

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

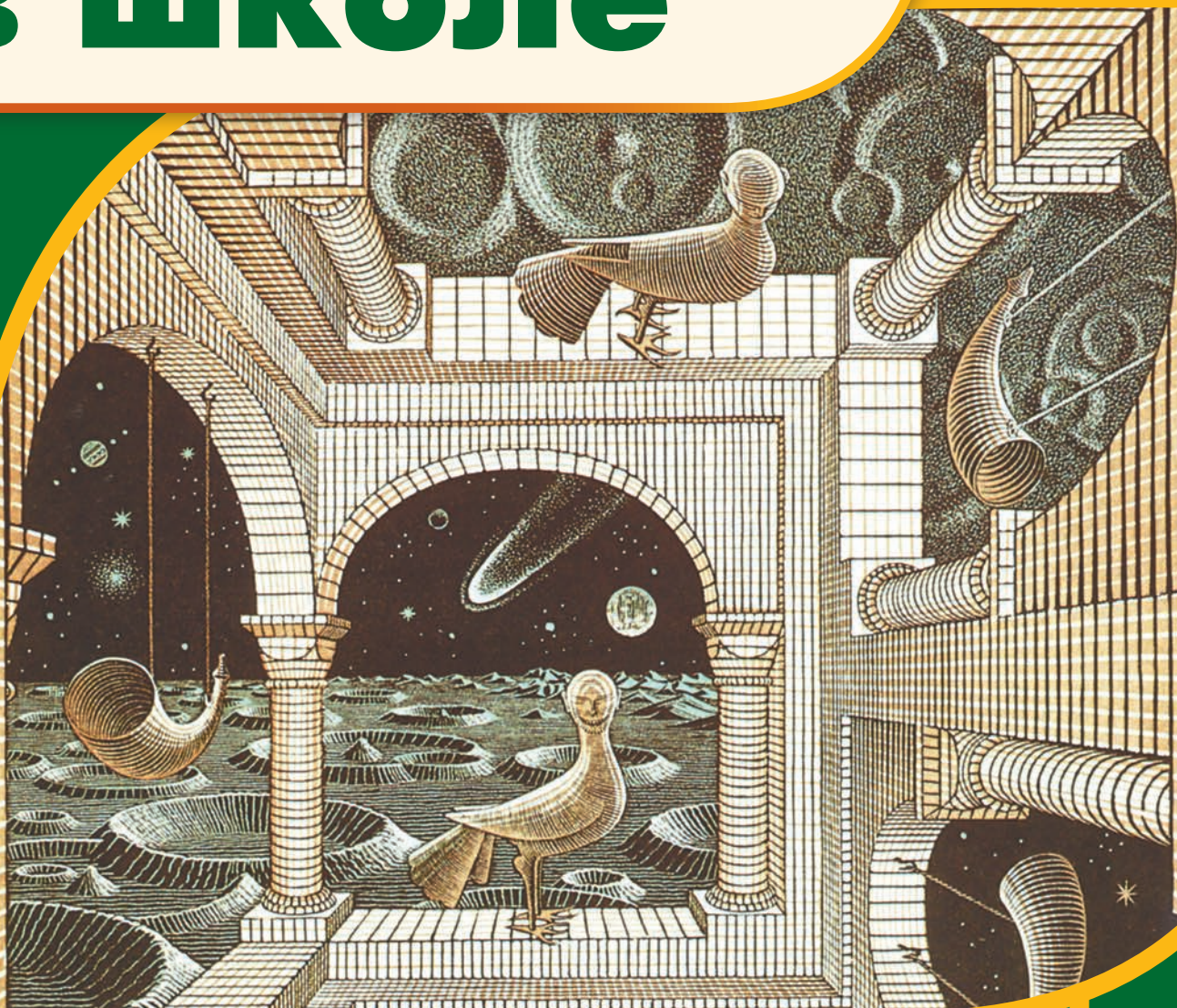


научно-теоретический и методический журнал

7 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



15 лет ЕГЭ. Не пора ли подвести итоги?

Использование комиксов в обучении математике в школе

**К 85-летию со дня рождения
Георгия Владимировича Дорофеева**

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ СИНУСОИДА

Как представитель третьего поколения учителей математики, общий стаж которых превысил 100 лет (а в них немало и моих десятилетий), не могу не отметить одну очевидную закономерность: в нашей педагогике на протяжении столетий всё движется по синусоиде. После экспериментов начала XX века (среди которых отметим попытку включения основ вероятности и статистики) и ещё более разнообразных и радикальных экспериментов 1920-х годов произошла унификация в 1930-х. Потом снова было много экспериментов и попыток разнообразия в 1960-х годах, и снова стандартизация и унификация в 1980-х. С конца 80-х до 2000-х вновь появилось сильное движение в сторону многообразия, вариативности школьного образования. С 2010-х заметной стала последовательная тенденция к унификации, которая усилилась сегодня.

В новом учебном году в школах страны единая федеральная основная общеобразовательная программа, учебно-педагогическая документация, включающая в себя федеральный учебный план, календарный учебный график, рабочие программы курсов и модулей и т.д. Все школы России должны привести свои образовательные программы в соответствие с этой федеральной. Ещё один признак общей стандартизации: стремление к созданию единых учебников.

Однако дети в классах разные, у наших учеников разные способности, возможности, интересы, мотивация. И эффективно работать в разных классах, с разными детьми одинаково, по старинке, без использования самых современных технологий, использования самых разнообразных методов и подходов, не получится при всем единстве планов и программ.

Новые, интересные, творческие методы и

подходы к обучению математике в школе всегда находят себе место на страницах нашего журнала. Вот и в этом номере в материале В.Ю. Бодрякова предлагается неожиданная, на первый взгляд, возможность усвоения фундаментальных математических понятий в процессе выполнения лабораторных работ по математике, а в статье А.В. Белошистой с опорой на возможности методического творчества учителя предлагаются пути реализации принципов развивающего обучения при использовании проблемных ситуаций на уроках математики в 5–6 классах. И совсем уж непривычным для многих, но оттого ещё более интересным, станет материал об использовании комиксов в обучении математике в школе (авторы – Панишева О.В., Рысач И.В.). Мы знаем, какие трудности испытывают нередко учителя в попытке сделать обучение школьников более наглядным, живым, близким нашим детям – почему бы не использовать комиксы?

На страницах журнала публикацией фундаментальной, не потерявшей своей актуальности статьи «О принципах отбора содержания школьного математического образования» мы отмечаем юбилейную дату Георгия Владимировича Дорофеева, выдающегося учёного, математика и педагога, который многие годы был членом редколлегии нашего журнала.

Мне выпали честь и удовольствие работать с профессором Дорофеевым, быть его соавтором в известной линии учебников математики для средней школы и в других работах. Георгий Владимирович любил вслед за великим Блезом Паскалем повторять, что «предмет математики столь серьёзен, что не следует упускать ни одной возможности сделать его более занимательным».

Не будем забывать об этом всегда актуальном завете и сегодня!

Евгений Бунимович

АКТУАЛЬНАЯ ТЕМА

- 3 *Малышев И.Г.*
15 лет ЕГЭ. Не пора ли подвести итоги?

ОЛИМПИАДЫ

- 9 *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Голубев М.О., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю.,
Королёв Н.Ю., Останкин П.А., Подлипский О.К., Саулин С.М., Скубачевский А.А., Терёшин Д.А.*
Заключительный этап олимпиады «Физтех–2023» по математике. Часть 1

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ

- 20 *Бодряков В.Ю.*
**Усвоение фундаментальных математических понятий обучающимися
в процессе выполнения лабораторных работ по математике**

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 29 *М.В. Таранова*
**О некоторых геометрических конструкциях, связанных со свойствами
гиперболы и параболы**

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 41 *Белошистая А.В.*
Проблемная ситуация на уроке математики в 5–6 классах
- 53 *Панишева О.В., Рысач И.В.*
Использование комиксов в обучении математике в школе

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 61 **К 85-летию со дня рождения Георгия Владимировича Дорофеева**

МЕТОДИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ

- 63 *Дорофеев Г.В.*
О принципах отбора содержания школьного математического образования

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 72 Карпушина Н.М.
«Потеря анонимности и не только» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 76 Подаев М.В.
Диофантовы уравнения

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 79 Карпушина Н.М.
Несоизмеримость по Платону



Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3805. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 7 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

15 ЛЕТ ЕГЭ. НЕ ПОРА ЛИ ПОДВЕСТИ ИТОГИ?

15 YEARS USE. ISN'T TIME TO SUM UP?

Прошёл очередной сезон сдачи ЕГЭ.
Чем же он порадовал или огорчил в этом году?

Число сдававших профильный экзамен в регионе в основном потоке 2023 г. уменьшилось на 6,1%. При этом число сдававших базовый экзамен не изменилось и составило 47,3% всех выпускников 2023 г. Результаты в целом снизились, хотя и не катастрофично. Например, число высокобалльников (80–100 баллов) уменьшилось на 3,5% (11,86% в 2022 г. и 8,39% в 2023 г.), а средний балл в первичных баллах уменьшился практически на 1, т.е. выпускники решили на одно задание меньше (12,02 балла в 2022 г. и 11,13 балла в 2023 г.). Чуть-чуть изменилось число не сдавших экзамен, т.е. не преодолевших порог в 5 заданий (8,17% в 2022 г. и 8,26% в 2023 г.).

Результаты экзамена этого года представлены на рисунке 1 (диаграмма распределения участников), где по оси ординат

указано число выпускников, набравших данный балл в процентах, в зависимости от полученного первичного балла в 2021, 2022 и 2023 гг.

И что же мы видим в 2023 г.? Диаграммы распределения участников ЕГЭ 2021 и 2023 гг. сравнимы, в отличие от диаграммы 2022 г., когда были даны упрощённые задачи по алгебре [1]. При таких масштабах экзамена (6–7 тысяч человек) можно было бы ожидать гауссову кривую, однако мы видим какие-то бессистемные скачки. И связано это, в первую очередь, с уровнем сложности заданий, предлагаемых на экзамене. Некоторые задания, по моему мнению, заведомо эксклюзивные, не апробированные нигде, вращающиеся внутри узкого круга специалистов, заикленных на секретности. Как итог, непредсказуемость результатов связана с колебаниями

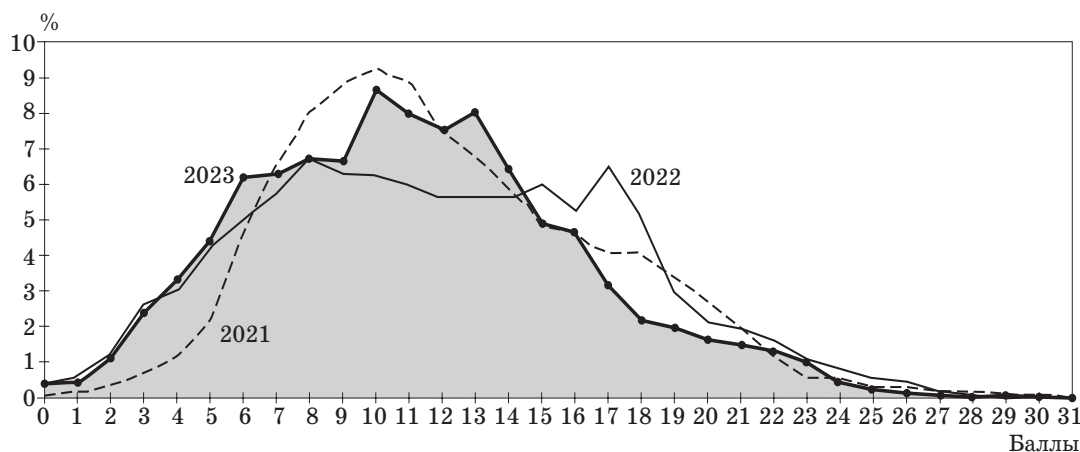


Рис. 1

от простого к сложному. Выпускники разных лет оказались в неравных условиях.

Обратимся к заданиям этого года. Например, задание № 15 – текстовая задача очень узкой направленности. Она может быть представлена одним квадратным уравнением с уровнем трудности в 1 балл (как в 2020 г., когда в некоторых вариантах очередной кредит был погашен за 2 года), так и заданием этого года с уровнем трудности в 3 балла. Авторам пора бы определиться, чего они хотят от выпускников.

В этом году усложнили задачу – разбили временной промежуток не на два с разными процентными ставками (как было в 2021 г.), а на два – с разными остатками по долгу (см. таблицу 1).

В таблице 2 приведена схема решения данной задачи.

После суммирования этих выражений получаем формулу для выплат:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = \Sigma = (9S - 35a - 10b)(k - 1) + kS.$$

Так как для решения задачи необхо-

Таблица 1

07.06.2021	В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы: – в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года; – в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года; – к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен. Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита О т в е т: 1400 т.р.
01.06.2023	В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1300 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы: – каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга; – в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года; – в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года; – к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен. Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 т. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 г.? О т в е т: 500 т.р.

