

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

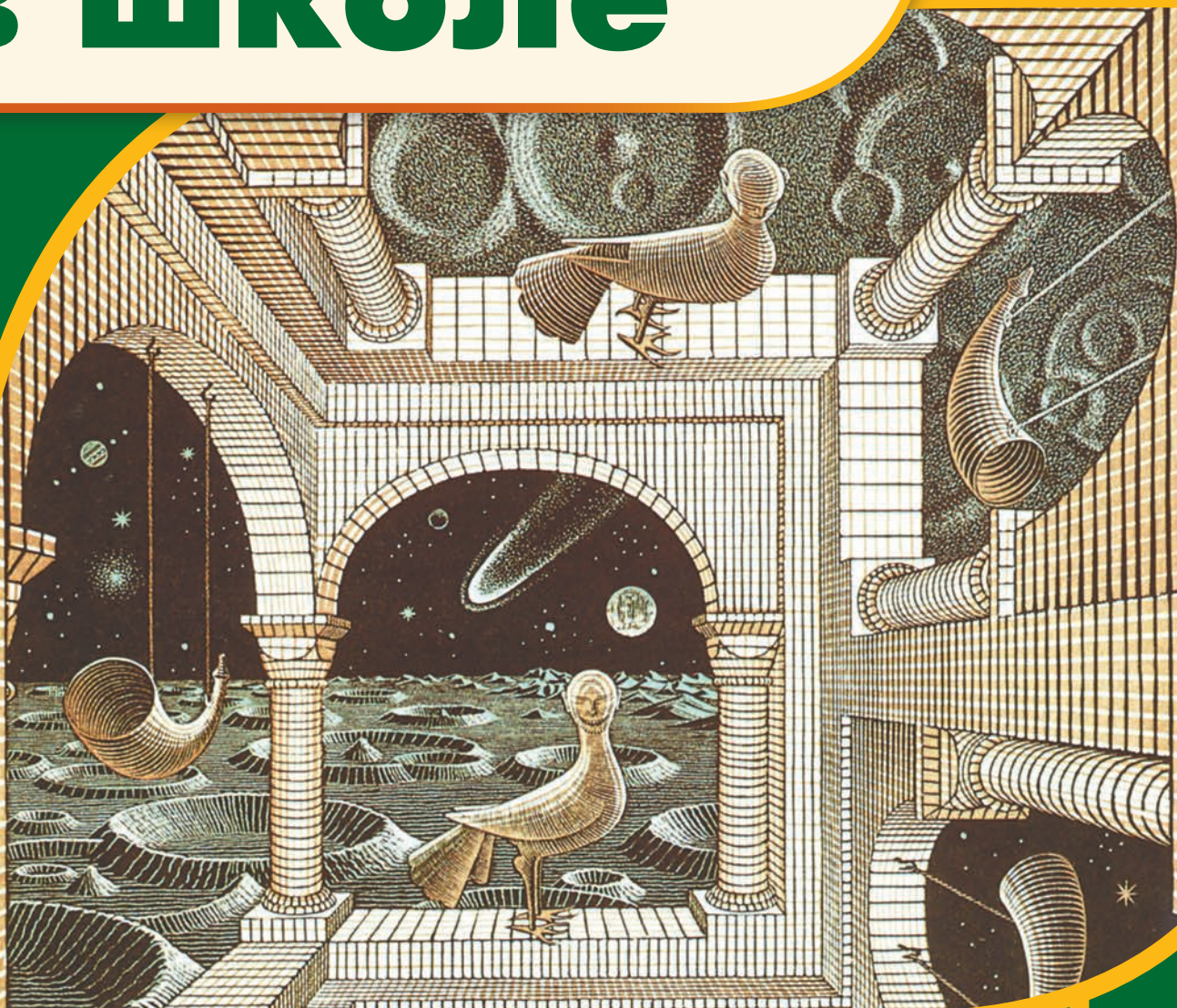


научно-теоретический и методический журнал

7 2022

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



Образование в СССР в 1950-е годы: взгляд с Запада

Математическое доказательство и интуиция

Задачи на логику

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



Куда ж нам плыть?

Картина нашего математического образования остается пёстрой и противоречивой. С одной стороны, внедряются новейшие компьютерные технологии, с другой стороны,

— снова речь о возвращении к советскому образованию, к единому учебнику.

Здесь стоит отметить, что грандиозный цифровой мир был выстроен буквально на наших глазах в новом XXI веке с такой ошеломляющей быстротой и в таком всеобъемлющем виде, что говорить о некоем «внедрении» уже, видимо, поздно. Пора, похоже, задуматься не как внедрять в уроки математики цифровые технологии, а как уроки математики, да и школу в целом, разместить в этом стремительно развивающемся цифровом мире, где наши школьники чувствуют себя куда свободнее и адекватнее нас, взрослых.

Понимание цифровой стороны нашей жизни, умение расположиться в ней нужны сегодня (и, главное — завтра!) не только для работы и карьеры. Без этого просто не получится полноценно существовать в нашей новой реальности. И само название этого нового мира — «цифровой» говорит о том, что математике, урокам математики при этом уделено особое, приоритетное место. По определению.

В то же время понятная ностальгия по прежним спокойным и неторопливым временам, когда можно было годами и десятилетиями работать по привычным, давным-давно опробованным и утверждённым программам и учебникам, может тоже оказаться весьма плодотворной. Но только если без фанатизма, без требования того мифического единого учебника, которого, кстати, не было и в советское

время, когда и в алгебре, и в геометрии успешно конкурировало несколько линий учебников, несколько авторских коллективов.

Все оттенки этой противоречивой картины, классические темы и новейшие проблемы, авангард и традиция — всё это, естественно, находит отражение на страницах нашего журнала.

Одни аспекты отечественного школьного математического образования отражены в полемическом материале А. Шевкина, построенном на историческом материале, но одновременно касающемся самых острых проблем современной школы, другие — в критическом материале И. Малышева о том, какие системные ошибки и провалы школьников, которые не объяснить ни ковидом, ни дистантом, являются сегодня на государственных экзаменах.

В разделе «Точка зрения» — обсуждение вечного и сложнейшего вопроса соотношения интуиции и логики в математическом доказательстве и, кстати, в разделе «Задачник» в этом номере предложены задачи как раз на логику. В «Методическом семинаре» — задачи, которые могут облегчить школьнику освоение традиционно одной из труднейших тем курса математики основной школы — темы «Простые дроби», а в разделе «Эксперимент» предлагается при решении задач с параметрами (также одной из сложнейших тем школьного курса математики), использовать... компьютерную анимацию.

Вот таков сегодня сложный, многообразный мир школьной математики, таков сегодня и наш с вами, дорогие наши читатели, журнал «Математика в школе».

Евгений Бунимович

АКТУАЛЬНАЯ ТЕМА

- 3 *Малышев И.Г.*
Дежавю

ЭКЗАМЕНЫ

- 7 *Костюченко Р.Ю.*
Задачи с избыточными данными в подготовке учащихся к основному государственному экзамену по математике

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 19 *Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.А.*
Задачи к теме «Обыкновенные дроби»
- 27 *Калинин С.И.*
GA-Выпуклые функции и уравнения

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 33 *Клековкин Г.А.*
К задаче о рассечении тетраэдра на равновеликие многогранники

ЭКСПЕРИМЕНТ

- 43 *Ларин С.В.*
Использование компьютерной анимации при обучении решению задач с параметрами

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 49 *Шевкин А.В.*
Образование в СССР в 1950-е годы: взгляд с Запада

ТОЧКА ЗРЕНИЯ

- 60 *Корчажкина О.М.*
Математическое доказательство и интуиция. Часть I

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 68** Мельников Р.А., Саввина О.А., Тарасова О.В.
Иван Васильевич Парнасский (к 100-летию со дня рождения)

ЗАДАЧИ

- 74** Иванова Е.Ю.
Задачи на логику

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 80** Карпушина Н.М.
Музыкальная комбинаторика

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3696. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2022, № 7 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ДЕЖАВЮ

Про провал ОГЭ во всероссийском масштабе по математике в 2021 г. было много написано. В статье из журнала «Математика в школе» [1] достаточно подробно описаны основные ошибки, которые продемонстрировали выпускники при выполнении заданий в 2021 г. Причём отмечено, что большинство ошибок повторяется из года в год и не связано с дистанционным обучением. В чём выразился «провал», также было показано на примере одной области в другой нашей статье [2].

На фоне прошлогодних результатов ОГЭ по математике как можно охарактеризовать результаты этого года, если не как очередной провал? Эти выпускники также прошли и карантины, и ВПР, и итоговые работы, и дистанционное обучение. По региональным результатам ОГЭ по математике в 2022 г. в основном потоке не сдавших математику – 11,9%, а в 2021 г. – 10,4%. Но не это главное. Как и в прошлом году, экзамен сдавался в два дня. Содержание экзамена 23 мая и 24 мая принципиально ничем не отличалось. Между прочим, многие задания в Красноярском крае [1] в 2021 г. в Нижегородской области повторились в 2022 г. («шины», биквадратные уравнения, задача № 24). В

таблице 1 показаны результаты экзамена в двух районах областного центра Нижегородской области, расположенных напротив друг друга по берегам Оки. Верхняя строка – это данные за 23 мая, нижняя строка – за 24 мая.

Из таблицы 1 следует, что число неудовлетворительных отметок увеличилось более чем в три раза, а так называемое качество (число хороших и отличных результатов) упало в 2,5 раза. Все были в равных условиях. Между прочим, процент специализированных школ и классов (гимназии, лицеи, классы с углублённым изучением) в оба дня был одинаков (чуть больше 13%).

Объяснить результаты можно только масштабными нарушениями во время сдачи экзамена 23.05.2022, причём массовой утечкой первой части. Три четверти учащихся сдавали в этот день. Усреднённые цифры по области 8,8% (23.05.) и 21,1% (24.05.) неудовлетворительных отметок. Интересно, что во второй день в 2021 г. не сдало 21,6%. Верить тому, что районы области настолько (0% и 50%) могут отличаться по числу не сдавших экзамен, конечно, нельзя.

На рисунке 1 представлена диаграмма

Таблица 1

Район	Число выпускников	«2», %	«3», %	«4», %	«5», %
1	722	7,5	28,3	51,2	13,0
	297	27,9	44,8	23,2	4,0
2	986	10,2	27,5	53,1	9,1
	332	31,6	46,1	21,4	0,9

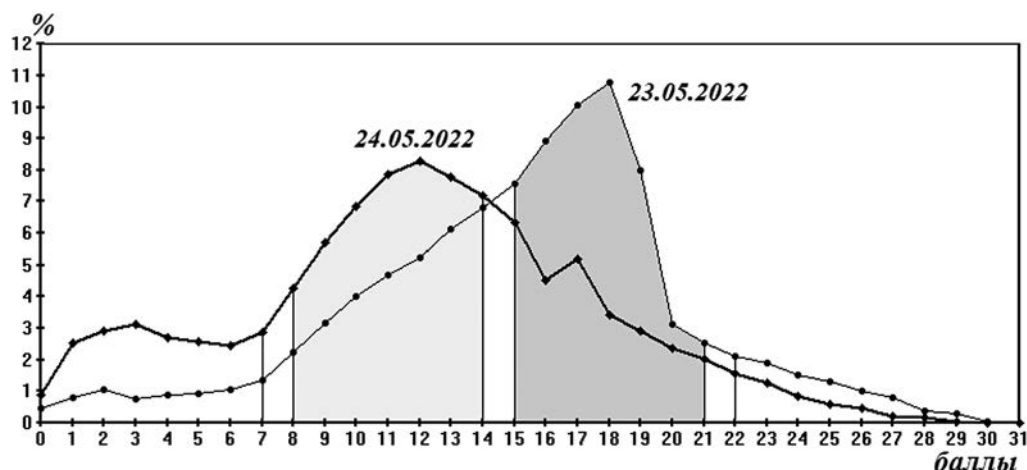


Рис. 1

распределения «процент выпускников — первичный балл», подтверждающая данный вывод. Цветом выделены отметки «3» и «4». Та же ситуация была в прошлом году [2].

Создавшаяся ситуация приобретает уже все признаки народного театра (имеется ввиду фарс) со своими традициями. Мы видим интересные надписи: OGE22 ME (водяные знаки), ОГЭ: математика, (52 регион, Нижегородская область), Ищи СВОЙ вариант по УСЛОВИЮ задания № 1 (запомни форматы листов). А дальше — правильные ответы первой части четырёх вариантов первого дня экзамена.

Учитывая прошлогодний «провал», появилась структура, которая обеспечила все регионы ответами? Как ещё можно трактовать указание региона в шапке таблицы? Не случайно в ППЭ в этом году

не хватило одного бланка фиксирования выхода детей из аудитории (так называемый туалетный бланк). А некоторые родители, приведя фотографию бланка ответов, задались вопросом — зачем нужны экзамены по окончанию 9-х классов?

В таких условиях, как и в прошлом году, анализировать результаты выпускников по отдельным заданиям первой части не имеет смысла.

В таблице 2 представлены данные по выполнению выпускниками отдельных заданий письменной части. В отличие от первой части, задания второй части можно проанализировать в силу большей объективности этих данных за оба дня экзамена.

В целом, результаты по второй части примерно одинаковы, за исключением заданий № 20 и № 23. Отличие в результатах по этим заданиям вполне объяснимо.

Таблица 2

Дата	№	1	2	3	4	5	6
23.05	1 балл, %	1,12	7,32	2,53	3,83	0,58	0,03
	2 балла, %	9,97	8,48	4,63	11,49	2,40	0,17
24.05	1 балл, %	0,86	5,55	4,77	1,06	1,12	0,01
	2 балла, %	17,48	6,64	0,68	2,33	1,77	0,14

Например, 23.05. в задании № 20 требовалось решить биквадратное уравнение: $(x - 2)^4 - (x - 2)^2 - 6 = 0$ с непростыми ответами $2 \pm \sqrt{3}$. Зато 24.05. задание было намного проще: $x^3 + 6x^2 = 4x + 24$ как и ответы $\pm 2; -6$.

Обратная ситуация сложилась с задачей № 23. В первый день было следующее задание: биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 10$, $CK = 18$.

Намного серьёзнее оказался № 23 во второй день со следующей формулировкой: Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF , если $AD = 44$, $BC = 24$, $CF : DF = 3 : 1$.

Если в первой задаче рассматривается сразу получившийся равнобедренный треугольник, то во второй задаче нужны дополнительные построения и выписывание пропорций в подобных треугольниках, что не каждому ученику по силам. Получается, что при формальном соблюдении правил составления экзамена по уровню сложности и выборе заданий из, казалось бы, одной базы, можно составить как достаточно простой экзамен, так и намного более сложный. А ведь этого не должно быть.

В связи с последней задачей нужно отметить следующее. Во время работы апелляционной комиссии, проходящей в онлайн режиме, перед комиссией появляется папа с сыном и начинается «дискуссия», условно говоря, про папа, у которого была собака. И всё это для того, чтобы получить критический балл для перехода в другое качество. А предъявлено было следующее решение:

$$(44 - 24) : 4 = 5$$

$$44 - 5 = 39.$$

О т в е т: 39.

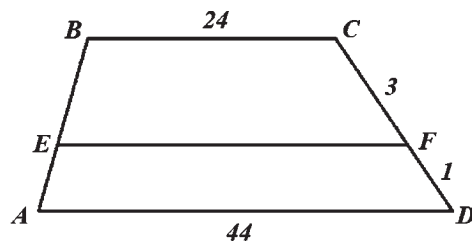


Рис. 2

Это не тестовое задание, и правильный ответ ничего не означает. Можно, конечно, догадаться, что именно проделал выпускник. Но для этого нужен другой рисунок и какие-то пояснения. Например, к рисунку 3 такие:

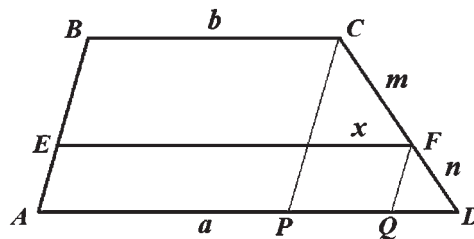


Рис. 3

Построим CP и FQ параллельно AB . Тогда из построения следуют равенства, либо $EF = AD - QD$ (как у ребёнка), либо $EF = b + x$, где отрезок x находится из подобия треугольников и пропорции:

$$\frac{x}{a - b} = \frac{m}{m + n}.$$

В результате получаем формулу для отрезка $EF = \frac{ma + nb}{m + n}$.

В процессе работы апелляционной комиссии обнаружилась некорректность задания № 3 из тестовой части. Это часть комплексного задания «на листы бумаги», в котором нужно найти площадь листа формата А5.

Ответ дать в квадратных сантиметрах. В ответе даны два числа (310,8 и 312,5), а из задачи следует, что возможно три числа (см. табл. 3) в зависимости от того, что берётся за основу.

Таблица 3

Формат	Длина, мм	Ширина, мм	Площадь листа А5, см ²
A2	592	420	310,8
A3	420	297	311,85
A4	297	210	311,85
A6	148	105	310,8

Ответ 312,5 получается в результате деления квадратного метра (площадь А0) на 32.

Следует ещё учесть, что все числа не точные, так как связаны между собой коэффициентом $\sqrt{2}$, и поэтому теоретически возможно любое число в диапазоне $[310,8 \div 312,5]$.

Эта неопределённость ответа могла сказаться на результатах выпускников.

Результаты экзамена за 24.05.2022 оказались самыми объективными. Мы видим, что более 20% выпускников оказались просто не готовы к экзамену в силу многих причин. Действительно, куда могли деться слабые ученики в 9 классе, если по данным НИКО 2014 г. их количество только растёт с каждым годом: в 5 классе 12,85%, в 6 классе 17,35%, в 7 классе 30,31%?

И вот, после такой «наглядной картин-ки» выпускнику 9-го класса предлагают экзамен, который не способен сдать выпускник 11-го класса. Зачем такой перегруженный тестовыми заданиями экзамен, тем более, что половина выпускников

его элементарно списывает? Зачем эти игры в секретность, не лучше ли в вопросе выпускного экзамена в основной школе вернуться в формат 20, а то и 50-летней давности. Почему базовый ЕГЭ **полностью** состоит из заданий основной школы (из 21 примера в базовом ЕГЭ этого года только одно(!) задание по материалу старшей школы – это простейшее задание про площадь боковой поверхности конуса!) и на порядок проще ОГЭ (например, найти значение выражения $\frac{1}{3} \cdot 0,99 + 2$ или решить уравнение $x^2 = 25$)?

Считаю, что если вернуться к экзаменам после 9-го класса в формате советских времён, то искусственных проблем, которые породили реформы, станет намного меньше.

Список источников

1. Тумашева О.В., Шапкина М.Б. Фиаско ОГЭ по математике 2021 года: какие уроки следует извлечь? // Математика в школе. – 2022. – № 1. – С. 18–26.
2. Малышев И.Г. Ухабы на пути как следствие его выбора // Математика в школе. – 2021. – № 8. – С. 3–6.

И.Г. Малышев,

ГБОУ ДПО НИРО (г. Нижний Новгород)
migniro@mail.ru

Статья поступила в редакцию 17.06.2022;
принята к публикации 16.08.2022.

Поздравляем Юбилера!

25 августа с.г. исполнилось 85 лет со дня рождения Рыжика Валерия Идельевича – Народного учителя России, автора учебников и методических пособий, преподавателя математики Физико-технической школы, созданной в Петербурге академиком Жоресом Алфёровым, члена редколлегии нашего журнала. Коллектив журнала «Математика в школе», на страницах которого регулярно публикуется Валерий Идельевич, от всей души поздравляет Юбилера и желает ему дальнейших творческих успехов!

ЗАДАЧИ С ИЗБЫТОЧНЫМИ ДАННЫМИ В ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К ОСНОВНОМУ ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИКЕ

PROBLEMS WITH REDUNDABLE DATA IN PREPARING STUDENTS FOR THE BASIC STATE EXAM IN MATHEMATICS

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10/47639/0130-9358_2022_7_7

Р.Ю. Костюченко, канд. пед. наук, доцент, Омский государственный педагогический университет, kryu@bk.ru

R.Yu. Kostyuchenko, PhD (Pedagogy), Assoc. Prof., Omsk State Pedagogical University, kryu@bk.ru

Аннотация: в статье предлагается содержательный материал для организации обобщающего повторения – пробный вариант теста, соответствующего проекту спецификации КИМ для проведения в 2023 году ОГЭ по математике. Отличительной особенностью теста является то, что все задачи имеют избыточные данные для получения ответа. Это даёт возможность организовать продуктивную исследовательскую деятельность учащихся на этапе анализа найденного решения каждой задачи

Abstract: the article proposes meaningful material for organizing a generalizing repetition – a trial version of a test that meets corresponds to the draft the specification meets the control and measuring materials for the main state exam in mathematics in 2023. A distinctive feature of the test is that all tasks have redundant data to solve. This makes it possible to organize productive research activities of students at the stage of analysis of the solution found for each problem

Ключевые слова: обучение математике, итоговая аттестация, ОГЭ по математике, математическая задача, решение задач, исследование задачи, избыточные данные, способы решения задач

Keywords: teaching mathematics, final certification, Basic State Exam in mathematics, mathematical problem, problem solving, problem research, redundant data, problem solving methods

© Костюченко Р.Ю., 2022

Обучение в основной школе для учащихся 9-х классов завершается итоговой аттестацией. По математике предусмотрен обязательный экзамен в форме теста, структура которого школьникам и учителям привычна и понятна. Однако остаются дискуссионные вопросы по подготовке школьников к сдаче основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике. Здесь наша позиция такова. К предстоящему тестированию необходимо специально готовиться, предусмотрев

три аспекта подготовки: психологический, предметный и методический. Так, помощь в преодолении излишнего волнения, создание ситуации успеха на экзамене, настрой на продуктивную работу в течение экзамена и т.п. – это задача не только учителя, но и школьного психолога, и родителей ребёнка. На учителя математики возлагается большая ответственность за предметную (знание учеником материала и умения решать задачи) и методическую подготовку школьника, или, говоря дру-

гими словами, умение выполнять тест (распределение времени на решение различных задач, выбор последовательности их решения, верное заполнение бланка кратких ответов и лаконичная запись решения задач с развёрнутым ответом, использование специфических особенностей тестовых заданий для получения ответа и др.).

Сказанное говорит о том, что учитель-предметник должен использовать в своей практике и тестовые задания, и сами тесты. Основная идея, реализуемая в статье, – представить учителю материал, использование которого позволит организовать продуктивную исследовательскую деятельность учащихся при подготовке к ОГЭ. В качестве такого материала мы предлагаем пробный вариант теста, соответствующего проекту спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2023 году ОГЭ по математике. Однако отличительной особенностью задач данного теста является то, что все они имеют избыточные данные в условии. Наличие таких данных позволит естественным образом организовать этап исследования решения задачи. На данном этапе выполняются: а) проверка; б) исследование задачи (при каких условиях задача имеет решение и сколько различных в каждом случае; при каких условиях задача вообще не имеет решения); в) формулирование ответа. Помимо перечисленных выше действий, полезно провести познавательный анализ задачи и её решения, который, на наш взгляд, предполагает ещё три направления деятельности: г) анализ задачи и хода её решения (выявление идеи решения, связей с другими задачами); д) поиск и осуществление новых способов решения задачи; е) формулирование и решение задач на основе исходной.

Заметим, что уже само наличие в задаче избыточных данных предопределяет возможность использования для её решения только части условия. Причём, если избыточные данные в условии подобраны удачно, то велика вероятность, что ученик, рассматривая их различные комбинации, будет получать различные способы решения одной и той же задачи. А как следствие будет иметь возможность сравнивать, выявлять идеи и наиболее продуктивные способы решения, составлять новые задачи посредством исключения «второстепенных» избыточных данных. Всё это есть не что иное, как продуктивная творческая деятельность, результат осуществления которой во многом связывается с развитием ребёнка.

Приведём два примера задач с избыточными данными и покажем на них возможность применения различных способов решения.

Задача 1. На РЖД для поездов дальнего следования применяются сезонные изменения тарифов. Так, например, в купейном вагоне при отправлении с 1 по 10 января базовая стоимость билета увеличивается на 10%, а уже с 11 января по 18 февраля базовая стоимость того же билета уменьшается на 10%. Найдите базовую стоимость билета, если 1 января этот билет стоил 1658,8 руб., а 11 февраля – 1357,2 руб. Ответ дайте в рублях.

Решение. Воспользуемся тем условием, что «базовая стоимость билета была увеличена на 10% и составила 1658,8 руб.». Имеем второй из трёх типов простейших задач на проценты (нахождение процента от числа, нахождение числа по его проценту, нахождение процентного отношения). Считаем, что в методическом плане рассуждения удобнее вести с использованием следующей записи:

$$x \cdot 110\% = 1658,8; x \cdot 1,10 = 1658,8;$$

$$x = 1658,8 \div 1,10 = 1508 \text{ (руб.)}.$$

О т в е т: 1508.

Воспользуемся тем условием, что «базовая стоимость билета была уменьшена на 10% и составила 1357,2 руб.». Решение аналогично предыдущему случаю:

$$x \cdot 90\% = 1357,2; x \cdot 0,90 = 1357,2;$$

$$x = 1357,2 \div 0,90 = 1508 \text{ (руб.)}.$$

О т в е т: 1508.

Воспользуемся всеми данными условия. Здесь возможно решение арифметическим способом (по действиям). Базовая стоимость увеличивалась и уменьшалась на одну и ту же сумму, поэтому базовая стоимость билета равна среднему арифметическому увеличенной и уменьшенной стоимостей, то есть

$$(1658,8 + 1357,2) \div 2 = 1508 \text{ (руб.)}.$$

О т в е т: 1508.

Старшеклассникам, привыкшим решать текстовые задачи алгебраическим способом (составлением уравнения), довольно сложно увидеть суть арифметических действий, приводящих к нужному результату. Пояснить арифметическое решение введением неизвестного можно следующим образом. Пусть a – искомая базовая стоимость билета, b – сумма, равная 10% от базовой стоимости билета. Тогда $(a + b)$ – известная стоимость после повышения на 10%, $(a - b)$ – известная стоимость после понижения на 10%. Пояснение к решению описывается выражением $((a + b) + (a - b)) \div 2 = a$ или без использования b следующим выражением $(1,1a + 0,9a) \div 2 = a$. Можно привести и другие схемы для арифметического решения. Например, $(a + b) - ((a + b) - (a - b)) \div 2 = a$ или $(a - b) + ((a + b) - (a - b)) \div 2 = a$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° , угол A в два

раза больше угла C . Биссектрисы AK и CD пересекаются в точке O (рис. 1). Найдите угол AOC .

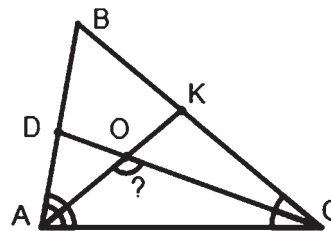


Рис. 1

Треугольник ABC , AK и CD – биссектрисы

Решение. В школьном курсе математики решение подавляющего большинства задач предполагается с использованием статичного чертежа, то есть чертежа, на котором геометрическая фигура задана и не может изменяться (иногда с точностью до подобия). В этом случае все элементы фигуры определяются и могут быть найдены. Поэтому в нашем случае наиболее вероятным будет решение, в котором сначала находятся углы A и C треугольника ABC . Например, так:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;$$

$$\angle A = 2\angle C;$$

$$\angle A + \angle C = 2\angle C + \angle C = 3\angle C = 120^\circ;$$

$$\angle C = 40^\circ;$$

$$\angle A = 2\angle C = 80^\circ.$$

Далее из треугольника AOC находится искомый угол:

$$\angle AOC = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA) =$$

$$= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle BCA \right) =$$

$$= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \cdot 80^\circ + \frac{1}{2} \cdot 40^\circ \right) = 120^\circ.$$

О т в е т: 120° .

Другой способ решения этой задачи не предполагает непосредственное нахождение углов A и C треугольника ABC . Для получения ответа этого и не требуется. Достаточно знать половину их суммы. Так,

$$\begin{aligned}
 \angle AOC &= 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA) = \\
 &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle BCA \right) = \\
 &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle BCA) = \\
 &= 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC) = 120^\circ.
 \end{aligned}$$

О т в е т: 120° .

Как видно из приведённых равенств, для получения ответа использовались лишь три условия: AK – биссектриса, CD – биссектриса, $\angle B = 60^\circ$, поэтому имеем задачу с избыточными данными. Причём, в зависимости от способа решения, эти данные могут оказаться необходимыми, а могут быть лишними, избыточными. Заметим, что в условии задачи фигурирует ещё одно непротиворечивое утверждение «треугольник ABC – остроугольный», которое не оказывает никакого влияния на ход решения и является в рассматриваемом случае несущественным, избыточным.

Как видно из приведённых примеров,

задача с избыточными данными позволяет рассмотреть различные способы решения, что даёт возможность сравнивать, обобщать, рассматривая конкретную задачу не как отдельную, единичную, а как некоторую обобщённую ситуацию, представленную в задаче.

