замену, получим неравенство

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 1)(x^2 - 3x) \geq 0,$$

равносильное исходному в его ОДЗ. Умножив теперь обе части на положительное (при всех допустимых x) выражение $\sqrt{x+1} + (\sqrt{x-1} + 1)$, получим

$$[(x+1) - (x-1+1+2\sqrt{x-1})] \times \\ \times (x^2 - 3x) \geq 0,$$

или $(2\sqrt{x-1} - 1)(x^2 - 3x) \leq 0$. Умножая теперь обе части на $2\sqrt{x-1} + 1$, получаем, наконец, неравенство

$$(4x - 5)(x - 3)x \leq 0,$$

решения которого $x \leq 0$, $5/4 \leq x \leq 3$.

Остаётся из полученных решений отобрать входящие в ОДЗ. Поскольку $5/4 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$, то неравенству $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

удовлетворяют лишь x из промежутка $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leq 3$. Теперь следует проверить,

удовлетворяют ли полученные x второму условию, определяющему ОДЗ:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \neq 1.$$

Это можно сделать, по крайней мере, двумя способами. Во-первых, решив уравне-

ние $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$, можно найти его единственный корень $5/4$ и убедиться, что в полученный промежуток он не входит. Во-вторых, можно рассуждать следующим образом. Лишние решения, соответствующие обращению в 1 основания $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ логарифма, появляются из-за обращения в 0 множителя $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 1$ в новом неравенстве. Но в процессе решения мы преобразовывали именно этот множитель, домножая его на строго положительные выражения. Поэтому этот множитель равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю получившийся из него множитель $4x - 5$, то есть при $x = 5/4$. Этот второй способ рассуждения есть, по существу, несколько необычный способ решения того же иррационального уравнения $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$, но в данном случае он вполне уместен для проверки, ибо фактически он уже применён в процессе решения.

6. (Филологический факультет, 1966):

$$\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt{3}}} \sqrt{4y^2 - 1} < 1.$$

Заменив $\cos x$ на y , $\cos 2x$ на $2y^2 - 1$, получаем неравенство $\log_{\frac{2y}{\sqrt{3}}} \sqrt{4y^2 - 1} < 1$.

ОДЗ этого неравенства определяется условиями: $y > \frac{1}{2}$, $y \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Сделав вторую стандартную замену, получим неравенство

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{2y^2 - 3} - 2y) < 0.$$

Умножая обе его части на выражение $\sqrt{2y^2 - 3} - 2y$, положительное в ОДЗ, получим неравенство $\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8y^2 - 3) < 0$, или

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \sqrt{\frac{3}{8}}\right)\left(y + \sqrt{\frac{3}{8}}\right) < 0.$$

Поскольку в ОДЗ $y + \sqrt{\frac{3}{8}} > 0$, последнее неравенство приводится к виду

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) < 0.$$

Решения этого неравенства – значения y из промежутка $\sqrt{\frac{3}{8}} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Все эти y входят в ОДЗ, и остаётся решить двойное неравенство $\sqrt{\frac{3}{8}} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Его решения, то есть решения исходного неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \arccos \sqrt{\frac{3}{8}} + 2k\pi, \\ -\arccos \sqrt{\frac{3}{8}} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

В заключение заметим, что изложенный здесь приём решения неравенств не

является, разумеется, универсальным; он не всегда применим, не всегда сокращает и упрощает решение. С другой стороны, этими свойствами, очевидно, не обладает ни один из методов решения. В то же время круг рационализации представляется широким.

Упражнения

С помощью рационализации решить следующие неравенства:

- $|x^2 - 4x + 3|^{x^2 - 6x + 4} \leq 1.$
- $\log^{x+2} |x^2 - 1| \leq 1.$
- $\frac{1}{\lg(x^2 - 3x)} > \frac{1}{\lg(x^2 - 4)}.$
- $\log^{\frac{3x}{x^2+1}} \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) \geq 0.$
- $\log_{x+p} 2 < \log_4 \left(0 < p < \frac{1}{4}\right).$
- $\log_{2\sin x} \sqrt{1 + 2\cos 2x} < \frac{1}{2}.$

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Сколтех открывает интернет-музей А.Н. Колмогорова

25 сентября Сколковский институт науки и технологий (Сколтех) запустил портал Kolmogorov.world – интернет-проект, посвящённый великому учёному Андрею Николаевичу Колмогорову. Событие приурочено к 120-летию со дня рождения математика. Проект реализован в рамках инициативы «Проведение юбилейных мероприятий» Десятилетия науки и технологий в РФ.