Таблица 2

Выплаты и долги за 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 гг.	Выплаты и долги за 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 гг.
$Sk - x_1 = S - a,$ $(S - a)k - x_2 = S - 2a,$ $(S - 2a)k - x_3 = S - 3a,$ $(S - 3a)k - x_4 = S - 4a,$ $(S - 4a)k - x_5 = S - 5a,$	$(S - 5a)k - x_6 = S - 5a - b,$ $(S - 5a - b)k - x_7 = S - 5a - 2b,$ $(S - 5a - 2b)k - x_8 = S - 5a - 3b,$ $(S - 5a - 3b)k - x_9 = S - 5a - 4b,$ $(S - 5a - 4b)k - x_{10} = S - 5a - 5b = 0,$

где $k = 1 + \frac{r}{100}$, a и $b = \text{const}$, S – взятый кредит.

дим найти a и b , то нужно решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 5a + 5b = S \\ 35a + 10b = 9S \frac{\Sigma - kS}{k - 1}. \end{cases}$$

В задаче на самом деле требуется найти $5b$:

$$5b = \frac{\Sigma + 2S - 3kS}{5(k - 1)}.$$

Остаётся только подставить известные числа и определить неизвестное. Если сравнить задачу № 15 с примером № 14 (тоже двухбалльный), то, несомненно, сложность задачи соответствует трём баллам. Для этого достаточно сравнить записи к заданию № 14:

$$\begin{aligned} \log_8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) &\geq \log_2(x^2 - 1) - 5, \\ \log_2(x - 1) &\geq \log_2(x^2 - 1) - 5. \end{aligned}$$

Учитывая, что $x > 1$, получаем

$$\log_2(x - 1) \geq \log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) - 5,$$

или

$$\log_2(x + 1) \leq 5 \text{ и } 1 < x \leq 31.$$

В результате, в этом году положительный балл за задание №15 получили 11% вместо 45,2% в прошлом году. С другой стороны, все эти, так называемые, экономические задачи идейно убоги. Авторы уже девять лет заставляют выпускников брать кредит. Создаётся такое впечатление, что авторы задач находятся на содержании какого-то банка, ибо банкиры кровно заинтересованы в том, чтобы вся страна подседала на кредиты и чтобы дети и

внуки платили их десятилетиями. Банки давно пытаются внедриться в образовательный процесс, поэтому нет ничего удивительного в том, что банкирами навязывается школам курс финансовой грамотности. Как же без этого? Причина проста как пять копеек, ибо, как уверенно сказал первый заместитель председателя Банка России Владимир Чистюхин в ходе сессии «Молодёжный взгляд на финансы и устойчивое развитие» в рамках Петербургского международного экономического форума: «Астрономия не может конкурировать с курсом финансовой грамотности. Ну, возможно, ряд ещё предметов» (уж, часом, не математика ли с физикой?).

Если авторами ФГОС провозглашаются идеи функциональной грамотности, в основе которых лежат практико-ориентированные задания, то номера 15 и 18 для этого малопригодны. Мир намного интереснее, чем кредиты в многократном исполнении. И, ведь, есть чем заменить задания 15 и 18.

Задание 18 в этом году, на горе экспертов, оказалось вполне решаемым. В результате, практически за счёт него образовался целый массив третьих проверок и апелляций. Если в 2022 г. один балл за это задание получили 24,6% выпускников (что уже ненормально), то в этом году – это 46,8%. Среди лицеистов на 1–2 балла его выполнили 75%, как и одноклассники

задания первой части. Качество проверки в силу однозначности интерпретации решения было бы намного выше, если бы задание № 18 было ориентировано на программный материал углублённого изучения математики, который уже в течение 15-ти лет проведения ЕГЭ игнорируется. Это главы на комплексные числа, интегралы, простейшие дифференциальные уравнения, тригонометрические неравенства, обратные тригонометрические функции и т.п. Выпускники этих разделов не знают по причине того, что нынешние поколения прагматичны, и если этого нет в ЕГЭ, то и не стоит заморачиваться. Это одна из причин, по которой ЕГЭ из школы нужно выводить. Консервация формата и содержания ЕГЭ в нынешнем

виде ведёт к деградации. Во главу угла должна быть положена программа, а не брошюры и демоверсии, которых просто не должно быть.

Как всегда, проверка на ЕГЭ требует от экспертов достаточно высокой квалификации. Очень часто критерии далеки от реальных работ, да и всё нельзя предусмотреть. В результате, иногда проверка идёт «по понятиям». А как ещё может быть, если авторы противоречат самим себе. Напоминаю, что это было отмечено ещё в 2020 г. [2]. В таблице 3 представлен этот пример.

Пример того, когда эксперт поставит один балл и будет при этом прав. На этот раз подобное толкование коснулось задания № 16 (рис. 2), которое весной оценива-

№16.

Дано:
 $BH \perp AC$
 BN – диаметр

а) Док-ть:
 $AN = CK$

б) $R = 16$
 $\angle BAC = 40^\circ$
 $\angle ACB = 85^\circ$

Найти:
 NK – ?

а) Док-во: $\angle BCN = 90^\circ$, т.к. BN – диаметр, $\angle BAC = 90^\circ - \angle ABC \Rightarrow \angle HCN = \angle HBC$, $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle ABN = \angle HBC \Rightarrow AN = CK$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

Комментарий
 В доказательстве утверждения пункта а есть верное название прямого угла – « $\angle BCN = 90^\circ$ », при этом тут же записано противоречащее условию утверждение « BN – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке – « $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», – содержит неточность, поскольку точка H не лежит на окружности, а $\angle ACN = \angle ABN$ (так как они опираются на одну дугу). Решение пункта б отсутствует.

Оценка эксперта: 1 балл.

Рис. 2

Таблица 3

В решении неравенства $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$ Присутствует запись: ОДЗ $x > 0$. Обозначив $\log_4 x = t$ и получив в итоге решения неравенства выражения: $\log_4 x < -3$, $\log_4 x = 1$, $\log_4 x > 3$, получен верный ответ. О т в е т: $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$.	2019 г. 2 балла	<i>Комментарий:</i> В решении присутствует ошибочное утверждение, но оно никак не использовано при дальнейшем решении
	2020 г. 0 баллов	<i>Комментарий:</i> В решении присутствует ошибочное утверждение

лось федеральной командой в 1 балл (см. Методические рекомендации экспертам региональных предметных комиссий), а уже в мае, перед экзаменом (ролик для региональных комиссий от Ященко И.В. и Семёнова А.В.), его оценили уже в 0 баллов.

Помимо вопросов по содержанию и проверке в последнее время возникли вопросы и по ФГОСовскому сопровождению ЕГЭ. Например, начиная с прошлого года, авторы заданий вдруг озаботились анализом метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ, который должен быть отражён в итоговом отчёте председателей предметных комиссий.

А то как же? Должны же быть достигнуты не только предметные, но и метапредметные результаты обучения, в том числе:

«владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;

способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной

деятельности, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

владение языковыми средствами — умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

владение навыками познавательной рефлексии как осознание совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения».

Всё очень красиво и благостно, только, причём здесь члены региональных предметных комиссий?

Всё в полном соответствии с тем, о чём писал профессор педагогики ещё 10 лет назад [3]: «Но подлинная беда пришла в школу с появлением нового тренда — метапредметности»; «Теоретикам кажется, что, изобретя звонкую систему лозунгов, они уже обеспечили новое педагогическое направление, не затрудняя себя переводом теорий на язык конкретных моделей урока. Они сами ждут от учителя разработок их набора лозунгов в конкретике предмета...». В данном случае авторы ФГОС-ЕГЭ

забыли о своих обязанностях, к каждому придуманному ими заданию приписать соответствующие характеристики (если, конечно, они кому-то выше нужны, в чём я сомневаюсь, поскольку до сих пор как-то жили без этой мишуры), и теперь ждут, чтобы это сделали другие.

Между тем, все перечисленные выше метапредметные результаты обучения являются способностями, благоприятствующими учёбе ученика, развитыми из природных способностей и частично приобретёнными в процессе решения конкретных задач, в частности, по математике. Так как успешность выполнения заданий (а это главное в ЕГЭ) обусловлена знаниями и умениями выпускника по предмету Математика, где главным является самостоятельное решение задач, то если достигнуты предметные результаты, то автоматически в наличии и метапредметные. Если предметные не достигнуты, то не достигнуты и метапредметные. Если метапредметные результаты обучения достигнуты, а предметных результатов как не было, так и нет, то в чём тогда могут измеряться эти результаты на ЕГЭ? Если выпускник самостоятельно решает задания второй части, то у него есть соответствующие метапредметные навыки. Если нет, то у него нет и метапредметных навыков. Таким образом, выполнение учеником только заданий первой части говорит о поверхностном знании математики и соответствующих недостаточных метапредметных способностях. Первичны предметные знания и умения, позволяющие решить конкретную задачу, а само решение является индикатором наличия

метапредметных способностей. Поэтому проблема наличия или отсутствия метапредметных способностей является надуманной.

Так как в последнее время вопрос с ЕГЭ очередной раз был поднят на обсуждение даже в Государственной Думе, то прислушаться нужно, в первую очередь, не к мнению чиновников от образования и переживающих родителей, а к мнению тех, кого непосредственно касаются его достоинства и недостатки, а именно, к учителям школ, участвующих в проверке уже 15 лет. По мнению учителя и председателя ПК с многолетним стажем, «**единый**» экзамен должен быть с точки зрения единства требований к абитуриентам вузов, а не единства выпускного и вступительного экзаменов, а это значит, его нужно вывести из школы, и чем скорее, тем лучше. Кроме того, необходимо обратить внимание министерства на неадекватный характер ОГЭ и ВПР в школе.

Список источников

1. *Малышев И.Г.* Про «соломку» 2022 г. // Математика в школе. – 2022. – № 8. – С. 3–7.
2. *Малышев И.Г.* Есть ли повод изменить формат ЕГЭ после пандемии? // Математика в школе. – 2021. – № 2. – С. 3–6.
3. *Гребенев И.В.* О предмете и метапредметности // Нижегородское образование. – 2013. – № 4. – С. 31–35.

И.Г. Малышев,

Лицей № 40 (г. Нижний Новгород)
migniro@mail.ru

Статья поступила в редакцию	01.07. 2023.
Принята к публикации	27.07. 2023.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ «ФИЗТЕХ–2023» ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 1

OLYMPIAD «PHYSTECH-2023» ON MATHEMATICS THE FINAL. PART 1

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_9

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин
(Московский физико-технический институт)
Москва, nazar_ag@mail.ru

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov, I.V. Glukhov, M.O. Golubev, S.E. Gorodetskiy, V.Yu. Dubinskaya, N.Yu. Korolev, P.A. Ostanin, O.K. Podlipskii, S.M. Saulin, A.A. Skubachevskii, D.A. Tereshin
(Moscow Institute of Physics and Technology),
nazar_ag@mail.ru

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) заключительного этапа олимпиады «Физтех» по математике 2023 года

Abstract: problems with solutions of the final stage of the Olympiad «Phystech» on mathematics held in 2023 are provide

Ключевые слова: Российские олимпиады школьников, математическая олимпиада, олимпиада «Физтех», олимпиадная задача

Keywords: Russian Olympiad for school students, mathematics Olympiad, Olympiad «Phystech», Olympiad problem

© Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин 2023

Заключительный этап олимпиады «Физтех» по математике проводился в феврале 2023 года, и он прошел в 35 городах России и зарубежья. В олимпиаде приняли участие около 3,5 тысяч учащихся 9–11 классов. В данной статье представлен один вариант заданий олимпиады для 11 класса, а также избранные задачи вариантов 9 и 10 классов.

Условия задач 11 класс

1. Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^9 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой

BC в точке B , пересекает высоту CD , проведенную к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. Решите уравнение

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

и $\log_3^4(5y) + 2\log_5 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$. Найдите все возможные значения произведения $xу$.

6. На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

10 класс

8. Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что дробь сократима на m ?

9. Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

11. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значе-

ние параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

12. Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

9 класс

13. Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

14. Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам $3x + 2y = z$ и $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}.$$

15. Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже мотоциклиста. Найдите рас-

стояние между A и B .

16. Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

Решения задач

11 класс

1. Ответ: $2^{21}3^{21}5^{30}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a , b , c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1}3^{\beta_1}5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2}3^{\beta_2}5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3}3^{\beta_3}5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^9 , следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 9$. Аналогично, $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$ и $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 19$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 21$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 9$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 19$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geq 10$, $\beta_2 + \beta_3 \geq 13$ и $\beta_1 + \beta_3 \geq 18$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20,5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21$. Значение 21 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 11$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 14$, а два других

неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{30} , следует, что $\gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. Заметим, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 30, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 15$.

Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{21}3^{21}5^{30}.$$

2. Ответ: $\frac{16}{3}$.