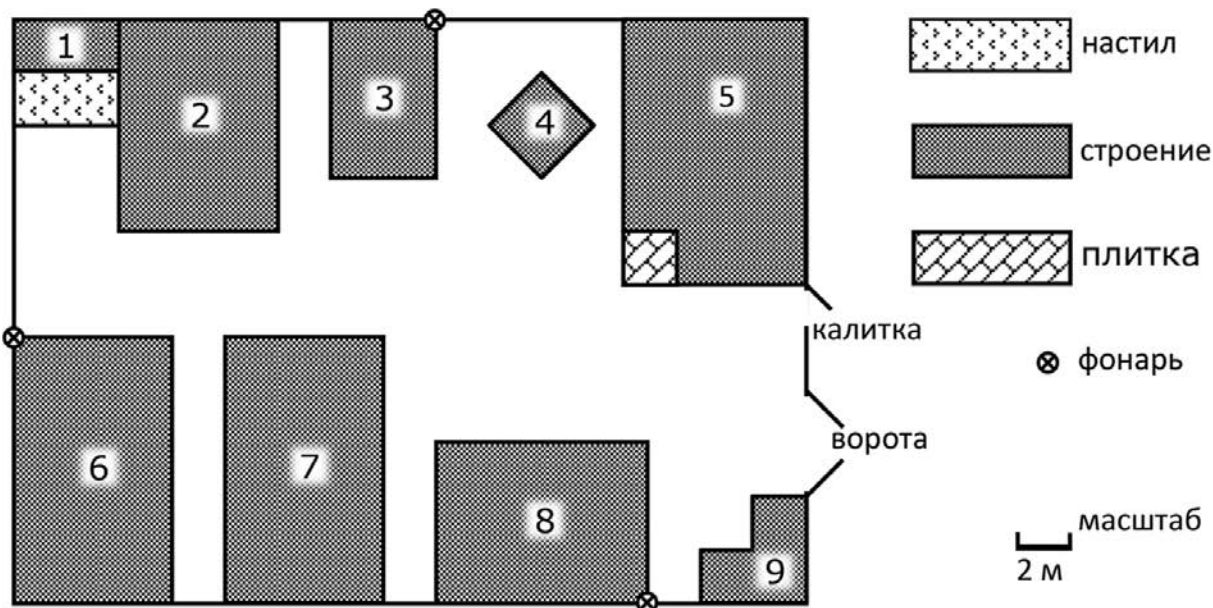
Предлагаем далее комплекс таких задач в форме пробного варианта ОГЭ-2023, объединённых той общей идеей, что все задачи содержат избыточные данные. К некоторым заданиям предлагаются различные способы их решения.

Пробный вариант контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена 2023 года по математике

Часть 1

Ответом к заданиям 1–19 является целое число, конечная десятичная дробь или последовательность цифр. Все задания в данном варианте имеют избыточные данные для получения ответа.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.



На плане изображён складской участок по адресу: г. Колоколамск, ул. Строителей, 11 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м).

Участок имеет прямоугольную форму и окружён по периметру забором. Вход/въезд и выход/выезд осуществляются либо через ворота, либо через калитку. При входе на участок справа располагается административное здание с примыкающей к нему квадратной площадью, вымощенной тротуарной плиткой. Рядом с администрацией на расстоянии 1 м располагается беседка для отдыха, периметр которой имеет форму правильного четырёхугольника, а площадь в 8,25 раз меньше площади здания администрации.

Помимо административного здания и беседки, на участке имеются 4 складских помещения (электротовары, стройматериалы, краски, сантехника), магазин, отмеченный на плане цифрой 8, сторожка охранника, площадью 12 кв. м и собачий вольер, находящийся в диагонально противоположном охране углу. Перед собачьим вольером между забором и строением № 2 уложен специальный настил.

Ближе всех к административному зданию из складских помещений находится склад с электротоварами. Он из складов – наименьший по площади. Склад с сантехникой идентичен по проекту магазину. Склад стройматериалов примыкает двумя своими смежными стенами к забору, а рядом со складом стройматериалов находится равный ему по площади склад с краской.

В тёмное время суток участок освещается тремя фонарями. На плане они обозначены символом ☒ и образуют треугольник с длинами двух сторон 26 м и 20 м, длина третьей стороны иррациональна, приближённо равна 23,5 м.

1.

Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр.

Объекты	Административное здание	Собачий вольер	Склад электротоваров	Склад с краской
Цифры				

Решение. Соответствие объектов на плане и их номеров описано в тексте. Поскольку предопределено, что все задачи содержат избыточные данные, то можно предположить, что необходимая последовательность может быть определена разными способами. Данное предположение верно. Так, описание каждого заданного в таблице объекта представлено в тексте, по крайней мере, двумя способами. Укажем их.

Административное здание отмечено на плане цифрой 5. Это можно установить по следующим указанным в тексте признакам: 1) «при входе на участок справа располагается административное здание»; 2) «...с примыкающей к нему квадратной площадкой, вымощенной тротуарной плиткой»; 3) «рядом на расстоянии 1 м располагается беседка для отдыха, ... площадь которой в 8,25 раз меньше».

Собачий вольер отмечен на плане цифрой 1. Признаки: 1) «...находящийся в диагонально противоположном охране углу»; 2) «перед собачьим вольером между забором и строением № 2 уложен специальный настил».

Склад электротоваров отмечен на плане цифрой 3. Признаки: 1) «из складских помещений находится ближе всех к административному зданию»; 2) «из складов наименьший по площади».

Склад с краской отмечен на плане цифрой 4.

рой 7. Признаки: 1) «находится рядом со складом стройматериалов»; 2) «равный по площади складу стройматериалов».

О т в е т: 5137.

2.

Настил, уложенный перед собачьим вольером, состоит из отдельных элементов размером 25×40 см, полностью и без остатка набором из 20 штук покрывающих 2 кв. м. Элементы настила продаются в упаковках по 6 штук. Сколько таких упаковок достаточно купить, чтобы полностью выложить настил?

Р е ш е н и е. План решения достаточно очевиден: сначала находим необходимое количество элементов настила, затем вычисляем, сколько пачек содержат это количество.

Найти необходимое количество элементов настила можно разными способами:

Способ 1. Настил, согласно плану, имеет форму прямоугольника 2×4 м площадью 8 кв. м. Прямоугольник 2×4 м можно замостить прямоугольниками 25×40 см восьмью рядами по десять штук в ряду. Итого 80 штук.

Способ 2. Площадь всего настила 8 кв. м., площадь одного элемента настила $0,25 \cdot 0,4 = 0,1$ (кв. м). Тогда количество

элементов будет равно $\frac{8}{0,1} = 80$ (шт.). При

таком способе вычисления не учитывается возможность укрытия без пропусков и остатков всего настила отдельными его элементами. Что, заметим, следует проверять. Приведём контрпример. Если принять размеры отдельного элемента настила $16 \times 62,5$ см, то его площадь 0,1 кв. м., частное от деления 8 на 0,1 даёт 80. Как видим, в числовом выражении тот же результат. Однако прямоугольником, одна сторона которого 62,5 см, не удастся целым числом раз выложить ни

одну сторону прямоугольника 2×4 м.

Способ 3. Для данной задачи одно из условий – «состоит из отдельных элементов размером 25×40 см» или «полностью и без остатка набором из 20 штук, покрывающих 2 кв. м» является избыточным (хотя, заметим, эти условия не являются эквивалентными). Поэтому воспользовавшись вторым условием, мы заключаем, что для покрытия площади в 4 раза большей, чем 2 кв. м, потребуется в 4 раза больше элементов, то есть $20 \cdot 4 = 80$ (шт.).

Для вычисления необходимого количества упаковок найдём частное $\frac{80}{6} = 13,(\overline{3})$.

Как видим, получается нецелое число. По смыслу задачи требуется округление до целых с избытком, получаем 14 упаковок. Заметим, что число упаковок можно было бы найти и непосредственным подбором.

О т в е т: 14.

3.

Найдите площадь, которую занимает беседка для отдыха. Ответ дайте в квадратных метрах.

Р е ш е н и е. Беседка для отдыха, судя по рисунку и/или описанию в тексте, представляет собой на плане участка квадрат.

Для поиска площади квадрата можно воспользоваться наиболее распространенной формулой $S = a^2$. Тогда, предварительно вычислив по теореме Пифагора его сторону $a = \sqrt{8}$ м, получим

$$S = (\sqrt{8})^2 = 8 \text{ (кв. м).}$$

Альтернативный способ решения – использовать менее распространенную, но в данном случае, на наш взгляд, более удобную формулу $S = \frac{1}{2}d^2$. Тогда, предварительно определив по рисунку его диагональ $d = 4$ м, получим $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$ (кв. м).

Кроме того, площадь беседки можно вычислить ещё одним способом, воспользовавшись тем условием, что её площадь в 8,25 раз меньше площади здания администрации. Здание администрации на плане представляет собой прямоугольник 7×10 м с вырезанным углом 2×2 м. Поэтому его площадь $7 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 66$ (кв. м). Тогда площадь беседки $66 \div 8,25 = 8$ (кв. м). Заметим, на плане левая граница здания администрации не проходит по сторонам клеток, поэтому для определения длины 7 м в описательном тексте дано расстояние между беседкой и администрацией; для вырезанной части длина вертикальной стороны определяется по рисунку, а длина смежной горизонтальной – из заданного условия, что это квадрат.

О т в е т: 8.

4.

Найдите расстояние по прямой между двумя наиболее удалёнными друг от друга фонарями. Первый фонарь расположен на углу строения № 6, второй – на углу строения № 8. Ответ дайте в метрах.

Р е ш е н и е. Искомое расстояние можно вычислить по теореме Пифагора. Так, расстояния от левого нижнего угла участка до фонарей, расположенных на углах строений № 6 и № 8, равны соответственно 10 м и 24 м. Смежные стороны участка перпендикулярны, поэтому искомое расстояние равно $\sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ (м).

Для получения ответа можно поступить иначе. Вычислить по теореме Пифагора все три расстояния 26 м, 20 м и $\sqrt{548}$ м, выбрать из них наибольшее 26 м. При этом заметим, что все эти расстояния даны в описательном тексте и по условию задачи из них просто нужно было выбрать наибольшее.

Считаем, будет полезным решить данную задачу с использованием метода ко-

ординат. Для этого введём прямоугольную систему координат: на плане за точку отсчёта примем левый нижний угол участка, ось абсцисс расположим положительным направлением вправо по нижней горизонтальной границе участка, ось ординат расположим положительным направлением вверх по левой вертикальной границе участка, единичный отрезок примем равным половине клетки, то есть равным 1 м (удобнее принять за единичный отрезок длину стороны клетки, но тогда результат получится в единицах масштаба и придётся осуществлять перевод в метры). При введённой системе координат фонарь на углу строения № 3 будет иметь координаты (16; 22), на строении № 6 – (0; 10), на строении № 8 – (24; 0). Поэтому искомое расстояние можно найти по известной формуле расстояния между двумя точками, заданными своими координатами. В нашем случае фонари задаются координатами (0; 10) и (24; 0). Искомое расстояние $\sqrt{(0 - 24)^2 + (10 - 0)^2} = 26$ (м).

О т в е т: 26.

5.

Освещение участка. С течением времени фонари освещения потребовали замены. Администрация рассматривает два варианта замены на новые всех старых фонарей: либо с дуговой разрядной лампой (ДРЛ), либо со светодиодными лампами.

Фонари со светодиодными лампами более дорогие, но при этом в 5 раз более энергоёмкие. Так, за один час работы при стоимости электроэнергии 4,5 руб./кВт · ч один светодиодный фонарь экономит 0,9 руб. по сравнению с газоразрядным.

В таблице 1 в расчёте на один фонарь даны цены на установку и стоимость фонарей, данные о расходе ими электроэнергии и её стоимости (при установке нескольких

Таблица 1

Вид фонаря	Стоимость фонаря, руб.	Стоимость установки, руб.	Электропотребление, Вт	Стоимость электроэнергии, руб./кВт · ч
Фонарь с газоразрядной лампой	650	750	250	4,5
Фонарь со светодиодной лампой	2000	750	50	4,5

фонарей их стоимость и стоимость установки увеличиваются пропорционально количеству фонарей.

Оценив оба варианта, администрация решила установить фонари со светодиодными лампами. По окончании какого часа непрерывной работы системы освещения экономия от использования светодиодных фонарей компенсирует разность в их стоимости покупки и установки?

Решение. Согласно данным таблицы стоимость покупки и установки трёх фонарей с газоразрядной лампой составит $(650 + 750) \cdot 3 = 4200$ (руб.), со светодиодной лампой – $(2000 + 750) \cdot 3 = 8250$ (руб.). Разница в стоимости

$$8250 - 4200 = 4050 \text{ (руб.)}.$$

За один час непрерывной работы три фонаря с газоразрядной лампой тратят электроэнергию на сумму

$$4,5 \cdot 0,250 \cdot 3 = 3,375 \text{ (руб.)},$$

со светодиодной лампой –

$$4,5 \cdot 0,050 \cdot 3 = 0,675 \text{ (руб.)}.$$

Разница в затратах на электричество за один час составляет $3,375 - 0,675 = 2,7$ (руб.). Чтобы покрыть разницу в стоимости 4050 руб. разницей в затратах на электричество 2,7 руб. необходимо

$$\frac{4050}{2,7} = 1500 \text{ (ч)}.$$

В представленном решении есть излишние вычисления. В частности, ответ не изменится, если мы не будем учитывать стоимость установки 750 руб., т.к. она одинакова для обоих видов фонарей. В математическом обосновании этого факта

указанная стоимость взаимно уничтожается при раскрытии скобок в выражении $(650 + 750) \cdot 3 - (2000 + 750) \cdot 3$. Ответ также не изменится, если проводить все вычисления в расчёте на один фонарь, а не на три. Это следует из того, что в частном $\frac{4050}{2,7}$ и числитель, и знаменатель содержат утроенную рублевую сумму. Действительно, если вместо чисел 4050 и 2,7 выписать выражения, в результате которых они получились, то легко заметить, что эти выражения содержат общий множитель 3, равный числу фонарей, и на который дробь можно сократить.

В условии задачи данные неявно дублируются (в тексте и таблице), причём в тексте уже содержится информация об экономии, вычисляемой по данным таблицы. Поэтому, если воспользоваться этой информацией из текста, то с учётом сказанного выше ответ можно получить в два действия: 1) $2000 - 650 = 1350$ (руб.) – разница в стоимости одного фонаря разных типов; 2) $1350 \div 0,9 = 1500$ (ч) – за столько часов сумма экономии станет равной 1350 руб. при экономии 0,9 руб./час.

О т в е т: 1500.

6.

Первое число $\frac{2}{5}$ меньше второго числа 0,65 на $\frac{1}{4}$. Найдите разность между первым и вторым числами, то есть найдите значение выражения $\frac{2}{5} - 0,65$.

7.

На координатной прямой отмечена точка A , обозначающая иррациональное число.



Известно, что она соответствует одному из значений четырёх указанных ниже выражений. Какому из выражений соответствует точка A , если значение только одного из них является иррациональным?

- 1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{96}}$,
- 2) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} - \sqrt{27})$,
- 3) $\frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{27}}{2}$,
- 4) $(\sqrt{96} - \sqrt{24})^2$.

8.

Найдите значение выражения $(4a^2)^3 : a^9 \cdot a^3$ при $a = 2$.

9.

Решите уравнение $x^2 + 3x - 4 = 0$. В от-

вете укажите отличный от 1 наименьший корень этого уравнения.

10.

На двух полках стоят 20 книг в твёрдых или мягких обложках, из них 12 в твёрдой обложке, а 8 в мягкой обложке. Количество книг на каждой полке одинаковое, при этом на первой полке в мягкой обложке стоит 6 книг. Читатель наугад выбирает полку и на ней одну книгу. Найдите вероятность того, что книга окажется в твёрдой обложке.

11.

На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов.

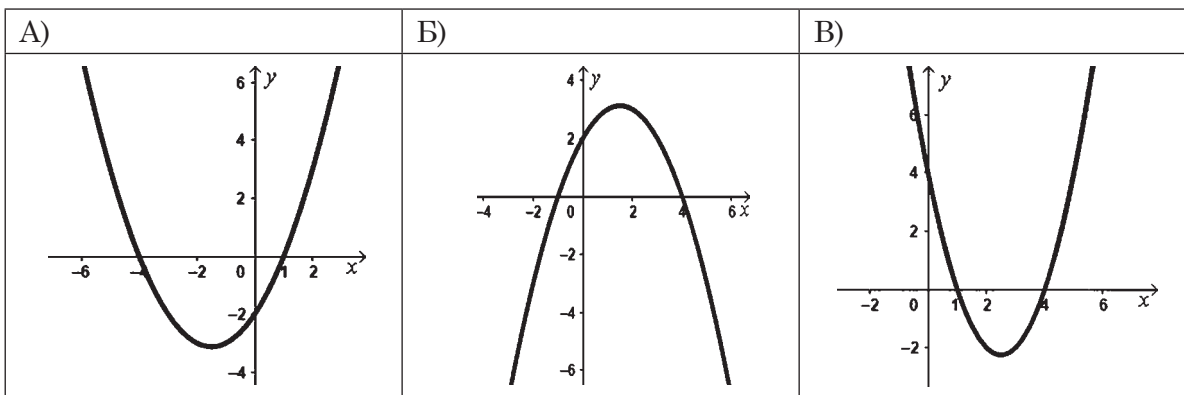
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	B

12.

Время зарядки аккумуляторной батареи смартфона можно примерно рассчи-

ГРАФИКИ



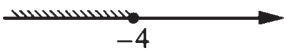
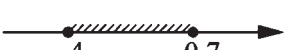
КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $a > 0, b > 0, c > 0$	2) $a > 0, b > 0, c < 0$	3) $a < 0, b > 0, c > 0$
--------------------------	--------------------------	--------------------------

тять по формуле $t = 1,4 \cdot \frac{C}{I}$, где t – время зарядки аккумулятора (в часах, ч); C – ёмкость аккумулятора (в миллиамперах в час, мАч); I – сила тока зарядного устройства (в миллиамперах, мА); 1,4 – постоянный коэффициент. Пользуясь этой формулой, определите ёмкость аккумулятора смартфона (в миллиамперах в час), если известно, что полностью разряженный аккумулятор за 3,5 часа заряжается на 100% от стандартного зарядного устройства с силой тока 2А (2000 мА), и за это же время заряжается лишь на 45% от порта компьютера USB 3.0 с силой тока 900 мА.

13.

Число 0 входит в совокупности решений каждого из неравенств $7 - 10x \geq 0$ и $x - 2 \geq -6$. Требуется найти все значения x , удовлетворяющие каждому из данных неравенств. Другими словами, укажите решения системы неравенств $\begin{cases} 7 - 10x \geq 0, \\ x - 2 \geq -6. \end{cases}$

- 1) 
- 2) 
- 3) 
- 4) 

14.

Андрей начал по утрам заниматься спортивной ходьбой и теперь каждый день проходит по 2000 м. Для того, чтобы изначально избежать резкой физической нагрузки на организм, в первую неделю занятий Андрей увеличивал нагрузку постепенно: начал занятия в понедельник и в этот день прошёл небольшое расстояние,

затем каждый день увеличивал пройденное расстояние на одно и то же, кратное 100, количество метров. В итоге в воскресенье первый раз прошёл запланированную дистанцию в 2000 м. Сколько метров прошёл Андрей на первой неделе занятий в четверг, если известно, что на этой неделе за вторник и субботу вместе взятое пройденное расстояние составило 2800 м?

15.

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC из точки C проведён отрезок CD , являющийся одновременно и биссектрисой, и высотой этого треугольника (рис. 2). Найдите угол ABC , если угол ACD равен 30° .

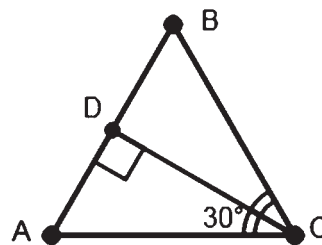


Рис. 2.

Треугольник ABC ,
 CD есть биссектриса и высота

16.

Через точку A , лежащую вне окружности, проведены две прямые (рис. 3).

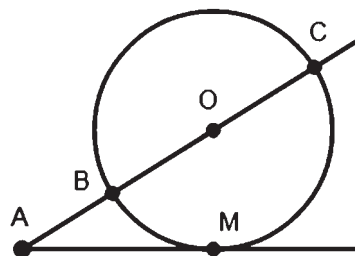


Рис. 3.

Касательная и секущая к окружности

Одна прямая касается окружности в точке M . Другая прямая проходит через

центр окружности точку O и пересекает её в точках B и C , причём $AB = 25$, $AC = 81$, $OM = 28$. Найдите AM .

17.

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке (рис. 4).

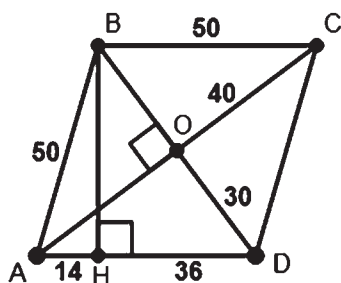


Рис. 4.

Параллелограмм с данными

18.

Найдите тангенс острого угла, образованного пересечением двух прямых, изображённых на рисунке (рис. 5).

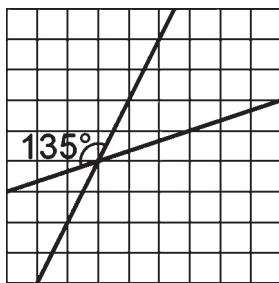


Рис. 5.

Пересекающиеся прямые на квадратной решетке

19.

Какие из следующих утверждений верны?

1) Если три угла или три стороны одного треугольника равны соответственно трём углам или трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2) Существует прямоугольник, диагонали которого равны и взаимно перпендикулярны.

3) Каждая из биссектрис прямоугольного равнобедренного треугольника является его медианой и высотой.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Часть 2

Задачи, для которых предполагается оформление их решения (развёрнутое решение). Все задачи 20–25 этого варианта имеют избыточные данные в условии.

20.

Решите уравнение, все корни которого являются целыми однозначными числами $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 3x^2 - 6x$.

21.

Поезд, совершая перегон в 280 км, был задержан на двух станциях, расстояние между которыми 56 км. На первой станции задержка составила 5 мин, на второй – 1 мин. Чтобы ликвидировать опоздание, поезд на скоростном участке в 28 км увеличил скорость на 32 км/ч. Если бы его задержали только на первой станции, то на указанном скоростном участке пришлось бы увеличивать скорость на 25 км/ч, а если бы задержали только на второй станции, то на 4 км/ч. Найдите первоначально планируемую скорость поезда.

22.

Постройте график чётной функции $y = \frac{x(-x^2 + 2|x| + 1)}{x}$ и определите, при каких натуральных значениях x с прямой $y = c$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

23.

В равнобедренной трапеции острый угол равен 60° , тупой – 120° . Диагонали трапеции являются биссектрисами её острых углов и перпендикулярны боковым сторонам, равными 10 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.

24.

В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = AD$, $BC = DC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Докажите, что диагонали AC и BD перпендикулярны.

Комментарий к решению.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O (рис. 6).

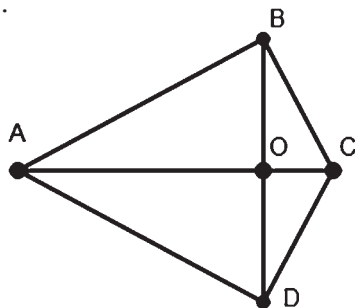


Рис. 6.

Четырёхугольник $ABCD$

Для доказательства сначала устанавливаем равенство треугольников ABC и ADC . Далее из этого равенства заключаем, что AO – биссектриса угла A , которая в равнобедренном треугольнике ABD является медианой и высотой. Поэтому AC и BD перпендикулярны.

Избыточные условия в данной задаче связаны с установлением равенства треугольников ABC и ADC , вернее, с обоснованием указанного равенства. Так, в зависимости от выбора данных, в качестве больших посылок можно использовать разные признаки равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними – 1-й, по трём сторонам – 3-й), в том числе и при-

знак равенства прямоугольных треугольников (по катету и гипотенузе). Указанные три комбинации явно усматриваются.

Выделим более сложный случай, когда в условии задачи дана лишь одна пара равных сторон и равенство углов без указания их величин. В этом случае заключение задачи также верно. Покажем это. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC$. Первое равенство определяет, что треугольник ABD равнобедренный, значит, углы при основании равны, то есть $\angle ABD = \angle ADB$, поэтому будут равны и углы $\angle DBC$, $\angle BDC$ (как равные разности при равных уменьшаемых и вычитаемых $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = \angle ADC - \angle ADB = \angle BDC$). Из полученного равенства углов следует, что треугольник BDC равнобедренный. Далее доказательство сводится к одному из ранее рассмотренных случаев.

25.

В разностороннем треугольнике ABC известно, что медиана $CM = 15$ см,

$$\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos B = \frac{4\sqrt{5}}{10}.$$

Окружность с диаметром CM пересекает стороны AC и BC в их серединах – точках P и K соответственно. Отрезок $PK = 15$ см. Найдите периметр треугольника ABC , если его площадь равна 180 см^2 .

Ответы

- 1) 5137; 2) 14; 3) 8; 4) 26; 5) 1500;
 6) $-0,25$; 7) 3; 8) 64; 9) -4 ; 10) 0,6; 11) 231;
 12) 5000; 13) 4; 14) 1400; 15) 60; 16) 45;
 17) 2400; 18) 1; 19) 12 <или> 21;
 20) $\{-1; 0; 2; 3\}$; 21) 80 км/ч; 22) $c = 1$, $c = 2$;
 23) 15 см; 24) утверждение верно;
 25) $30 + 18\sqrt{5}$ см.

Статья поступила в редакцию
 принята к публикации

24.03.2022;
 19.05.2022.

ЗАДАЧИ К ТЕМЕ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ»

TASKS FOR THE TOPIC «ORDINARY FRACTIONS»

Научная статья
УДК: 512(075.3)

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_19

А.И. Кузьмичев, канд. пед. наук,
НГПУ, г. Новосибирск,
vnlsof@yandex.ru;
Т.Н. Кузьмичева,
НГПУ, г. Новосибирск,
vnlsof@yandex.ru

A.I. Kuzmichev, PhD (Pedagogy),
NGPU, Novosibirsk,
vnlsof@yandex.ru;
T.N. Kuzmicheva,
NGPU, Novosibirsk,
vnlsof@yandex.ru

Ключевые слова: обыкновенные дроби, действия с дробями, сравнение дробей, свойства действий с дробями

Keywords: ordinary fractions, actions with fractions, comparison of fractions, properties of actions with fractions

Аннотация: тема «Обыкновенные дроби» является одной из самых сложных в школьном курсе математики. Для её качественного усвоения требуется не только оптимальное изложение теоретических основ, но и подбор задач, которые способствовали бы пониманию материала и увлекали учащихся к их решению. В связи с этим в настоящей статье предлагается перечень задач по теме «Обыкновенные дроби» в дополнение к материалу, опубликованному ранее в журнале «Математика в школе» (см. [4], [5])

Abstract: the topic «Ordinary fractions» is one of the most difficult in the school mathematics course. For its qualitative assimilation, not only the optimal presentation of the theoretical foundations is required, but also the selection of tasks that would contribute to the understanding of the material and attract students to their solution. In this regard, this article offers a list of problems on the topic «Ordinary fractions» in addition to the material published earlier in the journal «Mathematics in School» (see [4], [5])

© Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.Н., 2022

Самостоятельное применение приобретаемых знаний уясняет их детям и делает их полной собственностью детей; они из знаний обращаются в умения.

Ф.И. Егоров, отец Д.Ф. Егорова, профессора МГУ, академика

Решение задач, приведённых ниже, предполагает вдумчивое изучение теории обыкновенных дробей (см. [4], [5]) с безусловным её пониманием. На наш взгляд, для закрепления теоретического материала и развития навыков его применения требуется соответствующая система заданий. При её формировании мы опирались на материалы источников [1]–[3] и [6]. Заметим, что все подряд задачи рассматривать не обязательно; возможно привлечение и других задач по

усмотрению учителя. Подчеркнём, что в работе с текстовыми задачами мы рекомендуем отдавать предпочтение арифметическим способам их решения.

Теперь перейдём непосредственно к задачам.

1. Как из 1 составить: а) $\frac{3}{7}$? б) $\frac{37}{100}$?

2. Нарисуйте квадрат со стороной 3 см. Разделите его на три равных прямоугольника. Какую часть каждый прямоугольник составляет от исходного квадрата?

3. Какую часть 16 составляет от 64?
4. Найдите 24-ую часть от 15.
5. Какую часть от 1 кг составляют:
а) 250 г? б) 300 г?
6. Какое число получится, если разделить 5 на 31 и взять 3 таких части?
7. К $\frac{2}{7}$ прибавили $\frac{2}{7}$, а затем к полученной сумме прибавили ещё $\frac{2}{7}$. Какая дробь получилась? Во сколько раз она больше дроби $\frac{2}{7}$?
8. Найдите $\frac{7}{5}$ от 15.
9. Сократите дробь $\frac{516}{558}$.
10. Сколько сена получится из 100 ц свежей травы, если трава при высыхании теряет $\frac{3}{4}$ своего веса?
11. Сколько квадратных сантиметров в $\frac{7}{10}$ квадратного метра?
12. На новую церковь потратили 3240 кг меди, причём $\frac{5}{12}$ пошло на листы для купола, а всё остальное – на отливку пяти одинаковых колоколов. Сколько меди пошло на отливку каждого колокола?
13. $\frac{1}{4}$ содержится в единице 4 раза. Сколько раз она содержится: а) в 5; б) в $\frac{3}{4}$?
14. Сколько раз в $\frac{1}{4}$ содержится $\frac{1}{12}$?
15. Сколько раз в $\frac{4}{5}$ содержится $\frac{1}{10}$?
16. Какую часть $\frac{3}{32}$ составляет от $\frac{9}{16}$?
17. Найдите число, $\frac{5}{12}$ которого равно 5.

18. Пешеход за $\frac{3}{4}$ часа проходит 4 км. За сколько часов он проходит 1 км? Какова его скорость?
19. Сколько раз $\frac{3}{100}$ содержится в $\frac{9}{25}$?
20. Петя вскопал $\frac{1}{5}$ часть участка, а затем ещё $\frac{2}{5}$. Какую часть участка ему осталось вскопать?
21. Число 64 разделить на 2 части так, чтобы одна часть: а) была вдвое более другой; б) впятеро менее другой.
22. Группа туристов отправилась в поход и взяла продуктов на 12 дней. Но выяснилось, что в пути они пробудут на 3 дня дольше, чем предполагали. Какую часть порции придётся получать теперь каждому туристу в сравнении с планируемой первоначально?
23. Охотничий порох – это смесь селитры, угля и серы. Селитра составляет $\frac{4}{5}$ всего количества пороха, уголь – $\frac{3}{20}$ количества селитры. Сколько нужно взять серы для получения 16 кг пороха?
24. Бригада из 8 человек получила за работу 54 тысячи рублей. Для другой работы, которую бригада выполнила в тот же срок, к ней добавили двух человек, а оплату увеличили на 15 тысяч рублей. Какая работа оказалась выгоднее для бригады?
25. От груза в 675 кг лодка опускается в воду на $4\frac{1}{12}$ см. На сколько см опустится эта лодка от груза в 810 кг?
26. Для Пети отрезали $\frac{1}{4}$ часть дыни, а для Феди – $\frac{1}{3}$. Остальное досталось Серёже. Кто из мальчиков получил бóльшую часть дыни?