Нарратив проекта выстроен вокруг поиска истоков гениальности А.Н. Колмогорова в его родословной, биографии, месте, где он работал, близких ему людях. Портал сочетает передовые технологии и научную достоверность, за которую отвечали специалисты из Математического института им. В.А. Стеклова РАН (МИАН).

Презентация портала состоялась на специальном тематическом заседании, посвящённом 120-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова, в рамках Международной конференции по интегрируемым системам и нелинейной динамике, которая проводилась в Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова (ЯрГУ).

Источник: mathcenter.kpfu.ru

Перспективы далёкие и близкие

СКОРО В ШКОЛЫ ПРИДУТ «УЧИТЕЛЯ-НЕДОУЧКИ»?

(об очередной инициативе, лоббируемой Минпросвещения)

* На конец 2022 года, по данным Росстата, в нашей стране насчитывалось почти 1,08 млн учителей. Согласно статистике из сборника «Образование в цифрах» (издаётся ежегодно НИУ ВШЭ), в 2021/22 учебном году 15,9% от общего числа учителей (каждый шестой учитель в российских школах) не имели высшего педагогического образования. Ещё 2,75% педагогов окончили вузы, но по другим специальностям. Среднее специальное образование имели 12,41% учителей, из них педагогический профиль освоили 11,66% от числа всех школьных преподавателей.

* В июне 2023 года глава Минпросвещения Сергей Кравцов выступил с инициативой начать готовить учителей-предметников для основной школы в системе среднего профессионального образования (СПО). Чиновник считает, для того чтобы учить школьников 5–9 классов, будущему педагогу достаточно окончить колледж. Сейчас в рамках СПО в России готовят лишь специалистов для детских садов и начальных школ. По словам г-на Кравцова, выпускники педагогических колледжей очень востребованы среди работодателей. Как мантру он не раз повторял, что педагогические профессии весьма популярны и с каждым годом поток студентов в педвузы растёт. Тогда зачем вообще перепрофилировать педколледжи? Для чего нужны будут учителя, не способные вести предмет в старшей школе? Или в том вовсе отпадёт надобность?

* Проект ФГОС среднего профобразования по подготовке учителей-предметников для основной школы начали готовить, не обсудив с профессиональным сообществом, которое в массе своей такое решение не поддержало бы. В очередной раз чиновники поставили педагогов перед фактом, что решение принято. Как верно заметили журналисты, «учителей разрешат недоучивать». Сама инициатива очень уж похожа на подготовку «учителя общей практики», специалиста, который сможет с помощью искусственного интеллекта обучать школьников, что само по себе звучит угрожающе.

* А может, дело в деньгах? В желании удешевить процесс подготовки будущего учителя? И заодно его упростить и ускорить, чтобы восполнить-таки кадровый дефицит? Однако очередная попытка избавиться такой ценой от нехватки кадров в региональных школах не будет эффективной, считают эксперты. Идея министра не нашла однозначной поддержки в педагогическом сообществе. Большинство тех, кто знаком с профессией не понаслышке, считают, что учителям-предметникам необходимо высшее образование, а некоторые учителя уже назвали эту инициативу «чрезвычайно вредной и чрезвычайно опасной». Как обычно, о последствиях «верхи» не задумываются, а «низы» догадываются и даже понимают, к чему всё это приведёт. Как гласит житейская мудрость, фарш невозможно будет повернуть назад. Или кто-то всерьёз полагает, что речь идёт о временной мере?

Подробности: kommersant.ru, vedomosti.ru, dzen.ru/obucheniepro.

Портрет педагога

РЕАЛИИ И УДИВИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

(чем больше набор в педвузы, тем больше нехватка учителей в школах)

* Педагогическое образование в 2023 году пользовалось небывалым спросом у абитуриентов, в педагогические вузы было подано 385 000 заявлений – на 100 000 больше, чем год назад. Наибольший конкурс был в МПГУ и РГПУ имени А.И. Герцена; среди педвузов новых регионов самым популярным стал ЛГПУ (Луганск).

* С 1 сентября 2023 года вступил в силу закон о работе студентов педагогических колледжей последних курсов в младших классах школы и детсадах, принятый Государственной Думой в июле. Теперь студенты могут совмещать учёбу с работой в образовательном учреждении: воспитывать, преподавать и вести кружки.

* Тем временем местные власти восполняют нехватку учителей по-своему. Так, в Ярославской области учителей начальной школы будут переучивать на предметников. Это связано с тем, что в регионе стало на 500 первоклассников меньше (и в дальнейшем эта тенденция сохранится), при этом в средней школе есть острый дефицит учителей-предметников – эту проблему и должна решить программа переподготовки.

Подробности: ria.ru, interfax.ru, up76.ru.