Решение. Поскольку по условию CD – высота, проведённая к гипотенузе, то угол C – прямой. Соединим точку B с точками E и F . Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой (рис. 1). Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD . Значит,

$$\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}.$$

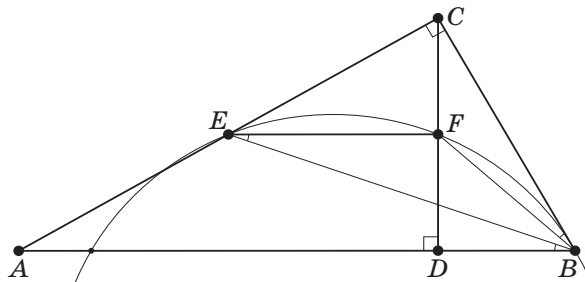


Рис. 1

По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD , а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD . Следовательно, $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0,25S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot AB \cdot CD}{0,5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} =$

$$= 4 \left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

$$3. \text{ О т в е т: } x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}.$$

Р е ш е н и е. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \arcsin(\cos x) &= \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{3\pi}{5} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \pm x = \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbf{N} \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}. \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi, \end{aligned}$$

$$4. \text{ О т в е т: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right).$$

Р е ш е н и е. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 6)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(6; 0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$. При фиксированном значении a – то есть при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbf{R}$ получаем всевозмож-

ные прямые с угловым коэффициентом

$$k = -\frac{a}{2}.$$

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

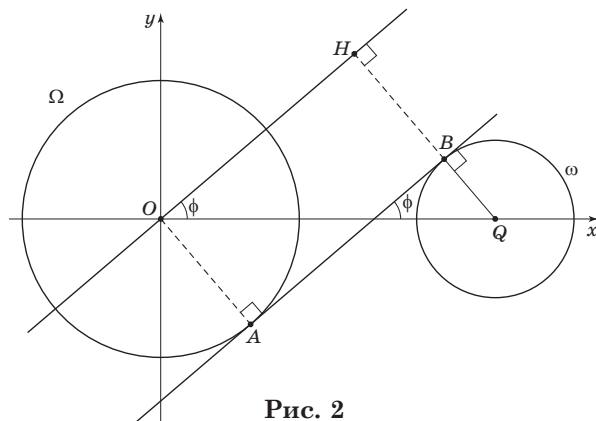


Рис. 2

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно) (рис. 2). Пусть l – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O ; пусть также $l \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 6$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ находим

$$OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{11}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{\sqrt{11}}.$$

С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg} \varphi$, откуда следует, что

$$\left| -\frac{a}{2} \right| < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right).$$

5. Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Обозначим $\log_3 x = u$, $\log_3(5y) = v$. Так как на ОДЗ справедливы равенства

$$\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{u}, \quad \log_x 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2u},$$

$$\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{v},$$

$$\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 = \frac{11}{2v},$$

то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 8, \\ v^4 + \frac{2}{v} = \frac{11}{2v} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 16u + 7 = 0, \\ 2v^5 + 16v - 7 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного корня. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно один корень. Аналогично, второе уравнение имеет ровно один корень. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $2w^5 + 16w + 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, а следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_3 x + \log_3(5y) = 0$, $5xy = 1$, $xy = \frac{1}{5}$.

6. Ответ: 5778.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в виде $3x_2 + y_2 - 33 = 3x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k . Пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k .

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -3x$ и $y = -3x + 60$, поэтому они параллельны прямой $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$, которые пересекают параллелограмм при $0 \leq k \leq 60$ и $0 \leq k + 33 \leq 60$, поэтому $k \in [0; 27]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой прямой вида $y = -3x + b$. Если b кратно трём (то есть $b = 3l$), то получаем прямую $y = 3(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y , а чтобы точка оказалась в параллелограмме, нужно, чтобы $0 \leq y \leq 42 \Leftrightarrow l - 14 \leq x \leq l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 15 целых значений x . Если же b не делится на 3, то есть при $b = 3l + \gamma$, где $\gamma \in \{1; 2\}$, то получим неравенства

$$0 \leq -3x + 3l + \gamma \leq 42 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{3} - 14 \leq x \leq l + \frac{\gamma}{3}.$$

Учитывая, что $x \in \mathbf{Z}$, получаем

$$l - 13 \leq x \leq l,$$

имеем всего 14 целочисленных значений.

Если $k = 3l$ (таких значений 10, с учётом условия $k \in [0; 27]$), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 15 точек – всего $10 \cdot 15 \cdot 15 = 2250$ пар. Если $k \neq 3l$ (таких значений 18), то на каждой из двух прямых $y = -3x + k$ и $y = -3x + k + 33$ можно выбрать по 14 точек – имеем

$$18 \cdot 14 \cdot 14 = 3528 \text{ пар.}$$

Итого получаем

$$2250 + 3528 = 5778 \text{ пар.}$$

7. Ответ: а) 2430;

$$\text{б) } 2\arctg \frac{3}{5} = \arccos \frac{8}{17}.$$

Решение. а) Поскольку SL – касательная к сфере Ω , а SP и SQ – секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$ (рис. 3). Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку $MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω , проведённые из точки A , то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 12$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1 считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$, а $MA_1 = 6$.

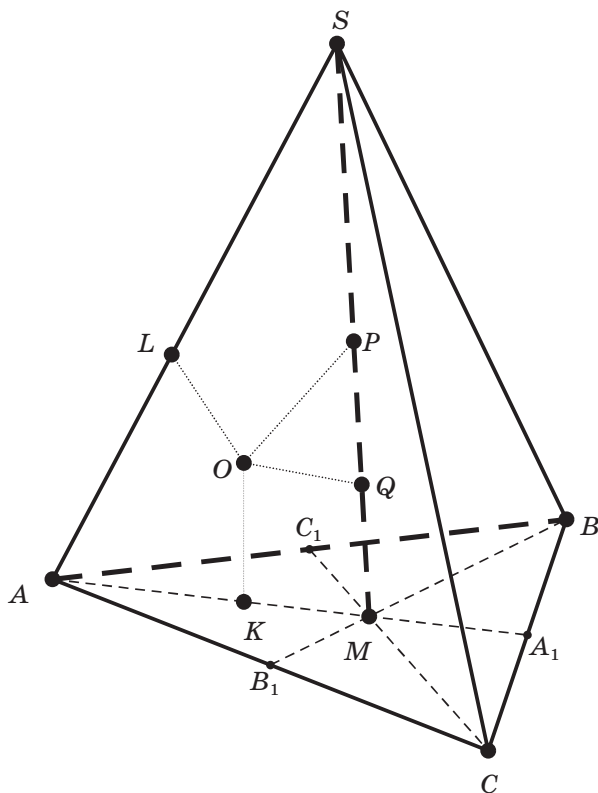


Рис. 3

В треугольнике BMC его медиана MA_1 вдвое короче стороны BC , к которой она

проведена. Следовательно, треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$.

Далее имеем:

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} S_{ABC} = 135.$$

Следовательно,

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430.$$

б) Пусть G и H – проекции точек M и K на прямую BC соответственно (рис. 4). Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K – точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC . Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O – центр сферы Ω .

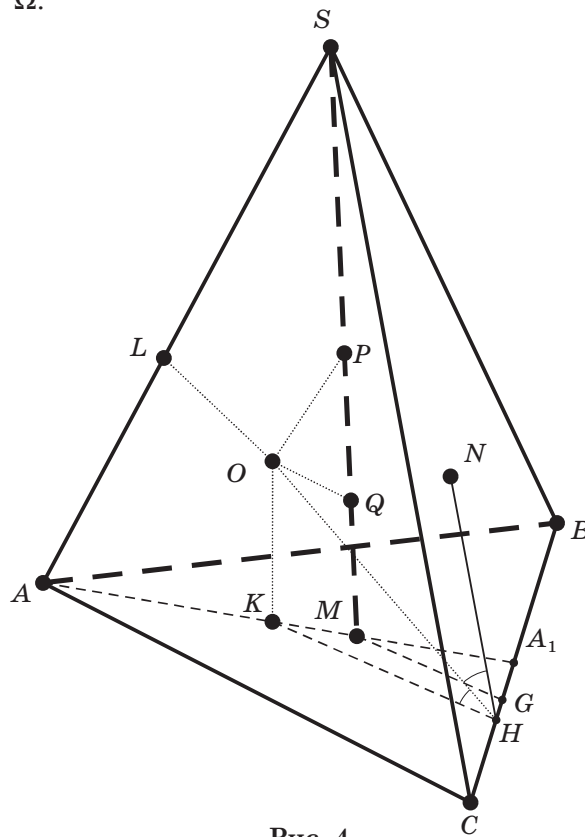


Рис. 4

$$\text{Далее, } S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG, \text{ от-}$$

куда следует, что $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 5$.

Так как SL и SN – касательные к сфере, то $SL = SN = 4$.

Следовательно, $AK = AL = SA - SL = 8$ и $A_1K = AA_1 - AK = 10$.

Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH находим $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{3}$.

Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{3}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2\operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

10 класс

8. Ответ: 8.

Решение. Пусть

$$d = \operatorname{НОД}(a^2 - 6ab + b^2; a + b).$$

Так как $a^2 - 6ab + b^2 = a(a + b) - 7ab + b^2 = a(a + b) - 7b(a + b) + 8b^2$, то есть $8b^2 = (a^2 - 6ab + b^2) + (7b - a)(a + b)$, то из этого равенства следует, что $8b^2$ делится нацело на d . Аналогично доказывается что $8a^2$ делится нацело на d . Поэтому $d \leq \operatorname{НОД}(8b^2; 8a^2) = 8 \cdot \operatorname{НОД}(a^2; b^2) = 8$, так как числа a и b взаимно просты и $\operatorname{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 8$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 7$, при этом дробь равна $\frac{8}{8} = 1$.

9. Ответ: $AB = 8$.

Решение. Пусть точки D и E – центры ω и Ω соответственно, а точки K и M – проекции точки E на прямые CD и AB соответственно (рис. 5). Так как ω касается прямой AB в точке C , то $\angle KCM = 90^\circ$; тогда в четырёхугольнике $СМЕК$ три угла прямые, и он – прямоугольник. Обозначим $AB = 8x$, $ME = y$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, поэтому M – середина AB ; тогда

$$BM = \frac{1}{2}AB = 4x,$$

$$EK = CM = BM - BC =$$

$$= BM - \frac{1}{8}AB = 4x - x = 3x$$

и $DK = DC + CK = DC + EM = 1 + y$. Запишем теорему Пифагора для треугольников BEM и DEK и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} (4x)^2 + y^2 = 5^2, \\ (1+y)^2 + (3x)^2 = 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 1 + 2y + y^2 + \frac{225}{16} - \frac{9y^2}{16} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16}, \\ 7y^2 + 32y - 159 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет один положительный корень $y = 3$; отсюда $x = 1$ и $AB = 8x = 8$.

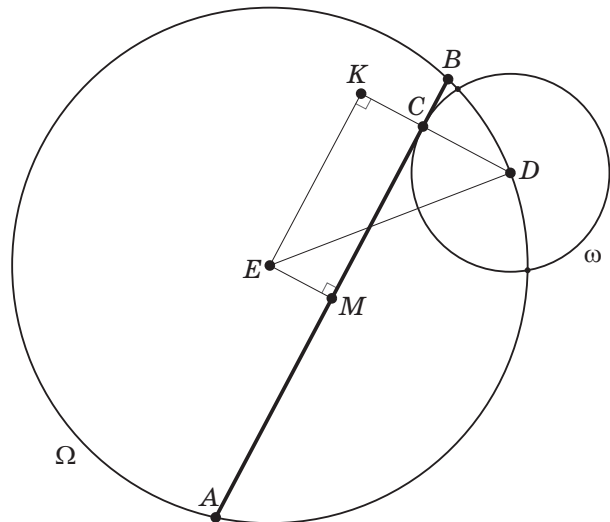


Рис. 5

10. Ответ: $x = \frac{2}{7}$.

Решение. Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$, $v = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.

Тогда $2 - 7x = u^2 - v^2$, и уравнение принимает вид

$$u - v = u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2}{7}$ (принадлежащий области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет корней). Если $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1$. Это выполняется при $0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1$, то есть при $x \in [-1; 0]$. При таких значениях аргумента $2x^2 - 5x \geq 0$, поэтому $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{3}$ и $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$. Итак, уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2}{7}$.

$$11. \text{ Ответ: } a \in \left\{ \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}.$$

Решение. Рассмотрим неравенство системы. Его левая часть обращается в ноль на окружностях $(x + 8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. Внутри каждой из окружностей один из множителей в левой части положителен, а второй – отрицателен. В области вне окружностей оба множителя положительны. Таким образом, неравенство определяет совокупность двух кругов Ω и ω с центрами в точках $O(0; 0)$ и $Q(-8; 0)$ с радиусами 2 и 1 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = ax + 10b$ с угловым коэффициентом $k = a$. При фиксированном значении a – то есть при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbf{R}$ получаем всевозможные

прямые с угловым коэффициентом $k = a$.

Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая должна касаться обоих кругов. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю равен угловому коэффициенту общей касательной к окружностям (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, чтобы она касалась обеих окружностей).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям, имеющую положительный наклон (пусть A и B – точки касания этой прямой с ω и Ω соответственно) (рис. 6). Пусть l – прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q ; пусть также $l \cap OB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($QH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 8$, $HO = HB + BO = QA + BO = 1 + 2 = 3$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем

$$QH = \sqrt{OQ^2 - HO^2} = \sqrt{55},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{HO}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}}.$$

Аналогично рассматриваем случай общей внешней касательной. Пусть CD – общая внешняя касательная с положительным наклоном (C и D – её точки касания с ω и Ω соответственно). Опускаем из точки Q перпендикуляр QT на радиус DO большей окружности. Тогда $\psi = \angle OQT$ и есть угол наклона общей внешней касательной. Имеем

$$OT = OD - QC = 1,$$

$$QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{63},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{OT}{QT} = \frac{1}{3\sqrt{7}}.$$

Так как подходят и положительные, и отрицательные значения наклона, окончательно получаем $a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$ или $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

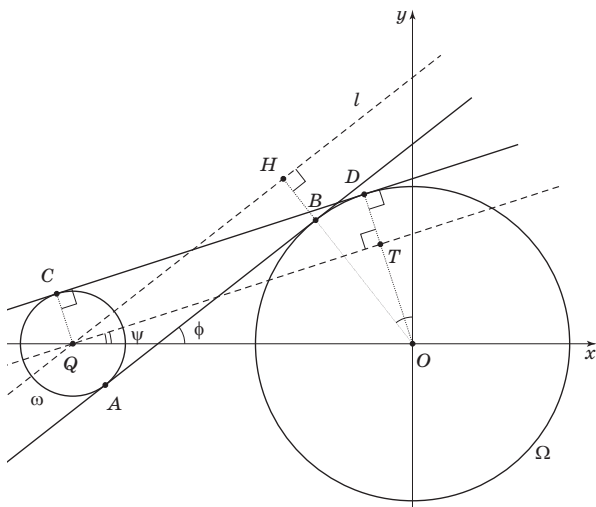


Рис. 6

12. Ответ: 6.

Решение. Пусть отрезок MN пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно; I – центр вписанной окружности треугольника; X и Y – проекции точек M и N на стороны AB и AC в соответственно (рис. 7).

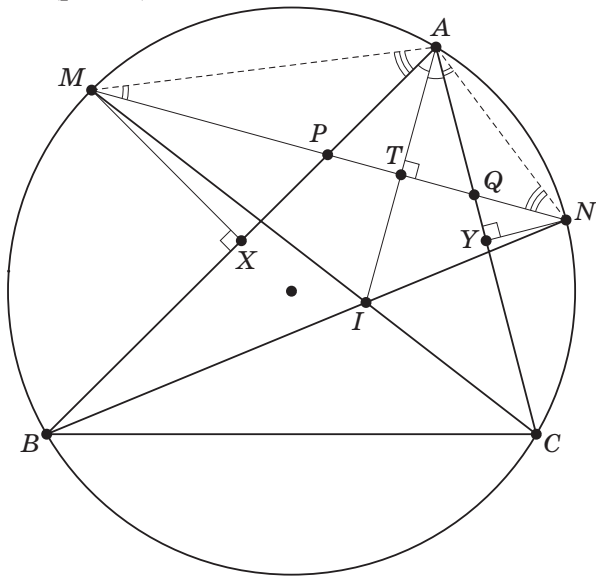


Рис. 7

BN является биссектрисой угла ABC , поскольку точка N – середина дуги AC . Поэтому точка I лежит на отрезке BN .

Обозначим также точку пересечения прямых AI и MN через T . Углы AMN и CAN равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги; аналогично $\angle BAM = \angle ANM$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle PAM + \angle PMA$, а $\angle AQP = \angle QAN + \angle QNA$, поэтому $\angle APQ = \angle AQP$. Значит, треугольник APQ равнобедренный, AI – его биссектриса, следовательно, $AI \perp PQ$. Далее рассмотрим три пары подобных треугольников и запишем пропорциональность сторон в них:

$$\Delta AQN \sim \Delta MPA \Rightarrow \frac{AQ}{MP} = \frac{QN}{AP};$$

$$\Delta QAT \sim \Delta QNY \Rightarrow \frac{AT}{YN} = \frac{AQ}{QN};$$

$$\Delta ATP \sim \Delta MXP \Rightarrow \frac{MX}{AT} = \frac{MP}{AP}.$$

Разделив второе равенство на третье, получаем соотношение

$$\frac{AT^2}{MX \cdot YN} = \frac{AP \cdot AQ}{MP \cdot NQ}.$$

Но из первого равенства следует, что $AP \cdot AQ = MP \cdot QH$ и $AT^2 = MX \cdot YN = 9$. Остаётся отметить, что $\angle MNB = \angle MNA$ (так как эти углы опираются на равные дуги), поэтому NM – биссектриса угла ANB . Значит, в треугольнике ANI отрезок NT – биссектриса и высота. Тогда треугольник равнобедренный, а NT также является его медианой, и $AT = TI$. Итак,

$$AI = 2AT = 2\sqrt{9} = 6.$$

9 класс

13. O T B e T: $\sqrt{52}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω как O и Q , а их радиусы – как R и r соответственно (рис. 8). Из условия

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{17}{2}. \text{ Тогда } CO = R - AC = \frac{15}{2} \text{ и}$$

из треугольника OCQ находим

$$r = QC = \sqrt{OQ^2 - OC^2} = 4.$$

УСВОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ В ПРОЦЕССЕ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ

MASTERING OF FUNDAMENTAL MATHEMATICAL CONCEPTS IN THE PROCESS OF PERFORMING LABORATORY WORKS IN MATHEMATICS

Научная статья 5.8.7

Scientific article 5.8.7

УДК: 372.851

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_20

В.Ю. Бодряков, докт. физ.-мат. наук,
УрГПУ (Екатеринбург), Bodryakov_VYu@e1.ru

V.Yu. Bodryakov, SciD (Phys&Math),
UrGPU (Ekaterinburg), Bodryakov_VYu@e1.ru

Аннотация: в статье рассмотрены лабораторные работы по математике как одно из перспективных образовательных средств, способных обеспечить прочное усвоение математических понятий, приводится пример такой работы

Abstract: the article discusses laboratory work in mathematics as one of the promising educational tools that can provide a solid assimilation of mathematical concepts, an example of such work is given

Ключевые слова: лабораторные работы по математике, усвоение фундаментальных математических понятий

Keywords: laboratory work in mathematics, mastering fundamental mathematical concepts

© В.Ю. Бодряков 2023

В условиях неуклонного снижения уровня математической подготовки выпускников школ проблема усвоения фундаментальных математических понятий в процессе обучения математике приобретает всё большую остроту¹. О том, что такое снижение имеет место, не понаслышке знают и говорят многие практикующие педагоги на всех уровнях системы массового математического образования. Об этом неоднократно писал журнал «Математика в школе» [1–7], о том же пишут и западные методисты-исследователи.

Снижение качества предметной под-

готовки выпускников школ с неизбежностью влечёт снижение качества профессиональной подготовки будущих учителей математики в педагогических вузах и приводит к дефициту учительских кадров², что ведёт к дальнейшему снижению качества математической подготовки школьников. Петля математической некомпетентности затягивается всё туже. Последний год обучения в школе по факту превращается в «натаскивание» на решение типовых задач ЕГЭ вместо систематического качественного обучения математике. В результате в вузе нередко оказываются студенты, «успешно» сдав-

¹ Концепция развития математического образования в РФ. Утв. расп. пр-ва РФ от 24.12.2013 № 2506-р; с изменениями, утв. расп. Пр-ва РФ от 08.10.2020 № 2604-р.

² Концепция подготовки педагогических кадров для системы образования на период до 2030 года. Утв. расп. Пр-ва РФ от 24.06.2022 № 1688-р.

шие профильный ЕГЭ по математике и при этом затрудняющиеся, например, в решении квадратных уравнений.

Одной из основных проблем массового обучения математике является слабая мотивация школьников, представителей поколения Z, к изучению предмета. Поэтому поиск новых, увлекающих подростков средств и форм обучения математике стал ныне одной из наиболее важных задач исследований в области методологии обучения математике. В мировой практике перспективным направлением считается широкое использование EdTech³ – новых цифровых технологий. На этом этапе встаёт новая проблема – проблема мотивации учителей математики к освоению инструментов EdTech на уровне повседневной педагогической практики.

По мнению автора, лабораторные работы по математике (ЛРМ) являются одним из наиболее перспективных современных образовательных средств EdTech, способных обеспечить усвоение фундаментальных математических понятий при обучении математике, причём в естественной и гармоничной связи с другими контекстно связанными понятиями. Отметим, что современная ЛРМ почти всегда является «цифровой» (на этапах моделирования и/или измерения, и/или обработки данных, и/или подготовки отчёта и презентации).

Сегодня можно с полным основанием говорить о существенных достоинствах ЛРМ, проверенных автором годами практического применения в ходе подготовки будущих учителей математики и информатики, и об отсутствии каких-либо про-

тивопоказаний к их массовому применению (образцы школьных ЛРМ приведены, например, в [8]).

Цель статьи – представить авторскую совокупность ЛРМ как цельного образовательного продукта и на конкретном примере показать возможности ЛРМ в обеспечении прочного усвоения математических понятий. Перечисленные далее ЛРМ реализуются в рамках семестрового курса «Математические методы и моделирование» для студентов 5 курса, обучающихся по направлению подготовки «44.03.05. Педагогическое образование. Математика и информатика».

Темы проводимых ЛРМ таковы.

ЛРМ-1. Определение геометрических характеристик участка земной поверхности с помощью мобильной геолокации (три памятника).

ЛРМ-2. Определение числа e путём оцифровки изображения свободно виисящей цепи.

ЛРМ-3. Статистическое обоснование пиксельным методом формулы площади квадрата $S = a^2$.

ЛРМ-4. Статистическое обоснование пиксельным методом теоремы Пифагора: $S_c = S_a + S_b \leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

ЛРМ-5. Определение числа π пиксельным методом.

ЛРМ-6. Определение формулы площади фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b .

ЛРМ-7. Изучение закона охлаждения тела путём теплообмена.

ЛРМ-8. Вероятность регистрации n ионизирующих частиц за время t счётчиком Гейгера (закон больших чисел).

Укажем основные этапы разработки ЛРМ.

1. Замысел работы. Формулирование научного аппарата исследования.

2. Построение математической модели

³ EdTech (Educational Technologies) – это онлайн-обучение, а также новые технологии и подходы к повышению эффективности процесса обучения, разработке образовательного контента и управлению учебным процессом.

объектов, процессов, явлений, изучаемых в ЛРМ.

3. Разработка алгоритма выполнения ЛРМ, включая обработку данных и оценку погрешностей. Определение необходимой инфраструктуры.

4. Разработка документальной отчётности и процедуры оценивания.

5. Апробация ЛРМ в учебном процессе.

6. Рефлексия. Планирование и внесение необходимых корректировок (в любой из этапов).

7. «Запуск» ЛРМ в практику обучения математике. Выполнение курсовых и выпускных квалификационных работ по тематике ЛРМ.

8. Подготовка научно-методических публикаций в изданиях различного уровня. Доклады на российских и международных научно-методических конференциях. Трансфер идей ЛРМ на иные уровни образования.

В зависимости от уровня математической подготовленности обучающихся и дидактических целей лабораторные работы по математике могут ставиться и выполняться на репродуктивном, частично-исследовательском и исследовательском уровнях [9].

Структура введения нового математического знания при использовании ЛРМ может быть такова.

1. Предъявление обучающимся реального объекта, процесса, явления (прототипа) и описывающей его математической модели.

2. Введение понятий, связанных с моделью и прототипом, определение математического аппарата, необходимого для работы с моделью.

3. Поэтапное освоение компонентов необходимого математического аппарата с контролем достижения требуемого уровня (факультативно).

4. Разработка алгоритма поэтапного выполнения ЛРМ.

5. Выполнение ЛРМ, обработка результатов, подготовка отчёта.

Отметим, что основной целью ЛРМ является освоение обучающимися математических моделей изучаемых прототипов. Изучение сути физических, химических, биологических и прочих процессов, лежащих в основе моделируемых прототипов, остаётся за преподавателями-предметниками.

Далее проиллюстрируем возможности ЛРМ в части усвоения обучающимися фундаментальных математических понятий и моделей на примере лабораторной работы по теме «Определение числа e путём оцифровки изображения свободно висящей цепи».

Задача о форме свободно висящей цепи⁵

Пусть в поле тяжести Земли подвешена тонкая гибкая нерастяжимая нить (рис. 1), изготовленная из материала с погонной плотностью массы ρ (вес единицы длины нити). Найти уравнение $y(x)$, описывающее форму нити (цепи). Кривую, задающуюся этим уравнением, назовём цепной линией, или катенарией.