27. Поезд прошёл $\frac{5}{9}$ всего пути между двумя станциями, и осталось ещё 20 км. Найдите расстояние между станциями.

28. Какая из дробей больше: $\frac{896}{3968}$ или $\frac{1664}{7808}$?

29. В дроби $\frac{7}{18}$ знаменатель разделили на 3. Какая дробь получилась? Во сколько раз она больше дроби $\frac{7}{18}$?

30. В дроби $\frac{9}{16}$ числитель разделили на 3. Какая дробь получилась? Во сколько раз она меньше дроби $\frac{9}{16}$?

31. В дроби $\frac{7}{18}$ числитель умножили на 4. Какая дробь получилась? Во сколько раз она больше дроби $\frac{7}{18}$?

32. В дроби $\frac{7}{18}$ знаменатель умножили на 3. Какая дробь получилась? Во сколько раз она меньше дроби $\frac{7}{18}$?

33. Не вычисляя, определите, как изменится дробь, если:

- а) числитель умножить на 4;
- б) знаменатель умножить на 3;
- в) числитель умножить на 3, а знаменатель умножить на 4;
- г) числитель умножить на 6, а знаменатель умножить на 4;
- д) числитель разделить на 4;
- е) знаменатель разделить на 4;
- ж) числитель умножить на 2, а знаменатель разделить на 4;
- з) числитель разделить на 3, а знаменатель умножить на 4.

34. Из 1 кг серебра $\frac{2}{3}$ израсходовали на столовые ложки, а из остального серебра сделали чайные. На одну чайную

ложку требуется $\frac{1}{48}$ кг серебра. Сколько чайных ложек изготовили?

35. Какую часть суток составляют 36 минут 24 секунды?

36. Какую сумму нужно положить в банк под 4% годовых, чтобы через год получить прибыль в 1200 рублей?

37. Найдите число, $\frac{3}{5}$ которого составляют 12.

38. Расположите в порядке возрастания дроби $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{2}{15}$ и $\frac{6}{25}$.

39. Расположите в порядке убывания дроби $\frac{27}{56}$, $\frac{37}{59}$, $\frac{2}{11}$ и $\frac{32}{97}$.

40. Что больше: $\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{13}$ или $\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{13}$? Почему?

41. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{10}\right) - \frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right)$;

в) $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{7}{8}$;

г) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{3}$; д) $\frac{31}{80} \cdot \frac{5}{9} + \frac{31}{80} \cdot \frac{4}{9}$;

е) $\frac{5}{7} : \frac{5}{21}$; ж) $\frac{12}{17} : \frac{4}{51}$.

42. Объясните, почему найти $\frac{3}{8}$ от $\frac{5}{7}$ — значит, умножить $\frac{3}{8}$ на $\frac{5}{7}$.

43. Как найти $\frac{k}{n}$ от $\frac{m}{l}$, где k, n, m, l — натуральные числа?

44. Мальчик $\frac{3}{5}$ своих денег истратил на книгу, а $\frac{2}{7}$ — на мороженое. У него осталось 20 рублей. Сколько денег у него было?

45. Пенсия у бабушки 17136 рублей. За квартиру она платит $\frac{1}{6}$ своей пенсии, $\frac{1}{9}$ уходит на лекарства, 9600 рублей в год на

мелкие расходы по $\frac{1}{12}$ каждый месяц. Сколько денег остаётся у бабушки в месяц на остальные расходы?

46. Велосипедисты от Москвы до Курска ехали три дня по шоссе с расстоянием 580 км. В первый день они проехали $\frac{1}{3}$ всего пути, во второй — $\frac{6}{7}$ от того, что они проехали в первый день. Сколько километров проехали велосипедисты в третий день?

47. Для настила пола на даче нужно 120 досок одинаковой длины шириной $8\frac{1}{2}$ см. Сколько досок такой же длины, но шириной $8\frac{4}{7}$ см потребуется для настила этого пола?

48. За $2\frac{5}{8}$ м материи заплатили $600\frac{3}{5}$ рублей. Сколько стоит $7\frac{5}{8}$ м такой материи?

49. Пассажирский поезд за $2\frac{3}{4}$ часа проходит $225\frac{1}{2}$ км, а грузовой за $3\frac{5}{6}$ часа проходит $203\frac{1}{6}$ км. Во сколько раз скорость пассажирского поезда больше скорости грузового?

50. За $\frac{27}{40}$ суток часы отстают на $\frac{3}{20}$ часа. На сколько эти часы отстанут за $6\frac{2}{3}$ часа?

51. Старший брат $\frac{1}{4}$ тульского пряника разделил на 9 равных частей и одну часть отдал сестре. Младший брат $\frac{1}{9}$ такого же пряника разделил на 5 равных кусков и один отдал сестре. От кого сестра получила больше?

52. Бассейн длиной 100 м, шириной

30 м и глубиной 4 м заполняют через две трубы. Через одну трубу втекает 1 кубометр воды в минуту, а через другую — 36 кубометров воды в час. Через какое время бассейн заполнится на $\frac{1}{3}$?

53. Сравните выражения:

а) $\left(\frac{5}{8} : \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{4}$ и $\left(\frac{5}{8} : \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3}$;

б) $\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{4}$ и $\left(\frac{5}{8} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$.

54. Два друга хотели купить мороженое стоимостью 60 рублей, но ни у того, ни у другого не хватало денег на покупку. Тогда первый предложил второму: «Дай мне $\frac{2}{3}$ твоих денег, и я куплю мороженое». На что второй возразил: «Лучше ты дай $\frac{3}{4}$ твоих денег, и тогда я сам смогу купить мороженое». Сколько денег было у каждого?

55. Петя израсходовал $\frac{3}{10}$ своих денег, а затем ещё $\frac{5}{7}$ остатка, после чего у него осталось на 210 рублей меньше, чем он израсходовал за оба раза. Сколько денег было у Пети?

56. В четырёхэтажной школе 600 учеников. На 1-м этаже учеников вдвое больше, чем на 4-м. А число учеников на 2-м и 3-м этажах равно числу учеников на 1-м и 4-м. На 3-м этаже число учеников равно $\frac{5}{7}$ того, что есть на 2-м. Сколько учеников на каждом этаже?

57. Бабушка на рынке продала с утра по 100 рублей за килограмм $\frac{1}{3}$ всех огурцов, после обеда по 120 рублей за килограмм — $\frac{1}{4}$, а все остальные вечером по 80 рублей за килограмм. За всё время торговли она заработала 580 рублей. Сколь-

ко килограммов огурцов продала бабушка в этот день?

58. В двух ящиках $15\frac{1}{5}$ кг апельсинов. Из первого ящика пересыпали во второй $1\frac{3}{5}$ кг. Тогда масса апельсинов в нём стала на $\frac{7}{10}$ больше, чем во втором. Сколько кг апельсинов было изначально в каждом ящике?

59. Трём мальчикам дали 120 орехов. Первому – $\frac{3}{10}$ от всего количества, второму – $\frac{5}{6}$ от части первого, а третьему – всё остальное. Сколько орехов досталось каждому мальчику?

60. Покупатель заплатил за покупку машины $\frac{19}{25}$ всей суммы, а за дополнительное оборудование на $1\frac{3}{10}$ миллиона рублей меньше, чем он заплатил за автомобиль. Какова цена автомобиля?

61. Найти два числа, которые от вычитания и от деления дают одно и то же число, а именно $2\frac{1}{4}$.

Ответы, указания, решения

1. Решение. а) Разделить 1 на 4 равные части и взять 3 из них. б) Разделить 1 на 100 равных частей и взять 37 из них.

2. $\frac{1}{3}$.

3. $\frac{1}{4}$.

Решение. $16 = \frac{1}{4} \cdot 64$.

4. $\frac{5}{8}$.

Решение. $15 : 24 = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

5. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{10}$.

6. $\frac{15}{31}$.

7. $\frac{6}{7}$; в 3 раза.

8. 21.

Решение. $\frac{1}{5}$ от 15 равна 3. Тогда $\frac{7}{5}$ от 15 в 7 раз больше, чем 3, то есть 21.

9. $\frac{86}{93}$.

10. 25 ц.

11. 7000.

Решение. В 1 м^2 содержится 10000 см^2 . Тогда в $\frac{1}{10} \text{ м}^2$ содержится 1000 см^2 , а в $\frac{7}{10} \text{ м}^2$ – в 7 раз больше, то есть 7000 см^2 .

12. 378 кг.

13. а) 20 раз; б) 3 раза.

14. 3 раза.

15. 8 раз.

16. $\frac{1}{6}$.

17. 12.

18. $\frac{3}{16}$ часа и $\frac{16}{3} \text{ км/ч}$.

Решение. 1 км пешеход проходит в 4 раза быстрее, чем 4 км, то есть за $\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{16}$ часа. Тогда его скорость $\frac{16}{3} \text{ км/ч}$.

19. 12 раз.

20. $\frac{2}{5}$.

21. а) $\frac{128}{3}$ и $\frac{64}{3}$; б) $\frac{64}{6}$ и $\frac{320}{6}$.

Указания. а) Делим 64 на 3 равные части. б) Делим 64 на 6 равных частей.

22. $\frac{12}{15}$.

Указание. Туристы пробудут в походе 15 дней вместо 12, значит, каждый из них будет получать в $\frac{15}{12}$ раза меньше того, что получали бы по первоначальному плану.

23. 1,28 кг.

24. Вторая.

Решение. Каждый работник в первый раз получил $54 : 8 = \frac{27}{4}$ (тыс. руб.), а во второй – $\frac{54+15}{10} = \frac{69}{10}$ (тыс. руб.). Но $\frac{69}{10} = \frac{138}{20} > \frac{135}{20} = \frac{27}{4}$.

25. 4,9 см.

Решение. $4 \frac{1}{12}$ см = $\frac{49}{12}$ см. Значит, от груза в 1 кг лодка опускается на $\frac{49}{12} = \frac{49}{675} = \frac{49}{8100}$ (см). Тогда от груза в 810 кг лодка опустится на $\frac{49}{8100} \cdot 810 = 4,9$ (см).

26. Серёже.

Решение. Доля Серёжи равна $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$; при этом $\frac{5}{12} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

27. 45 км.

Решение. 20 км – это $\frac{4}{9}$ всего пути, но тогда весь путь равен

$$20 : \frac{4}{9} = \frac{20 \cdot 9}{4} = 45 \text{ (км)}.$$

$$28. \frac{896}{3968} > \frac{1664}{7808}.$$

Решение.

$$\frac{896}{3968} = \frac{7}{31} = \frac{7 \cdot 61}{31 \cdot 61} > \frac{13 \cdot 31}{61 \cdot 31} = \frac{13}{61} = \frac{1664}{7808}.$$

$$29. \frac{7}{6}; \text{ в } 3 \text{ раза.}$$

$$30. \frac{3}{16}; \text{ в } 3 \text{ раза.}$$

$$31. \frac{14}{9}; \text{ в } 4 \text{ раза.}$$

$$32. \frac{7}{54}; \text{ в } 3 \text{ раза.}$$

33. а) Дробь увеличится в 4 раза; б) дробь уменьшится в 3 раза; в) дробь уменьшится в $\frac{4}{3}$ раза; г) дробь увеличит-

ся в $\frac{3}{2}$ раза; д) дробь уменьшится в 4 раза;

е) дробь увеличится в 4 раза; ж) дробь увеличится в 8 раз; з) дробь уменьшится в 12 раз.

$$34. 16.$$

$$35. \frac{91}{3600}.$$

Решение. В сутках 24 часа, что составляет 1440 минут или 86400 секунд. Но 36 мин. 24 сек. – это 2184 сек. Значит, 36 мин. 24 сек. составят $\frac{2184}{86400} = \frac{91}{3600}$ суток.

$$36. 30000 \text{ руб.}$$

$$37. 20.$$

$$38. \frac{2}{15}, \frac{6}{25}, \frac{7}{15}, \frac{7}{5}.$$

Решение. $\frac{2}{15} = \frac{10}{75}$; $\frac{6}{25} = \frac{18}{75}$; $\frac{7}{15} = \frac{35}{75}$; $\frac{7}{5} = \frac{105}{75}$.

$$39. \frac{37}{59}, \frac{27}{56}, \frac{32}{97}, \frac{2}{11}.$$

$$40. \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{13} > \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{13}.$$

Решение. Так как $\frac{5}{7} = \frac{25}{35} > \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, то по свойствам порядка $\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{13} > \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{13}$.

41. а) $\frac{1}{30}$; б) $2\frac{3}{7}$; в) $\frac{3}{20}$; г) $\frac{5}{3}$; д) $\frac{31}{80}$; е) 3; ж) 9.

Указание. В примерах а) – в) перед выполнением действий расставить скобки и поменять местами слагаемые или множители. В примерах г) – д) вынести за скобки общий множитель, а затем выполнить действия.

42. Решение. Чтобы найти $\frac{3}{8}$ от $\frac{5}{7}$, вначале найдём $\frac{1}{8}$ от $\frac{5}{7}$. Для этого $\frac{5}{7}$ раз-

делим на 8 (или умножим на $\frac{1}{8}$). Но $\frac{3}{8}$ в три раза больше, чем $\frac{1}{8}$. Значит, надо полученное от деления на 8 число умножить на 3. Таким образом, получим число $3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7}\right) = \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$.

43. Р е ш е н и е. Как и в задаче 42, вначале дробь $\frac{m}{l}$ делим на n , то есть умножаем на $\frac{1}{n}$. Затем полученное число умножаем на k . В итоге получим:

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\frac{m}{l} : n\right) &= k \cdot \left(\frac{m}{l} \cdot \frac{1}{n}\right) = \\ &= k \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{l}\right) = \left(k \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{m}{l} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{l}. \end{aligned}$$

44. 175 рублей.

Р е ш е н и е. $\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{31}{35}$ – такую часть своих денег мальчик истратил на покупку книги и мороженого. Тогда у него осталось 20 рублей, или $\frac{4}{35}$ всех денег. Находим число по его части: $\frac{1}{35}$ – это $20 : 4 = 5$ (рублей), значит, $\frac{35}{35}$ – это 175 рублей.

45. 11576 рублей.

46. $220\frac{20}{21}$ км.

47. 119.

Р е ш е н и е. Застелить требуется $a \cdot 120 \cdot \frac{17}{2} = 1020a$ м² пола, где a – длина доски. Тогда требуемое количество досок той же длины a , но новой ширины равно $1020a : \frac{60}{7}a = 119$ штук.

48. 1744,6 рубля.

49. В $\frac{82}{53} = 1\frac{29}{53}$ раза.

Р е ш е н и е. Скорость пассажирского поезда равна $\frac{451}{2}$ км : $\frac{11}{4}$ ч = 82 км/ч, а скорость грузового поезда –

$$\frac{1219}{6} \text{ км} : \frac{23}{6} \text{ ч} = 53 \text{ км/ч.}$$

Отношение скоростей равно $\frac{82}{53}$.

50. На $\frac{5}{81}$ часа.

Р е ш е н и е. $\frac{27}{40} \cdot 24 = \frac{27 \cdot 24}{40} = \frac{81}{5}$ –

столько часов в $\frac{27}{40}$ суток. Тогда за 1 час

часы отстанут на $\frac{3}{20} : \frac{81}{5} = \frac{1}{108}$ часа. Зна-

чит, за $6\frac{2}{3}$ часа часы отстанут на

$$\frac{1}{108} \cdot \frac{20}{3} = \frac{5}{81} \text{ часа.}$$

51. От старшего.

Р е ш е н и е. Старший брат отдал сестре $\frac{1}{4} : 9 = \frac{1}{36}$ часть тульского пряника, а младший – $\frac{1}{9} : 5 = \frac{1}{45}$.

52. Через $\frac{125}{3}$ часа.

Р е ш е н и е. $\frac{1}{3}$ объёма бассейна составляет 4000 м³. Скорость заполнения бассейна двумя трубами равна $60 + 36 = 96$ (м³/ч).

Искомое время равно

$$4000 : 96 = \frac{125}{3} \text{ часа.}$$

53. а) Равны; б) $\left(\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}\right) : \frac{3}{4} < \left(\frac{5}{8} : \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}$.

54. У первого 40 рублей, у второго 30 рублей.

55. 350 рублей.

Р е ш е н и е. Остаток от первого раза составлял $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$, а $\frac{5}{7}$ от $\frac{7}{10}$ равно

$\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10} = \frac{1}{2}$. Всего Петя израсходовал $\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ своих денег. У него осталось $\frac{1}{5}$ их часть, что на 210 рублей меньше, чем он израсходовал, то есть 210 рублей – это $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ всех денег Пети. Значит, у него было $210 : \frac{3}{5} = 350$ рублей.

56. 200; 175; 125; 100.

Решение. Примем за единицу ту часть учеников, которая учится на 2-м этаже. Тогда на 3-м этаже учится $\frac{5}{7}$, а на 2-м и 3-м вместе – $1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$ этого количества учеников, что по условию задачи равно числу учеников на 1-м и 4-м этажах. Но на 1-м этаже учится учеников вдвое больше, чем на 4-м. Значит, на 4-м этаже их доля $\frac{12}{7} : 3 = \frac{4}{7}$, а на 1-м – $2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$. Т.к. на всех четырёх этажах учится $\frac{12}{7} + \frac{12}{7} = \frac{24}{7}$ частей учеников, то на одну часть приходится $600 : \frac{24}{7} = \frac{600 \cdot 7}{24} = 175$ учеников. Следовательно, на 1-м этаже учится $175 \cdot \frac{8}{7} = 200$, на 3-м – $175 \cdot \frac{5}{7} = 125$, на 4-м – $175 \cdot \frac{4}{7} = 100$ учеников.

57. 6 кг.

58. $14\frac{13}{25}$ кг и $\frac{17}{25}$ кг.

59. 36, 30 и 54.

60. 1,9 млн. руб.

61. $1\frac{4}{5}$ и $4\frac{1}{20}$.

Решение. Меньшее число в большем содержится $2\frac{1}{4}$ раза, а в их разности оно должно содержаться $2\frac{1}{4} - 1 = 1\frac{1}{4}$ раза. Следовательно, меньшее число равно $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{4} = 1\frac{4}{5}$, а большее – $1\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{4} = 4\frac{1}{20}$.

Список источников

1. *Евтушевский В.А.* Сборник арифметических задач и численных примеров. Часть вторая. Дроби. 28-е издание / Евтушевский В.А. – Санкт-Петербург: Паровая скоропечатня М.М Гутзац, 1905. 176 с.

2. *Егоров Ф.И.* Методика арифметики. Издание 7-е / Егоров Ф.И. – Москва-Петроград: Издание т-ва «В.В. Думнов, наследн. бр. Салаевых», 1917. 454 с.

3. *Игнатъев В.А. и др.* Методический сборник задач и упражнений по арифметике / Игнатъев В.А., Пономарёв С.А., Шор Я.А. – Москва: Учпедгиз, 1949. 136 с.

4. *Кузьмичев А.И., Сосновский Ю.В.* Обыкновенные дроби (часть I) // **Математика в школе.** № 7. 2021. С. 50–56.

5. *Кузьмичев А.И., Сосновский Ю.В.* Обыкновенные дроби (часть II) // **Математика в школе.** № 8. 2021. С. 25–33.

6. Новый арифметический задачник. Части I и II. **Государственное издательство. Самарское отделение**, 1922. 32 с.

Статья поступила в редакцию
принята к публикации

04.11.2021;
08.02.2022.

GA-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

GA-CONVEX FUNCTIONS AND EQUATIONS

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851+517.162

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_27

С.И. Калинин

Вятский государственный университет
(г. Киров),
kalinin_gu@mail.ru

S.I. Kalinin

Vyatka State University (Kirov),
kalinin_gu@mail.ru

Аннотация: статья знакомит читателя с понятием GA-выпуклой функции. Рассматривается вопрос об использовании GA-выпуклых функций при решении уравнений

Abstract: the article introduces the reader to the concept of a GA-convex function. The question of using GA-convex functions in solving equations is considered

Ключевые слова: выпуклая функция, GA-выпуклая функция, неравенство, уравнение

Keywords: convex function, GA-convex function, inequality, equation

© Калинин С.И., 2022

Понятие GA-выпуклой функции

Напомним, функция $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ называется *выпуклой* на промежутке $l \subset \mathbf{R}$, если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

Если при этом для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (2)$$

то функцию f называют *строго выпуклой* на рассматриваемом промежутке.

Аналогично определяются *вогнутая* и *строго вогнутая* функции – для этого в (1)–(2) знаки неравенств заменяются на $\geq$ и $>$ соответственно.

Введём в рассмотрение понятие GA-выпуклой функции.

Определение 1 [1–3]. Функцию $f: l \subset (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ назовём GA-выпуклой на промежутке l , если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(a^\lambda b^{1-\lambda}) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (3)$$

Если в условиях определения 1 для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(a^\lambda b^{1-\lambda}) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (4)$$

то функцию f будем называть *строго GA-выпуклой* на промежутке l .

Очевидно, строго GA-выпуклая функция является GA-выпуклой.

Изменение знаков неравенств в соотношениях (3)–(4) на противоположные приводит к определениям понятий GA-вогнутой и строго GA-вогнутой функций.

Приведём примеры GA-выпуклых и GA-вогнутых функций.

1. Функция $f(x) = x$, $x > 0$, является строго GA-выпуклой. Это следует из весового неравенства Коши для различных положительных чисел a и b :

$$a^\lambda b^{1-\lambda} < \lambda a + (1 - \lambda)b, \quad a \neq b, \quad \lambda \in (0; 1),$$

реализующего неравенство (4).

2. Весовое неравенство Коши для двух различных положительных чисел позво-

ляет легко обосновать также строгую GA -выпуклость функции $f(x) = x^q$, $x > 0$, где q – произвольное отличное от нуля действительное число:

$$(a^\lambda b^{1-\lambda})^q = (a^q)^\lambda (b^q)^{1-\lambda} < \lambda a^q + (1-\lambda)b^q, \\ a > 0, b > 0, a \neq b, \lambda \in (0; 1).$$

3. Нетрудно видеть отсюда, что функция $f(x) = -x^2$, $x > 0$, будет строго GA -вогнутой.

4. На интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = c + \gamma \ln x$, где c и γ – вещественные константы, является и GA -выпуклой, и GA -вогнутой.

Действительно, для неё имеем:

$$\begin{aligned} f(a^\lambda b^{1-\lambda}) &= c + \gamma \ln(a^\lambda b^{1-\lambda}) = \\ &= c + \lambda \gamma \ln a + (1-\lambda) \gamma \ln b = \\ &= \lambda(c + \gamma \ln a) + (1-\lambda)(c + \gamma \ln b) = \\ &= \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b). \end{aligned}$$

Видим, что для данной функции неравенство (3) и противоположное ему неравенство выполняются со знаком равенства.

Из последнего следует, в частности, что и функция $f(x) = \ln x$, и функция $f(x) = c$ на всяком промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$ являются и GA -выпуклыми, и GA -вогнутыми.

Замечание 1. В терминологии статьи [4] GA -выпуклая функция есть $(0, 1)$ -выпуклая функция.

Геометрическая характеристика GA -выпуклости

Для геометрической характеристики понятия GA -выпуклой функции введём понятие логарифмической дуги (логарифмической кривой).

Определение 2. Всякую связную часть графика функции $y = c + \gamma \ln x$, $x > 0$ ($-\infty < c, \gamma < +\infty$), условимся называть логарифмической дугой, или логарифмической кривой.

Покажем, что существует ровно одна логарифмическая дуга, соединяющая две точки правой полуплоскости плоскости

xOy , не лежащие на одной вертикали.

Пусть $M_1(x_1; y_1)$ ($x_1 > 0$) и $M_2(x_2; y_2)$ ($x_2 > 0, x_2 \neq x_1$) – произвольные фиксированные точки. Координаты данных точек подставим в общее уравнение $y = c + \gamma \ln x$ логарифмической кривой. Получим следующую систему линейных уравнений относительно параметров c и γ :

$$\begin{cases} y_1 = c + \gamma \ln x_1, \\ y_2 = c + \gamma \ln x_2. \end{cases}$$

Решая систему, получаем её единственное решение

$$c = \frac{y_1 \ln x_2 - y_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}, \quad \gamma = \frac{y_2 - y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}.$$

Таким образом, кривая

$$y = \frac{y_1 \ln x_2 - y_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} + \frac{y_2 - y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \ln x \quad (5)$$

есть единственная логарифмическая дуга, соединяющая точки M_1 и M_2 . Нужно показано.

Из (5) следует, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в таком случае $y_1 = y_2$), то их соединяющая логарифмическая дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Рассмотрим сейчас геометрическую интерпретацию GA -выпуклости. Покажем, что если $f(x)$ – строго GA -выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f будет находиться ниже точки логарифмической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x . Для этого, отправляясь от (5), составим уравнение данной логарифмической дуги

$$y = \frac{f(a) \ln b - f(b) \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} \ln x \quad (6)$$

и $x \in (a; b)$ представим в виде

$$x = a^{\log_b \frac{b}{a} x} b^{\log_a \frac{a}{b} x}. \quad (7)$$

Заметим при этом, что для показателей степеней в правой части представления (7) выполняются условия:

$$\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \in (0; 1), \quad \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} \in (0; 1),$$

$$\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} + \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} = 1.$$

Отсюда и из условия GA -выпуклости функции f следует оценка

$$f(x) = f \left(a^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} b^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}} \right) <$$

$$< \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} \cdot f(b).$$

Но в полученной оценке выражение

$$\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} \cdot f(b),$$

легко видеть, преобразуется к виду

$$\frac{f(a) \ln b - f(b) \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} \ln x,$$

то есть к виду правой части (6). Значит, точка $(x; f(x))$, $x \in (a; b)$, графика функции f лежит строго ниже точки

$$\left(x; \frac{f(a) \ln b - f(b) \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} \ln x \right)$$

логарифмической дуги (6).

Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что если $f(x)$ – GA -выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит не выше точки логарифмической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x .

Соответствующую геометрическую характеристику читатель может сформулировать и в отношении GA -вогнутой и строго GA -вогнутой функций.

Замечание 2. Очевидно, что рассмотренные утверждения, характеризующие

GA -выпуклость (GA -вогнутость) функции геометрически, обратимы.

Достаточные условия строгой GA -выпуклости функции

Условимся в дальнейшем правую часть (6) для краткости обозначать символом $\tau_f^{(a,b)}(x)$, то есть

$$\tau_f^{(a,b)} = \frac{f(a) \ln b - f(b) \ln a}{\ln b - \ln a} +$$

$$+ \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} \ln x.$$

Кроме того, для дважды дифференцируемой функции $f(x)$ введём в рассмотрение символ $\Delta_f(x) = f'(x) + xf''(x)$.

Выведем достаточные условия строгой GA -выпуклости и строгой GA -вогнутости функции, непрерывной на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ и дважды дифференцируемой внутри этого промежутка. Справедлива

Теорема А. Пусть $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, непрерывная на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ и дважды дифференцируемая внутри этого промежутка. Если внутри l выполняется условие $\Delta(x) > 0$, то $f(x)$ – строго GA -выпуклая на рассматриваемом промежутке функция. Если же внутри l $\Delta(x) < 0$, то $f(x)$ – строго GA -вогнутая на промежутке l функция.

Доказательство. Пусть $[a; b]$ – произвольный отрезок из промежутка l . Покажем, что при условии $\Delta(x) > 0$ для любого x , $a < x < b$, будет выполняться неравенство $f(x) < \tau_f^{(a,b)}(x)$. Последнее будет означать строгую GA -выпуклость функции f на промежутке l .

Имеют место преобразования:

$$\tau_f^{(a,b)}(x) - f(x) = \frac{f(a) \ln b - f(b) \ln a}{\ln b - \ln a} +$$

$$+ \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} \ln x - f(x) =$$

$$= \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} \cdot f(b) - f(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot (f(a) - f(x)) + \log_{\frac{b}{a}} \frac{x}{a} \cdot (f(b) - f(x)) = \\
&= \frac{\ln \frac{b}{x} \cdot \ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \left(\frac{f(b) - f(x)}{\ln b - \ln x} - \frac{f(a) - f(x)}{\ln a - \ln x} \right).
\end{aligned}$$

В последнем произведении первый множитель, очевидно, положительный. Второй же множитель

$$A = \frac{f(b) - f(x)}{\ln b - \ln x} - \frac{f(a) - f(x)}{\ln a - \ln x}$$

преобразуем по теореме Коши:

$$A = \frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}} - \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}} = \eta f'(\eta) - \xi f'(\xi),$$

где ξ и η – некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Применяя теперь к разности $\eta f'(\eta) - \xi f'(\xi)$ формулу Лагранжа конечных приращений, получаем:

$$A = (f'(\zeta) + \zeta f''(\zeta))(\eta - \xi) = \Delta_f(\zeta)(\eta - \xi),$$

где ζ – некоторая точка, лежащая между точками ξ и η . Так как $\Delta f(\zeta) > 0$, то отсюда имеем $\tau_f^{(a,b)}(x) - f(x) > 0$, $a < x < b$. Нужно показано.

Второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3. Техника доказательства установленной теоремы позволяет сказать, что если внутри промежутка l для функции $f(x)$ выполняется условие $\Delta_f(x) \geq 0$, то данная функция будет GA-выпуклой на l . Точно так же, если для внутренних точек промежутка l будет иметь место условие $\Delta_f(x) \leq 0$, то функция $f(x)$ – GA-вогнутая на l .

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы А.

1. Для функции $f(x) = e^x$, $x > 0$, имеем: $\Delta_f(x) = e^x + xe^x > 0$, следовательно, данная функция будет строго GA-выпуклой.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = chx$, $x > 0$. Напомним, гиперболический косинус за-

даётся формулой $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Для данной функции имеем:

$$\Delta(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + x \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

значит, эта функция также является строго GA-выпуклой.

По аналогии легко показать строгую GA-выпуклость функции $f(x) = shx$, $x > 0$,

где $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус.