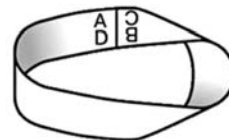
Из жизни учёных

ОПТИМАЛЬНАЯ БУМАЖНАЯ ЛЕНТА

(у математиков одной проблемой стало меньше)

Чтобы сделать модель ленты Мёбиуса из бумажной полоски, нужно соединить её концы, предварительно повернув один из них наполоборота. При этом бумагу нельзя мять, а разрешается только изгибать. Если с длинной полоской это проделать легко, то с короткой трудно или вовсе невозможно. Математиков давно волновал вопрос: каковы должны быть минимальные размеры прямоугольной полоски, чтобы из неё можно было склеить ленту Мёбиуса без самопересечений? Этой задаче более 60 лет. Ещё в 1977 году была выдвинута гипотеза, что соотношение сторон полоски должно быть больше квадратного корня из 3, или примерно 1,73. Например, для ленты шириной 1 см длина её должна быть больше 1,73 см. Однако доказать эту гипотезу удалось только сейчас. Это сделал, правда, не с первой попытки, Ричард Шварц, математик из Университета Брауна (США). На решение задачи он потратил четыре года.

Подробности: securitylab.ru.



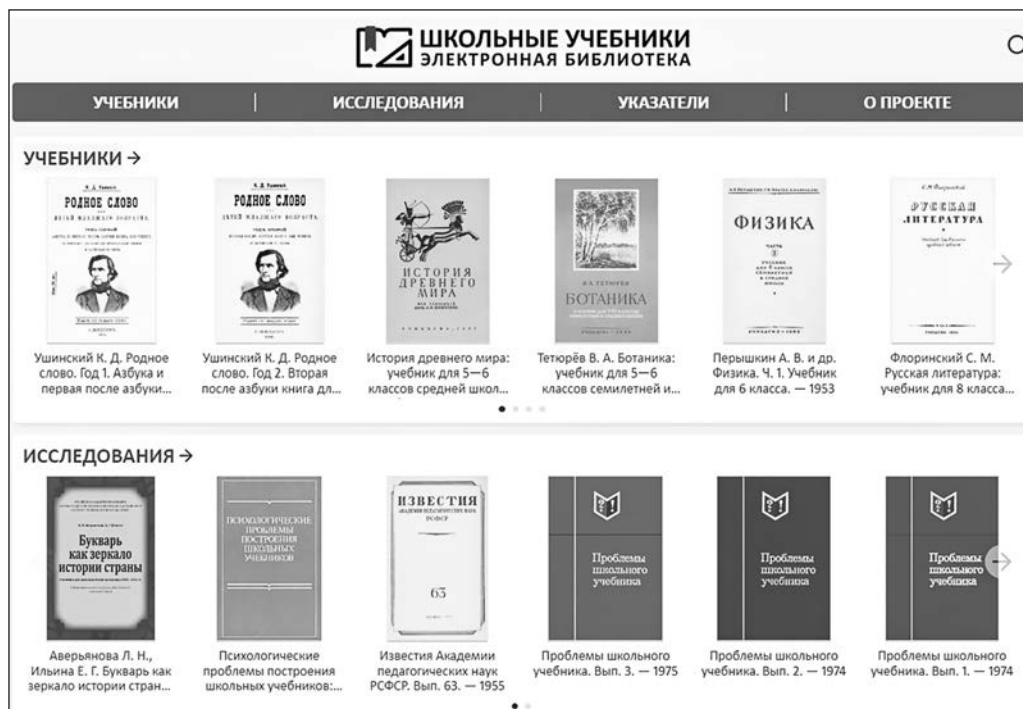
Хроники

СОВЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ В СВОБОДНОМ ДОСТУПЕ

(о новом проекте Российской академии образования)

В Сети появилась электронная библиотека советских и дореволюционных школьных учебников. За их оцифровку и систематизацию взялась РАО. Главная задача проекта – сохра-

нение отечественного наследия в области школьной учебной литературы. На сайте библиотеки появятся полнотекстовые версии учебников с XVIII века по 1990-е годы, а также исследования по теории, истории и практике создания учебников (монографии, диссертации, сборники статей, библиографические указатели). Уже выложено более 30 изданий, в том числе по математике. Все материалы общедоступны и предназначены для использования в учебных и научных целях.



Подробности: rg.ru, sbooks.gnpbu.ru.

Житейские истории

КОПИТЕ ВАШИ ДЕНЕЖКИ!