Решение. Для решения задачи достаточно рассмотреть равновесие выделенного участка нити. Рассмотрим правый участок нити: от вершины $A(0; y(0))$ до точки $B(x; y)$. Действие мысленно отброшенных участков нити заменим соответствующими силами натяжения в нити.

⁵ Этот раздел можно пропустить, считая уравнение цепной линии известным. Автор, однако, надеется, что читатель получит эстетическое удовольствие, вспомнив основы стандартного вузовского курса дифференциальных уравнений.

Обозначим как $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ орты координатных осей Ox и Oy .

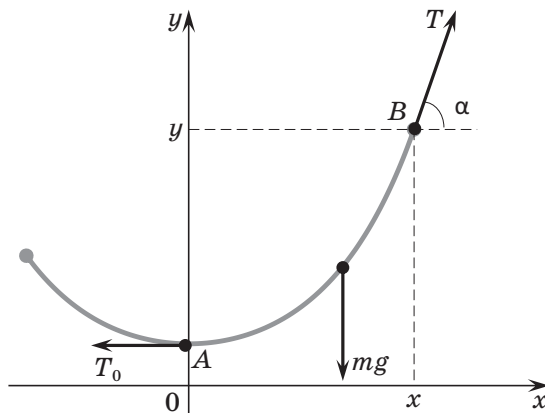


Рис. 1. Математическая модель свободно висящей цепи

В вершине A действует горизонтально направленная (в силу симметрии) влево сила

$$\mathbf{T}_0 = -T_0 \mathbf{i}.$$

В точке B действует направленная под углом α к положительному направлению оси Ox сила

$$\mathbf{T} = T \cos \alpha \mathbf{i} + T \sin \alpha \mathbf{j}.$$

Кроме того, на выделенный участок цепи действует сила тяжести

$$\mathbf{mg} = -mg \mathbf{j},$$

приложенная к центру масс участка.

Так как выделенный участок нити находится в статическом равновесии, то векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 + \mathbf{T} + \mathbf{mg} &= \mathbf{0} = \\ &= (-T_0 + T \cos \alpha) \mathbf{i} + (-mg + T \sin \alpha) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

В проекциях на координатные оси Ox и Oy имеем соответственно:

$$T \cos \alpha = T_0, \quad (1)$$

$$T \sin \alpha = mg. \quad (2)$$

Разделив почленно (2) на (1) для исключения T , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mg}{T_0}. \quad (3)$$

Согласно геометрическому смыслу производной,

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Масса выделенного участка нити пропорциональна длине дуги l , выражаемой определённым интегралом

$$m = \rho l = \rho \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (5)$$

Объединив выражения из (3)–(5), получим:

$$y' = \frac{\rho g}{T_0} \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (6)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (6) путём дифференцирования приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (ДУ-II). Введём также обозначение

$$\frac{1}{a} = \frac{\rho g}{T_0},$$

где действительный параметр $a > 0$, тогда

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}.$$

С учётом начальных условий

$$y(x=0) = y(0), \quad y'(x=0) = 0$$

имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}; \\ y|_{x=0} = y(0); \\ y'|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

ДУ-II в задаче Коши (7) является неполным и решается с понижением порядка путём замены $y' = p = p(x)$. Такая замена приводит к промежуточной задаче Коши:

$$\begin{cases} p' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}; \\ p|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

ДУ-I в системе (8) является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{a} \int dx + C_1,$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1.$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из начального условия в системе (8):

$$\ln 1 = 0 = C_1.$$

Таким образом, решением задачи Коши (8) является выражение

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a}.$$

Оно после потенцирования легко решается относительно p :

$$p = y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Здесь использовано обозначение для гиперболического синуса

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}).$$

Теперь получаем вторую задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}); \\ y|_{x=0} = y(0). \end{cases} \quad (9)$$

ДУ-I в задаче Коши (9) непосредственно интегрируется:

$$dy = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) dx,$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) dx + C_2;$$

$$y = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + C_2 = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C_2. \quad (10)$$

В (10) использовано обозначение для гиперболического косинуса:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}).$$

Из начального условия в задаче Коши (9) определяем постоянную интегрирования C_2 :

$$y(0) = a + C_2,$$

так что

$$y(x) = (y(0) - a) + a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Поскольку выбор оси абсцисс не влияет на форму цепной линии, можно положить

$$y(0) - a = 0.$$

Уравнение цепной линии имеет вид

$$y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Задача о математической модели свободно висающей цепи решена.

Результаты и обсуждение

Обсуждение результатов оформим в стиле прокомментированного студенческого отчёта по ЛРМ [9].

Тема. Определение числа e путём оцифровки изображения висающей цепи.

Цель: ознакомиться с математической моделью цепной линии; на основании данных оцифровки изображения висающей цепи определить величину числа e как одного из параметров математической модели.

Задачи:

1) изучить описанные в литературе подходы к построению математической модели цепи, свободно висающей в однородном поле тяжести;

2) изучить методы оцифровки изображений и обработки результатов оцифровки;

3) с помощью любого подходящего цифрового устройства сделать несколько снимков свободно висающей цепи;

4) провести верификацию математической модели формы свободно висающей цепи.

Оборудование и материалы: цепь с приспособлениями для подвески, цифровая камера для фотофиксации цепи, компьютер.

Теория

Согласно построенной математической модели висящей цепи:

$$y(x) = (y(0) - a) + a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

где константа $a > 0$.

Удобно провести ось абсцисс так, чтобы $y(0) = 0$. Тогда

$$y(x) = a \left[\operatorname{ch} \frac{x}{a} - 1 \right]. \quad (11)$$

Заметим также, что

$$y'(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

При $x = a$ имеем:

$$y(a) = a[\operatorname{ch}(1) - 1] = a \left[\frac{e + e^{-1}}{2} - 1 \right].$$

Отсюда для параметра e , понимаемого как подлежащий экспериментальному определению параметр модели, получим:

$$e_{\text{exp}} = \left(\frac{y(a)}{a} + 1 \right) + \left[\left(\frac{y(a)}{a} + 1 \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Заметим, что при этом $y'(a) = \operatorname{sh}(1) \approx 1,1752$, то есть для касательной к цеп-

ной линии в точке с абсциссой $x = a$ угол наклона $\alpha \approx 49,5^\circ$. Проведение касательной под углом 45° позволяет визуально приблизительно локализовать искомую абсциссу $x = a$, затем определить $y(a)$ и, наконец, вычислить e_{exp} на основе равенства (12). Для большей точности опыт повторяется несколько раз с «разными» $x_i = a_i$ с усреднением и статистической оценкой погрешности.

Ход работы

После сборки экспериментальной «установки» (рис. 2) производится фотофиксация висящей цепи. Изображение оцифровывается, например, в MS Paint; определяются координаты характерных точек (рис. 3).

Результаты и обсуждение

Результаты эксперимента и обработки изображения в графическом виде приведены на рисунке 3 и в таблице (знаком * отмечены уточняющие измерения, им на рисунке 3 соответствуют более тонкие линии, параллельные оси абсцисс).



Рис. 2. Изображение свободно висящей цепи

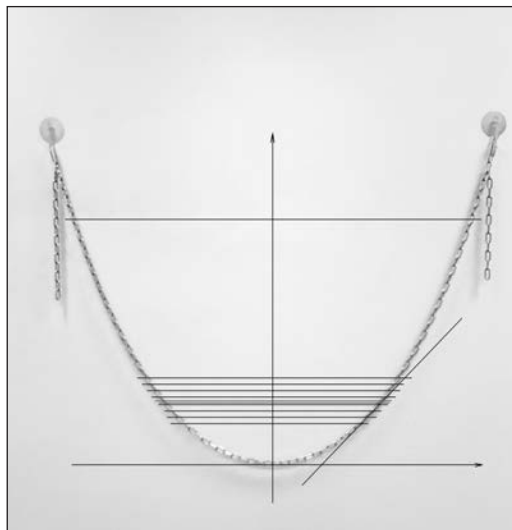


Рис. 3. Изображение свободно висящей цепи с «оцифровочными» линиями

Таблица

Результаты измерений и расчётов числа e

№	a , пкс	$y(a)$, пкс	e_{exp}
1	584	260	2,4885
2	624	300	2,5728
3	664	340	2,6462
4	708	380	2,7035
5	748	428	2,7853
6	772	468	2,8631
7	804	509	2,9241
8*	724	408	2,7654
9*	716	392	2,7284
		$\langle e_{\text{exp}} \rangle \pm \delta e$	$2,719 \pm 0,136$

С использованием статистических функций MS Excel найдено «экспериментальное» значение числа e

$$e_{\text{exp}} = 2,719 \pm 0,136$$

с относительной статистической погрешностью $\pm 5\%$. Фактическая же относительная погрешность (по отношению к «математическому» значению числа $e = 2,71828182845\dots$) менее $0,1\%$. О высоком качестве математической модели и отличном соответствии расчёта по модели и фактического изображения цепи свидетельствует итоговый рисунок 4 (теоретическая кривая (11) от модельной отличается совсем незначительно).

Выводы

Задачи ЛРМ решены, цель достигнута. Экспериментальное значение числа e найдено: $e_{\text{exp}} = 2,719 \pm 0,136$. Относительная статистическая погрешность составила $\pm 5\%$. Фактическая относительная погрешность менее $0,1\%$. Теоретическая цепная линия отлично согласуется с изображением реальной цепи.

Комментарий. При выполнении данной ЛРМ обучающиеся усваивают сле-

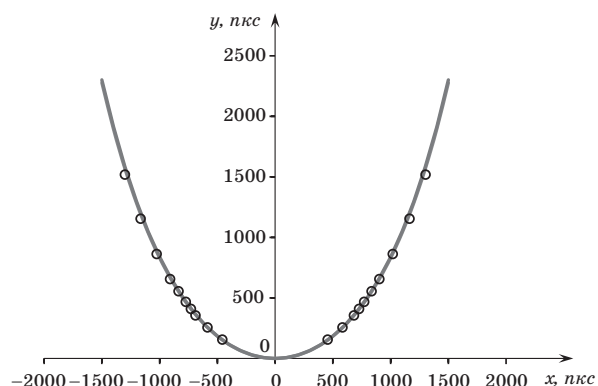


Рис. 4. Сравнение кривых
(точки – «оцифровка»)

дующие основные понятия (цитируются согласно ПРП СОО по математике и по информатике)⁶.

Математика

Построение математических моделей

⁶ См.: Примерная рабочая программа среднего общего образования «Математика» (углублённый уровень), М., ИСРО РАО, 2022. Примерная рабочая программа среднего общего образования «Информатика» (углублённый уровень), М., ИСРО РАО, 2022.

реальной ситуации с помощью уравнений и неравенств. Применение уравнений и неравенств к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни.

Показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики. Функциональные зависимости в реальных процессах и явлениях. Графики реальных зависимостей.

Первая и вторая производные функции. Определение, геометрический и физический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

Уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Примеры решений дифференциальных уравнений. Математическое моделирование реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

Информатика

Модели и моделирование. Цель моделирования. Адекватность модели моделируемому объекту или процессу, цели моделирования. Формализация прикладных задач. Представление результатов моделирования в виде, удобном для восприятия человеком. Графическое представление данных.

Ввод изображений с использованием различных цифровых устройств.

Анализ данных с помощью электронных таблиц и др.

Кроме того, для понимания генезиса математической модели реальной цепи в форме уравнения цепной линии необходимы ясное понятие об условиях равновесия тела (межпредметная связь математики и физики).

Уровень усвоения понятий и владения необходимым математическим аппаратом контролируется и при необходимости корректируется педагогом при предваритель-

ном собеседовании и в процессе выполнения лабораторной работы.

Систематическое применение надлежащим образом подготовленных лабораторных работ по математике способствует усвоению обучающимися фундаментальных математических понятий, формированию и закреплению их личностных, метапредметных и предметных умений. Культура выполнения ЛРМ формируется в педагогическом вузе в процессе подготовки будущих учителей; трансфер на уровне школьного математического образования естественным образом осуществляется молодыми специалистами-выпускниками.

Выполняются ЛРМ, как правило, с применением цифровых технологий, достаточно широким, но целесообразным. Поэтому ЛРМ с полным основанием можно отнести к инструментам EdTech. Отражая чувственно воспринимаемые реальные объекты, процессы, явления, ЛРМ являются практико-ориентированными и с удовольствием выполняются обучающимися поколения Z, гармонизируя с их поколенческими психологическими особенностями.

Список источников

1. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Стереометрия в школе: пора бить тревогу? (по результатам профильного ЕГЭ 2015–2019 гг.) // Математика в школе. – 2020. – № 1. – С. 3–12.
2. Тумашева О.В. Обучение математике в условиях реализации ФГОС: кадровые барьеры // Математика в школе. – 2020. – № 5. – С. 3–7.
3. Буфеев С.В. Что не так с критериями проверки ЕГЭ? // Математика в школе. – 2020. – № 8. – С. 3–6.
4. Малышев И.Г. Не пора ли отступить от края // Математика в школе. – 2022. – № 1. – С. 3–8.