3. На промежутке $(0; 1]$ будет строго GA-выпуклой функция $f(x) = \frac{1-x}{x}$, ибо для неё величина $\Delta_f(x)$ имеет вид:

$$\Delta_f(x) = -\frac{1}{x^2} + x \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Очевидно, эта величина внутри промежутка $(0; 1]$ положительна.

4. В строгой GA-выпуклости функции $f(x) = x^q$, $x > 0$, $q \in \mathbf{R}$, можно убедиться ещё раз: для неё $\Delta_f(x) = q^2 x^{q-1} > 0$.

5. Функция $g(x) = \ln \frac{1-x}{x}$, $x \in (0; 1)$, является строго GA-вогнутой, так как на интервале $(0; 1)$ величина $\Delta_g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ отрицательна.

6. Рассмотрим, наконец, функцию $h(x) = 1 + 2 \ln x$. Для неё $\Delta_h(x) = \frac{2}{x} - x \frac{2}{x^2} \equiv 0$, следовательно, на интервале $(0; +\infty)$ эта функция будет и GA-выпуклой, и GA-вогнутой.

О применении GA-выпуклых функций при решении уравнений

Рассмотрим приём решения некоторых уравнений, опирающийся на использование понятия строго GA-выпуклой или строго GA-вогнутой функции. Этот приём доставляется следующей теоремой.

Теорема Б. Пусть $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ – строго GA-выпуклая или строго GA-вогнутая на

промежутке $l \subset (0; +\infty)$ числовой прямой Ox функция и $u, v, u^\lambda v^{1-\lambda} \in l$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда равенство

$$f(u^\lambda v^{1-\lambda}) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \quad (8)$$

справедливо лишь при условии: либо $u = v$, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$.

Доказательство. Очевидно, что если или $u = v$, или $\lambda = 0$, или $\lambda = 1$, то равенство (8) выполняется.

Пусть f — строго GA -выпуклая на промежутке l функция, имеют место включения $u, v, w = u^\lambda v^{1-\lambda} \in l$, а также выполняется (8). Предположим, что $u \neq v$.

В приведённых условиях включение $\lambda \in (0; 1)$ выполняться не может, ибо по определению строгой GA -выпуклости функции выполнение (8) невозможно.

Если $\lambda > 1$, то положим $\alpha = \frac{1}{\lambda}$; ясно, что $\alpha \in (0; 1)$. Тогда имеем:

$$w = u^\alpha v^{1-\alpha}, \quad u = w^\alpha v^{1-\alpha},$$

$$f(w) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) = \\ = \lambda f(w^\alpha v^{1-\alpha}) + (1 - \lambda)f(v) <$$

$$< \lambda \alpha f(w) + \lambda(1 - \alpha)f(v) + (1 - \lambda)f(v) = f(w).$$

Полученная оценка позволяет сделать вывод о том, что λ не может превосходить 1.

Если $\lambda < 0$, то положим $\beta = \frac{1}{1-\lambda}$; очевидно, $\beta \in (0; 1)$. Имеем:

$$w = u^\beta v^{1-\beta}, \quad v = w^\beta u^{1-\beta},$$

$$f(w) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) = \\ = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(w^\beta u^{1-\beta}) < \\ < \lambda f(u) + (1 - \lambda)\beta f(w) + \\ + (1 - \lambda)(1 - \beta)f(u) = f(w).$$

И эта оценка невозможна, поэтому λ не может быть отрицательным значением.

Таким образом, если (8) выполняется, то либо $u = v$, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$.

В случае строгой GA -вогнутости функции f рассуждения аналогичны. Теорема Б полностью доказана.

Рассмотрим примеры применения установленной теоремы Б.

Задача 1. Решите уравнение

$$e^{2-x} + e^{2+x} = 2e^{\sqrt{4-x^2}}.$$

Решение. Уравнение задано на отрезке $[-2; 2]$, при этом значения $x = -2$, $x = 2$ не являются его корнями. На интервале же $(-2; 2)$ оно равносильно уравнению

$$e^{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2}e^{2-x} + \frac{1}{2}e^{2+x},$$

которое есть уравнение вида (8) со строго GA -выпуклой функцией $f(x) = e^x$, $x > 0$, и $\lambda = \frac{1}{2}$, $u = 2 - x$, $v = 2 + x$. Отсюда в силу теоремы Б следует, что нам теперь достаточно решить уравнение $2 - x = 2 + x$. Из последнего находим единственный искомый корень $x = 0$.

О т в е т: $x = 0$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\sqrt[6]{2^{\sin^2 x} \cdot 3^{\cos^2 x}} = \sqrt[6]{2} \sin^2 x + \sqrt[6]{3} \cos^2 x.$$

Решение. Областью определения уравнения является множество $\mathbf{R}$. Замечаем, что данное уравнение есть уравнение вида (8), которое порождается строго GA -выпуклой функцией $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $x > 0$, и $\lambda = \sin^2 x$, $u = 2$, $v = 3$. Следовательно, оно равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = 1, \\ \sin x = -1. \end{cases}$$

Отсюда находим искомое множество корней $\left\{ \frac{\pi}{2}n \right\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

О т в е т: $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задача 3. Решите уравнение

$$4 \cdot \sqrt[4]{(1-x)(1+x)^9} = 1 - x + 3(1+x)^3.$$

Решение. Уравнение на своей области задания $[-1; 1]$ равносильно уравнению

$$(1-x)^{\frac{1}{4}}((1+x)^3)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}(1-x) + \frac{3}{4}(1+x)^3. \quad (9)$$

Заметим, значения $x = \pm 1$ не являются корнями уравнения (9), а на интервале $(-1; 1)$ оно является уравнением вида (8), в котором $f(x) = x$, $x > 0$, есть строго GA-выпуклая функция и $\lambda = \frac{1}{4}$, $u = 1 - x$, $v = (1 + x)^3$. Согласно теореме Б, уравнение (9) равносильно уравнению $1 - x = (1 + x)^3$. Последнее же уравнение имеет единственный легко угадываемый корень $x = 0$. Его единственность следует из того, что $u = 1 - x$ — убывающая, а $v = (1 + x)^3$ — возрастающая на интервале $(-1; 1)$ функции.

О т в е т: $x = 0$.

Задача 4. Докажите, что уравнение

$$2\sqrt{2-x+2x^5-x^6} = x^5 - x + 3$$

имеет единственный корень, который будет иррациональным числом.

Решение. Так как подкоренное выражение левой части уравнения есть произведение $(2-x)(1+x^5)$, то областью задания уравнения является отрезок $[-1; 2]$, концы которого, легко видеть, ему не удовлетворяют. На интервале $(-1; 2)$ уравнение преобразуем к виду

$$\sqrt{2-x}\sqrt{1+x^5} = \frac{1}{2}(2-x) + \frac{1}{2}(1+x^5). \quad (10)$$

Но (10) есть уравнение вида (8) с $f(x) = x$, $x > 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $u = 2 - x$, $v = 1 + x^5$.

Следовательно, рассматриваемое уравнение на интервале $(-1; 2)$ равносильно уравнению

$$2 - x = 1 + x^5. \quad (11)$$

Обращение к функционально-графическому методу его решения позволяет заключить, что на интервале $(-1; 2)$ оно имеет единственный корень. Для доказательства иррациональности этого корня (11) преобразуем к равносильному уравнению

$$x^5 + x - 1 = 0 \quad (12)$$

Поскольку свободный член приведённого многочлена левой части (12) есть -1 , то это уравнение не может иметь рациональных корней [5, с. 5]. Нужно показать.

Список источников

1. Niculescu C. P. Convexity according to the geometric mean, J. Math. Anal. Applics., Volume 3, Number 2 (2000), 155–167.
2. Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang The Hermite–Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application. J. of Inequal. and Applics., 2010, Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.
3. Kaizhong Guan GA-convexity and its applications. Anal. Math. 2013. 39, № 3, с. 189–208.
4. Kalinin S.I. (0, 0)-Convex Functions and Their Properties. Journal of Mathematical Sciences, 241(6), 727–734. DOI 10.1007/s10958-019-04458-9.
5. Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. М.: Просвещение, 1978.

Статья поступила в редакцию	01.03.2022;
принята к публикации	16.06.2022.



К ЗАДАЧЕ О РАССЕЧЕНИИ ТЕТРАЭДРА НА РАВНОВЕЛИКИЕ МНОГОГРАННИКИ

ON THE PROBLEM OF DIVIDING A TETRAHEDRON INTO POLYHEDRAL OF EQUAL AREA

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_33

Г.А. Клековкин, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Самара,
klekovkin_ga@mail.ru

G.A. Klekovkin, PhD (Phys&Math), Ass. Prof.,
Samara,
klekovkin_ga@mail.ru

Аннотация: приводятся некоторые комментарии, которые могут быть полезны при составлении задач на разбиение тетраэдра плоскостью на две равновеликие части

Abstract: the paper presents some comments which may be useful when composing the problems on dissection of the tetrahedron by a plane into two parts of equal volume

Ключевые слова: тетраэдр, секущая плоскость, равновеликие многогранники

Keywords: tetrahedron, intersecting plane, polyhedrons of equal volume

© Клековкин Г.А., 2022

В практике обучения решению задач на сечения многогранников плоскостью обычно используются два вида вычислительных задач на рассечение тетраэдра.

В задачах первого вида данный тетраэдр разбивается заданной плоскостью на два многогранника. Требуется найти отношение объёмов полученных многогранников.

В задачах второго вида отношение объёмов частей задано и выступает как одно из условий, определяющих положение секущей плоскости. В этих задачах требуется найти отношения, в которых секущая плоскость делит указанные рёбра тетраэдра.

Данные задачи могут дополняться задачами на построение рассматриваемого сечения на проекционном изображении тетраэдра.

Чтобы составить задачу первого вида,

нужно указать условия определяющие положение секущей плоскости относительно тетраэдра. Секущая плоскость чаще всего задаётся тремя точками, лежащими на рёбрах тетраэдра или на их продолжениях, а точки определяются с помощью отношений, в которых они делят указанные рёбра. Такой способ задания секущей плоскости использован, например, в учебном пособии М.В. Лурье [3], в котором рассмотрены все возможные виды сечений и схемы решения соответствующих им задач. При составлении задачи второго вида, чтобы избежать громоздких вычислений, сначала обычно составляется и решается задача первого вида, а затем полученный результат используется для составления задачи второго вида. Применяя другие способы задания секущей плоскости, можно усложнять или, наоборот, упрощать решение задач обоих видов.

В задачах на расщепление тетраэдра плоскостью на два равновеликих многогранника отношение объёмов частей изначально задано, оно равно 1. Поэтому здесь место вычислительных задач первого вида могут занять задачи на доказательство, в которых требуется доказать, что заданная секущая плоскость делит объём тетраэдра пополам. Вместе с изменением вида задач будут меняться и подходы к их составлению. То же самое можно сказать и о составлении задач второго вида, хотя формально их структура остается прежней. Дело в том, что точки, которые вместе с условием равновеликости частей разбиения определяют положение секущей плоскости, теперь при составлении задач нельзя выбирать на рёбрах тетраэдра произвольным образом. В статье обсуждается, где и как могут выбираться эти точки при различных видах расщеплений.

1. Разбиение треугольника на равновеликие части. Задачи о расщеплении тетраэдра на две равновеликие части плоскостью являются пространственными аналогами задач о разбиении треугольника на равновеликие части с помощью одного прямого разреза. При этом решение некоторых задач на расщепление тетраэдра опирается на умение решать задачи на разбиение треугольника, поэтому рассмотрим вначале основную опорную зада-

чу на разбиение треугольника.

Пусть ABC – данный треугольник и M – точка, лежащая на его стороне. Требуется через точку M провести прямую, которая разбивает треугольник ABC на две равновеликие части.

Когда заданная точка совпадает с одной из вершин треугольника или с серединой одной из его сторон, то, очевидно, что искомой прямой будет прямая, содержащая соответствующую им медиану (рис. 1).

Рассмотрим случай, когда точка M является внутренней точкой одной из сторон треугольника и не совпадает с её серединой. Пусть, например, M принадлежит стороне AC и лежит ближе к вершине A , чем к C . Это означает, что M – внутренняя точка отрезка AB_1 , где B_1 – середина стороны AC .

Если точка N принадлежит стороне BC , то по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, имеем:

$$\frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB}.$$

Прямая MN будет производить искомое разбиение, когда $\frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что

$$CN = \frac{CA \cdot CB}{2CM}, \quad (1)$$

то есть отрезок CN строится с помощью линейки и циркуля как четвёртый про-

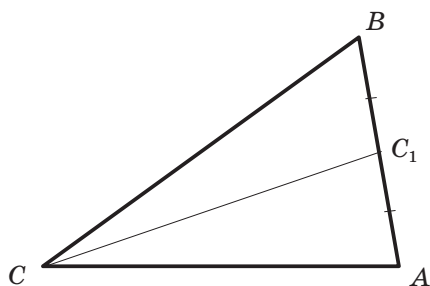


Рис. 1

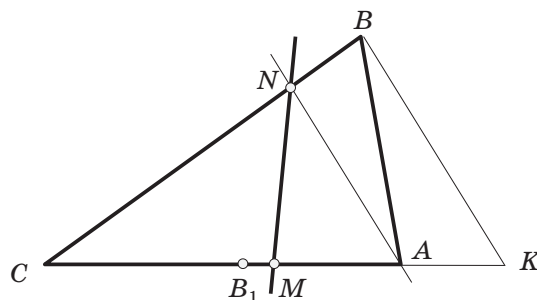


Рис. 2

порциональный для отрезков CA , CB и $CK = 2CM$ (рис. 2). Поскольку $CM > CB_1$, то $CK = 2CM > CA$, а значит, точка N лежит ближе к вершине B , чем к C .

Заметим, что если M – внутренняя точка отрезка CB_1 , то прямая, разбивающая треугольник ABC на равновеликие части, будет пересекать сторону AB .

Когда дополнительно требуется, чтобы секущая прямая была параллельна стороне треугольника, нужно сначала найти точку, через которую должна проходить эта прямая. Рассмотрим, например, секущую MN , где $M \in CA$, параллельную стороне AB . В этом случае $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}$, поэтому положение точки M на стороне CA определяется условием $CM = \frac{CA}{\sqrt{2}} = \frac{CA\sqrt{2}}{2}$. Отрезок CM , таким образом, равен половине гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом CA . Следовательно, и в этом случае секущая прямая строится линейкой и циркулем (рис. 3).

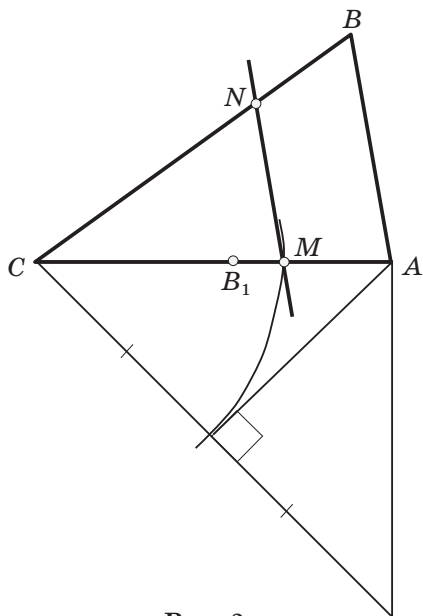


Рис. 3

Другие способы решения рассмотрен-

ной задачи можно найти в статье [2]. Кроме того, авторы работы приводят решение задачи о числе прямых, проходящих через заданную точку плоскости и делящих пополам площадь данного треугольника.

2. Рассечения тетраэдра на равновеликие пирамиды. Плоскость рассекает тетраэдр на два равновеликих тетраэдра тогда и только тогда, когда она проходит через вершину тетраэдра и медиану противоположной ей грани (или, что то же самое, через ребро и середину противоположного ребра) (рис. 4). Плоскость, проходящая через вершину тетраэдра, может также рассечь его на тетраэдр и четырёхугольную пирамиду. Здесь секущая плоскость проходит через прямую, разбивающую противоположную вершине грань на две равновеликие части, причём эта прямая не содержит медиану грани (рис. 5).

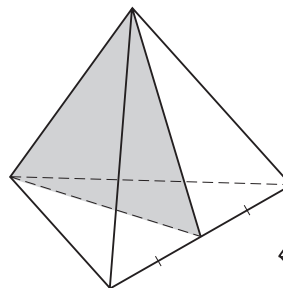


Рис. 4

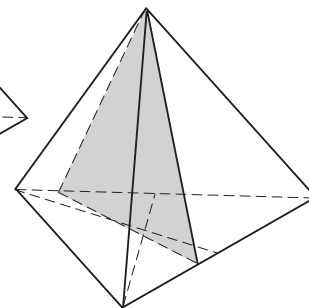


Рис. 5

В обоих случаях секущая плоскость может быть задана вершиной тетраэдра и точкой, принадлежащей ребру противоположной ей грани. Это позволяет легко и быстро составить нужное количество вычислительных задач на данный вид рассечений. Для составления задач на доказательство потребуется кроме того найти отношение, в котором прямая, раз-

бивающая грань на равновеликие части, делит одно из двух других её рёбер.

При изображении фигур в параллельной проекции сохраняется отношение трёх точек прямой. Поэтому, если в задаче дополнительно требуется построить на изображении тетраэдра сечение, рассекающее его на равновеликие части, которое проходит через данную вершину тетраэдра и данную точку на ребре противоположной ей грани, то это построение по сути дела сводится к построению прямой, разбивающей указанную грань на равновеликие части.

3. Рассечения на тетраэдр и пятигранник. Плоскость рассекает тетраэдр на тетраэдр и пятигранник, когда она пересекает во внутренних точках три ребра, выходящие из одной вершины.

Пусть, например, плоскость пересекает рёбра DA , DB , DC в точках K , L , M соответственно. Объём V тетраэдра $DABC$ можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \sin \alpha \sin \beta,$$

где α – угол между ребрами DA и DB , β – угол между ребром DC и плоскостью грани DAB . По той же формуле

$$V_{DKLM} = \frac{1}{6} DK \cdot DL \cdot DM \cdot \sin \alpha \sin \beta.$$

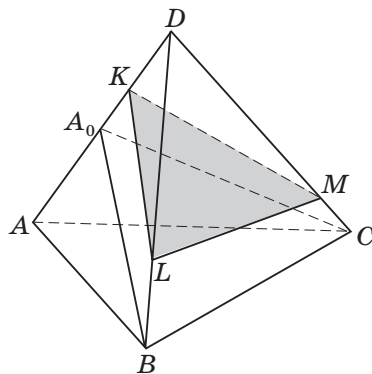


Рис. 6

Отсюда

$$\frac{V_{DKLM}}{V} = \frac{DK \cdot DL \cdot DM}{DA \cdot DB \cdot DC} = \frac{DK}{DA} \cdot \frac{DL}{DB} \cdot \frac{DM}{DC} = \frac{DE}{DB} \cdot \frac{DM}{DC},$$

где $DE = \frac{DK \cdot DL}{DA}$.

В рассматриваемой задаче $V_{DKLM} = \frac{1}{2} V$, поэтому $DM = \frac{DB \cdot DC}{2DE}$. Таким образом, если заданы точка K на ребре DA и точка L на ребре DB , то, дважды используя построение четвёртого пропорционального отрезка, можно построить точку M искомой секущей плоскости, лежащую на ребре DC .

Чтобы точка M была внутренней точкой ребра DC , точка K должна лежать ближе к вершине A , чем к D , а точка L – ближе к B , чем к D . Действительно, если точка, например K , будет лежать ближе к вершине D , чем к вершине A , то $V_{DKLM} < V_{DA_0BC} = \frac{1}{2} V$, где A_0 – середина ребра DA (рис. 6). Так же точно, построенная точка M будет лежать ближе к вершине C , чем к вершине D .

Введя обозначения $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $DK = ka$, $DL = lb$, $DM = mc$, видим, что числа k , l и m , определяющие положение

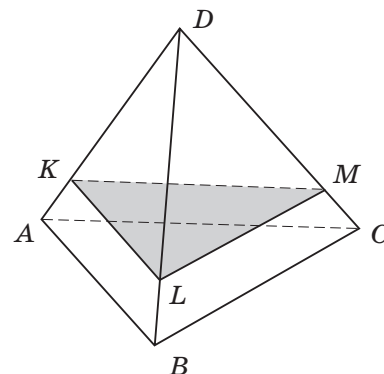


Рис. 7

ние точек K , L и M , связаны соотношением $klm = \frac{1}{2}$ или

$$m = \frac{1}{2kl}, \quad (2)$$

где, как отмечено, $\frac{1}{2} < k, l, m < 1$. Из соотношения (2) и двойного неравенства $\frac{1}{2} < m < 1$ дополнительно вытекает, что

$$\frac{1}{2} < kl < 1.$$

Если $\frac{DK}{DA} = \frac{DL}{DB}$, то есть $k = l$, то $KL \parallel AB$. В этом случае соотношение (2) принимает вид $m = \frac{1}{2k^2}$, а значит, подобное сечение существует тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1$.

Если $\frac{DK}{DA} = \frac{DL}{DB} = \frac{DM}{DC}$, то есть $k = l = m$, то секущая плоскость KLM параллельна плоскости грани ABC (рис. 7). Здесь из (2) следует, что $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Для точек $K \in DA$ и $L \in DB$, определяемых неравенствами

$$k \neq l, \quad \frac{1}{2} < k < 1, \quad \frac{1}{2} < l < 1, \quad \frac{1}{2} < kl < 1,$$

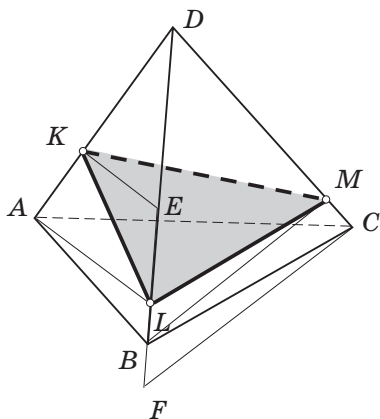


Рис. 8

построение точки M показано на рисунке 8. На этом рисунке отрезок $DF = 2DE$.

Когда задана точка $K \in DA$ такая, что $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{DK}{DA} < 1$, и требуется, чтобы сторона KL сечения была параллельна ребру AB , точка M строится аналогично. Только теперь вначале нужно построить точку $L \in DB$; для этого через точку K проводится прямая, параллельная прямой AB .

Случай, когда секущая плоскость KLM параллельна плоскости грани ABC , является исключительным. Здесь сначала нужно построить точку K , которая определяется условием $\frac{DK}{DA} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Из этого условия следует, что задача о построении сечения, которое разбивает данный тетраэдр на две равновеликие части и параллельно его грани, равносильна знаменитой задаче древности об удвоении куба. Такое сечение невозможно построить с помощью линейки и циркуля.

Используя соотношение (2), связывающее числа k , l , m , и неравенства, задающие интервалы изменения этих чисел, достаточно просто составлять задачи с «хорошими» конкретными числовыми данными на рассечение данного тетраэдра на две равновеликие части плоскостью, пересе-

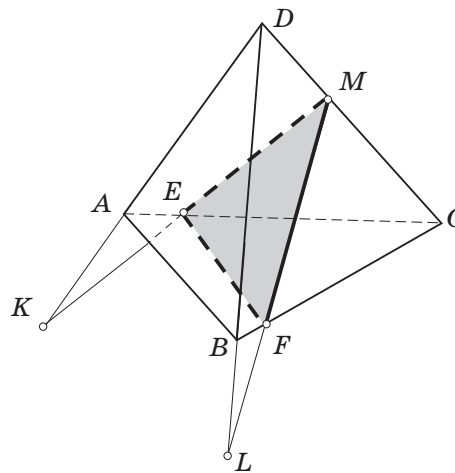


Рис. 9

кающей три ребра, выходящие из одной вершины.

Задачи на рассечения данного вида можно значительно усложнить за счёт выбора других способов задания секущей плоскости. Так, на рисунке 9 показана ситуация, в которой точка M на ребре DC расположена ближе к вершине D , чем к C , а точки K и L лежат на продолжениях рёбер DA и DB за вершины A и B соответственно. Здесь тетраэдр $CEFM$ объёма $\frac{1}{2}V$ отсекается плоскостью от трёхгранного угла с вершиной C .

По теореме об отношении объёмов тетраэдров, имеющих по равному трёхгранному углу,

$$V_{CEFM} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{CM}{CD}, V_{CABD} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{CM}{CD} V.$$

Найдём отношения $\frac{CE}{CA}$, $\frac{CF}{CB}$ и $\frac{CM}{CD}$.

Пусть по-прежнему $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $DK = ka$, $DL = lb$ и $DM = mc$ (теперь $k > 1$, $l > 1$, $0 < m < \frac{1}{2}$). Тогда $\frac{CM}{CD} = \frac{1-m}{1}$.

Для вычисления отношений $\frac{CE}{CA}$ и $\frac{CF}{CB}$ воспользуемся теоремой Менелая. Применяя эту теорему к треугольнику ACD и прямой MK , имеем:

$$\frac{CE}{EA} \cdot \left(-\frac{AK}{KD}\right) \cdot \frac{DM}{MC} = -1$$

или

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{m}{1-m} = 1.$$

Откуда $\frac{CE}{EA} = \frac{k(1-m)}{m(k-1)}$. По свойству пропорций

$$\frac{CE}{CE + EA} = \frac{k(1-m)}{k(1-m) + m(k-1)} = \frac{k(1-m)}{k-m},$$

следовательно, $\frac{CE}{CA} = \frac{k(1-m)}{k-m}$. Используя

треугольник BCD и прямую LM , так же точно находим $\frac{CF}{CB} = \frac{l(1-m)}{l-m}$.

Таким образом,

$$V_{CEFM} = \frac{k(1-m)}{k-m} \cdot \frac{l(1-m)}{l-m} \cdot \frac{1-m}{1} V = \frac{kl(1-m)^3}{(k-m)(l-m)} V.$$

Поскольку в рассматриваемой задаче

$V_{CEFM} = \frac{1}{2}V$, то теперь соотношение, связывающее числа k , l и m , принимает вид

$$\frac{kl(1-m)^3}{(k-m)(l-m)} = \frac{1}{2}.$$

4. Рассечения на два пятигранника. Пусть теперь только одно из чисел k , l , m больше 1, например m . Тогда секущая плоскость будет пересекать рёбра DA и DB во внутренних точках K и L , а точка M её пересечения с прямой DC будет находиться на продолжении ребра DC за точку C . В этом случае сечением тетраэдра будет четырёхугольник $KENL$, где $E = AC \cap MK$, $N = BC \cap ML$, рассекающий тетраэдр на два пятигранника (рис. 10).

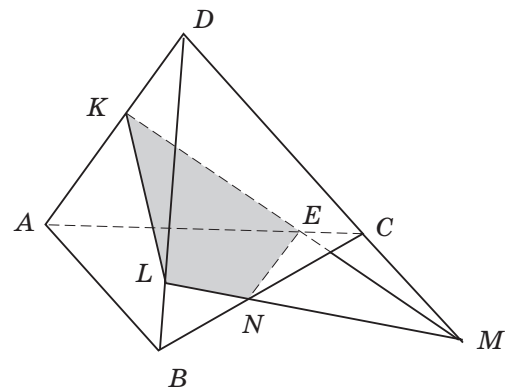


Рис. 10

Объём пятигранника $CDKLNE$ может быть найден как разность объёмов двух тетраэдров:

$$V_{CDKLNE} = V_{MDKL} - V_{MCEN}.$$

У первого тетраэдра $V_{MDKL} = klmV$, най-

дём объём второго тетраэдра.

Используя рёбра, выходящие из вершины C , объём V тетраэдра $CABD$ можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{6} CA \cdot CB \cdot CD \cdot \sin \gamma \sin \varphi,$$

где γ – угол между рёбрами CA и CB , φ – угол между ребром DC и плоскостью грани ABC . По той же формуле

$$V_{CEMN} = \frac{1}{6} CE \cdot CN \cdot CM \cdot \sin \gamma \sin \beta.$$

Отсюда

$$\frac{V_{CEMN}}{V} = \frac{CE \cdot CN \cdot CM}{CA \cdot CB \cdot CD} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CM}{CD}$$

и, следовательно,

$$V_{CEMN} = \frac{CE}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CM}{CD} V,$$

где $\frac{CM}{CD} = \frac{m-1}{1}$. Опять, воспользовавшись теоремой Менелая и свойством пропорций, находим:

$$\frac{CE}{CA} = \frac{k(1-m)}{m-k}, \quad \frac{CN}{CB} = \frac{l(1-m)}{m-l}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$V_{MCEN} = \frac{kl(m-1)^3}{(m-k)(m-l)} V$$

и

$$V_{CDKLE} = klm \left(1 - \frac{(m-1)^3}{m(m-k)(m-l)} \right) V.$$

Таким образом, в этом случае числа k , l , m связаны соотношением

$$klm \left(1 - \frac{(m-1)^3}{m(m-k)(m-l)} \right) = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Рассмотрим соотношение (4) как уравнение относительно m . Это уравнение равносильно уравнению

$$2klm(m-k)(m-l) - 2kl(m-1)^3 = \\ = (m-k)(m-l)$$

или

$$(2k^2l + 2kl^2 - 6kl + 1)m^2 - \\ - (2k^2l^2 - 6kl + k + l)m - kl = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты квадратного уравнения (5) зависят от двух параметров k , l и являются симметрическими многочленами третьей, четвёртой и второй степени. Аналитическое исследование этого уравнения – весьма сложная задача, требующая специального рассмотрения. Поэтому при составлении задач на расщепление тетраэдра на два равновеликих пятигранника можно опираться на результаты экспериментального исследования уравнения (5) в среде какой-либо интерактивной математической системы.

Воспользуемся, например, системой GeoGebra. С помощью инструмента *Ползунок* создадим ползунки для параметров k и l , задавая их минимальное и максимальное значения равными 0 и 1 соответственно; шаг изменения обоих параметров выберем равным 0,01. После этого через строку ввода зададим квадратичную функцию

$$f(x, k, l) = (2k^2l + 2kl^2 - 6kl + 1)x^2 - \\ - (2k^2l^2 - 6kl + k + l)x - kl. \quad (6)$$

После щелчка левой клавишей мыши на кнопку *Enter* на графическом полотне получим изображение графика функции $f(x, k, l)$, соответствующее значениям параметров k и l , установленным на ползунках. Меняя эти значения, с помощью графика можно экспериментально выяснить, когда функция (6) имеет корни, большие 1.