(советы маркетолога для тех, кто умеет и любит считать)

Накопить существенную сумму возможно даже при маленькой зарплате, уверены специалисты по маркетингу. Многие люди, особенно любители математики, по достоинству оценят некоторые их советы, ибо ничто так не убеждает потребителя, как реальные расчёты и цифры. Совет первый: откладывайте по 10% с ежемесячного дохода на специальный счёт; даже при зарплате 50 тыс. рублей в месяц таким образом за год можно накопить 60 тыс. рублей. Совет второй: подключите «копилку» к счёту, например переводите на него 15% от каждой по-



траченной суммы. Допустим, расходы за день составили 2000 рублей, тогда в копилку поступит 300 рублей. При похожих тратах за месяц может набежать 9000, а за год – порядка 108 тыс. рублей. Совет третий: устройте челендж 365. Ежедневно откладывайте сумму, равную порядковому числу каждого дня в году: 1 января – 1 рубль, 2 января – 2 рубля и так далее, 31 декабря – 365 рублей. Такой вызов самому себе позволит накопить за год 66 795 рублей. Совет четвёртый: переводите в конце каждого дня на сберегательный счёт «хвостики» от всей оставшейся суммы, округляя её до десятков, сотен или тысяч рублей. Наконец, главный совет: не поддавайтесь на уловки мозга и начинайте копить сейчас, не откладывайте решение до следующей зарплаты, ведь даже 50 или 200 рублей – это лучше, чем ничего.

Подробности: life.ru.

Пополняем ресурсы

ИЗ ЛАБИРИНТОВ БЕСКОНЕЧНОСТИ – В ПУЧИНЫ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

(книга для тех, кто хочет заглянуть за кулисы мира)

Микаэль Лонэ, молодой французский писатель, популяризатор науки и известный видеоблогер (ведёт YouTube-канал MicMaths, сегодня у него более 570 тыс. подписчиков), уже знаком российскому читателю по книге «Большой роман о математике» (Эксмо, 2018). Издательство «Бомбора» выпустило ещё одну его книгу, которая порадует любителей математики и истории науки. Автор по-прежнему смотрит на мир сквозь призму математики и призывает к тому же другим: «Наука – замечательная почва для сомнений, а математика – один из самых мощных инструментов. Заниматься математикой – как заглянуть за кулисы мира. Украдкой понаблюдать за гигантскими винтиками, которые вращают нашу Вселенную». Читателя ждут увлекательные встречи с математикой и знакомство с некоторыми из самых красивых скрытых механизмов нашего мира.

Подробности: daily.afisha.ru/culture/23108-skolko-peschinok-umestitsya-vo-vselennoy-malenkiy-tekst-o-bolshih-chislakh (фрагмент книги).



Нетривиальные суждения

Математика издавна предоставляла нашим предкам настоящий арсенал для познания мира. И одним из наиболее важных инструментов в этом наборе является концепция числа. С его помощью мы рассчитываем, измеряем или вычисляем, и любая наука, надеющаяся на светлое будущее, должна стать его союзником.

Микаэль Лонэ

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Научная статья: 5.8.2.

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_8_75

Сегодня мы поговорим о задачах из такого раздела, как теория чисел. Это раздел математики, изучающий свойства чисел, их делимость. Часто речь идет о работе с целыми числами. Ни одна олимпиада по математике не обходится без задания на данную тему.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Поддаеву Михаилу Валерьевичу по адресу rodaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя. Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

1. Найдите все целые a такие, что уравнение $x^3 + 2ax + 1 = 0$ имеет целочисленный корень.

2. Верно ли, что если две положительные несократимые дроби в сумме дают 1, то их знаменатели равны?

3. Докажите, что $a^4 + 64$ составное число при любых натуральных a (Задача Софи Жермен).

4. Докажите, что при любом натуральном n число $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ – это точный квадрат.

5. Покажите, что любое нечётное число представимо в виде разности квадратов двух целых чисел.

Решение заданий из №7–2023.**Диофантовы уравнения**

1. Найдите все целые a, b, c такие, что $a^2 - 2b^2 + 8c = 3$.

Решение. Если a чётно, то левая часть чётна, а правая – нет, противоречие. Значит, $a = 2k + 1$.

$$(2k + 1)^2 - 2b^2 + 8c = 3$$

$$2k^2 + 2k - b^2 + 4c = 1.$$

Если b чётно, то снова противоречие по чётности левой и правой частей.

$$y = 2l + 1,$$

$$k(k + 1) - 2l^2 - 2l + 2c = 1.$$

Имеем слева чётное выражение (произведение двух соседних целых чисел чётно), справа нечётное. Значит, решений нет.

2. Решите в целых числах уравнение $2a^2 + ab - b^2 - 7a - 4b = 1$.