5. Тумашева О.В., Шашкина М.Б. Фиаско ОГЭ по математике 2021 года: какие уроки следует извлечь? // Математика в школе. – 2022. – № 1. – С. 3–8.

6. Бодряков В.Ю., Фомина Н.Г. О качестве математической подготовки учащихся в комплексе «школа-вуз»: взгляд с позиций работника высшего педагогического образования // Математика в школе. – 2010. – № 2. – С. 56–61.

7. Бодряков В.Ю. Об одной насущной проблеме математического педагогического образования учителей // Математика в школе. – 2013. – № 7. С. 32–40.

8. Закирова А.В., Ладэ Э.О., Леконце-

ва В.А., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике как инструмент формирования экспериментального мышления обучающихся // Математика в школе. – 2022. – № 6. – С. 51–58.

9. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Цифровые лабораторные работы по математике как современный инструмент формирования обучающегося-исследователя // Педагогическое образование в России. – 2022. – № 3. – С. 148–159.

Статья поступила в редакцию

10.05.2023.

Принята к публикации

01.07.2023.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Бесконечность не всегда равна бесконечности

Георг Кантор, математик XIX века, произвёл переворот в нашем понимании бесконечности, продемонстрировав, что существуют различные «уровни» бесконечности. Он доказал, что множество действительных чисел шире множества натуральных чисел, несмотря на то, что оба они бесконечны. Это открытие, хотя и противоречащее здравому смыслу, открыло путь к более глубокому изучению понятия бесконечности в математике.

Исследование бесконечности, проведённое Кантором, оказало глубокое влияние на наше понимание математики и даже Вселенной. Действительно, именно математика помогает нам понять такие понятия, как бесконечное пространство и вечность. Последствия работы Кантора также позволяют нам решать сложные математические задачи, связанные с бесконечностью, например, некоторые задачи теории чисел или математического анализа.

Хотя бесконечность не является местом, пунктом назначения или конечной точкой, математика позволяет нам исследовать бесконечность и её пределы.

Бесконечность – это понятие, которое определялось и переосмысливалось на протяжении всей истории математики. Со времен Кантора и до наших дней математики продолжают исследовать тайны бесконечности, помогая нам лучше понять мир, в котором мы живём. Бесконечность – это не просто абстрактное понятие, а важнейший инструмент для понимания реальности нашей Вселенной.

Источник: New-Science.ru

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ, СВЯЗАННЫХ СО СВОЙСТВАМИ ГИПЕРБОЛЫ И ПАРАБОЛЫ

ON SOME GEOMETRIC CONSTRUCTIONS ASSOCIATED WITH THE PROPERTIES OF HYPERBOLAS AND PARABOLAS

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_29

М.В. Таранова, НГПУ (Новосибирск),
marinataranowa@yandex.ru

M.V. Taranova, NSPU (Novosibirsk),
marinataranowa@yandex.ru

Аннотация: квадратичная функция, обратная пропорциональность, их свойства и графики входят в содержание школьного курса математики. Однако некоторые свойства этих замечательных кривых и связанные с ними геометрические конструкции остаются незамеченными. В статье приведены несколько таких конструкций. Они могут стать предметом рассмотрения на элективных курсах или послужить материалом, на котором можно организовать самостоятельные учебные исследования школьников

Abstract: quadratic functions, inverse proportion, their properties and graphics are included in the content of the school mathematics course. However, some properties of these remarkable curves and connected with them geometric designs remain unnoticed. They can be the subject of consideration at elective courses and serve as a basis on which you can organize independent training studies of schoolchildren

Ключевые слова: парабола и её свойства; гипербола и её свойства

Keywords: parabola and its properties; hyperbole and its properties

© М.В. Таранова 2023

Школьные учебные исследования по математике и другим предметам стали одной из составляющих учебных планов образовательных учреждений России. Работа по приобщению школьников к самостоятельному научному поиску способствует интеллектуальному развитию обучающихся, воспитанию их интереса к предмету, созданию атмосферы творчества в учебном коллективе, формированию групп школьников, объединённых общими стремлениями.

Темой для учебного исследования может служить материал, который находится на страницах школьного учебника, но в расширенном виде изучается на уроках

математики, факультативных занятиях, различных спецкурсах.

Проблема исследования может быть сформулирована в виде задачи, в которой требуется выяснить условия, возможности, способы существования того или иного математического объекта. Также её можно выразить в виде проблемных вопросов, возникающих по ходу исследования при обобщении, выделении частных случаев, систематизации фрагментов задач.

Для иллюстрации сказанного приведём следующие примеры.

Задача 1. Рассмотрим декартову систему координат xOy и в ней параболу, заданную уравнением $y = ax^2$. Можно рас-

смаатривать параболу, заданную в общем виде уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Её график получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом на вектор $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$, поэтому относительно новой системы координат $x'O'y'$ функция будет иметь вид $y' = ax'^2$, и рассуждения будут такими же.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , вписанный в параболу так, что его гипотенуза AB расположена параллельно оси Ox (рис. 1). Выясним, чему равна высота этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла.

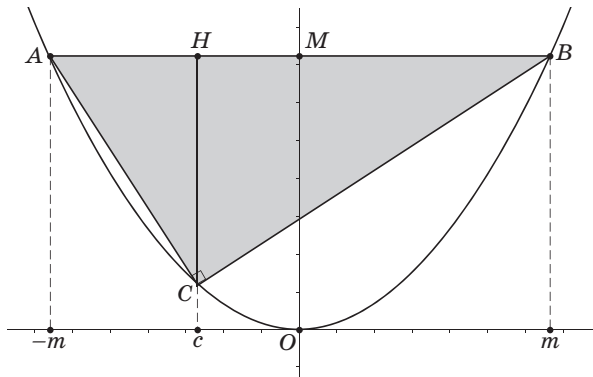


Рис. 1

Решение. Пусть вершины треугольника имеют координаты $A(-m; am^2)$, $B(m; am^2)$, $C(c; ac^2)$. Тогда основание высоты, проведённой к гипотенузе, есть точка $H(c; am^2)$. Выразим координаты вершины C через координаты вершин A и B .

Поскольку парабола симметрична относительно оси ординат, то середина M гипотенузы есть точка $(0; am^2)$. Так как она равноудалена от вершин прямоугольного треугольника, то $MC = m$. С другой стороны,

$$CM^2 = (0 - c)^2 + (am^2 - ac^2)^2,$$

значит,

$$\begin{aligned} m^2 &= c^2 + a^2(m^2 - c^2)^2; \\ (m^2 - c^2)(1 - a^2m^2 + a^2c^2) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что $c \neq m$, поэтому имеет место равенство

$$a^2m^2 - a^2c^2 = 1.$$

Но $a^2m^2 - a^2c^2 = a(am^2 - ac^2) = a \cdot CH$ (при $a > 0$), поэтому $CH = \frac{1}{a}$. Если же $a < 0$, то $CH = ac^2 - am^2$, и из равенства $a^2m^2 - a^2c^2 = 1$ следует, что $CH = -\frac{1}{a}$.

На основании полученных результатов можно сформулировать замечательное свойство:

все прямоугольные треугольники, вписанные в параболу

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0$, с гипотенузой, параллельной оси Ox , имеют равные высоты.

Здесь уместно поставить вопрос: верно ли обратное утверждение? Сформулируем гипотетическое предложение.

Предположение. Все треугольники, вписанные в параболу $y = ax^2$, где $a \neq 0$, у которых одна сторона параллельна оси Ox , а высота, проведённая к этой стороне, равна $\frac{1}{|a|}$ (выбранной единицы измерения), имеют прямой угол, противоположный данной стороне.

Рассмотрим параболу $y = ax^2$, $a > 0$ (случай $a < 0$ рассматривается аналогично). Пусть CH – высота треугольника, вписанного в параболу вышеописанным способом, и пусть $C(c; ac^2)$. Поскольку $CH = \frac{1}{a}$, а основание высоты CH расположено на стороне AB , параллельной оси абсцисс, то ординаты вершин A и B будут равны

$$y_A = ac^2 + \frac{1}{a}; \quad y_B = ac^2 + \frac{1}{a}. \text{ Поэтому}$$

$$\begin{aligned} A &\left(-\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}; ac^2 + \frac{1}{a}\right), \\ B &\left(\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}; ac^2 + \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Выразим координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, а затем найдём их скалярное произведение. Имеем:

$$\overrightarrow{AC} \left(c + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}; -\frac{1}{a} \right),$$

$$\overrightarrow{BC} \left(c - \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}; -\frac{1}{a} \right),$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2 - \left(c^2 + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Это значит, что треугольник ABC – прямоугольный.

Учитывая полученные результаты, можно сформулировать ещё ряд интересных свойств прямоугольных треугольников, вписанных в параболу так, что их гипотенузы параллельны оси абсцисс.

1. Отношение площадей двух таких треугольников равно отношению их гипотенуз.

2. Для любого прямоугольного треугольника, вписанного в параболу $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, так, что его гипотенуза параллельна оси абсцисс, произведение длин отрезков, на которые основание высоты, проведённой из вершины прямого угла, делит гипотенузу, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{a^2}$.

Задача 2. Все середины параллельных хорд параболы $y = kx^2$ ($k \neq 0$) лежат на одной прямой, параллельной оси ординат [3, с. 587].

Решение. Рассмотрим параболу $y = kx^2$ ($k > 0$) и её хорду AB (рис. 2).

Обозначим координаты точек A и B так: $A(a; ka^2)$, $B(b; kb^2)$, тогда координаты середины M хорды AB будут

$$\left(\frac{a+b}{2}; k \frac{a^2+b^2}{2} \right).$$

Найдём тангенс угла α наклона прямой AB к положительному направлению оси Ox :

$$\operatorname{tg} \alpha = k \frac{b^2 - a^2}{b - a} = k(b + a).$$

Но $\operatorname{tg} \alpha$ для всех хорд, параллельных прямой AB , есть величина постоянная, поэтому $\frac{a+b}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k} = \text{const}$. Тогда и середина M_1 хорды A_1B_1 расположена на той же прямой $x = \frac{a+b}{2}$, что и середина M хорды AB . В случае $k < 0$ можно провести аналогичные рассуждения.

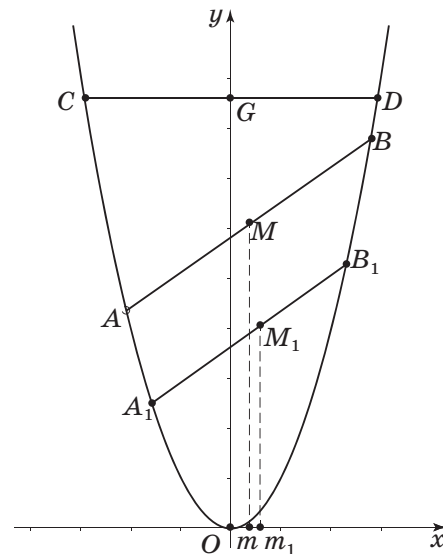


Рис. 2

Выясним теперь, в какой точке прямая, параллельная AB , касается параболы.

Так как касательная и параболa имеют одну общую точку, уравнение $kx^2 = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + g$ (здесь $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + g$ – уравнение касательной), имеет единственное решение $x_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2k}$. То есть искомая точка касания есть точка пересечения прямой, содержащей середины всех параллельных хорд, и самой параболы.

Учитывая полученные результаты, можно сформулировать интересные задачи для исследования. Примером такой задачи может служить задача, предложен-

ная А.А. Егоровым в рамках 18-го турнира городов (осенний тур 1996–1997 гг., см. [2]) и приведённая нами ниже.

Задача 3. Можно ли по заданному рисунку параболы $y = x^2$ (рис. 3) восстановить оси координат?

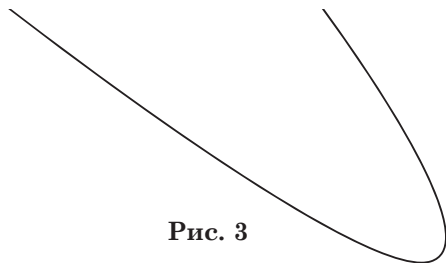


Рис. 3

Решение. Да, можно. Для этого достаточно провести две параллельные хорды AB и A_1B_1 , затем найти их середины M и M_1 соответственно (рис. 2). Провести прямую MM_1 . Поскольку MM_1 параллельна оси Oy , то любая хорда, перпендикулярная MM_1 , будет пересекать параболу в точках, симметричных относительно оси Oy , значит, середина этой хорды будет расположена на оси ординат. Дальнейшие построения очевидны. Построим хорду CD , перпендикулярную прямой MM_1 , найдём её середину G и проведём через неё прямую, параллельную MM_1 . Построенная прямая будет осью ординат и в пересечении с параболой даст начало координат (точку O). Для построения оси абсцисс достаточно через начало координат провести прямую, перпендикулярную оси ординат.