Сохраняя значение одного из параметров, например k , и меняя значения параметра l , замечаем, что для любого

$k_0 \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$ в этом же интервале найдется l_0 такое, что функция $f(x, k_0, l_0)$ становится линейной. Прямая, являющаяся графиком этой функции, пересекает ось Ox в точке $x_0 = m_0$, где $m_0 < 1$ (рис. 11 для $k_0 = 0,4$). При $k = k_0$ и $l < l_0$ ветви параболы, которая служит графиком функции

(6), направлены вверх, а оба корня этой функции меньше m_0 (рис. 11б). При $k = k_0$ и $l > l_0$ ветви параболы направлены вниз, корни функции (6) больше m_0 , один из них меньше 1, а второй – больше (рис. 11в).

Описанное экспериментирование позволяет подбирать числа k и l в уравнении (5) так, чтобы один из его корней был больше 1. При составлении задач на данный вид разбиений удобно пойти ещё дальше, воспользоваться имеющейся в GeoGebra системой компьютерной алгебры (CAS). Кнопка вызова этой системы находится в окне *Вид* на панели инструментов. Входящая в состав CAS команда *Решить* автоматически находит корни уравнения (5), соответствующего значениям чисел k и l , установленным на ползунках. Можно также составлять и решать уравнение вида (5), непосредственно придавая k и l конкретные числовые значения. При этом надо быть готовым к тому, что при выборе рациональных значений для k и l число m , являющееся корнем уравнения (5), будет иррациональным.

Дополнительно исследуем случай, когда хотя бы одно из чисел k , l равно $\frac{1}{2}$.

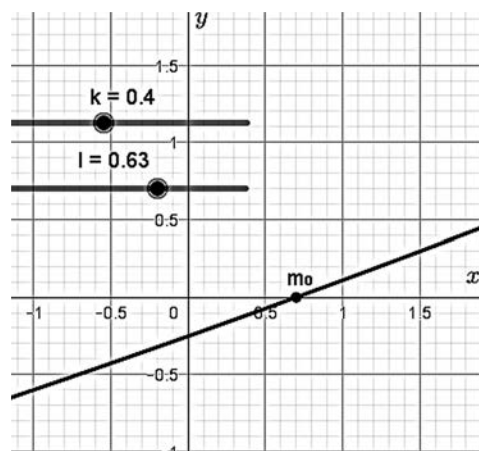
Пусть, например, $l = \frac{1}{2}$, тогда уравнение (5) принимает вид

$$\left(k^2 + \frac{1}{2}k - 3k + 1\right)m^2 - \left(\frac{1}{2}k^2 - 3k + k + \frac{1}{2}\right)m - \frac{k}{2} = 0$$

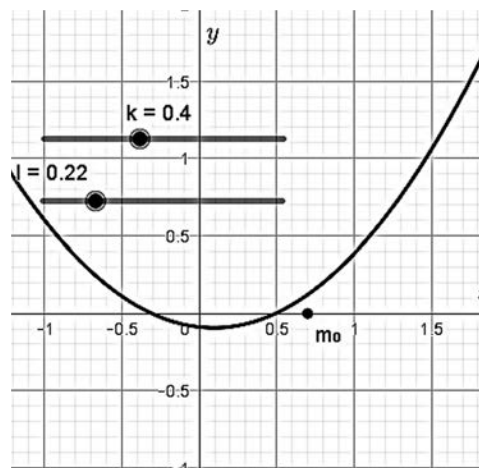
или

$$(2k^2 - 5k + 2)m^2 - (k^2 - 4k + 1)m - k = 0. \quad (7)$$

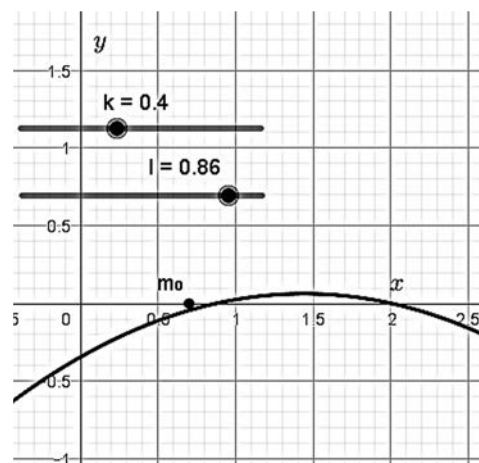
Здесь уравнение становится линейным при $k_0 = \frac{1}{2}$. Это линейное уравнение имеет корень $m = \frac{2}{3}$. При $k \neq \frac{1}{2}$ уравнение (7) является квадратным, найдём его дискриминант:



а)



б)



в)

Рис. 11

$$\begin{aligned}
 D &= (k^2 - 4k + 1)^2 + 4k(2k^2 - 5k + 2) = \\
 &= k^4 + 16k^2 + 1 - \\
 &- 8k^3 + 2k^2 - 8k + 8k^3 - 20k^2 + 8k = \\
 &= k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)^2.
 \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (7) имеет корни:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{k^2 - 4k + 1 - k^2 + 1}{2(2k^2 - 5k + 2)} = \\
 &= -\frac{2(2k - 1)}{2(k - 2)(2k - 1)} = -\frac{1}{(k - 2)}, \\
 m_2 &= \frac{k^2 - 4k + 1 + k^2 - 1}{2(k - 2)(2k - 1)} = \\
 &= -\frac{2k(k - 2)}{2(k - 2)(2k - 1)} = \frac{k}{(2k - 1)}.
 \end{aligned}$$

Для любого $0 < k < 1$ корень $m_1 < 1$. Корень m_2 при $0 < k < \frac{1}{2}$ является отрицательным, а при $\frac{1}{2} < k < 1$ будет больше 1.

Заметим, что при $l = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < k < 1$ из

(3) имеем: $\frac{CE}{CA} = \frac{1}{2}$, $\frac{CN}{CB} = 1 - k$. Отсюда следует, что точка E является серединой ребра AC , а точка N удовлетворяет условию $\frac{BN}{NC} = \frac{DK}{KA} = \frac{k}{1 - k}$.

Случай $l = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ является особым.

Здесь секущая плоскость не пересекает прямую DC , то есть ей параллельна. Поэтому сечение $KLNE$ является параллелограммом, а пятигранники, на которые оно делит тетраэдр, составлены из тетраэдра и треугольной призмы (рис. 12). Найдём, например, объём пятигранника $CDKENL$. Пусть площадь грани ABC равна S , а высота тетраэдра $DABC$, опущенная на эту грань, — h . Плоскость KLF делит высоту тетраэдра $DABC$ пополам, а

$$S_{ENC} = S_{KLF} = \frac{1}{4}S.$$

Поэтому

$$V_{CDKENL} = \frac{1}{4}S \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{6}Sh = \frac{1}{2}V.$$

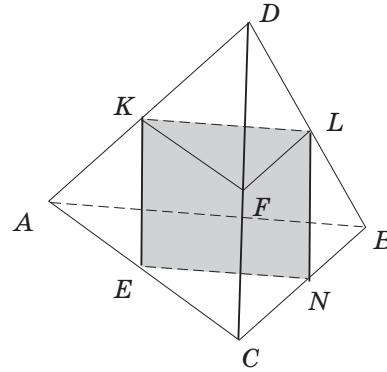


Рис. 12

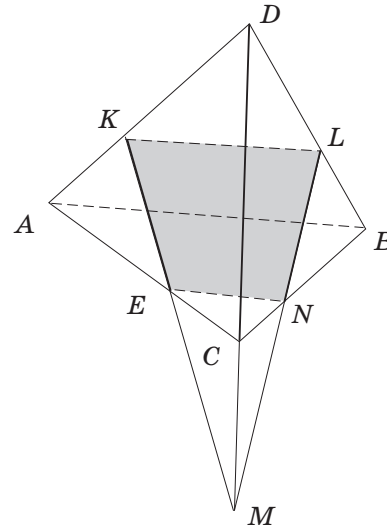


Рис. 13

На основании приведённых рассуждений легко доказываются хорошо известная теорема о том, что любая плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на два равновеликих многогранника, а также утверждения, связанные с этой теоремой [1].

Выясним, наконец, как задать секущую плоскость так, чтобы сечение, делящее объём тетраэдра пополам, было трапецией. По-прежнему будем рассматривать

секущую плоскость, которая пересекает во внутренних точках рёбра DA , DB и продолжение ребра DC за точку C (рис. 13).

В этом случае $k = l \neq \frac{1}{2}$. Как было установлено в предыдущих пунктах, при $k = l = \frac{1}{\sqrt{2}}$ секущая плоскость проходит через вершину C тетраэдра, а при $k = l$, где $\frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1$, пересекает рёбра, выходящие из вершины D , во внутренних точках. Следовательно, интересующие нас числа $k = l$ могут принадлежать промежутку

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

При $k = l \neq \frac{1}{2}$ уравнение (5) принимает вид:

$$(4k^3 - 6k^2 + 1)m^2 - 2k(k^3 - 3k + 1)m - k^2 = 0, \quad (8)$$

а ввиду (3) — $\frac{CE}{CA} = \frac{CN}{CB} \neq \frac{1}{2}$.

Найдём дискриминант уравнения (8):

$$\begin{aligned} D &= 4k^2(k^3 - 3k + 1)^2 + 4k^2(4k^3 - 6k^2 + 1) = \\ &= 4k^2(k^6 - 6k^4 + 6k^3 + 3k^2 - 6k + 2) = \\ &= 4k^2(k - 1)^2(k^2 - 1)(k^2 + 2k - 2) = \\ &= 4k^2(k - 1)^2(k^2 - 1)(k - \sqrt{3} + 1)(k + \sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

По формуле корней квадратного уравнения

$$m_{1,2} = \frac{k(k^3 - 3k + 1) \pm k(k - 1)\sqrt{(k^2 - 1)(k^2 + 2k - 2)}}{4k^3 - 6k^2 + 1}.$$

Уравнение (8) имеет решение, когда подкоренное выражение неотрицательно. Его первый сомножитель $k^2 - 1$ в рассматриваемом промежутке меньше нуля, а квадратный трёхчлен $k^2 + 2k - 2$ меньше либо равен нулю, если $-\sqrt{3} - 1 \leq k \leq \sqrt{3} - 1$.

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - 1$, то для любого

$k \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ решение уравнения

(8) существует. Попытаемся выяснить, когда существуют решения, большие единицы. Разложим для этого коэффициент при m^2 в уравнении (8) на линейные множители:

$$\begin{aligned} 4k^3 - 6k^2 + 1 &= \\ &= 4 \left(k + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что при $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ коэффициент при m^2 в уравнении (8) является положительным, а при $k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — отрицательным (что соответствует результатам эмпирического исследования).

К сожалению, дальнейшая аналитическая оценка значений корней уравнения (8) является не менее сложной задачей, чем оценка корней уравнения (5). Поэтому рекомендуется опять экспериментально проверить, что для любого $k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ один из корней уравнения (8) будет больше 1.

На примере рассекающего тетраэдра на два равнообъёмных пятигранника показано, как при составлении задач можно использовать вычислительные возможности интерактивной математической системы GeoGebra.

Список источников

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна — решения разные. Геометрические задачи: Кн. для учащихся. М.: Просвещение, 2000. 224 с.
2. Котий О., Майоров А. Семейство прямых, делящих площадь пополам // Квант. № 8. 1990. С. 20–24.
3. Лурье М.В. Геометрия. Техника решения задач: Учебное пособие. 3-е изд. стер. Ростов-на-Дону: Феникс: Издательский отдел УНЦ ДО, 2002. 240 с.

Статья поступила в редакцию
принята к публикации

02.12.2021;
08.02.2022.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АНИМАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

USING COMPUTER ANIMATION WHEN LEARNING TO SOLVE PROBLEMS WITH PARAMETERS

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_43

С.В. Ларин, канд. физ.-мат. наук, профессор,
КГПУ им. В.П. Астафьева (Красноярск),
larin_serg@mail.ru

S.V. Larin, PhD (Math and Phys), professor,
KSPU named after V.P. Astafieva (Krasnoyarsk),
larin_serg@mail.ru

Аннотация: цифровизация образования всё больше показывает свою эффективность как новая составляющая дидактики обучения. Использование анимационных возможностей компьютерных сред относится к технологической части цифровизации обучения математике. Цель статьи – представить анимационные рисунки, выполненные в среде GeoGebra, которые эффективно можно использовать при обучении школьников решению задач с параметрами

Abstract: digitalization of education increasingly shows its effectiveness as a new component of the didactics of learning. The use of the animation capabilities of computer environments refers to the technological part of the digitalization of mathematics teaching. The purpose of the article is to present animated drawings made in the GeoGebra environment, which can be effectively used in teaching schoolchildren to solve problems with parameters

Ключевые слова: цифровизация образования, анимационные рисунки, среда GeoGebra, задачи с параметрами

Keywords: digitalization of education, animation drawings, GeoGebra environment, tasks with parameters

© Ларин С.В., 2022

Цифровизация образования естественным образом распадается на две составляющие: коммуникативную и технологическую [1]. Коммуникативная часть обеспечивает реализацию дистанционного обучения, административный документооборот, связь учебного заведения с общественностью и др. Использование же анимационных рисунков на уроках математики относится к технологической части цифровизации обучения. При создании анимационных рисунков мы использовали свободно распространяемую программу GeoGebra. С её анимационными возможностями можно познакомиться, например, по публикациям [3, 4].

Анимационным рисунком мы называем разовую или множественную смену отдельных кадров анимации (стационарных рисунков, в том числе текстов с формулами), выполняемую специальными средствами анимации, содержащимися в используемой компьютерной программе. В нашем случае мы используем следующие средства анимации, заложенные в программе GeoGebra.

1. Инструмент «ползунок». Он представляет собой отрезок с точкой на нём. Точка изображает текущее значение параметра, а отрезок – область его изменения. Варьировать значения параметра можно перемещением точки по отрезку.

2. Инструмент «флажок». Он формируется из «Заголовка» и выбора объектов для скрытия / открытия. В качестве заголовка у нас выступают слова «Решение» и «Ответ». Слева от заголовка располагается квадратик с птичкой, символизирующей видимость объекта. Если курсором кликнуть на «птичку», она «улетит» и одновременно объект исчезнет. Если кликнуть на пустой квадратик, то «птичка прилетит» и объект появится. Это можно использовать для оперативного тестирования знаний учащихся.

3. Условия видимости объекта. В качестве таковых, как правило, выступает некоторое равенство, выполнение которого приводит к открытию объекта, иначе – объект будет скрыт.

Представим анимационные рисунки, содержащие решения задач с параметрами. Подобные им можно найти в [5].

1. Выражение с переменными и его значение. На анимационном рисунке 1 представлен текст задачи. Ползунками изменяются: степень n (на рисунке $n = 2$), числитель и знаменатель значения дроби $\frac{a}{b}$ (на рисунке числитель $a = 5$, знаменатель $b = 3$ и $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$). Выбор значений параметров на ползунках позволяет тиражировать однотипные задания. Заметим, что при $n = 2$, $a = 2$, $b = 3$ получается задание 6 варианта 1 из [2], с. 7.

Сначала решение и ответ на анимационном рисунке скрыты, и ученик решает задачу самостоятельно в тетради. Затем он открывает решение на рисунке и проверяет себя. После нескольких подобных упражнений с разными данными на ползунках, когда ученик добился правильного самостоятельного решения, ему можно предложить сформулировать и решить общую задачу с параметрами n , a и b .

Значение выражения с переменными

Упростите выражение $\frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 y^2 + y^4}{x^4 - y^4}$

и вычислите его значение, если $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$.

✓Решение.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 y^2 + y^4}{x^4 - y^4} &= \frac{x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2)}{x^4 - y^4} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{x^2}{y^2} + 1}{\frac{x^2}{y^2} - 1} = \\ &= \frac{\frac{5^2}{3^2} + 1}{\frac{5^2}{3^2} - 1} = \frac{34}{16} = 2.125. \end{aligned}$$

✓Ответ: $\frac{34}{16} = 2.125$.

Для получения новой задачи перемещай точки на ползунках:

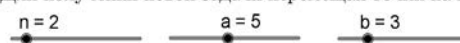


Рис. 1

2. Уравнения с параметрами. На анимационном рисунке 2 представлена задача с параметром, содержащимся в уравнении. С помощью ползунков изменяются числовые данные. Ученику предлагается на анимационном рисунке скрыть решение и ответ и решить задачу при выбранных значениях параметров на ползунках, а затем открыть решение и сверить его со своим. Можно ограничиться открытием только ответа. Далее вновь следует вопрос: сформулировать задачу с буквенными параметрами b и d и решить её.

Уравнение с параметром

Найдите значение параметра a ,

при котором уравнение $21 - 6^{x-a} = \sqrt{441 - 6^{2x-3a}}$ имеет корень 6.

✓Решение.

Обозначим $t = 6^{x-a}$. Тогда $t > 0$ и

$$\begin{aligned} \begin{cases} 21 - t = \sqrt{441 - t^2}, \\ t > 0; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 441 - 2 \cdot 21 \cdot t + t^2 = 441 - t^2, \\ 0 < t \leq 21; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} t^3 + t^2 - 42t = 0, \\ 0 < t \leq 21; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 42}, t = 0, t = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 42}, \\ 0 < t \leq 21; \end{cases} \Leftrightarrow \\ t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{169}}{2} = 6; 6^{x-a} = t = 6, 6 - a = 1, a = 5. &\quad \checkmark \text{ Ответ: } a = 5 \end{aligned}$$

Для получения новой задачи перемещай точки на ползунках

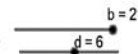


Рис. 2

Заметим, что при изменении значений параметров b и d становятся видимыми лишь те задания, которые приводят к целочисленным значениям параметра t , чтобы избежать нежелательных вычислительных трудностей. При $b = 3$ и $d = 1$, например, получим задание 1 [2, с. 10].

3. Неравенства с параметрами. На одном анимационном рисунке (рис. 3) при значениях параметра $n = 1, 2, 3, 4, 5$ на ползунке открываются различные задачи на решение неравенств с параметрами. При этом для каждой задачи (при выбранном значении n) изменением соответствующих параметров на ползунках можно найти первые задачи всех вариантов из пособия [2] на с. 16–21. При выбранных значениях параметров появляется текст задачи, а также решение и ответ, которые можно открыть/скрыть.

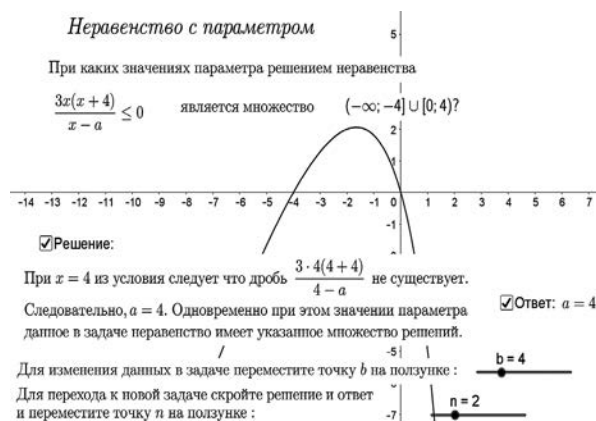


Рис. 3

4. Функции с параметрами. На анимационном рисунке 4 решается задача с параметром a , касающаяся нахождения области определения функции.

Снова учащемуся предлагается скрыть решение и ответ, а затем решить самостоятельно в тетради задачу с выбранными данными на ползунках. После этого открыть решение и ответ. Как только ученик добился решения частных задач

без затруднений, ему можно предложить сформулировать и решить общую задачу с ползунковыми параметрами. Продвигаясь от частных примеров к их обобщениям с параметрами, ученик повторяет путь математика-исследователя, который всегда стремится к получению результата в наиболее общей формулировке. Так что здесь можно увидеть формирование у обучаемого одного из профессиональных качеств будущего математика.

Функция с параметром

При каком значении параметра a областью определения

функции $y = \frac{a-x}{4a-\sqrt[3]{x-3}}$ является промежуток $[3, 259) \cup (259, +\infty)$?

✓Решение.

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Следовательно, $x - 3 \geq 0$, откуда область определения функции ограничена неравенством $x \geq 3$.

По условию, из области определения исключается число $x = 259$, когда знаменатель равен 0: $4a - \sqrt[3]{x-3} = 0$.

Отсюда $4a = \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{259-3} = 2$, $a = \frac{2}{4} = 0.5$.

✓Ответ: $a = \frac{2}{4} = 0.5$.

Для формулировки новой задачи переместите точки на ползунках:



Рис. 4

Замечание. При $n = 2$, $m = 3$, $b = 2$, $d = 2$ получаем задание 1 варианта 5 (см. [2, с. 34]).

5. Линейное уравнение с параметрами. Анимационный рисунок 5 демонстрирует исследование линейного уравнения с параметрами с геометрической иллюстрацией всех возможных случаев. Используются два ползунка для параметров n и m , позволяющих переходить от одного вопроса к другому.

При $n = 1$ демонстрируется случай $a = k = 0$. Уравнение принимает вид $0y = 0x + b$, которое при $b = 0$ является верным равенством и множество решений уравнения геометрически образует множество всех точек координатной плоскости (а не прямую), а при $b \neq 0$ получаем

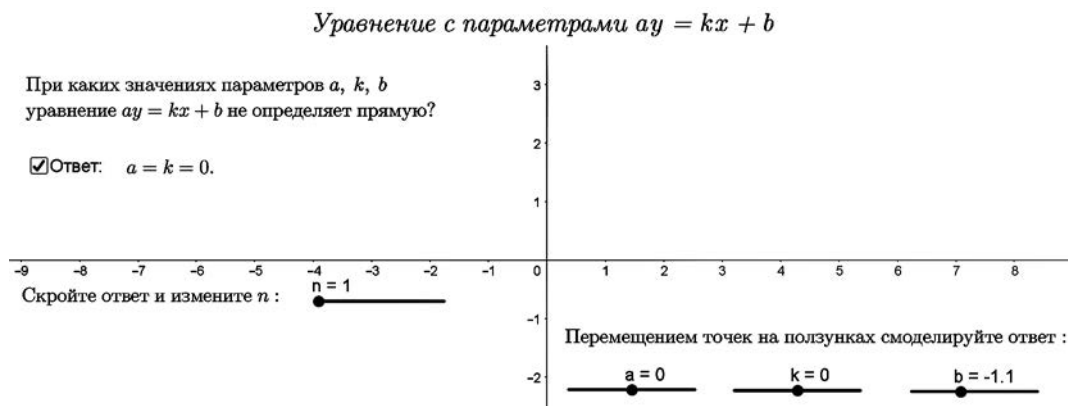


Рис. 5



Рис. 6

неверное равенство, так что множество решений уравнения пусто.

При $n = 2$ появляется ползунок с параметром m . При изменении этого параметра последовательно появляются следующие вопросы: как расположена прямая $ay = kx + b$ (тем самым предполагается, что хотя бы один из параметров a или k отличен от нуля) и через какие точки осей координат она проходит, если: $a = 0, k \neq 0, b = 0$ (при $m = 1$), $a = 0, k \neq 0, b \neq 0$ (при $m = 2$), $a \neq 0, k = 0, b = 0$ (при $m = 3$), $a \neq 0, k = 0, b \neq 0$ (при $m = 4$), $a \neq 0, k \neq 0, b = 0$ (при $m = 5$), $a \neq 0, k \neq 0, b \neq 0$ (при $m = 6$, рисунок 6)? Наконец, при $m = 3$ появляется вопрос: при каких значениях параметров a, k, b прямая $ay = kx + b$ не является графиком функции? Открыв

ответ, читаем: $a = 0, k \neq 0$. Для каждого случая предлагается ответ сопроводить геометрической демонстрацией при соответственно выбранных параметрах.

6. Система двух линейных уравнений с параметрами. По этой теме создан анимационный рисунок 7, на котором рассматривается следующая система:

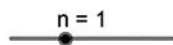
$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Последовательно можно открыть решение данной системы (при $n = 1$, рисунок 7а), ответ (при $n = 2$, рисунок 7б) и геометрическую интерпретацию ответа, когда данная система рассматривается на геометрическом языке, характеризуя взаимное расположение двух прямых (при $n = 3$, рисунок 7в).

Решите систему уравнений с параметрами

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Изменяйте n :



Решение.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ ax + by = c; \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3-4y}{5}, \\ a\frac{3-4y}{5} + by = c; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0.6 - 0.8y, \\ 3a - 4ay + 5by = 5c; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0.6 - 0.8y, \\ (5b - 4a)y = 5c - 3a. \end{cases}$$

Рассмотрим все возможные случаи относительно второго уравнения последней системы.

$$1) 5b - 4a \neq 0. \text{ Тогда } y = \frac{5c - 3a}{5b - 4a}, x = 0.6 - 0.8 \frac{5c - 3a}{5b - 4a}, x = \frac{3b - 4c}{5b - 4a}.$$

$$\text{Исходная система имеет единственное решение } x = \frac{3b - 4c}{5b - 4a}, y = \frac{5c - 3a}{5b - 4a}.$$

2) $5b - 4a = 0, 5c - 3a \neq 0$ ($\frac{a}{5} = \frac{b}{4} \neq \frac{c}{3}$). Уравнение $(4b - 4a)y = 5c - 4a$ решения не имеет, следовательно, данная система решения не имеет.

3) $5b - 4a = 0, 5c - 3a = 0$ ($\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$). Тогда любое значение переменной y удовлетворяет уравнению

$(5b - 4a)y = 5c - 3a$. Следовательно, исходная система имеет бесконечное множество решений, совпадающее с множеством решений первого уравнения системы.

a)

Решите систему уравнений с параметрами

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Изменяйте n :



Ответ :

если $5b - 4a \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{3b - 4c}{5b - 4a}, y = \frac{5c - 3a}{5b - 4a};$$

если $5b - 4a = 0, 5c - 3a \neq 0$, то система несовместна;

если $5b - 4a = 0, 5c - 3a = 0$, то множество решений системы совпадает с бесконечным множеством решений первого уравнения системы.

б)

Решите систему уравнений с параметрами

$$\begin{cases} 5x + 4y = 3, \\ ax + by = c. \end{cases}$$

Изменяйте n :



Ответ на геометрическом языке.

Данную систему линейных уравнений рассмотрим как систему двух прямых.

Если $5b - 4a \neq 0$, то прямые системы пересекаются

в точке $\left(\frac{3b - 4c}{5b - 4a}, \frac{5c - 3a}{5b - 4a}\right)$;

если $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} \neq \frac{c}{3}$, то прямые системы параллельны;

если $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$, то прямые системы совпадают.

в)

Рис. 7

Следующим шагом можно преобразовать этот анимационный рисунок, заменяя числовые коэффициенты первого уравнения системы параметрами, регулируемые ползунками. Отметим, что любой сборник задач с параметрами может послужить основой для аналогичного создания анимационных рисунков с целью тиражирования заданий, тренинга и оперативного тестирования знаний учащихся.

Список источников

1. Зимнякова Т.С., Ларин С.В., Ларина Е.И. Особенности использования цифровых образовательных ресурсов в обучении математике и физике // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева, № 2 [48]. 2019. С. 26–32.
2. Иванов С.О. М 34 Математика. Учимся решать задачи с параметрами. Подготовка к ЕГЭ: задание С5 / С.О. Иванов, Е.А. Войта, А.С. Ковалевская, Л.С. Ольховая; под ред.

Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Изд. 2-е, перераб. Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. 48 с.

3. *Ларин С.В.* Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. Ростов-на-Дону: «Легион», 2015. 192 с.

4. *Ларин С.В.* Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде GeoGebra. 2-е изд., исправ. и доп. Учебное по-

сobie для вузов. – М.: «Юрайт», 2018. 233 с.

5. Цифровой образовательный ресурс «Анимация в задачах с параметрами». Режим доступа: <https://elib.kspu.ru/document/65188> (дата обращения 18.02.2022).

Статья поступила в редакцию
принята к публикации

28.01.2022;
21.03.2022.

АНОНС

Читайте в четвёртом номере журнала «Математика для школьников» следующие статьи

АКАДЕМИЯ МАТЕМАТИКИ

Волотов Н.Н. (г. Липецк)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, ПРЕДСТАВИМЫЕ В ВИДЕ КОМБИНАЦИИ СУММЫ СЛОЖНЫХ КУБИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

В работе рассматривается теорема о достаточных условиях существования алгебраических чисел специального вида, строится алгоритм конструирования рациональных уравнений третьей и четвёртой степени с двумя параметрами, имеющих такие корни.

КЛУБ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Котелина Н.О., Певный А.Б. (г. Сыктывкар)

АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ ОТ ДЕЛЕНИЯ

В статье исследуется явление периодичности в последовательности остатков от деления на фиксированное натуральное число m . В частности, решаются задачи нахождения остатка при делении «большого» натурального числа на «маленькое», а также определения периода при разложении дроби $1/n$ в десятичную дробь.

МАТЕМАТИКА – ЭТО ИНТЕРЕСНО

Цайгер М.А. (г. Беэр-Шева, Израиль)

ЗАПИСЬ ЧИСЕЛ В РЕШЁТКАХ

В статье раскрывается сущность и приводятся конкретные примеры оригинального способа записи чисел — в решётках, использовавшегося в Московском государстве в XVI–XVII веках. Такой способ записи применялся применительно к денежным суммам, объёмам сыпучих продуктов (зерно и т.п.) и весу.

В одном из источников автор обнаружил пример записи чисел в решётках к отвлечённым (без единиц измерения) числам.

ОБРАЗОВАНИЕ В СССР В 1950-Е ГОДЫ: ВЗГЛЯД С ЗАПАДА

Реформа образования после перехода к капитализму в 1991 году привела к краху образования. Однако падение уровня образования в стране началось не на этом рубеже, а гораздо раньше. Тому было несколько причин. Из чисто политических соображений «партия и правительство» взяли курс на замену системы образования системой симуляции образования. Удобным поводом для перелома стало столетие со дня рождения В.И. Ленина, отмечавшееся в 1970 году. Школам стали насаждать принцип, который в одном из интервью С.Е. Рукшин назвал ложно демократическим: «Все дети талантливы! Нужно только открыть в каждом талант». Можно вспомнить ещё одно расхожее суждение: «Ребёнок – это чистый лист бумаги. Что напишет на нём учитель, то и будет».