Решение. Введём слева и справа параметр t :

$$2a^2 + a(b - 7) - b^2 - 4b + t = 1 + t.$$

Рассмотрим последнее уравнение как квадратное относительно a . Вычислим его дискриминант:

$$D = 9b^2 + 18b + 49 - 8t.$$

При $t = 5$ имеем полный квадрат. Найдём корни уравнения:

$$a_1 = -b + 1, \quad a_2 = \frac{b + 5}{2}.$$

$$(2a - b - 5)(a + b - 1) = 6.$$

Обратим внимание, что из двух скобок

на 3 должна делиться лишь одна. Сложим их: $3a - 6$, очевидно, получаем противоречие, так как если сумма двух чисел кратна 3, то или оба числа делятся на 3, или оба не делятся.

3. Найдите все целые a, b, c такие, что $a^2 - 4ab = 4b^2$.

Решение. Достаточно рассмотреть это уравнение как квадратное относительно a , например, тогда получим, что целые решения возможны лишь при $b = 0$.

Ответ: (0; 0).

4. Решите в натуральных числах $2^a - 3^b = 1$.

Решение.

$$2^a - 1 = 3^b.$$

Рассмотрим делимость на 3 левой части.

Если a нечётно, то $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2 \cdot (3+1)^n$, поэтому 2^{2n+1} при делении на 3 даёт в остатке 2. Тогда $2a - 1$ даёт при делении на 3 в остатке 1, противоречие.

Если a чётно, то если $a = 2$, то $b = 1$. Если $a \geq 2$, то 2^{2n} кратно 8. Тогда на 8 делится $3^b + 1$.

Если b чётно, то 3^b при делении на 8 в остатке даёт 1. Противоречие.

Если b нечётно, то $3^{2k+1} + 1 = 3 \cdot 9^k + 1$ при делении на 8 даёт в остатке 4. Противоречие.

Ответ: (2; 1).

5. Найдите все натуральные a, b, c такие, что

$$a + b + c = abc.$$

Решение. Если $c = 1$, то $a + b + 1 = ab \cdot a(b-1) = b + 1$.

$$a = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}.$$

a целое, поэтому 2 кратно $b-1$, $b = 2$ или 3. То есть имеем решения (2; 3; 1), (3; 2; 1) и симметричные им.

Докажем, что больше решений нет. Пусть все переменные не меньше 2.

$$b + c = a(bc - 1) \Leftrightarrow a = \frac{b+c}{bc-1}.$$

$$a \geq 2 \Rightarrow b + c = a(bc - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c + 2 \geq b(2c - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{c+2}{2c-1} = \frac{1}{2} + \frac{2,5}{2c-1} \leq \frac{1}{2} + \frac{2,5}{2 \cdot 2 - 1} < 1,$$

противоречие с тем, что все переменные не меньше 2.

Задачи подготовил

Поддаев М.В.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Учёный до мозга костей

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) занимался не только математикой. Он получил важные результаты, исследуя магнитное поле Земли, а также сделал интересные открытия в теории электромагнетизма, капиллярности и диоптрики. В области геодезии Гаусс изобрёл гелиостат – устройство для посылания сигналов с помощью отражённого света. Любопытный случай произошёл в 1833 году, когда Гаусс работал с Вильгельмом Вебером (1804–1891), проводя исследования по электромагнетизму. Учёный создал электрическое устройство, способное передавать сообщения со скоростью света. Он изобрёл не что иное, как электрический телеграф.

По книге: Энрике Грасиан. Простые числа.

Долгая дорога к бесконечности (М., Де Агостини, 2014).

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» В 2023 ГОДУ

Слово главного редактора

Бунимович Е.А. № 1–8

Актуальная тема

Малышев И.Г. О беготне впереди паровоза. № 1

Малышев И.Г. 15 лет ЕГЭ. Не пора ли подвести итоги? № 7

Малышев И.Г. Хожение по граблям. № 8

Экзамены

Журавлева Н.А. Стереометрия в профильном ЕГЭ по математике 2022 года. № 4

Калинин С.И., Соколова А.Н. О вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения Сербии. № 5

Олимпиады

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С., Антропов А.В., Козлов Ю.П., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храмцов Д.Г. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2021/2022 учебного года (первый день). № 1; (второй день) № 2

Будак Б.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Козко А.И., Панфёров В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!», 10–11 классы, 2021–2022. № 3

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Голубев М.О., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Королёв Н.Ю., Молчанов Е.Г., Останин П.А., Подлипский О.К., Саулин С.М., Скубачевский А.А., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физ-тех-2022» по математике. Часть 1. № 4; Часть 2. № 5