Заметим, что построенная прямая может иметь два направления. То есть ось Ox определяется с точностью до осевой симметрии, ось ординат – однозначно.

Исследование фактов о параболы нацеливает на поиск аналогий для равноугольной гиперболы – графика обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$). Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4. Известно, что середины параллельных хорд параболы $y = kx^2$ ($k \neq 0$) расположены на одной прямой, параллельной оси ординат. Как располагается прямая, проходящая через середины параллельных хорд равноугольной гиперболы $y = \frac{k}{x}$?

Решение. Рассмотрим в декартовой системе координат xOy равноугольную гиперболу $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) (в дальнейшем будем называть её просто гиперболой).

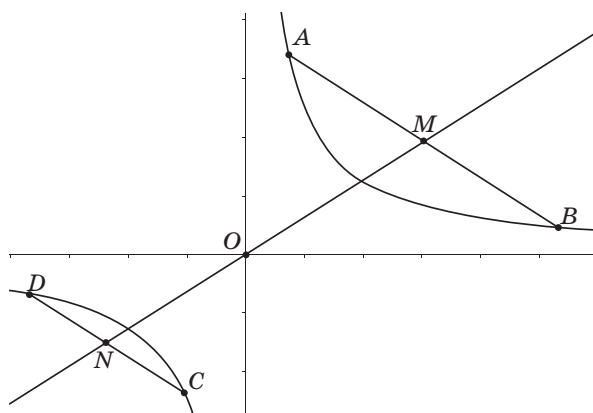


Рис. 4

Проведём параллельные хорды AB и CD , отметим их середины M и N соответственно (рис. 4). Запишем координаты данных точек:

$$A\left(x_1; \frac{k}{x_1}\right); B\left(x_2; \frac{k}{x_2}\right);$$

$$C\left(x_3; \frac{k}{x_3}\right); D\left(x_4; \frac{k}{x_4}\right);$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; k \frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2}\right);$$

$$N\left(\frac{x_3 + x_4}{2}; k \frac{x_3 + x_4}{2x_3x_4}\right).$$

По условию хорды параллельны, поэтому одноимённые координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ пропорциональны. Значит,

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \alpha, \\ \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = \alpha \frac{k(x_3 - x_4)}{x_3 x_4} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \alpha \\ \frac{x_1 - x_2}{x_4 - x_3} = \alpha \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \alpha, \\ \alpha = \alpha \frac{x_1 x_2}{x_3 x_4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \alpha, \\ x_3 x_4 = x_1 x_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Рассмотрим радиус-векторы

$$\overrightarrow{OM} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; k \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2} \right)$$

и

$$\overrightarrow{ON} \left(\frac{x_3 + x_4}{2}; k \frac{x_3 + x_4}{2x_3 x_4} \right).$$

Поскольку их соответствующие координаты пропорциональны, то векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны:

$$\begin{aligned}
& \frac{x_1 + x_2}{2} : \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4}, \\
& k \frac{x_1 + x_2}{2x_1 x_2} : k \frac{x_3 + x_4}{2x_3 x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4}.
\end{aligned}$$

Это значит, что середины параллельных хорд с концами на равносторонней гиперболе расположены на прямой, проходящей через начало координат.

Учитывая полученные результаты, можно сформулировать ещё ряд интересных заданий для исследования свойств параллельных хорд с концами на гиперболе $y = \frac{k}{x}$. Например:

1) Зависит ли полученный результат от того, на одной или на разных ветвях гиперболы расположены параллельные хорды? (Нет, не зависит).

2) Если вершины параллелограмма расположены на равносторонней гиперболе, где может располагаться точка пересечения его диагоналей? (В начале координат, в силу центральной симметрии равносторонней гиперболы и параллелограмма).

Задача 4 стала источником следующей конструкции.

Задача 5. На гиперболе зафиксируем точку P и будем рассматривать треугольники PAB , PCD , ... такие, что углы при вершине P прямые. Сформулируем гипотезу: все гипотенузы, построенных треугольников параллельны и их середины принадлежат одной прямой, проходящей через начало координат.

Решение. Рассмотрим треугольники PAB и PCD с вершинами на гиперболе $y = \frac{k}{x}$ и прямыми углами при вершине P (рис. 5). Пусть $P \left(x_p; \frac{k}{x_p} \right)$, $A \left(x_a; \frac{k}{x_a} \right)$, $B \left(x_b; \frac{k}{x_b} \right)$, $C \left(x_c; \frac{k}{x_c} \right)$, $D \left(x_d; \frac{k}{x_d} \right)$.

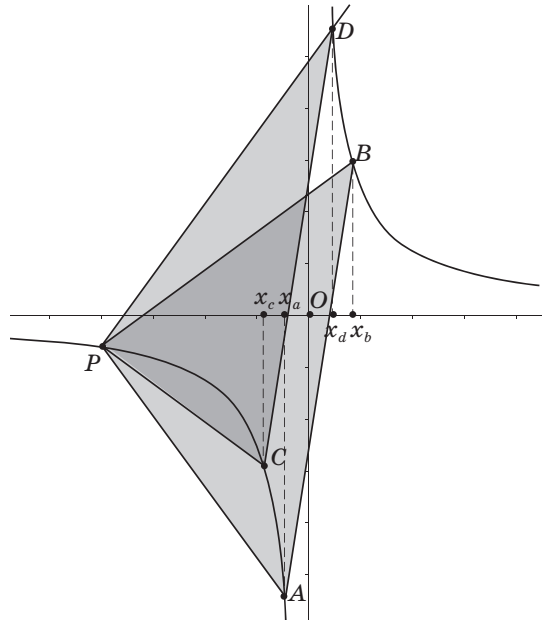


Рис. 5

Тогда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} & \left(x_a - x_p; \frac{k}{x_a} - \frac{k}{x_p} \right), \\ \overrightarrow{PB} & \left(x_b - x_p; \frac{k}{x_b} - \frac{k}{x_p} \right), \\ \overrightarrow{PC} & \left(x_c - x_p; \frac{k}{x_c} - \frac{k}{x_p} \right), \\ \overrightarrow{PD} & \left(x_d - x_p; \frac{k}{x_d} - \frac{k}{x_p} \right). \end{aligned}$$

Поскольку треугольник PAB прямоугольный, то $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned} & (x_a - x_p) \cdot (x_b - x_p) + \\ & + \left(\frac{k}{x_a} - \frac{k}{x_p} \right) \cdot \left(\frac{k}{x_b} - \frac{k}{x_p} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x_a - x_p) \cdot (x_b - x_p) + \\ & + k^2 \frac{(x_p - x_a)(x_p - x_b)}{x_a x_b x_p^2} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x_a - x_p) \cdot (x_b - x_p) \left(1 + \frac{k^2}{x_a x_b x_p^2} \right) = 0.$$

Очевидно, что $(x_a - x_p) \cdot (x_b - x_p) \neq 0$, значит,

$$1 + \frac{k}{x_a x_b x_p^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2}{x_p^2} = -x_a x_b, \quad x_a x_b < 0.$$

Аналогичные рассуждения для треугольника PCD дают

$$\frac{k^2}{x_p^2} = -x_c x_d, \quad x_c x_d < 0.$$

Учитывая полученные результаты, имеем: $x_a x_b = x_c x_d$.

Для проверки коллинеарности векторов найдём отношение их соответствующих координат:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{CD}}} &= \frac{x_b - x_a}{x_d - x_c}, \\ \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{CD}}} &= \frac{-k(x_b - x_a)}{x_a x_b} : \frac{-k(x_d - x_c)}{x_c x_d} \Leftrightarrow \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{CD}}}. \end{aligned}$$

То есть гипотенузы всех прямоугольных треугольников, вписанных в гиперболу и имеющих общую вершину прямого угла, параллельны. На основании задачи 4 можно утверждать, что середины гипотенуз расположены на прямой, проходящей через начало координат.

Задача 6. Докажите, что ортоцентр треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу $y = \frac{1}{x}$, принадлежит этой гиперболе [3, с. 588].

Решение. Пусть вершины треугольника ABC , вписанного в равностороннюю гиперболу, и его ортоцентр H имеют координаты (рис. 6)

$$A \left(x_1; \frac{1}{x_1} \right), \quad B \left(x_2; \frac{1}{x_2} \right), \quad C \left(x_3; \frac{1}{x_3} \right),$$

$$H(x_0; y_0).$$

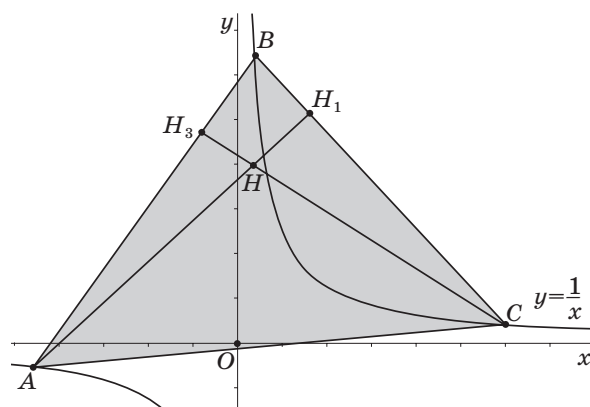


Рис. 6

Произведение угловых коэффициентов прямых AB и CH_3 равно -1 , то есть $k_{AB} \cdot k_{CH_3} = -1$.

Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой $y = k_{AB}x + l_1$. Значит,

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = k_{AB}x_1 + l_1, \\ \frac{1}{x_2} = k_{AB}x_2 + l_1, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = k_{AB}(x_1 - x_2)$$

и

$$k_{AB} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

Значит, угловой коэффициент прямой CH_3 равен $k_{CH_3} = x_1 x_2$, и уравнение этой прямой примет вид $y = k_{CH_3}x + l_2$.

Поскольку точки C и H_3 лежат на этой прямой, то $\frac{1}{x_3} = x_1 x_2 x_3 + l_2$, откуда $l_2 = \frac{1}{x_3} - x_1 x_2 x_3$, и уравнение CH_3 есть

$$y = x_1 x_2 x + \frac{1}{x_3} - x_1 x_2 x_3.$$

Аналогичные рассуждения для прямой BC дают значение её углового коэффициента $k_{BC} = -\frac{1}{x_2 x_3}$. Так как прямые BC и AH_1 перпендикулярны, то для прямой AH_1 угловой коэффициент равен $k_{AH_1} = x_2 x_3$. А вывод уравнения $y = x_2 x_3 x + \frac{1}{x_1} - x_1 x_2 x_3$ прямой AH_1 аналогичен выводу уравнения прямой CH_3 .

Для того, чтобы найти абсциссу ортоцентра H , достаточно решить уравнение

$$x_1 x_2 x_0 + \frac{1}{x_3} - x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_0 + \frac{1}{x_1} - x_1 x_2 x_3.$$

Будем иметь:

$$x_0(x_1 x_2 - x_2 x_3) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3},$$

следовательно,

$$x_0 = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3}.$$

Подставив x_0 в уравнение любой из высот, получим:

$$y_0 = x_1 x_2 \left(-\frac{1}{x_1 x_2 x_3} \right) + \frac{1}{x_3} - x_1 x_2 x_3,$$

тогда $H \left(-\frac{1}{x_1 x_2 x_3}; -x_1 x_2 x_3 \right)$.

То есть координаты ортоцентра удовлетворяют уравнению данной гиперболы. Поэтому, если треугольник вписан в равностороннюю гиперболу, то его ортоцентр также расположен на гиперболе.

Следующая задача является вспомогательной для задачи 8, в которой доказывается важное геометрическое свойство окружности Эйлера (окружности девяти точек) для треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу.

Задача 7. Точки A и B лежат на равносторонней гиперболы $xy = 1$. Прямая AB пересекает асимптоты гиперболы в точках A_1 и B_1 . Докажите, что $AA_1 = BB_1$ и $AB_1 = BA_1$ [3, с. 588].