Что следовало из того, что такие положения приняли за основу? Если с обучением какого-то ученика ничего не получалось, то винули в этом, разумеется, учителя: он плохо раскрывал талант ребёнка и не написал на «чистом листе», что надо. Тем самым с ученика снималась ответственность за результативность его учебного труда. Хотя ничего не получиться могло по причине неготовности или нежелания ученика работать. Наметили даже план перевода второгодников в следующий класс безо всякой последующей работы с ними: в 1968 году – 30%, в 1969 – 50%, в 1970 – 70% второгодников... А дальше всё посыпалось. Да ещё при этих условиях

провели неудачную реформу математического образования.

Вот почему, когда говорят, что советское образование было не очень хорошим, нечего жалеть о потере, то я с этим могу согласиться, но необходимо уточнить, о каком периоде советского образования мы говорим. Если о времени до создания льготных условий существования в школе слабых учащихся и лодырей, то я с таким мнением не соглашусь. Давайте поговорим о периоде до введения упомянутых послаблений и создания системы симуляции образования, когда стали проверять не уровень знаний и владения умениями у школьников, а то, какая школа больше переведёт в следующий класс двоечников, а когда перевели всех, то стали соревноваться, кто больше наставит «четвёрок» и «пятёрок».

1. Образование – это оружие

Дадим слово непредвзятым свидетелям, владевшим информацией о нашем образовании 1950-х годов.

Начало ноября 1955 года в Москве выдалось солнечным. Прекрасная погода стояла всю неделю, пока в столице гостила семья бывшего сенатора от штата Коннектикут Уильяма Бентона. На правах председателя правления компании, известной изданием знаменитой энциклопедии «Британника», и члена различных миссий ООН, связанных с просвещением, Бентон приехал в Со-

ветский Союз вместе с женой и сыном Джоном...

Пока Джон продолжал ходить в школу, его отец не терял времени зря. Он хотел узнать как можно больше об устройстве советской образовательной системы, поэтому встречался с множеством чиновников в сфере образования, в частности много времени провёл с первым проректором МГУ химиком Григорием Вовченко.

Шокированному Уильяму расскажут, что в СССР больше 70% детей и подростков от 7 до 17 лет ежедневно ходят в школы, а это 4,3 миллиона человек (в США к тому моменту насчитывалось всего 2,7 миллиона школьников). Что в стране есть более 2000 техникумов – спецзаведений, где обучают рабочим профессиям за 2–4 года (в США у техникумов не было аналогов), и это не только технические и строительные специальности или профессии сферы услуг вроде парикмахера и повара, в этих заведениях обучают и будущих музыкантов, и медиков, и преподавателей.

Как признавал позже Бентон, советская система образования имела очевидное преимущество перед американской в вопросе manpower, то есть человеческих ресурсов. Уже с десятого класса советский школьник выбирал для себя стезю, в которой собирался развиваться, и затем без проблем поступал в высшее учебное заведение. Химии, физике и другим естественно-научным предметам уделяли больше времени, и это без учёта факультативов и дополнительных вечерних занятий. Да и в целом советские школьники учились больше американских, получали больше знаний за более короткий промежуток времени. И что самое ужасное, как раз в 1956 году образование в СССР стало бесплатным.

В письме к главе ЦРУ Аллену Дал-

лесу Бентон признавался: образование – это новая арена для «соревновательного сосуществования» двух систем. И США отнюдь не лидер. В стране, напоминал Бентон, в прошлом году (данные за 1957 год) выпустилось всего 125 новых учителей физики на 28 000 школ. «Мой отчёт можно уложить в одну фразу. Я вернулся из СССР полностью убеждённым, что образование становится основным театром противостояния в холодной войне. Советские классные комнаты, библиотеки, лаборатории, методы обучения должны тревожить нас гораздо больше, чем водородные бомбы или самонаводящиеся ракеты доставки»¹.

2. Миф об американском превосходстве

18 февраля 1958 года сенатор и будущий президент США Джон Кеннеди выступил на ежегодном банкете выпускников колледжа Лойола (Балтимор, штат Мэриленд). В своей речи он развеял мифы об интеллектуальном превосходстве американцев над русскими. «Мы высмеивали заявления России о том, что она является первой в самых разных областях... Мы спокойно предположили, что марксистская догма и тоталитарные репрессии породят только отупевшие умы и нелепые теории, такие как генетика Лысенко. Но сегодня мы смеёмся не над спутниками»².

И далее о советских разработках: «Но наше настоящее сожаление не о том, что русские украли у нас их секреты, а о том, что мы не смогли украсть их у русских. Есть и те, кто убеждены, что каждое рус-

¹ См. <https://ruposters.ru/news/29-10-2020/obrazovanie-oruzhie-senator-otpravil-sina>.

² См. <https://www.jfklibrary.org/archives/other-resources/john-f-kennedy-speeches/baltimore-md-19580218>.

ское достижение – это просто грубое подражание нашему. Но дело в том, что во многих областях мы стремимся подражать русским... Наши учёные восхищаются советскими спутниками. Наши авиаинженеры завидуют их межконтинентальным реактивным бомбардировщикам. Наших физиков-атомщиков поразили их атомные реакторы, вырабатывающие 5000 киловатт коммерческой электроэнергии... Короче говоря, мы сильно обманулись насчёт русских интеллектуальных достижений... И мы совершенно не поняли решающей важности интеллектуальных достижений в гонке за безопасность и выживание».

«Квалифицированные технические специалисты России, заявил премьер Булганин³ на съезде Коммунистической партии, являются её “золотым запасом”. Эти технические специалисты выпускаются миллионами в соответствии с текущим пятилетним планом, столько же, сколько и последние две пятилетки вместе взятые. Кремль, который оплачивает их обучение, может отправить их по окончании учёбы в любую точку мира. В то время как мы в Соединенных Штатах не в состоянии производить достаточное количество инженеров и учёных для удовлетворения наших собственных потребностей...»

Кеннеди также сравнивает образование в обеих странах. «Кто имеет сегодня лучшую систему образования – США или СССР? Кто добьётся этой победы?.. Давайте хотя бы осознать, с чем мы сталкиваемся. Американские учащиеся, окончившие среднюю школу, проходят 12-летнее обучение, тогда как русские учатся только 10 лет. Но за эти 10 лет они получают больше часов обучения, чем американ-

ские за 12. Они посещают занятия 6 дней в неделю, 10 месяцев в году (9 месяцев. – *А.Ш.*)... У них примерно 17 учеников (возможно, за счёт малокомплектных сельских школ. – *А.Ш.*) на одного учителя, у нас 27. Кроме некоторого выбора в изучении иностранных языков, у них нет никаких факультативных предметов. 10-летний учебный план включает в обязательном порядке 5 лет физики, 5 лет биологии, 4 года химии, 1 год астрономии и 10 лет математики вплоть до тригонометрии и элементарного исчисления (элементов математического анализа. – *А.Ш.*). Немногие 12-летние учебные программы в Америке охватывают столько же.

Председатель комиссии по атомной энергии Штраус заявил: “Я не знаю ни одной государственной средней школы в нашей стране, где ученик получал бы столь основательную подготовку в области естественных наук и математики, даже если он стремится к этому, даже если он должен быть потенциальным Эйнштейном, Эдисоном, Ферми или Беллом”. Лишь небольшая часть наших выпускников средней школы хотя бы один год изучала химию. Ещё меньшая часть изучала годичный курс физики. На самом деле более половины наших школ вообще не преподают физику...

Наше отставание в математике ещё более шокирует. Русский ребёнок, как я понимаю, учится пользоваться логарифмической линейкой в пятом классе (это не так. – *А.Ш.*). Их школы в прошлом году выпустили около 1,5 миллиона учащихся с углублённой подготовкой по арифметике, алгебре, геометрии, астрономии, тригонометрии и элементарному исчислению. Но мы выпустили менее 100 000 учащихся с какой-либо подготовкой в области высшей математики... Опрос 211 будущих учителей начальных классов показал, что 150

³ Н.А. Булганин (1895–1975) – советский государственный деятель, в 1955–1958 годах председатель Совета Министров СССР.

из них всегда ненавидели арифметику. Большая часть наших средних школ не предлагает занятий по углублённой математике или даже геометрии».

Что касается высшего образования, то «русские студенты получают в среднем вдвое больше учебных часов, чем американцы. Им платят за учёбу, их обучение обеспечивается государством, а их преподаватели получают зарплату в несколько раз выше, чем представители большинства других профессий. В результате приём в советские высшие учебные заведения уже превышает наш, и они растут быстрее... Короче говоря, как торжественно отметил Эдвард Теллер⁴, Америка уже проиграла холодную войну науки».

Таковы «показания» двух свидетелей из США, датированные 1955 и 1958 годами. Обоих трудно заподозрить в желании приукрасить советское образование в сравнении с американским.

3. Доклад Мэндерса

В 1959 году доктор Чарлз Мэндерс из Великобритании выступил на заседании комитета по вопросам науки НАТО с докладом на тему «Научно-техническое образование и кадровые резервы в СССР», в котором он сравнил советскую систему образования с западными, выделил преимущества первой и указал факторы, способствовавшие нашему успеху. Главный его вывод: попытки отдельных государств, самостоятельно соревнующихся с СССР, обречены на провал; если невозможно превзойти советские методы, нужно всерьёз задуматься над их заимствованием и адаптацией.

⁴ Американский физик-теоретик, «отец водородной бомбы».

⁵ См. <https://statehistory.ru/4316/Analiticheskaya-zapiska-NATO-ob-obrazovanii-v-SSSR-1959-g/>.

Привожу этот документ без сокращений и редакционного вмешательства⁵.

«Научно-техническое образование и кадровые резервы в СССР»

I. Вступление

1. Когда Советский Союз был образован немногим более 40 лет назад, государству пришлось столкнуться с огромными трудностями. Урожай советского юга был уничтожен нашествием саранчи, в результате чего отмечался дефицит продовольствия и низкий моральный дух населения. Обороне не способствовало ничего, кроме рационального использования территориальных и климатических условий. Государство отставало в образовании и других социальных сферах, неграмотность была широко распространена, и спустя почти 10 лет советские журналы и печатные издания по-прежнему сообщали о том же уровне грамотности. Сорок лет назад безнадёжно не хватало обученных кадров, чтобы вывести советский народ из трудной ситуации, а сегодня СССР оспаривает право США на мировое господство. Это достижение, которое не знает равных в современной истории.

II. Некоторые факторы, способствовавшие быстрому улучшению образования при советском режиме

2. Естественным образом, целый ряд факторов способствовал советскому прогрессу последних сорока лет, и те, что упоминаются здесь, представляют лишь малую часть того, что имело значение. Несмотря на то, что настоящий документ был написан в отношении научно-технического образования, большая часть сказанного может быть отнесена к любой другой сфере человеческой мысли. Советская практика во многом отличается от практики западных стран, и данная ра-

бота уделяет необходимое внимание этим различиям.

(i) Руководители, получившие научно-техническое образование

С самого начала советские руководители отчётливо понимали, что наука и техника – важнейшие средства достижения военных и экономических целей коммунизма. Научно-технические дисциплины, на которые более сорока лет делался акцент, хорошо представлены в основном образовании действующих советских руководителей. Президент Академии наук СССР в силу занимаемой должности является членом Президиума, который можно сравнить с кабинетом премьер-министра Великобритании или кабинетом председателя правления Франции. 39 из 67 членов этого органа власти получили научно-техническое образование. К тому же первый заместитель председателя и 9 из 13 заместителей председателя Совета Министров получили научно-техническое образование. У научно-технологических проектов в СССР больше шансов быть принятыми на высшем административном уровне, нежели в западных странах.

(ii) Централизованный контроль и планирование

Эти факторы предоставляют очевидные преимущества для достижения максимальной эффективности программ профессиональной подготовки. Можно установить единый образовательный стандарт для всей страны, упростить систему обучения и устранить большинство причин, вносящих путаницу в западных странах, где система стала раздробленной. Если планирование и производство согласованы, то отсутствует безработица, а на всех рабочих местах, необходимых государству, оказываются люди с подходящей квалификацией. В централизованной системе, разумеется, существует возможность быть

либо блестяще правым, либо катастрофически заблуждаться. Суть советского метода такова: министерства прогнозируют свои потребности в материалах и людских ресурсах на пяти-, теперь семилетний план в соответствии с общей директивой от партийного руководства. Изложенные министерствами требования, которые каждый год немного изменяются на основании опыта, сопоставляются, и Государственный плановый комитет разрабатывает планы. Части плана, касающиеся научно-технических вопросов, утверждаются Академией наук.

(iii) Вновь обученные кадры в распоряжении государства

Почти все, кто обучается сверх образовательного минимума, установленного законодательством Советского Союза, получают государственное финансирование. Государство требует, чтобы выпускники высших или средних специальных учебных заведений отработали три года по распределению после завершения обучения. Из числа молодых людей, не обременённых другими обязательствами, около 750 тысяч получили высшее образование и 1,2 миллиона – среднее специальное образование. Эти кадровые резервы в любой момент могут быть подключены к решению приоритетных задач государства, таких как грандиозные планы развития, преподавание и других. Эти 2 миллиона специалистов не являются низкооплачиваемыми сотрудниками, они получают достойную зарплату и, более того, не обязаны служить в армии.

(iv) «Малые» дисциплины

СССР – большое государство, поэтому оно способно организовать полноценные группы по изучению таких предметов, как создание и устройство гироскопов и паровых котлов. В то же время западные страны могут предложить лишь эпизоди-

ческие курсы не самого высокого качества по причине малого количества студентов и преподавателей.

(v) *Тщательное изучение западных курсов*

Западные публикации обычно доступны в переводе в основных советских учреждениях не позднее двух месяцев после оригинальной публикации. Академический институт научной информации располагает лучшей и самой полной службой реферирования в мире. Если этого требуют обстоятельства, Советы готовы получать информацию путём шпионажа.

(vi) *Возвращение в систему образования*

На протяжении многих лет значительная доля обученных кадров возвращается обратно в систему образования, чтобы подготовить ещё больше специалистов. Преподавание – хорошо оплачиваемое и престижное занятие. Чистый ежегодный прирост обученных кадров составляет 7% в СССР (для сравнения: в США 3,5%, в Великобритании 2,5–3 %).

(vii) *Усиленное изучение основных дисциплин*

В последние годы, по крайней мере, во всех учебных программах, предлагаемых в Советском Союзе, делается упор на усиленное изучение основных дисциплин. В каждом из 200 учебных планов технической направленности, действующих в высших учебных заведениях, 10% времени отведено высшей математике и столько же физике. Большое количество обученных кадров и быстрый технологический прогресс достигнуты отнюдь не поверхностными усилиями.

(viii) *Подготовка преподавателей – первоочередная задача*

С каждым новым этапом научно-технического прогресса начинается соответствующая программа подготовки пре-

подавателей. С 1955 года в Московском государственном университете готовят преподавателей программирования (Приложение 1)⁶.

(ix) *Эффективная пропаганда*

На Западе советскую пропаганду и ложь часто считают синонимами. Пропаганда успешно держит национальные цели в поле зрения советских людей, испытывающих радостное волнение по мере достижения этих целей. В СССР есть должности, которые занимают неохотно, рабочие места, на которых трудятся без особого желания. Пропаганда в учебных заведениях изображает работу на таких должностях и позициях как увлекательное испытание и заставляет молодых людей с готовностью трудиться на благо своей страны в не самых благоприятных условиях.

III. Ступени советского образования

3. Диаграмма в Приложении 1 представляет положение дел во время последнего 5-летнего плана (от которого отказались) и, хотя в начальном и среднем образовании грядут изменения, диаграмма показывает систему, которая будет применяться большую часть времени текущей семилетки.

4. Обучение в учебных заведениях в Советском Союзе начинается с 7 лет. Начальное образование длится 7 лет (это неполная средняя школа – семилетка. – А.Ш.). К 1960 году последний 5-летний план ставил целью сделать 10-летнюю школу общедоступной. Там, где 10-летнее школьное образование доступно, местное законодательство делает его обязательным, в результате чего число выпускни-

⁶ Приложения см. в оригинале: https://archives.nato.int/uploads/r/null/6/1/6109/AC_137-D_40_ENG.pdf.

ков 10-летней школы выросло в течение последнего 5-летнего плана с 440 тысяч до 1,5 миллиона в год. Юноши и девушки обучаются по одинаковой программе в 7- и 10-летней школах. На второй стадии классического образования, то есть в восьмом, девятом и десятом классах 10-летней школы, ученики проводят 42% времени за изучением математики, физики и химии. Выпускники 10-летней школы не так хорошо обучены, как выпускники шестого класса английской гимназии с научным уклоном или юноши и девушки, окончившие вторую научную ступень французского лицея. Значительно более высокий средний уровень в научных дисциплинах достигается, однако, всеми, кто завершил курс 10-летней школы в СССР. Речь идёт о гораздо большем числе учеников, чем на Западе (Приложение 3).

5. Другие возможности по окончании 7-летнего обучения проиллюстрированы на диаграмме в Приложении 1. Для выпускников существует возможность трудоустроиться, но число тех, кто это делает, резко сократилось во время последней пятилетки. Школы трудового резерва работают совместно с промышленностью и сельским хозяйством. Специальные средние школы, преимущественно техникумы при соответствующих министерствах, предоставляют специальное образование по двум с лишним тысячам специальностей; курсы имеют ярко выраженную практическую направленность.

6. В последние годы около 40% выпускников 10-летней школы наряду с меньшим процентом выпускников средних профессиональных учебных заведений продолжают обучаться в высших учебных заведениях (Приложение 2). Ходят слухи об увеличении этого показателя до 70%. Университеты готовят лишь 10% обученных кадров в Советском Союзе, а

преподавание в них ведётся только по основным дисциплинам. Курс педагогического института длится 4 года, обучение основным дисциплинам в университетах (не включая физику) длится 5 лет. Большинство технических учебных программ (также по физике) рассчитано на 5,5 лет, а программа по медицине – на 6 лет. Студенты всех специальностей, кроме педагогики, на протяжении 6 месяцев работают над дипломным проектом; результаты исследования воплощаются в письменной дипломной работе, которая защищается публично. Примерно 1 из 6 или 7 выпускников высших учебных заведений продолжает образование. Студенты, аспиранты и докторанты должны обладать знанием одного, двух и трёх иностранных языков соответственно.

Вносимые изменения

7. В меморандуме Хрущёва в сентябре 1958 года был намечен переход от 7-летнего начального образования к 8-летнему. За ним будет следовать среднее образование продолжительностью от 3 до 4 лет в одном из пяти типов школ, а именно:

- а) средней школе академической направленности, отличающейся от восьмого, девятого и десятого классов 10-летней школы наличием четырёх классов и принимающей примерно 20% окончивших 8-летнюю ступень обучения;
- б) средней школе технической направленности;
- в) специализированной средней школе для нужд театра, балета, изобразительных искусств, военной службы и т. д.;
- г) средней школе с неполной нагрузкой, позволяющей совмещать обучение с работой на фабриках и в сельском хозяйстве;
- д) вечерних школах трудового резерва.

Совершенно очевидно, что изменения в системе не означают снижения стандартов. Более того, учебная база существующих средних школ без труда может быть адаптирована для выполнения новых целей.

IV. Кадровые резервы и темпы производства

8. Приложение 4 представляет обобщённую картину по этому пункту. Первая таблица демонстрирует сильный уклон в научно-технологическую сферу в СССР. Также можно увидеть, что те, кто получил научно-техническое образование, склонны оставаться в этих областях. Престиж и награды в этих сферах деятельности высоки, особенно для преподавателей.

9. На уровне постдипломного образования СССР не испытывает нехватки в профессионалах, способных управлять государственными проектами. В высшем и школьном образовании всё указывает на то, что количество профессионально подготовленных выпускников не только без труда останется на прежнем уровне, но может быть увеличено.

10. Приложения 5 и 6 приводят процентные соотношения, последнее также кратко описывает послевоенные достижения. В этой таблице также видна заметная доля женщин в числе обученных кадров СССР.

V. Сложности и недостатки

11. Советская система образования, на различных уровнях которой обучается около 35 миллионов человек, является гигантской. Одно из её выдающихся достоинств, вытекающих из централизованного контроля и планирования, – её относительная простота. Будет интересно выяснить, как Советский Союз успешно справился с проблемами, которые преследуют западные страны.

(i) Учебные помещения

В советских учебных заведениях любого уровня нормой остаётся обучение в 2 смены, а обучение в 3 смены не является чем-то неслыханным. Обеспеченность учебными классами, лекционными залами и лабораториями, без сомнения, самая сложная проблема, с которой приходится справляться советскому образованию. Недовыполнение программы строительства послужило одним из факторов, способствовавших отказу от плана последней пятилетки. С высокой долей уверенности можно утверждать, что этот фактор ускорил изменения в системе образования на уровне средней школы. Ходят слухи, что все кандидаты на получение высшего образования должны будут отработать два года в производственно-технической сфере перед поступлением. Два года передышки позволят программе строительства наверстать упущенное. Приложение 1 показывает, что нехватка помещений – не новая проблема для СССР.

(ii) Оборудование

Западные эксперты, как правило, завидуют количеству и качеству оборудования в советских учебных заведениях.

(iii) Коэффициент учащихся на одного преподавателя

Как упоминалось ранее, в Советском Союзе нет проблемы с преподавателями, в то время как в большинстве западных стран ситуация оставляет желать лучшего⁷.

(iv) Военная служба

В силу называвшихся ранее причин в СССР не представляет никакой проблемы.

(v) Соотношение выпускников высших и средних специальных учебных заведений

⁷ В таблице указано число учащихся, приходящихся на одного преподавателя.

	СССР	США	Великобритания
Высшие учебные заведения	1–12,6	1–14,1	1–9
Школы	1–17,6	1–21 (средняя) 1–30 (начальная)	1–18,1 (сред. гимназия) 1–22,3 (сред. школа) 1–30,5 (начальная)

Западный опыт указывает на то, что на рабочих местах на одного выпускника высшего учебного заведения приходится три выпускника средних специальных учебных заведений. В большинстве советских учреждений, которые посетили западные эксперты, эта пропорция, похоже, повсеместно применяется. Коэффициент 3 к 1 не характерен для системы образования, поэтому можно предположить, что где-то в СССР существует нехватка выпускников средних специальных учебных заведений, которая влечёт определённые трудности. То, что эти трудности не очевидны, означает, что в СССР выпускники высших учебных заведений могут быть задействованы в сферах деятельности, которые на западе считаются некоммерческими.

VI. Дисциплины, представляющие интерес для обороны

(i) Математика

12. Этот предмет в СССР считается самым престижным. В стране существует первоклассная математическая традиция, а современный уровень математики в Советском Союзе уступает только уровню в Соединенных Штатах. При изучении множества советских научных работ, в особенности по физике, естественным наукам и машиностроению, становится заметным, с каким удовольствием советские учёные делают отступления в область математики. Научные работы в Великобритании часто состоят из двух частей: первая часть излагает теорию, а вторая – подтверждение этой теории, полученное опытным

путём. Советские научные работы часто состоят исключительно из теории.

Первоклассные советские математики играют гораздо большую роль, чем их западные коллеги, на инженерных конференциях, которые отличаются достаточно неформальным характером. Подобный научный подход к решению инженерных проблем, возможно, частично объясняет быстрый прогресс в этой области. Советские математики готовы применять математическую теорию в довольно мелкомасштабных опытных исследованиях. Они с удивительной лёгкостью работают в областях, где западным учёным потребовались бы дополнительные экспериментальные данные. Там, где советский метод оказывается успешным, становится возможным обойтись без промежуточных стадий исследовательской разработки. Без сомнения, недавний советский прогресс в аэродинамике и химическом машиностроении многим обязан советам математиков.

Занятие математикой настоятельно поощряется в школах. Олимпиады и математические конкурсы для учеников 8, 9 и 10 классов 10-летней школы проводятся на городском, региональном, республиканском и национальном уровнях. Особо одарённых учеников выделяют на очень ранней стадии и в последующем способствуют их обучению.

В большинстве стран существует явная вертикальная структура научных дисциплин и вертикальная иерархия среди учёных. Это мешает междисциплинарному обмену научными идеями. В СССР ма-

тематика является активно действующим компонентом во взаимном обогащении дисциплин. Достойным упоминания примером служит лаборатория вибраций Физического института имени Лебедева Академии наук СССР. Лаборатория является исследовательской организацией; сотрудники этой московской лаборатории, которые работают здесь один или два месяца в году, также трудятся в учреждениях по всему Союзу. Они занимают лидирующие позиции в целом ряде дисциплин: астрономии, радиоастрономии, спектроскопии, акустике, теоретической физике, приборостроении, морской гидрологии, электротехнике и многих других отраслях. Единственное, что их объединяет, – это интерес к волновым движениям. Возможности для обмена научными идеями в лаборатории вибраций огромны.

В Приложении 8 приводится подробный университетский учебный план по прикладной математике, а в Приложении 7 – по чистой математике. Обозначено количество часов отраслевой практики, а также перспективы автоматизации – в пунктах 19 и 20 Приложения 7.

(ii) Физика

Практически по всем вопросам этой дисциплины советские ученые находятся наравне с мировой наукой. Теоретическая физика достигла огромных высот, а в последние пять лет выдающиеся успехи демонстрируют советские исследования в области полупроводников.

В Приложении 9 представлен учебный план по физике, включая значительное количество часов, отводимых на высшую математику и отраслевую практику.

(iii) Химия

Состояние этой дисциплины в СССР описывают как довоенное, но не нужно считать это утверждение истинным. Советский Союз отстаёт в химическом маши-

ностроении, но присутствует ясное понимание данной ситуации и движение в сторону улучшения в этой области. Учебный план по химии в Приложении 10 опять же выделяет большое количество часов занятиям высшей математикой и отраслевой практике.

(iv) Машиностроение

Приложение 11 типичным образом демонстрирует, что большое количество времени выделено для занятий высшей математикой и физикой. Также отведены часы для отраслевой практики. В условиях растущей экономики, потребности который удовлетворяются за счёт развития индустриализации, машиностроение входит в число приоритетов Советского Союза. В 1958–1959 годах планируется выпустить в 3 раза больше инженеров, чем в Соединенных Штатах. Вполне возможно, что признаки насыщенности специалистами инженерного профиля скоро станут очевидны.

VII. Выводы

13. На Западе существует значительная тенденция придерживаться крайних взглядов в отношении Советского Союза. Его граждане, однако, не супермены и не второсортный материал. На самом деле это люди с такими же способностями и эмоциями, как и все остальные. Если 210 миллионов человек на Западе будут слаженно работать *с такими же приоритетами* и *с таким же рвением*, как их коллеги в Советском Союзе, они добьются похожих результатов. Государства, самостоятельно соревнующиеся с СССР, впустую растрачивают свои силы и ресурсы в попытках, обречённых на провал. Если невозможно постоянно изобретать методы, превосходящие методы СССР, стоит всерьёз задуматься над заимствованием и адаптированием

советских методов. Это может включать, помимо прочего:

(i) отказ от почитаемых, традиционных взглядов в отношении роли женщин;

(ii) выполнение необходимой государству работы теми, чьё обучение сверх образовательного минимума, установленно-го законодательством, было профинансировано за счёт бюджетных средств;

(iii) упразднение «свободного рынка» квалифицированных трудовых ресурсов; принятие и, возможно, усиление мер по его государственному регулированию.

14. Что бы ни случилось, любое государство, испытывающее нехватку преподавательского состава, должно решать эту проблему в срочном, внеочередном порядке.

Что же из этого следует? Следует жить. Не надо брать за образец позднее советское образование: оно уже было нацелено не на результат (с удивлением узнал из упомянутого выше интервью С.Е. Рукшина, что его ругали за нацеленность на результат, этот принцип посчитали капиталистическим). Оно было нацелено на получение красивых показателей в образовании, причём тех, кто руководил образованием, почему-то не смущал полный отрыв этих показателей от того, что нужно стране. А нужны были хорошо подготовленные, здоровые и развитые молодые поколения.

Вот и сейчас мы страдаем той же дурью:

во время пандемии во многих странах Запа-пада отказались оценивать учебные успехи учащихся, которые ниже ожидаемых, но не по их вине. Там признают возможности и реальную эффективность обучения «на удалёнке».

А у нас в огороде всё так и прёт! В 2021 году результаты по многим показателям в образовании лучше, чем в 2020 и даже в 2019 году, когда ковид даже не начинался! Нам докладывают о росте среднего балла ЕГЭ у поступающих в педагогические вузы, не задумываясь о том, как получены эти повышенные баллы. Они результат хорошего обучения или хорошей симуляции результатов обучения за счёт снижения уровня требований на итоговом контроле?

Что же делать дальше? Надо узнать у государства: оно хочет развития или хочет разлагаться на достигнутом уровне симуляции успехов? В зависимости от ответа будут разные дальнейшие шаги в образовании. Но во втором случае гибель государства предопределена, ему уже и замену нашли: управление через транснациональные корпорации, поскольку они эффективнее. Так было прописано в первой версии скандального документа, известного под названием форсайт-проект «Образование 2030».