Асташова И.В., Будак Б.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панфёров В.С., Разборов А.Г., Рогачев В.В., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. Олимпиада «Ломоносов – 2021-2022» по математике. № 4

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области. № 6

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Голубев М.О., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Королёв Н.Ю., Останин П.А., Подлипский О.К., Саулин С.М., Скубачевский А.А., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех–2023» по математике. Часть 1. № 7; Часть 2. № 8

Консультация

Богданова Е.А., Богданов П.С., Богданов С.Н. О применении параметрического задания кривых при изучении математики в средней школе. № 3

Бежану Т.В., Тимошкина В.А. Преобразование геометрического чертежа с помощью дополнительных построений в задачах на отношения отрезков. № 4

Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.Н. Квадратные уравнения и теорема Виета. № 5

Бичегкуев М.С., Олисаев Э.Г. О наибольшем и наименьшем значениях квадратичной функции. № 5

Журавлева А.С. Пирамида математической грамотности. № 6

Белошистая А.В. Проблемная ситуация на уроке математики в 5–6 классах. № 7

Панишева О.В., Рысач И.В. Использование комиксов в обучении математике в школе. № 7

Нифонтова Е.М. Как научить детей точно формулировать геометрические определения и теоремы? № 8

Методический семинар

Сагатов Л.С. Методические особенности решения стереометрических задач разными способами. № 1

Есина Л.Ю. Метод дополнительных построений – ключ к решению задачи. № 2

Андреанова Ю.В., Бегунц А.В. О подготовке учителей к квалификационной работе проекта «Математическая Вертикаль». № 3

Петлина Е.М., Зверева Л.Г. Решение вероятностных задач по ключевым словам. № 4

Харбих Т.С. Решение прямых и обратных задач на работу с формулами как средство формирования математической грамотности. № 5

Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.Н. Освобождение от иррациональности в знаменателе. № 6

М.В. Таранова О некоторых геометрических конструкциях, связанных со свойствами гиперболы и параболы. № 7

Семёнова И.Н., Слепухин А.В. Структурирование содержания геометрического материала в зависимости от характеристик образовательной среды. № 8

Тимофеева И.Л., Хредченко О.В. О формировании логической грамотности учащихся при изучении свойств числовых неравенств. № 8

Повышение квалификации

Клековкин Г.А. Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (оглядящая). № 4

Шабанова М.В., Котова С.Н., Томилова А.Е., Удовенко Л.Н. Компьютерная поддержка конструктивной деятельности учащихся при решении стереометрических задач повышенного уровня сложности. № 6

Бодряков В.Ю. Усвоение фундаментальных математических понятий обучающимися в процессе выполнения лабораторных работ по математике. № 7

Малова И.Е., Абатурова В.С., Малинникова Н.А. Методическое наставничество: цели, условия организации, опыт. № 8

Калашников А.Н. Применение материальных моделей транспортиров для развития образного мышления школьников при изучении темы «Измерение углов» на уроках геометрии. № 8

Математика и образование

Калинин С.И., Макарова Ю.И., Протасов Н.С. Обобщение некоторых классических неравенств средствами p -выпуклых функций. № 4

Семёнов П.В. От действительных чисел к исследованию функций. № 6

Профильное обучение

Попов А.Н. Об одной стереометрической задаче московской математической олимпиады. № 5

Рыжик В.И., Осипов А.В. Ещё раз о теореме Менелая. № 6

Панкратова Л.В. Вернёмся к задаче об эллипсе... № 8

Точка зрения

Якубов А.В. Размышления регионального репетитора. № 1

Олехов А.А. О практико-ориентированном изучении стереометрии с использованием виртуальной реальности. № 2

Открытый урок

Лебединцев В.Б., Ламтюгина И.М. Фронтально-парные занятия (на примере изучения темы «Пропорция»). № 2

Ботиров Г.И., Курбанов Н.Х. Арифметико-геометрическая прогрессия. № 3

Игнатова О.Г., Хаустова Н.В. Бинарный урок-путешествие для 6-го класса «Странствия Садко». № 8

Проблемы и суждения

Рыжик В.И. Компьютер: время перемен. № 1

Саввина О.А., Симоновская Г.А., Щербатых Г.В. Воспитание в процессе обучения математике: исторические тенденции и современные вызовы. № 2

Малышев И.Г. Красивые задачи на фигуры вращения. № 6

Мультимедиа

Клековкин Г.А. Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (касательная, нормаль, особые точки кривой). № 3

У нас в гостях

«Не так важно что и как, а важно кто» (интервью с В.А. Рыжиком). № 2

Вне урока

Семёнов П.В. Каких треугольников больше? (Сюжет для исследовательских проектов школьников). № 1

Тонеева Е.С., Шабаетова Е.Н. Интеллектуальная игра «Логарифмы – это скучно?». № 4

Эксперимент

Ястребов А.В., Ключин П.А. Наклон колеса к дороге, циклоидальные кривые и феномен пробуксовки. № 3

Деятели науки и просвещения

В.А. Тестов Жизненный путь и научно-педагогическая деятельность Валерия Александровича Гусева (к 80-летию со дня рождения). № 2

Тестов В.А., Шилова Г.Н. К столетию учёного-методиста Сергея Григорьевича Губы. № 3

Мельников Р.А., Саввина О.А. Научное и педагогическое наследие Льва Дмитриевича Кудрявцева (к 100-летию со дня рождения). № 6

К 85-летию со дня рождения Георгия Владимировича Дорофеева. № 7

Из истории**математического образования**

Кондратьева Г.В. Переход от рукописи к печатному изданию: у истоков создания отечественных учебников математики. № 6

Методическое наследие

Дорофеев Г.В. О принципах отбора содержания школьного математического образования. № 7

Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов. № 8

Занимательная страница

Карпушина Н.М. Хвала кирпичу. № 1

Акулич И.Ф. Зная броду, суйся в воду (о весьма эффективном способе решать некоторые задачи). № 3

Акулич И.Ф. Ещё четыре квадрата. № 4

Карпушина Н.М. Такой удобный треугольник. № 5

Карпушина Н.М. Дело о пропавшем городке. № 6

Карпушина Н.М. Несоизмеримость по Платону. № 7

Карпушина Н.М. № 8

Сетематика

Карпушина Н.М. Простота и красота. № 3

Карпушина Н.М. Красота и простота. № 4

Хроники

Вечтомов Е.М., Ястребов А.В. Сорок первый международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. № 1

Егупова М.В., Лукьянова Е.В. Международная научно-практическая конференция памяти профессора Гусева В.А. в МПГУ. № 2

Кузнецова Т.И., Кондратьева Г.В. Всероссийский научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2022/2023 учебном году. № 6

Синкевич Г.И. О Санкт-Петербургском семинаре по истории математики. Двести докладов (2013–2023). № 5

Особые точки

Карпушина Н.М. № 1–8

Задачи

Иванова Е.Ю. № 1–3; *Поддаев М.В.* № 3–8

Дворянинов С.В. Нехорошая задача. № 3

Указатель статей, опубликованных в журнале «Математика в школе» в 2023 году. № 8

МАСТЕРА НУМЕРАЦИИ

...Мысль индусов выигрывает в глубине и размахе, хотя по своей склонности к безмерному и колоссальному нередко теряется в сфере фантастического.

Е. Леффлер

Древние индийцы были искусны в счёте, как никто другой. Задолго до греков они создали нескольких непозиционных и позиционных систем нумерации разного типа: словесных, алфавитных и цифровых. Основанием многих из них стало число 10, а его степени получили особые названия. Позиционные системы возникли после того, как каждое из чисел от 1 до 9 было представлено своим символом и только эти девять символов, к которым позже добавился знак нуля (точка, кружок), стали использоваться для обозначения количества единиц, десятков, сотен, тысяч. Предками современных цифр являются цифры брахми (см. рисунок). Привычный для нас вид они приобрели, претерпев ряд изменений у арабов и народов Западной Европы в Средние века и в эпоху Возрождения.

—	=	≡	𑂔	𑂕	𑂖	𑂗	𑂘	𑂙
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Индия – единственная страна, где была широко распространена словесная система нумерации. В ней цифры заменялись словами. Они ассоциировались с разными понятиями или предметами, которые встречаются только в определённом количестве: в единственном числе, парами, по три и так далее. Скажем, цифра 4 могла выражаться 29 различными словами, включая *веды*, *касты*, *океаны* и *стороны света*. Кстати, впоследствии прижилось только одно из названий нуля – *шунья*

(пустой). Арабы перевели его по смыслу – как *as-sifr*, в латыни оно превратилось в *cifra*, откуда произошло наше слово «цифра».

То же касалось чисел в пределах первых пяти десятков. Их заменяли именами богов, названиями размеров стиха и пр. Так, числа 10, 27 и 32 обозначались словами *пальцы*, *созвездия*¹ и *зубы*.

Подобный подход практиковали и другие народы. Например, у древних греков была поговорка «Застольников должно быть не меньше числа Харит и не больше числа Муз», то есть от трёх до девяти. Плутарх в своих «Застольных беседах» заметил, что в греческом алфавите количество согласных букв² выражается числом Муз, а количество гласных – числом Аполлона. Иначе говоря, первых насчитывалось девять, а вторых – семь³.