А.В. Шевкин (Москва)

Статья поступила в редакцию

21.03.2022;

принята к публикации

15.06.2022.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ИНТУИЦИЯ. ЧАСТЬ I

MATHEMATICAL PROOF AND INTUITION. PART I

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_60

О.М. Корчажкина, канд. техн. наук,
старший научный сотрудник, Институт кибер-
нетики и образовательной информатики имени
А.И. Берга, ФИЦ ИУ РАН (Москва),
olgakomax@gmail.com

O.M. Korchazhkina,
PhD (Technical Sciences), Senior Research Fellow,
A.I. Berg Institute for Cybernetics and Educational
Computing, FRC CSC RAS (Moscow),
olgakomax@gmail.com

Аннотация: статья посвящена проблеме взаи-
модействия логики и интуиции в процессе ма-
тематического доказательства; делается краткий
ретроспективный обзор взглядов выдающихся
математиков на соотношение логических и вне-
логических компонентов при решении задач на
доказательство, обосновывается важность овла-
дения техникой доказательных рассуждений, от-
мечаются современные изменения в практике
математического доказательства

Abstract: the article provides a problem of how
logic and intuition can interact within the process
of mathematical proof; it also gives a brief re-
trospective review of the views that outstanding
mathematicians have on the ratio between logi-
cal and non-logical components in solving tasks
on proof. The paper substantiates the importance
of mastering the technique of evidentiary reason-
ing, and notes modern changes in the practice of
mathematical proof

Ключевые слова: математическое доказатель-
ство, интуиция, правдоподобное рассуждение,
логика, критерии доказательства

Keywords: mathematical proof, intuition, plausible
reasoning, logic, proof criteria

© Корчажкина О.М., 2022

*Математическая интуиция – это способность разума чувствовать форму
и структуру и распознавать закономерности, которые мы не в состоянии
уловить на сознательном уровне.*

Иэн Стюарт. Величайшие математические задачи

Практики математического доказательства

Доказательство как когнитивная опе-
рация является отличительной чертой
математической науки, а задачи на до-
казательство составляют неотъемлемую
часть практического компонента в школь-
ном курсе математики. И это относится не
только к доказательству теорем. Задачи
на доказательство представляют собой
самые сложные по способам логических
рассуждений учебные задания, которые

требуют привлечения глубоких предмет-
ных знаний и значительного набора ком-
плексных общеучебных компетенций.

Вместе с тем специалисты по филосо-
фии математики отмечают происходящие
в настоящее время радикальные измене-
ния в практике математического доказа-
тельства, обусловленные многообразием
математических инструментов, теорий и
подходов, а также в значительной мере
расширением математического дискурса,
включающего «не только утверждения,

но также – вопросы, догадки, гипотезы, критику и прочее» [1]. Отмечается и то, что дальнейшее развитие и совершенствование природы математического доказательства как эволюции математической мысли определяется появлением новых способов научной математической коммуникации, вызванных стремлением учёных разделить свои знания и достижения с коллегами по цеху.

Это происходит не только путём публикации результатов исследований в научных журналах или выступлений на конференциях, семинарах, симпозиумах, конгрессах различного уровня, а всё чаще – путём представления авторских материалов на суд сетевых профессиональных сообществ в виде препринтов, выполненных с использованием высокоуровневых языков программирования, например $T_E X$, $L^A T_E X$, или в среде MatLab [2]. Тем самым обеспечивается широкое профессиональное обсуждение с возможностью приводить дополнительные доводы и аргументы в защиту своего мнения или полемизировать с оппонентами, критикуя и оспаривая альтернативные точки зрения.

При этом «доказательства постепенно переходят из разряда индивидуального опыта в разряд явления опыта коллективного, [когда] следует говорить об убедительности не для отдельного индивидуума, а для целого научного коллектива» [3]. Таким образом, складывается ситуация, при которой математики достигают прогресса в решении задачи даже тогда, когда одному учёному или целому научному коллективу не удаётся довести решение до конца, но результаты их рассуждений становятся доступны всем, и любой исследователь вправе в любом контексте использовать промежуточные решения, полученные его коллегами. В этом состоит

ценность любых математических изысканий [4].

Именно возможность широкой профессиональной коммуникации привела к признанию в 2006 году мировым математическим сообществом справедливости доказательства гипотезы о гомеоморфности трёхмерной сфере односвязного компактного трёхмерного многообразия без края. Над этой задачей, поставленной великим французским учёным Анри Пуанкаре, математики бились в течение ста лет [4]. Доказательство гипотезы Пуанкаре, приведённое в серии препринтов, опубликованных в Сети в 2002–2003 годах российским математиком Григорием Перельманом с целью его публичного обсуждения, явилось решением первой и на данный момент единственной из семи «задач тысячелетия».

Итак, под доказательством как важнейшим компонентом математической аргументации *традиционно* понимается верификация определённого утверждения, догадки, гипотезы, теории и так далее *логическими методами*. Верификация доказательства означает обеспечение его надёжности, достигаемой *строгостью* и *убедительностью* научного обоснования, ядром которого является рассуждение. Тем не менее существует мнение приверженцев релятивистского направления в математике (подробнее об этом см. в [1]), что в каждом доказательстве содержится некоторая доля неопределённости и «с развитием математики (и появлением всё более сложных и длинных доказательств) доказательства теряют своё главное свойство – свойство убедительности» [3]. В этих условиях применение надёжных и достоверных (устойчивых) способов верификации гипотез должно начинаться с корректных определений и формулировок при постановке задач на доказательство.

Рассуждение и интуиция при решении задач на доказательство

Важной составляющей процесса доказательства является владение техникой рассуждений – как индуктивных, так и дедуктивных. Например, американский математик и популяризатор науки венгерского происхождения Дьёрдь Пойа (1887–1985) придавал большое значение индуктивным рассуждениям, которые он называл правдоподобными. Согласно схеме Пойа, «чтобы доказать предложение, нужно обнаружить логическое звено, связывающее его главные части – условие (предпосылку) и заключение» [5]. Умозаключение, полученное в результате индуктивного рассуждения, связывает данные задачи (*частные предпосылки*) с решением (*заключением*) не путём строго аргументированной связи, а скорее через некоторые общие математические (часто внелогические) представления, основанные на способности исследователя выбрать из множества логических возможностей наиболее правдоподобную.

Великий немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716), работавший над проблемой создания *всеобщей науки*, напротив, основное внимание направлял на рассуждения дедуктивного характера. Он полагал, что «имея формальный язык дедуктивных рассуждений, можно автоматически получить доказательство» [6], и подтверждал это многочисленными задачами с использованием механических правил [7].

Взгляды другого немецкого математика – Давида Гильберта (1862–1943), продвигавшего идею формализации всей математической науки, поколебала теорема Гёделя¹ о неполноте, упрощённо

звучащая так: в любой формальной аксиоматической системе не существует ни одного соотношения, для которого нельзя было бы найти другое соотношение, противоречащее исходному. Однако теорема Гёделя не должна повергать нас в уныние, поскольку она даёт практический совет: до начала любого доказательства следует согласовать исходные данные с аксиомами, выбрать и определить критерии доказательства, то есть установить правила вывода, которые исследователь будет считать достаточными для верификации гипотезы. Иногда правила вывода могут формулироваться не до, а во время решения задачи в соответствии с тем, какие формы принимают промежуточные решения. А при выборе системы аксиом в соответствии с контекстом конкретной задачи исследователь скорее всего будет опираться на неаксиоматический подход и полагаться на свой профессиональный опыт и на некие иные – внелогические – компоненты.

Таким образом, на практике любое математическое доказательство как рассуждение является наиболее плодотворным, если представляет собой сбалансированное «соподчинение логических и внелогических компонентов» [8]. Это означает, что в рассуждении, имеющем целью доказать некоторое утверждение, цепочки логических операций, основанных на начальных понятиях, аксиомах, уже доказанных теоремах и законах логического вывода, могут прерываться внелогическими правилами преобразования предметного характера; такие правила проистекают из свойств математических категорий, зафиксированных в определениях и являющихся вспомогательными инструментами или объектами доказательства [8]. Это придаёт всему процессу решения задачи скачкообразный харак-

¹ Курт Фридрих Гёдель (1906–1978) – австрийский логик, математик и философ математики.

тер, а сбалансированное сочетание логического и внелогического – доказательную завершённость, порядок и изящество, соответствующие сути математики, которая состоит в «изучении закономерностей, эстетике, творчестве и красоте» [9].

Возникающие в процессе математического доказательства своеобразные «точки бифуркации» – границы между логическими и внелогическими построениями, в которых мысль «заходит в тупик» и, преодолевая которые, движется от незнания к знанию, – сопровождаются проявлением особого состояния сознания исследователя – *интуиции*. Интуиция является значимым психологическим фактором принятия решений в ходе доказательства при реализации любой из форм математического дискурса, который стимулирует когнитивные процессы, «не опирающиеся на последовательное рациональное утверждение» [8], то есть утверждение, априори принимаемое как истинное. Однако если для обыденного сознания подобные утверждения не требуют доказательства, то в научных исследованиях результаты работы процессов прозрения и внутреннего озарения необходимо представлять в виде строгого и надёжного умозаключения, подтверждённого проверенными фактами, результатами наблюдений или математическими выкладками. И основная задача интуиции – подсказывать исследователю, «где у задачи слабые места и где к ней можно подступиться с максимальными шансами на успех» [4].

Таким образом, *строгость* и *надёжность* доказательства опираются на оба компонента доказательства – логический и интуитивный: «В отличие от надёжности, которая обеспечивается исключительно интуитивной основой доказательства, требование строгости доказательства является не интуитивным, а скорее,

лингвистическим: мы требуем, чтобы доказательство было представлено в своей законченной логической форме, во всей системе логических переходов, включая самые тривиальные» [1], – подчёркивает В.Я. Перминов, автор классического философского исследования о природе математического доказательства [8].

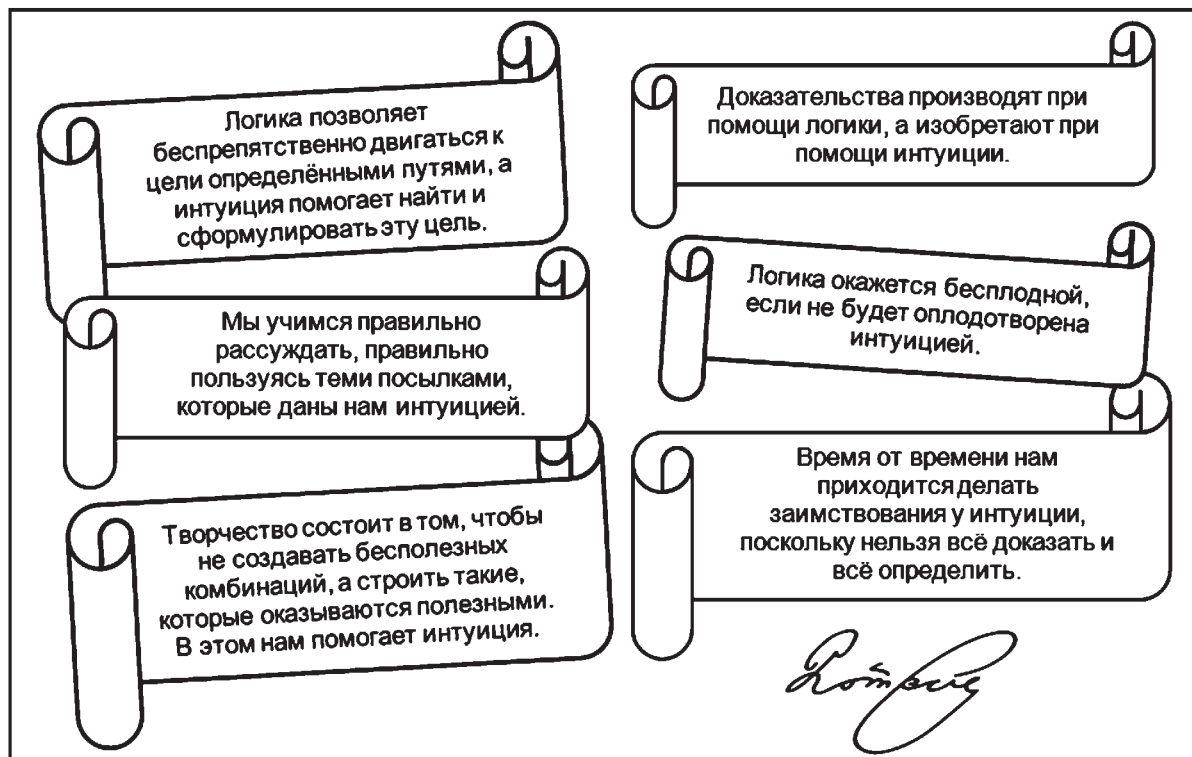
Роль интуиции в познании

Анри Пуанкаре считал обязательным присутствие интуиции в процессе решения математических задач, но признавал её ограниченные возможности: «Интуиция не может дать нам ни строгости суждений, ни их достоверности». В споре со сторонниками идеи интуиции как единственного источника открытий он подчёркивал важность правдоподобных рассуждений, нарекая их орудием, позволяющим переходить от конечного к бесконечному. Тем не менее он настаивал на необходимости интуиции, природа которой проявляется в «могуществе разума», привлекающего опыт только для того, чтобы воспользоваться интуицией и осознать её: «Оба рода умов одинаково необходимы для прогресса науки; как логики, так и интуитивисты создали великие вещи, которые не могли бы создать другие» [10].

В подтверждение своей мысли Пуанкаре объединил приёмы, применяемые логиками и интуитивистами, в общую схему решения задач на доказательство. Она включает несколько «родов интуиции»:

- интуицию как обращение к чувствам и воображению для построения неопределимого образа исследуемого объекта путём приближённых доказательств (формулировка гипотезы, претендующей на достоверность, как объекта доказательства);

- интуицию как обобщение, базирующееся на накопленном и актуальным опыте (индуктивное рассуждение, осно-



ванное на знаниях: общих правилах, аксиомах, теоремах и пр.);

– интуицию как источник строгого умозаключения (дедуктивный вывод о доказанности или недоказанности первоначальной гипотезы)².

Потенциал интуиции и её связь с логикой Пуанкаре видел в нескольких проявлениях. Соображения на этот счёт он

² Схема решения задач на доказательство Анри Пуанкаре по понятным причинам несколько отличается от цикла научного исследования, предложенного американским математиком, логиком и философом Чарльзом Пирсом (1839–1914) в рамках его концепции научного знания, где после этапа формулировки гипотез (абдукции) следует этап дедукции для подтверждения гипотез с помощью эмпирических фактов, а затем этап индукции для вывода общего правила, принципа, закона (см.: Светлов В.А. Методологическая концепция научного знания Чарльза Пирса: единство абдукции, дедукции и индукции // Логико-философские штудии. – 2008. – № 5).

сформулировал в виде своего рода афоризмов (см. рисунок).

Интересно проследить взгляды Пуанкаре на интуицию при исследовании физического пространства. Учёный отмечает, что это совершенно естественно – описывать физическое пространство дифференциальными уравнениями, содержащими не три координаты материальной точки, а четыре или более. Три координаты материальных объектов, существующих в линейно текущем времени, обусловлены экспериментальными фактами, которые заставляют нас приписывать пространству три измерения, что интуитивно считается для нас более удобным и привычным, поскольку мы сами являемся частью этого пространства и живём внутри него: «наблюдать координаты точек изолированной системы невозможно, можно наблюдать только их взаимные расстояния» [10].

Размерность пространства зависит на

самом деле от того, как мы его ощущаем относительно самих себя. Если мы являемся «внешними наблюдателями», то есть находимся не в изолированной системе, то мы можем воспринимать и взаимное расположение предметов во времени на некотором расстоянии от «точки наблюдения», и их координаты – не в совокупности одновременных ощущений внутри системы, а в их последовательности вовне системы, что и приводит к слому традиционных представлений о размерности пространства-времени.

Таким образом, наша система координат является лишь частным случаем интерпретации глобального пространства: «существует интуиция непрерывностей более чем трёх измерений, и если она требует более напряжённого внимания, чем обыкновенная геометрическая интуиция, то это, без сомнения, дело привычки и результат быстро возрастающего усложнения свойств непрерывностей по мере увеличения числа измерений» [10].

Примером воплощения идей Пуанкаре и уникального проявления интуиции может послужить гипотеза о том, что математическая модель нашего пространства-времени имеет не $(3 + 1)$ -мерную, а $(3 + 3)$ -мерную протяжённость³, обоснованная строгими математическими выкладками, которые проделал гениальный советский авиаконструктор итальянского происхождения Роберто Бартини [11]. Не найдя подтверждений не подвергаемого сомнению общеизвестного и «удобного», по словам Пуанкаре, факта о четырёхмерности пространства-времени, он интуитивно пришёл к идее шестимерной модели квантованного пространства-времени, а

³ Анри Пуанкаре: «Совокупность возможных изменений осей образует, как известно, группу шести измерений» [10].

затем доказал свою гипотезу с помощью математических рассуждений.



Роберто Бартини (1897–1974)

Путём философского осмысления структуры Вселенной как не непрерывного и не монотонного пространства, состоящего из качественно различных по свойствам областей, Бартини оспорил научный подход, согласно которому якобы возможно найти общие физические законы этих областей, механистически перенося законы одной области в другую область: «Задача, по-моему, состоит в том, чтобы отыскать такие исходные положения, из которых становится возможным установить общий закон сохранения, основной инвариант предмета, и установить законы трансформации таким образом, чтобы предельные переходы через истинные границы областей образовывали разрывы, скачкообразный обмен координатами» [11].

Первоначальная гипотеза Бартини базировалась на предположении: если трёхмерное пространство описывается тремя единичными ортогональными векторами, расположенными вдоль осей координат действительных чисел, характеризующих длину, ширину и высоту предметов реального мира, тем самым образуя модель, су-

ществующую в пространстве действительных чисел, то аналогично должна существовать ортогональная система векторов, ориентированная вдоль осей координат мнимых чисел, которые соответствуют «положению», «скорости течения» и «ускорению» времени в пространстве мнимых чисел. Так что «физическая протяжённость системы состоит из вещественной трёхмерной пространственной протяжённости и из мнимой трёхмерной протяжённости во времени» [11]. Бартини отмечает, что «мнимость параметра является условной, относительной, она зависит от ориентации и от числа измерений гиперповерхности относительно образования, которое в неё проектировано. Например, реальная глубина улицы является мнимой на плоской фотографии, так же как и отрезок времени, отделяющий моменты эмиссии света, давшего изображения разнотеленных предметов, или же частота световых сигналов» [11].

Система временных координат коррелируется с системой пространственных координат следующим образом. Для каждой оси действительных чисел в пространственной системе координат (x, y, z) имеется своя ось мнимых чисел (τ, ν, θ) , которые вкуче образуют трёхмерную временную модель, доказывающую относительность концепта «время». Здесь τ – положение, то есть количество (период) времени, традиционно обозначаемое латинской буквой t , ν – скорость течения времени, имеющая характер не периода времени, а частоты, и θ – ускорение:

$$f_{\nu}(\nu) = f_{\tau}'(\tau), f_{\theta}(\theta) = f_{\nu}'(\nu) = f_{\tau}''(\tau).$$

Дополнительные размерности времени Бартини ввёл исходя из представления о том, что время, переходя из одной области пространства в другую, от одной системы координат к другой, претерпевает критические изменения: оно меняет свою

скорость (ускоряется или замедляется), причём эти изменения скорости могут сами происходить в различном темпе, что говорит о необходимости учитывать ускорение при изменении времени [11].

В заключение вновь обратимся к методологическому наследию Анри Пуанкаре, который продвигал идею о том, что без совместной роли «интуиции и обобщающего ума» невозможна творческая деятельность математика. Учёный проследил за этой деятельностью в трёх её формах: «за деятельностью математика-изобретателя и творца; за умственным процессом бессознательного геометра, который... строил наше инстинктивное понятие пространства; за умом юноши, перед которым наставники средней школы раскрывают первые основы науки и которому они стараются объяснить основные определения». В итоге он сформулировал главную цель обучения математике: развивать известные способности ума, среди которых интуиция отнюдь не является наименее ценной.

Список источников

1. Доказательство: очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды московского семинара по философии математики. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014.
2. Кранц С. Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя проверить. – М.: Лаборатория знаний, 2016.
3. Успенский В.А. Апология математики. – М.: Альпина нон-фикшн, 2017.
4. Стюарт И. Величайшие математические задачи. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015.
5. Поля Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. – Изд. 3-е. – М.: КомКнига, 2010.

6. Глик Дж. Информация. История. Теория. Поток. – М.: АСТ, CORPUS, 2013.

7. Лейбниц Г.В. Труды по философии науки. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019.

8. Перминов В.Я. Развитие представлений о надёжности математического доказательства. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

9. Боулер Дж. Математическое мышление. Книга для родителей и учителей. – М.: МИФ, 2019.

10. Пуанкаре А. О науке. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990.

11. Мир Бартини. Роберт Орос ди Бартини – советский авиаконструктор, физик-теоретик, философ. Статьи по физике и философии / Сост. А.Н. Маслов. – М.: НИЦ «Луч», 2020

Статья поступила в редакцию

24.02.2022;

принята к публикации

03.05.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Небольшие ошибки

Огюстен Луи Коши (1789–1857) как-то раз получил по почте объёмный труд по теории чисел, где доказывалось, что диофантово уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

не имеет целых решений. Коши, который отличался саркастичным и довольно насмешливым характером, отправил автору трактата письмо, состоявшее из одной строки:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Нечто подобное произошло с французским математиком Альфонсом де Полиньяком (1817–1890). Сегодня он известен как автор гипотезы о простых числах – обобщении гипотезы Гольдбаха. Полиньяк провозгласил: *любое нечётное число можно представить в виде суммы степени двойки и простого числа*. Гипотеза не только впечатляла, но и выглядела вполне правдоподобно. Добавим ещё один факт: Полиньяк дал понять, что проверил своё предположение для всех чисел вплоть до 3 000 000. Но, видимо, в его вычисления вкралась ошибка: уже для числа 127 гипотеза не подтверждается.

По книге: Хоакин Наварро. Тайная жизнь чисел. Любопытные разделы математики (М.: Де Агостини, 2014).

Удивительный расчёт

Следующая история произошла на собрании Американского математического общества в октябре 1903 года. Математик и по совместительству секретарь этого общества Фрэнк Нельсон Коул (1861–1926) должен был выступить с докладом на тему «О разложении больших чисел на множители». Выступление Коула было не совсем обычным. Он поднялся с места, подошёл к доске и записал на ней 67-е число Мерсенна $2^{67} - 1$. В 1876 году Люка доказал, что оно составное, но делители числа всё ещё были неизвестны. Далее Коул вычислил 2^{67} и вычел из результата 1. Присутствующие затаили дыхание, а он записал на доске ещё два числа:

$$193\ 707\ 721 \text{ и } 761\ 838\ 257\ 287$$

и вычислил их произведение. Полученное число 147 573 952 589 676 412 927, как и ожидалось, оказалось 67-м числом Мерсенна. Затем Коул развернулся и проследовал на своё место. Доклад длился целый час, и за это время учёный не произнёс ни слова. Но аудитория всё равно разразилась аплодисментами.

В 1903 году ещё не существовало ни калькуляторов, ни алгоритмов, которые используются для работы с числами Мерсенна сегодня. По словам Коула, все необходимые расчёты он провёл «за три года по воскресеньям».

ИВАН ВАСИЛЬЕВИЧ ПАРНАССКИЙ (к 100-летию со дня рождения)

Персоналии
УДК: 51(09)

Personalities

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_7_68

Р.А. Мельников, О.А. Саввина,

ЕГУ им. И.А. Бунина (Елец);

roman_elets_08@mail.ru,

oas5@mail.ru;

О.В. Тарасова,

ОГУ имени И.С. Тургенева (Орёл);

tarasova_orel@mail.ru

R.A. Melnikov, O.A. Savvina,

Bunin Yelets State University (Yelets);

roman_elets_08@mail.ru,

oas5@mail.ru;

O.V. Tarasova,

Orel State University (Orel);

tarasova_orel@mail.ru

Аннотация: в 2022 году исполняется 100 лет со дня рождения профессора Ивана Васильевича Парнасского (1922–2004), известного специалиста в области неевклидовой геометрии. В статье кратко описываются биография и научный путь учёного; даётся обзор созданных им учебных пособий

Abstract: 2022 marks the 100th anniversary of the birth of Professor Ivan Vasilievich Parnassky (1922–2004), a well-known specialist in the field of non-Euclidean geometry. The article briefly describes the biography and scientific path of the scientist; the review of the manuals created by him is given

Ключевые слова: И.В. Парнасский, неевклидова геометрия, решебник по геометрии

Keywords: I.V. Parnasskiy, non-Euclidean geometry, geometry solution book



Иван Васильевич Парнасский родился 7 сентября 1922 года в городе Орле в учительской семье (отец Василий Иванович и мать Ольга Михайловна были педагогами). В 1930–1940 гг. Иван Васильевич учился в средней школе № 7 г. Орла, по окончании которой был принят на первый курс физико-математического

факультета Орловского государственного педагогического института (ОГПИ). В начале Великой Отечественной войны был призван на военную службу. Однако по состоянию здоровья его сразу же зачислили в запас второй категории. В сентябре 1941 г. немцы стремительно приближались к Орлу, семья Парнасских отправилась в эвакуацию в село Большой Вьяс Пензенской области, где Иван Васильевич получил работу плановика в Больше-Вьяском промкомбинате. В 1943 году он сдал экзамены за 2-й курс при Пензенском педагогическом институте в качестве экстерна, в октябре того же года вернулся в Орёл. В сентябре 1944 года возобновил учёбу в Орловском пединституте (заочно) и окончил его с отличием по специальности «математика» в 1947 году.

С января 1944 г. по сентябрь 1948 г. работал преподавателем математики в 8–10-х классах вечерней школы № 1 г. Орла, с сентября 1945 г. по сентябрь 1949 г. – преподавателем математики в 8–10-х классах заочной средней школы Орловской области; с сентября 1948 г. – преподавателем математики в 6–10-х классах Орловской мужской средней школы № 19.

С 1 сентября 1950 г. И.В. Парнасский стал работать в Орловском государственном педагогическом институте в должности ассистента кафедры математики, вёл практические занятия по аналитической геометрии, математическому анализу, элементарной математике, а также в качестве группового методиста руководил педагогической практикой студентов. В характеристике, выданной Ивану Васильевичу в 1951 г. для поступления в аспирантуру, директор пединститута С.И. Ефремов отмечал, что ассистент И.В. Парнасский «занятия проводит на высоком научном и методическом уровне», «аккуратно и добросовестно выполняет все поручения кафедры, директора института и общественных организаций» [2].

В период с 1951 г. по 1953 г. И.В. Парнасский обучался в аспирантуре МГПИ им. В.И. Ленина по специальности «геометрия» под руководством профессора Д.И. Перепёлкина¹ (1900–1954). За это время он сдал восемь кандидатских экзаменов, среди которых были: «Основания геометрии», «Теория поверхностей», «Риманова геометрия», «Теория непрерывных групп», «Дифференциальные уравнения с частными производными», «Высшая алгебра». Все испытания он выдержал блестяще, получив восемь отметок «отлично». Его экзаменовали известные отечественные математики и педагоги: Д.И. Перепёлкин, П.С. Новиков (1901–1975), А.А. Бухштаб

(1905–1990), Л.С. Атанасян (1921–1998), Н.Д. Гиленко (1901–1985), А.П. Дидман (1904–1974) и др. Отдавая много сил и времени на совершенствование своего научного образования и подготовку к кандидатским экзаменам, Иван Васильевич не успел завершить диссертацию и вернулся в Орёл, предполагая продолжить научное исследование уже дома.

После окончания аспирантуры в 1954 году он получил должность старшего преподавателя кафедры математического анализа и сразу включился в работу го-

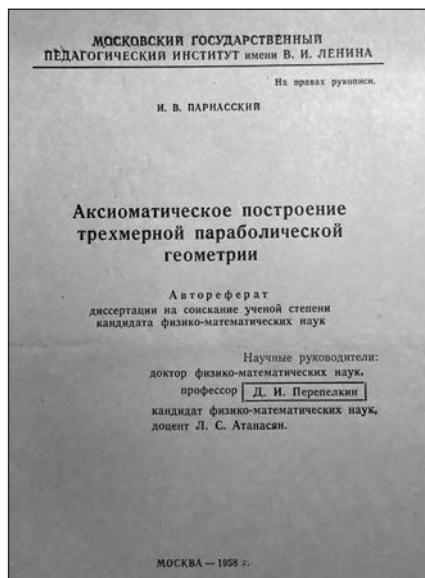
¹ Перепёлкин Дмитрий Иванович (11(24).06.1900 – 11.11.1954) – советский математик и педагог, член-корреспондент АПН РСФСР, доктор физико-математических наук, профессор. В 1923 г. окончил математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, ученик Б.К. Млодзеевского (1858–1923). Преподавал, главным образом, геометрию в Институте народного хозяйства им. Г.В. Плеханова (1921–1930), в МЭИ (1930–1937), а также в МГПИ (1935–1954). В Московском педагогическом институте в послевоенные годы заведовал кафедрой геометрии и был деканом физико-математического факультета. Занимался исследованием проблем дифференциальной геометрии многомерного пространства, где ему удалось обобщить понятие о кривой Бертрмана на случай четырёхмерного евклидова пространства. В элементарной геометрии предложил оригинальные приёмы построения икосаэдра и додекаэдра. В области методики преподавания геометрии был сторонником аналитического подхода к изложению основных понятий и методов. Участвовал в разработке учебных планов и программ по разделам геометрии для педагогических институтов и средних школ. Автор учебных пособий: «Геометрические построения в средней школе» (1947), «Курс элементарной геометрии» (ч. 1–2, 1948–1949). Выполнил перевод и редакцию учебника «Элементарная геометрия» (ч. 1–2, 1948–1952) Ж. Адамара, сыгравшего значимую роль в подготовке студентов педагогических вузов в послевоенные годы.

родского лектория, где читал лекции по математике.

В ноябре 1954 г. неожиданно скончался его научный руководитель Д.И. Перепёлкин, и вопрос о завершении и защите кандидатской диссертации оказался на некоторое время открытым.

Позднее новым научным руководителем И.В. Парнасского стал ученик Д.И. Перепёлкина Левон Сергеевич Атанасян – тогда молодой кандидат физико-математических наук и практически ровесник Ивана Васильевича, а впоследствии автор широко известного школьного учебника геометрии.

Первая печатная работа Ивана Васильевича – статья «Аксиоматическое построение трёхмерной параболической геометрии» – вышла в 1956 г. в «Учёных записках кафедр физико-математического факультета Орловского педагогического института» и стала своеобразным импульсом к активизации его работы над кандидатским исследованием.



Защита кандидатской диссертации «Аксиоматическое построение трёхмерной параболической геометрии» состоялась

3 марта 1958 г. в стенах МГПИ им. В.И. Ленина. Ключевой идеей исследования являлось аксиоматическое построение трёхмерной геометрии Кэли-Клейна, в которой (в отличие от «классических» геометрий Евклида, Лобачевского и Римана) измерение углов (как между прямыми, так и между плоскостями) является наряду с измерением длин параболическим.