Словесная нумерация была связана с традицией индийцев облекать научные сочинения – трактаты по математике и астрономии – в стихи. Она не позволяла выполнять арифметические действия, зато годилась для обозначения многозначных чисел.

¹ Накшатры – в индийской астрономии 27 групп звезд, через которые проходит Луна при движении по небесной сфере.

² Греки не различали понятия «звук» и «буква, обозначающая звук». Буквы они делили на гласные, согласные и полугласные.

³ Священное число Аполлона. Этот бог родился в седьмой день месяца. Праздники в честь его обычно выпадали на 7-е число.

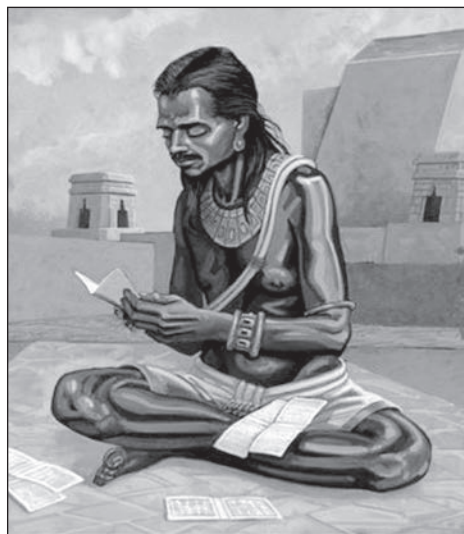
В позиционной системе числа выражались словесными цепочками, которые обычно читались справа налево. Например, запись 2023 могла выглядеть так: *времена – крылья – небо – глаза*. Замена одной и той же цифры различными словами и их синонимами позволяла выразить какое угодно число при любом выбранном размере стиха.

А ещё индийцы всегда питали страсти к огромным числам. По легенде, наставник попросил юного Будду повторить за ним названия всех счётных единиц вплоть до *лакха* – ста тысяч, или 10^5 . Сделав это, мальчик стал перечислять большие числа, степени 10, годные для подсчёта всего – от зёрен в поле до крошечных песчинок. Затем перешёл к счёту звёзд на небе, морских капель, песка в Ганге и в десятке лакхов таких же рек, а потом к ещё более огромным числам.

В популярной литературной биографии Будды «Лалитавистара» описано, как он состязался с великим математиком Арджуной в искусном знании и исчислении больших чисел. Арджуна предложил юноше назвать все числа, превосходящие *коти* – десять миллионов, или 10^7 . Тот стал перечислять их, всякий раз увеличивая предыдущее число в сто раз: 10^9 – *аюта*, 10^{11} – *ниюта*, 10^{13} – *канкара* и так далее до 10^{53} – *таллакишана*. Легко понять, как получилась высшая степень:

$$10^7 \cdot (10^2)^{23} = 10^{7+46} = 10^{53}.$$

Но это была только первая ступень исчисления! Дальше шли ещё восемь. Числовая лестница Будды строилась по закону геометрической прогрессии и в итоге приводила к гигантскому числу $10^{7+9 \cdot 46} = 10^{421}$. Не забыл юноша упомянуть и о песчинках. Весь песок реки Ганга, сказал он, исчерпывается числом *дхваджагравати* – 10^{99} , при добавлении к нему ста тысяч. Оно значительно пре-



восходит число песчинок в архимедовой Вселенной – 10^{63} .

На самом деле для индийцев 10^{421} – результат весьма скромный. Иной раз дело доходило до степеней с показателем, где насчитывались десятки цифр. Они даже придумали число *асанкхейя*, что значит «неисчислимое». А по сути такое, с которого для них начиналась бесконечность. Насколько же велико это число? В древних источниках указывались разные значения и наибольшее из них 10 в степени $7,44 \cdot 10^{37}$.

Интерес индийцев к огромным числам был непреходящ, как и стремление их именовать. Голландский математик и историк науки ван дер Варден считал, что это «чистые фантазии, словно индийские башни, которые уступами поднимались на головокружительную высоту». Однако, заметил Герман Вейль, «несмотря на весь разгул фантазии, в этом заключается нечто поистине величественное, разум впервые ощущает в себе достаточно силы для того, чтобы при помощи символа выйти за пределы данного в созерцании».

Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2024. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

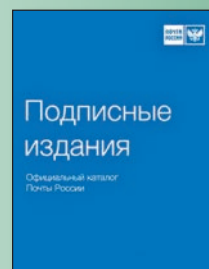
«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

- В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**
- На сайте «Почта России»:
<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



- Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>
- На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

- Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
 - Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека
- Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 8, 1–80