Во введении автор констатировал, что изучением различных интерпретаций двумерной параболической геометрии, абсолют которой состоит из прямой и лежащей на этой прямой точки, занимались в разное время такие отечественные математики, как А.П. Котельников, Н.А. Глаголев, И.М. Яглом, Б.А. Розенфельд, а также иностранные учёные Г. Бек, С. Глясс, но систематического исследования ни двумерной, ни, тем более, трёхмерной параболических геометрий сконструировано не было.



И.В. Парнасский (1959 г.)

И.В. Парнасский решил работать с проективной моделью параболической геометрии, где «точками» стали точки трёхмерного проективного пространства, не принадлежащие плоскости абсолюта,

«плоскостями» — плоскости, не принадлежащие точке абсолюта, и «прямыми» — прямые, не пересекающие прямую абсолюта.

За основные соотношения соискатель учёной степени принял «инцидентность» (для точки и прямой, а также для плоскости и прямой) и «между» (для точек, инцидентных одной прямой); свойства этих соотношений Иван Васильевич изложил в 16 аксиомах, которые разбил на три большие группы: аксиомы связи, порядка и непрерывности. Также он установил, что возможны три случая расположения двух точек: 1) точки не имеют ни общей прямой, ни общей плоскости («сильно параллельны»); 2) точки имеют общие плоскости, но не обладают общей прямой («слабо параллельны»); 3) точки имеют как общую прямую, так и общие плоскости. Для двух прямых возможны шесть различных случаев взаимного расположения.

В последней пятой главе исследования автор доказал непротиворечивость, полноту и порядковую независимость введённой им системы аксиом, а также рассмотрел различные модели двумерной и

трёхмерной параболических геометрий (в проективном, аффинном евклидовом и псевдоевклидовом пространствах; на плоскости дуального переменного; дал интерпретацию с помощью механики Галилея-Ньютона) [4].

В конце 1950-х гг. в СССР даже успешная защита кандидатской диссертации не гарантировала быстрого продвижения по служебной лестнице, поэтому после возвращения в Орёл Иван Васильевич не сразу получил должность доцента.

Только после того, как решением ВАК от 17 апреля 1963 г. И.В. Парнасский был утверждён в учёном звании доцента по кафедре «Высшая математика», он получил должность доцента кафедры алгебры и геометрии ОГПИ.

Преподавательскую деятельность Иван Васильевич плодотворно совмещал с научной, продолжая исследования в области геометрии, результаты которых были опубликованы в ряде статей («Геометрия циклов трёхмерного полуюевклидова пространства и линейчатая геометрия» (1964), «Об одном аналоге геометрии Лагерра» (1965) и др.).

Научные успехи и педагогические



Здание ОГПИ (фото 1962 г.)

труды учёного не остались без внимания руководства Орловского пединститута – 5 ноября 1969 года он был занесён на «Доску почёта».

Приобретя богатый педагогический опыт, И.В. Парнасский в 1970-х гг. усиленно работал над созданием учебных пособий и популярных книг, среди которых:

1) небольшая брошюра «О юных математиках» (1972), адресованная юным же читателям и повествующая в доступной форме об успехах Н.Х. Абеля, Э. Галуа, И.Р. Шафаревича и др. В частности, в книге приведён редкий факт из биографии швейцарского математика и создателя проективной геометрии Якоба Штейнера (1796–1863) о том, что он поздно приступил к занятиям математикой: «В 16 лет он был ещё неграмотным пастухом, но его заметил знаменитый педагог Песталоцци и помог ему получить образование. В шутку Штейнер говорил впоследствии, что не жалеет о том, что овладел профессией пастуха, так как именно благодаря этому он научился «сразу же узнавать ослов на очень большом расстоянии» [5];

2) учебное пособие по геометрии «Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадратики» (1978), адресованное студентам-заочникам I–II курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. Соавтором выступила Ольга Евстафьевна Парнаска² (1924–1991, в девичестве – О.Е. Денисюк)

² Выпускница (1948 г.) физико-математического факультета ОГПИ. В 1973 г. в стенах Ярославского государственного педагогического института им. К.Д. Ушинского защитила кандидатскую диссертацию «Применение циклографического отображения к аксиоматическому построению некоторых неевклидовых геометрий», удостоившись учёной степени кандидата физико-математических наук.

– жена учёного. В этой книге приведены основные факты из теории аффинного и евклидова пространств как основы для изложения теории квадратичных форм и квадратик [6];



О.Е. Парнаска

3) «Задачник-практикум по геометрии. Часть 2» (1979), предназначенный студентам-заочникам II курса физико-математических факультетов педагогических институтов. Пособие вышло в соавторстве с известным геометром Б.И. Аргуновым (1907–1985) и М.М. Цаленко (1938 г.р.). В книге собраны задания на применение метода координат в пространстве; аффинные и метрические задачи, связанные с прямой и плоскостью; задачи на поиск элементов выпуклых многогранников и поверхностей второго порядка [1].

В 1980-е годы Иван Васильевич оказывал помощь органам народного образования и учителям математики школ г. Орла и Орловской области в улучшении постановки преподавания математики, систематически выступал с лекциями перед слушателями Народного университета педагогических знаний, ежегодно в качестве председателя жюри участвовал в проведении областных олимпиад по математике.

На протяжении нескольких лет, на-

чина с 1992 года, И.В. Парнасский был председателем жюри Орловских областных математических олимпиад школьников. Накопленные за этот период материалы были опубликованы в учебно-методическом пособии [3], помощником и соавтором стал его ученик профессор В.В. Ветров (1931–2012).

23 октября 1996 г. Ивану Васильевичу Парнасскому было присвоено учёное звание профессора по кафедре геометрии и методики преподавания математики. В это время Иван Васильевич переключился на проблемы преподавания школьной геометрии. В 1998 г. вышло его учебно-методическое пособие, содержащее подробные решения наиболее трудных задач из учебника, написанного под редакцией Л.С. Атанасяна [7]. Решебники, как таковые, уже в то время были обыденным явлением, но именно это пособие стало первым в категории «решебник задач повышенной трудности по геометрии».

2 июля 2001 года И.В. Парнасский написал заявление на имя ректора ОГУ имени И.С. Тургенева Ф.С. Авдеева (1950–2021) с просьбой уволить с занимаемой должности по состоянию здоровья.

Иван Васильевич награжден медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «За трудовое отличие» и значками «Отличник народного просвещения», «Отличник просвещения СССР», «За отличные успехи в работе», ему неоднократно объявлялись благодарности.

Иван Васильевич ушёл из жизни 7 апреля 2004 года, похоронен на одном из кладбищ г. Орла.

И.В. Парнасский был и остаётся образцом бесконечной преданности профессии, порядочности и трудолюбия.

Он стал Учителем и наставником для

многих поколений выпускников физмата Орловского педагогического института (ныне Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева), в сердцах которых до настоящего времени сохраняется благодарная память об их замечательном земляке и талантливом математике.

Список источников

1. Аргунов Б.И., Парнасский И.В., Парнаска О.Е., Цаленко М.М. Задачник-практикум по геометрии. Часть 2. М.: Просвещение, 1979. 96 с.
2. Архив ОГУ, Личное дело И.В. Парнасского. № 484.
3. Ветров В.В., Парнасский И.В. Орловские областные математические олимпиады школьников за 1991–1995 годы. Учебно-методическое пособие в помощь учителям и учащимся по решению олимпиадных задач. Орёл, 1996. 83с.
4. Парнасский И.В. Аксиоматические построение трёхмерной параболической геометрии. Автореф. дисс... канд. физ.-мат. наук. М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1958. 6 с.
5. Парнасский И.В. О юных математиках. Орёл, 1972.
6. Парнасский И.В., Парнаска О.Е. Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадратики. М.: Просвещение, 1978. 129 с.
7. Парнасский И.В. Решебник задач повышенной трудности по геометрии, 7–11 классы: Решение задач из учебника «Геометрия 7–9» и «Геометрия 10–11» авт. Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева. М.: Рос. пед. агентство, 1998. 132 с.
8. Тарасова О.В. Минковский Владимир Львович – педагог, историк, методист. К 100-летию со дня рождения. Орёл: ФГБОУ ВПО «ОГУ», 2011. С. 61–62.

Статья поступила в редакцию

08.02.2022;

принята к публикации

03.05.2022.

ЗАДАЧИ НА ЛОГИКУ

Представляемая вниманию читателя подборка задач в этот раз посвящена логике. Мы не будем говорить об алгебре булевых функций или непротиворечивости системы аксиом. Ограничимся лишь практическим рассмотрением задач, доступных школьникам, в которых требуется провести некие логические выкладки. В какой-то мере любая математическая задача требует логических выкладок, но традиционно логическими задачами называют задачи, в которых есть рассуждения об истинности или ложности каких-либо высказываний или в которых есть построения одной или нескольких цепочек следствий.

Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 0. У Карабаса-Барабаса украли пять золотых. Карабас подозревает в краже лису Алису, кота Базилио, Дуремара и Буратино, так как неопровержимыми уликами установлено, что

кто-то из них обязательно виновен;
никто больше не мог это сделать;
Алиса всегда действует заодно
с Базилио;

если Дуремар виновен, то у него
было ровно два соучастника;
если Буратино виновен, то у него
был ровно один соучастник.

Нужно определить, виновен ли
Базилио.

(Олимпиада ДваждыДва для пяти-
классников, устный тур 2006 год.)

Решение. Дуремар и Буратино не могут быть виновны одновременно, поскольку у них должно быть разное количество соучастников. Алиса и Базилио либо оба виновны, либо оба не виновны. Следовательно, если Буратино виновен, то для него не найдётся соучастников. Таким образом, независимо от того, виновен или невиновен Дуремар, Алиса и Базилио обязательно виновны.

О т в е т: Базилио виновен.

Ещё достаточно распространённым типом задач являются задачи *про рыцарей и лжецов*. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Порой к ним добавляются обычные люди (которые могут говорить правду или лгать в произвольном порядке). В некоторых задачах ещё встречаются хитрецы или дипломаты, которые лгут и говорят правду строго попеременно.

Задача 00. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?».

Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий? (*Фольклор.*)

Решение. Предположим, что первый – рыцарь и он сказал правду. Тогда второй сказал правду и тоже должен быть рыцарем. Противоречие. Значит, первый – лжец. Следовательно, хотя бы один рыцарь есть. Если второй солгал, то он лжец, и так как мы уже выяснили, что рыцарь есть, то им должен быть третий.

Но тогда второй, будучи лжецом, сказал правду. Снова противоречие. Значит, второй – рыцарь, и он сказал правду. Следовательно, третий тоже рыцарь и его ответ должен быть «Один».

О т в е т. Третий сказал: «Один».

Задача 000. Ёжик может встретить в тумане либо Сивого Мерина, либо Сивую Кобылу, либо своего друга Медвежонок. Однажды Ёжику вышли навстречу все трое, но туман был густой, и Ёжик не видел, кто из них кто, а потому попросил представиться.

Тот, кто, с точки зрения Ёжика, был слева, сказал: «Рядом со мной Медвежонок».

Тот, кто стоял справа, заявил: «Это тебе сказала Сивая Кобыла».

Наконец, тот, кто был в центре, сообщил: «Слева от меня Сивый Мерин».

Определите, кто где стоял, если известно, что Сивый Мерин врёт всегда, Сивая Кобыла – иногда, а Медвежонок Ёжику не врёт никогда.

(М. Ахмеджанова, Турнир им. Ломоносова, 2020 год.)

Решение. Если Медвежонок слева, то животное в центре – тоже Медвежонок, что невозможно. Если Медвежонок в центре, то справа – Мерин, а левому животному остаётся быть Кобылой, но тогда Мерин сказал правду, что также невозможно. И только если Медвежонок стоит справа, противоречий не возникает: тогда слева стоит Кобыла, а в центре Мерин, причём оба врут.

О т в е т: С точки зрения Ёжика слева стоит Сивая Кобыла, в центре – Сивый Мерин, справа – Медвежонок.

Задачи

для самостоятельного решения

Задача 43. В одном дворе дети лгут, если держат за руки чётное число че-

ловек, и говорят правду, если нечётное. Однажды трое детей, как-то взявшись за руки сказали:

А: «Мы все тут мальчики». В: «Среди нас есть мальчики». С промолчал. Затем каждый взял за руку только всех тех, кого не держал в первый раз. И теперь они сказали:

А: «Мы все тут девочки». В промолчал. С: «Я тут одна девочка». Определите, кто мальчик, а кто девочка.

(Е.Ю. Иванова, Олимпиада начальной школы ДваждыДва, 4 класс, 2022 г.)

Задача 44. В комнате стоят 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они как-то пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидит на красных стульях?

(Д.А. Калинин, Московская устная олимпиада для 6–7 классов, 2018 г.)

Задача 45. Четверо друзей играли в игру «Мафия». Каждый имел одну из ролей (мафия, комиссар и двое мирных жителей). Известно, что все утверждения мафии ложны. Комиссар знает, кто мафия, и всегда говорит правду. Мирные жители изначально ничего не знают и могут высказывать как ложные, так и истинные утверждения.

Петя заявил: *Я знаю, кто мафия!*

Вася: *Петя – мафия!*

Саша: *Петя – комиссар. А я тоже знаю, кто мафия.*

Дима: *Это я – комиссар. А Саша – мафия.*

После этих высказываний один из

мальчиков ещё не знает, кто мафия. Назовите его имя. (Все мальчики способны сделать логические выводы, если они следуют из высказанных утверждений).

(Н.А. Солянин, Турнир разновозрастных команд 2012 г.)

Задача 46. Имеется 100 карточек, пронумерованных числами от 1 до 100. На каждой карточке написано утверждение. На первой: «На карточках с большими номерами ровно одно ложное утверждение». На второй: «На карточках с меньшими номерами ровно одно ложное утверждение». На третьей: «На карточках с большими номерами ровно два ложных утверждения». На четвёртой: «На карточках с меньшими номерами ровно два ложных утверждения». И так далее. Сколько утверждений на карточках могут быть истинными?

(Н.А. Михайловский, Турнир разновозрастных команд 2013 г.)

Задача 47. 25 мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного и зелёного цвета. Причём известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зелёный?» Никто не ответил ни «да», ни «нет». Через каждую минуту этот вопрос снова повторяли всем мудрецам. Наконец через 6 минут несколько мудрецов в первый раз сказали «да» (до этого никто не говорил «да»). Сколько мудрецов ответило теперь «да»?

(По мотивам задачи О.С. Нечаевой, Устная командная Олимпиада «ДваждыДва» для 7–8 классов, 2019 г.)

Задача 48. За круглым столом сидят 30

человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причём у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «Да». Сколько из остальных могли также ответить «Да»?

(Н.Х. Агаханов. Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 9 класс, 2012 г.)

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Ивановой Елене Юрьевне по адресу distant@mathbaby.ru к 01.01.2023 г. в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать:

для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт);

для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь.

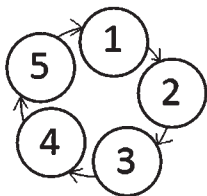
Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Решения задач из журнала «Математика в школе» № 5 / 2022

Задача 31. У фокусника есть пять одинаковых шаров, лежащих по кругу. В одном из них рубин. Если в шаре рубин, то он тяжелее. Можно взять любые два шара и сравнить их по весу. После взвешивания можно забрать любой шар, если он с рубином. Иначе фокусник машет палочкой, и рубин перемещается по стрелке в соседний шар. Как за 2 взвешивания забрать рубин?

(Е.Ю. Иванова, Олимпиада начальной школы ДваждыДва, 4 класс, 2022 г.)



Решение. Выберем любые два несоседних шара. Например шары под номерами 1 и 3. Если один из них оказался тяжелее, то это и есть шар с рубином, и можно сразу его взять. Если же весы показали равенство, то это означает, что рубин либо в шаре с номером 2, либо 4, либо 5. Нельзя однозначно определить, где рубин, поэтому шары возвращаем на место, фокусник машет палочкой, и теперь рубин в шаре либо с номером 3, либо 5, либо 1. Ещё раз взвешиваем шары 1 и 3. Если один тяжелее, то это и есть шар с рубином, и можно его взять. Если же весы показали равенство, то это означает, что рубин в шаре под номером 5, и можно его взять.

Задача 32. Первоначально на каждом поле доски $1 \times n$ стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нём шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним. Докажите, что за $n - 1$ ход можно собрать все шашки на одной клетке. (А.В. Шаповалов.)

Решение. Выберем центральную шашку (любую из двух, если n чётно). Каждым следующим ходом будем двигать тот столбик, в котором эта шашка оказалась, по направлению к наиболее удалённому краю доски. (Если n нечёт-

но, то первый ход можно делать в любом направлении.) После каждого хода количество шашек в столбике, который мы двигаем, увеличивается на 1. Значит, после $(n - 1)$ -го хода в нём будет $1 + (n - 1) = n$ шашек.

Задача 33. У Маши есть коробка, в которой лежат 2019 белых и 2020 черных шаров. У Васи есть мешок, в котором находится 10000 чёрных шаров. Дети играют в следующую игру: Маша наугад вытаскивает из коробки два шара. Если они одного цвета, то она их выкидывает, а Вася берёт из своего мешка чёрный шар и кладёт в Машину коробку. Если вынутые Машей шары разного цвета, то она выкидывает чёрный шар, а белый кладёт обратно в коробку. Игра продолжается до тех пор, пока в коробке не останется один шар. Если он белый, то выигрывает Маша, а если чёрный, то Вася. Кто выигрывает в этой игре?

(По мотивам Харьковских Олимпиад 2005 года, Олимпиада шестиклассников матклассов ДваждыДва 2019 г.)

Решение. Посмотрим, что происходит с шарами в коробках, когда Маша вынимает пару шаров.

1 случай. Вынуто 2 белых шара. Тогда количество белых шаров в коробке уменьшается на 2, а количество чёрных увеличивается на 1.

2 случай. Вынуто 2 чёрных шара. Тогда количество белых шаров не изменяется, а количество чёрных шаров уменьшается на 1.

3 случай. Вынуто 2 разных шара. Тогда количество белых шаров не изменяется, а количество чёрных шаров уменьшается на 2.

Таким образом, мы видим, что чётность количества белых шаров не может поменяться. То есть в коробке всегда будет

нечётное количество белых шаров. А поскольку наступит момент, когда шар будет один, то это обязательно будет белый шар, и Маша выигрывает.

Задача 34. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые (хотя бы один алюминиевый точно есть!), остальные – дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний определить число дюралевых кубиков? (*Фольклор.*)

Решение. Выберем два произвольных кубика и положим на чаши весов по одному кубику. Возможны два случая: 1) одна чаша перевесила; 2) весы оказались в равновесии.

Рассмотрим первый случай. Поскольку равновесия нет, то один выбранный кубик алюминиевый, а другой дюралевый. Теперь положим выбранные кубики как *эталонную пару* на одну чашу и будем с ними сравнивать остальные пары кубиков. То есть оставшиеся 18 кубиков разбиваем на 9 пар и поочерёдно кладем их на другую чашу. Каждый раз мы узнаём, сколько в паре дюралевых кубиков. Действительно, если эталонная пара легче, то мы положили два дюралевых кубика; если эталонная пара имеет тот же самый вес, то мы положили один алюминиевый и один дюралевый кубик; если эталонная пара тяжелее, то мы положили два алюминиевых кубика. Таким образом, в первом случае достаточно 10 взвешиваний.

Рассмотрим второй случай. В этот раз либо оба выбранных кубика алюминиевые, либо оба дюралевые. Положим выбранные кубики на одну чашу и также будем последовательно сравнивать с ними остальные пары кубиков. Пусть первые k пар оказались того же самого веса, а $(k + 1)$ -ая пара оказалась другого веса. (Если $k = 9$, то все кубики одного веса, то

так как алюминиевый есть хотя бы один, то дюралевых кубиков нет.) Пусть для определённости $(k + 1)$ -ая пара оказалась более тяжёлой. Тогда первые два кубика и кубики первых k пар алюминиевые. Положим на каждую чашу весов по одному кубику $(k + 1)$ -й пары. Если эти кубики одного веса, то они оба дюралевые. Если кубики разного веса, то один алюминиевый, а другой дюралевый. В обоих случаях мы можем снова составить *эталонную пару* кубиков, один из которых алюминиевый, а другой дюралевый. Оставшиеся пары кубиков мы можем сравнивать с этой парой, как и в первом случае. Общее число взвешиваний во втором случае равно 11.

Задача 35. Имеются 39 металлических покрашенных шариков – по 3 каждого цвета. Известно, что в каких-то двенадцати тройках все шарики весят по 10 г, а в тринадцатой какой-то один шарик весит 9 г, («фальшивый легкий»), другой – 10 г, а третий – 11 г («фальшивый тяжёлый»). Можно ли за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые шарики? (*К. Кноп.*)

Решение. *Первое взвешивание.* Возьмём из первых 9 цветов по одному шарiku и положим на одну чашу весов, а вторые 9 шариков по одному из этих же кучек – на вторую чашу весов.

1 случай. Весы оказались в равновесии. Это значит, что среди этих 9 цветов фальшивых шариков нет. У нас осталось 4 подозрительных тройки. Пусть это цвета 1, 2, 3, 4, а шарики в каждой тройке – a , b , c .

Второе взвешивание. Взвесим $1a$, $2a$ и $3a$, $4a$. Если весы в равновесии, значит, это все настоящие шарики. Тогда взвесим $1b$ и $2b$ (третье взвешивание). Если равновесие, то взвесим $2b$ и $3b$ (четвёртое взвешивание). В случае равновесия фальшивые

шарики 4b и 4с. Если равновесия нет, то 3b и 3с. Если же на третьем взвешивании равновесия не было, то фальшивая пара цвета либо 1, либо 2, а 3 и 4, наоборот, настоящие. Тогда аналогично предыдущей ситуации за одно взвешивание найдём нужную пару.

2 случай. Весы оказались не в равновесии. Это значит, что среди этих 9 цветов есть фальшивые шарики. А оставшиеся 4 цвета – все настоящие.

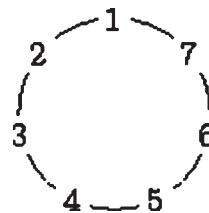
Второе взвешивание. На одну чашу положим оставшиеся невзвешенными шарики этих девяти цветов, а на вторую чашу – 9 настоящих из тех 12, что мы определили в результате первого взвешивания. После этого взвешивания мы знаем, в какой из кучек с девятью шариками лежит тяжёлый фальшивый и лёгкий фальшивый. (Например, если в результате второго взвешивания чаши находятся в равновесии, то в первых двух кучках лежат оба фальшивых шарика: и тяжёлый, и лёгкий, а если в результате второго взвешивания чаши с настоящими шариками легче, то в третьей кучке лежит тяжёлый фальшивый, а в в первом взвешивании в лёгкой кучке – лёгкий фальшивый.)

Таким образом, после второго взвешивания у нас есть 9 шариков, из которых один фальшивый, и мы знаем, как он отличается по весу. Это классическая задача решается за два взвешивания. Получив цвет фальшивого шарика в одной кучке, мы определяем фальшивый и в другой.

Задача 36. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спря-

чу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? (А.В. Шаповалов.)

Решение. Каждый гном видит все колпаки, кроме двух: своего и спрятанного. Надо договориться, какой из двух цветов каждому гному назвать так, чтобы угадать хотя бы три раза. Давайте занумеруем цвета числами от 1 до 7 в каком-то порядке (например, в том же порядке, как и цвета радуги) и мысленно расположим их по кругу (см. рисунок).



Договоримся, чтобы каждый гном называл тот из двух цветов, от которого до другого цвета ближе добраться по часовой стрелке. Например, пусть на каком-то гноме надет колпак цвета 3, а не видит он колпак цвета 3 и 7 (это значит, что колпак цвета 7 спрятан). Он смотрит на круг, изображённый на рисунке, и называет цвет 3. Гном, на котором надет колпак цвета 6, не видит колпаки цвета 6 и 7. И называет цвет 7. Давайте посмотрим, сколько гномов угадает, а сколько ошибётся. Если спрятан колпак цвета 7, то назовут свой цвет правильно гномы с колпаками цветов 1, 2, 3, а ошибутся – с колпаками цветов 4, 5, 6.

Рубрику ведёт **Иванова Е.Ю.**

МУЗЫКАЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА

В эпоху Просвещения в светском обществе как только не развлекались и в какие только игры не играли. Наряду с традиционными картами, шахматами, бильярдом и лото были популярны забавы с картинками и словами вроде буриме, ребусов и шарад. Во второй половине XVIII столетия в Европе вошли в моду музыкальные игры, позволявшие всем желающим создавать собственные композиции в любом количестве. «Изобретением сего искусства, – писал в 1795 году один альманах, – обязаны мы удачной выдумке какого-нибудь искусника в математических выкладках и вычислениях, вознамерившегося позабавить... весёлых людей в праздное время». Так ли это? И при чём здесь математика?

Игры эти, конечно, придумали слушатели Эвтерпы. За полвека известные композиторы и теоретики музыки предложили их более десятка. Среди авторов оказались даже венские классики Гайдн и Моцарт [1]. А первые игры описал ещё в 1757 году видный немецкий теоретик и педагог Иоганн Кирнбергер. Они-то и послужили для остальных образцами. За основу были взяты базовые понятия нового учения *ars combinatoria* – искусства комбинаторики: пермутации и комбинации заданных элементов (нот, тактов и пр.), или, как говорят математики, перестановки и сочетания. Не обошлось без теории вероятностей. Важная роль отводилась случаю. Любая композиция составлялась, подобно пазлу, из готовых фрагментов, а выбор их определялся в

лучших традициях азартных игр: с помощью игральных костей. Подобные забавы и ранее скрашивали досуг музыкантов, а кому-то заменяли упражнения по импровизации и композиции.

Сами идеи были не новы. Так, чешский монах Маурициус Фогт, чьим основным занятием была музыка, считал, что в сочинительстве можно полагаться на случай и определять порядок музыкальных фигур, подбрасывая гвозди (каждый из них обозначал одну из фигур). Английский композитор Уильям Хейс не без сарказма предложил ещё более простой и универсальный метод, «пригодный для самых захудалых талантов»: разбрызгивать чернила с щётки на нотную бумагу. Кляксы задавали положение нот, оставалось добавить к ним штили, расставить тактовые черты и прочие знаки. Французский математик и теоретик музыки Марен Мерсенн, желая показать возможности музыкальной комбинаторики, вычислял, сколько всяческих песнопений получится при простой перестановке нот, начиная с четырёх: *ut* (теперь это *do*), *re*, *mi*, *fa*. В частности, для 15 нот он насчитал 1 307 674 368 000 вариантов. Более основательно к вопросу подошёл немецкий теоретик музыки Йозеф Рипель. Уделив должное внимание математике, он включил в свой учебник таблицу количества всех перестановок, дойдя до 50 элементов, а им, между прочим, соответствует 65-значное число комбинаций!

Итак, в эпоху классицизма музыкальные игры в кости стали развлечением для широкой публики.

Теперь каждый желающий мог применить на себя роль Моцарта. Разбираться в музыке, равно как и в математике, не требовалось. Достаточно было знать числа и уметь записывать ноты. Названия руководств говорили сами за себя: «Композитор, готовый в любой момент сочинить менуэт или полонез» И. Кирнбергера, «Инструкция по сочинению стольких вальсов или шлейферов, сколько пожелаете, с помощью двух игральные костей без малейшего знания музыки» В.А. Моцарта, «Филармоническая забава, или Простой способ сочинять бесчисленное множество менуэтов и трио, не зная правил контрапункта» Й. Гайдна. Одним словом, соблюдайте правила игры – и желаемый результат будет достигнут, о чём позаботится автор.



	A	B	C	D	E	F	G	H
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	159	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	129
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Взять, к примеру, инструкцию Моцарта по «сборке» вальса. Он, по задумке композитора, имел двухчастную форму и включал 16 тактов. Игроку предлагалось две таблицы: *музыкальная* – с нотами и 176 пронумерованными тактами и *цифровая* – с номерами тактов в нотах, в двух частях по 88 клеток каждая [2]. Числа от 2 до 12 слева обозначали суммы очков, которые могли выпасть на двух костях, а буквы от А до Н вверху – такты первой части вальса, взятые по порядку. Игрок-композитор делал серию из восьми бросков костей,

всякий раз подсчитывал общее количество выпавших очков и находил в таблице [2] номер соответствующего такта, а уже по нему – сам такт в музыкальной таблице. Например, для сумм 8, 4, 7, 12, 6, 7, 5, 3 последовательность тактов первой части вальса оказалась бы такой: 95, 152, 27, 103, 80, 68, 159, 81. После этого можно было переходить ко второй его части. Процедура повторялась, только номера тактов брались из другой части таблицы.

Автор игры умело создавал иллюзию сочинения нового произведения. Игральные кости и числа в таблице [2], казалось, разбросанные произвольно, её только поддерживали. «Пазл» складывался всегда. Секрет в том, что разные варианты одного такта были созвучны и взаимозаменяемы и, независимо от жребия, выбранные фрагменты хорошо сочетались.

Всякий вальс в стиле а-ля Моцарт уникален, вероятность услышать его повторно ничтожно мала. Имеется 11 способов выбрать любой из 16 тактов. Общее число возможных композиций $11^{16} = 45\,949\,729\,863\,572\,161$. На то, чтобы сыграть их все без перерыва, затратив на каждую всего полминуты, потребуется более 43 миллиардов лет. Интересно, что различные версии вальса реализуются с разными вероятностями, поскольку одни суммы очков выпадают гораздо чаще других, а какие-то, наоборот, довольно редко. Учитывал ли эту особенность Моцарт, указывая номера тактов в таблицах, история умалчивает. Судя по отзыву автора альманаха, числовая составляющая музыкальных игр в кости была весьма привлекательным моментом как для их создателей, так и для игроков.

Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2023. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

П1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

Подписной индекс

П1597

ВНИМАНИЕ!

**Комплекты журналов
со скидкой**

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
ДЛЯ
ШКОЛЬНИКОВ»
Подписной
индекс — П1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:

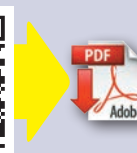
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • БиблиоШкола – biblioclub.ru • Знаниум – znanium.com

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.

Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала (в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru

ISSN 0130-9358



07



Математика в школе, 2022, № 7, 1–80