Решение. Пусть точки A и B имеют координаты $A \left(x_1; \frac{1}{x_1} \right)$ и $B \left(x_2; \frac{1}{x_2} \right)$ (рис. 7). Уравнение прямой AB можно записать в виде $y = kx + b$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} = kx_1 + b, \\ \frac{1}{x_2} = kx_2 + b. \end{cases}$$

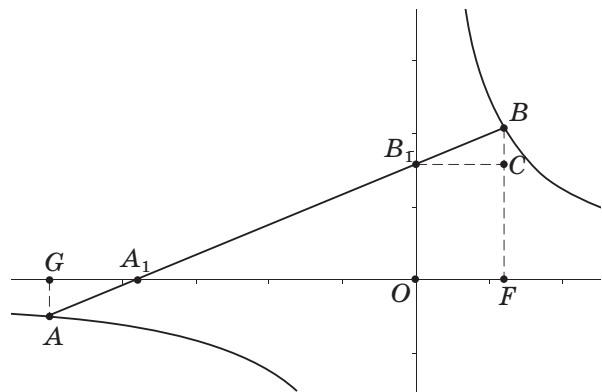


Рис. 7

Решая эту систему уравнений, найдём:

$$y = -\frac{1}{x_1 x_2} x + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Так как точка A_1 есть точка пересече-

ния оси абсцисс и прямой AB , то её абсциссу можно найти из уравнения

$$0 = -\frac{1}{x_1 x_2} x_{A_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}. \text{ Получим:}$$

$$x_{A_1} = x_1 + x_2.$$

Найдём длины проекций отрезков AA_1 и BB_1 на ось абсцисс (рис. 7). Имеем:

$$GA_1 = OG - OA_1 = |x_1 - x_1 - x_2| = |x_2|,$$

$$B_1C = OF = |x_2|.$$

В прямоугольных треугольниках AGA_1 и BCB_1 углы AA_1G и BB_1C равны как углы с соответственно параллельными сторонами, равны катеты GA_1 и B_1C , тогда равны и гипотенузы. То есть $B_1C = A_1G$. Отсюда $AA_1 = BB_1$ и $AB_1 = BA_1$.

Задача 8. Докажите, что окружность Эйлера треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, проходит через начало координат [3, с. 588].

Решение. Пусть треугольник ABC вписан в равностороннюю гиперболу и его стороны AB , BC и AC пересекают оси координат в точках F , E , L , K , Q , G соответственно (рис. 8). Обозначим середины сторон BC , AC и AB через A_1 , B_1 , C_1 соответственно.

Так как $BE = AF$, то $FC_1 = C_1E$ (см. задачу 7). Тогда в треугольнике FOE отрезок OC_1 является медианой, поэтому треугольник OC_1E равнобедренный, откуда следует равенство углов C_1OE и C_1EO .

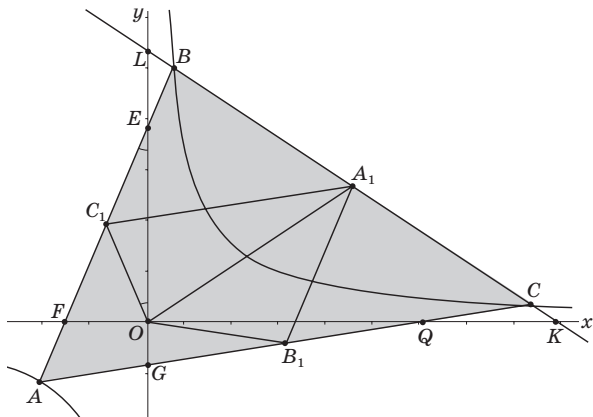


Рис. 8

Аналогичные рассуждения для прямоугольного треугольника GOQ дают равенство углов B_1OQ и B_1QO . То есть $\angle(OC_1; Oy) = \angle(Oy; AB_1)$ и $\angle(Oy; OB_1) = \angle(AC; Oy)$, откуда $\angle(C_1O; OB_1) = \angle(AC; AB)$.

В силу того, что отрезки A_1C_1 и A_1B_1 – средние линии треугольника ABC , то пары прямых A_1C_1 и AC , A_1B_1 и AB параллельны. Откуда следует, что $\angle(C_1O; OB_1) = \angle(A_1C_1; A_1B_1)$ или $\angle(C_1OB_1) + \angle(C_1A_1B_1) = 180^\circ$. Это значит, что четырёхугольник $OC_1A_1B_1$ – вписанный. А поскольку окружность девяти точек проходит через середины сторон треугольника, то эта же окружность проходит через начало координат.

В последующем материале рассмотренные выше геометрические конструкции могут быть полезны для сочинения примеров задач на построение циркулем и линейкой, в которых задана равносторонняя гиперболу и треугольник, вписанный в неё.

Нами при составлении задач был использован список В. Верника [цит. по 1, с. 109–137] о восстановлении треугольника по трём точкам (полный список представлен в работе С.А. Беляева [цит. по 1, с. 111]). Согласно списку В. Верника, рассматривается возможность восстановления треугольника по трём элементам, в качестве которых могут выступать вершины треугольника, центры описанной и вписанной окружностей, центр тяжести треугольника, середины его сторон, ортоцентр, основания высот и др. Список состоит из задач, в которых требуемое построение циркулем и линейкой возможно, задач, где оно невозможно, и задач, имеющих бесконечно много решений.

Учителю для пополнения данного списка один из заданных элементов треугольника можно заменять тем условием, что треугольник вписан в гиперболу. В этом

случае некоторые задачи из разряда не решаемых или имеющих бесконечно много решений переходят в разряд разрешимых. Например, таковой будет задача о восстановлении треугольника по двум его вершинам и центру описанной окружности.

Приведём другие примеры задач на восстановление треугольника, вписанного в гиперболу.

Задача 9. Можно ли восстановить треугольник, вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по его центру тяжести и центру описанной окружности?

Решение. Обозначим центр описанной окружности, центр тяжести, ортоцентр треугольника ABC , вписанного в гиперболу $xy = k$ ($k > 0$), через W , M , H соответственно.

Точки W , M , H принадлежат прямой Эйлера, причём центр окружности девяти точек (точка D) делит отрезок WH пополам. Кроме того, ортоцентр треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, также лежит на гиперболе. Поэтому, чтобы найти положение центра окружности девяти точек, достаточно построить ортоцентр H как точку пересечения прямой Эйлера WM и гиперболы и найти середину отрезка WH (рис. 9).

Поскольку окружность Эйлера треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу, проходит через центр гиперболы (начало координат), то отрезок DO является радиусом окружности девяти точек. Кроме того, радиус окружности Эйлера в два раза меньше радиуса описанной окружности треугольника, следовательно, для построения радиуса описанной окружности треугольника достаточно на луче DO от точки D отложить отрезок в два раза больше длины отрезка DO (отрезок DL). И построить окружность с центром в точке W радиусом, равным длине отрезка DL .

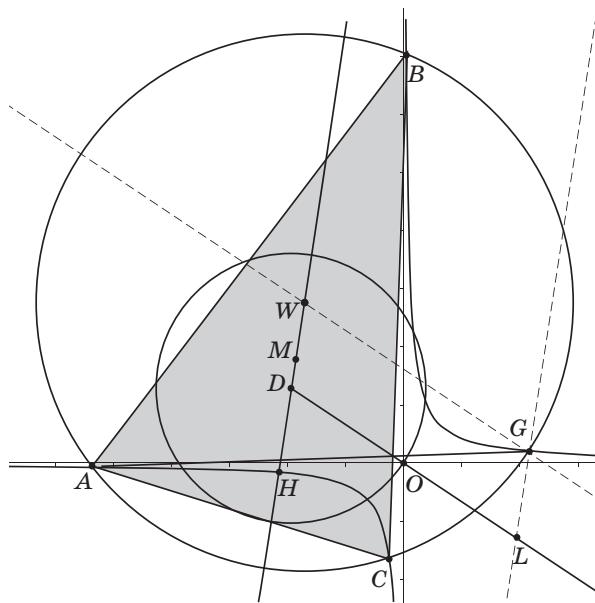


Рис. 9

Поскольку искомый треугольник вписан в гиперболу и построенную окружность, то его вершинами будут точки пересечения окружности и гиперболы.

Замечание. Если точки W , M , H совпадают, то заданная точка расположена на гиперболе и треугольник ABC правильный. В правильном треугольнике центры вписанной, описанной окружностей совпадают с центром окружности Эйлера (точка D). Поэтому для восстановления треугольника достаточно построить окружность с центром в заданной точке радиусом $2DO$. Пересечение построенной окружности с гиперболой даст искомый треугольник.

Задача 10. Можно ли восстановить треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по вершине A и середине M_1 стороны BC ?

Решение. Пусть прямая BC пересекает оси координат в точках B_1 и C_1 (рис. 10). Тогда, согласно задаче 7, отрезки BB_1 и CC_1 равны и M_1 — середина отрезка B_1C_1 . Значит, для прямоугольного

треугольника B_1C_1O отрезок OM_1 – радиус его описанной окружности. Отсюда следует, что для восстановления треугольника ABC достаточно построить окружность с центром в точке M_1 радиуса OM_1 и отметить точки её пересечения с координатными осями. Затем построить прямую B_1C_1 . Эта прямая в пересечении с гиперболой и определит положение вершин B и C .

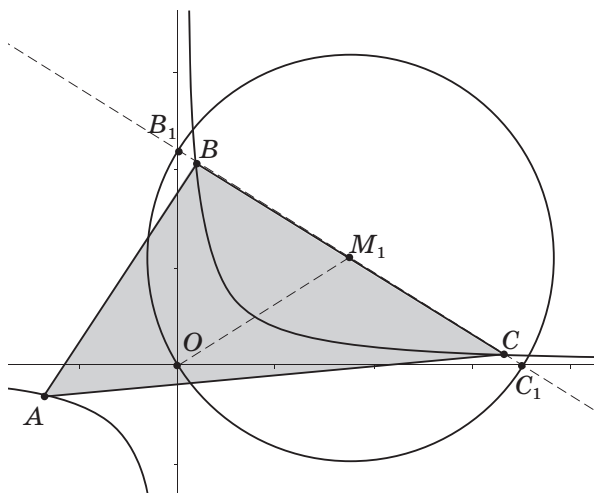


Рис. 10

Задача 11. Можно ли восстановить треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по основанию H_1 высоты AN_1 и середине M_1 стороны BC ?

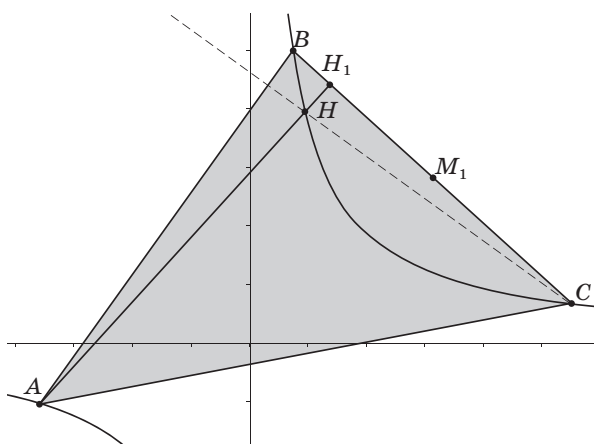


Рис. 11

Решение. Поскольку H_1 и M_1 принадлежат прямой BC , то для определения положения вершин B и C достаточно построить прямую H_1M_1 , которая в пересечении с гиперболой даст их положение. Ортоцентр вписанного треугольника лежит на гиперболе, значит, для определения его положения достаточно восстановить перпендикуляр из точки H_1 к прямой H_1M_1 и найти точку его пересечения с гиперболой (рис. 11). Вершину A можно найти как точку пересечения построенного перпендикуляра и гиперболы.

Задача 12. Можно ли восстановить треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по прямой, проходящей через основания высот H_1 и H_2 , и центру W описанной окружности?

Решение. Поскольку радиусы описанной окружности, проведённые к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника, то для определения вершины C достаточно из центра описанной окружности провести к прямой H_1H_2 перпендикуляр (рис. 12). Затем построить прямые CH_1 и CH_2 и определить положение точек A и B .

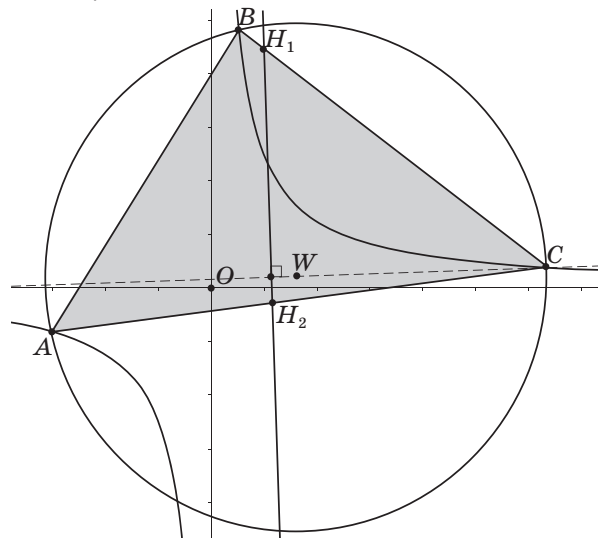


Рис. 12

Задача 13. Можно ли восстановить треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по серединам M_1 и M_2 сторон BC и AC соответственно?

Решение. Окружность Эйлера содержит середины сторон треугольника, а для вписанного в гиперболу треугольника – проходит через начало координат, значит, для определения её центра D достаточно найти точку пересечения серединных перпендикуляров отрезков OM_2 и M_1M_2 (рис. 13).

Для определения положения точки M_3 достаточно построить точку пересечения окружности Эйлера и прямой OE (рис. 13). Действительно, по задаче 4 середины параллельных хорд с концами на равносторонней гиперболе расположены на прямой, проходящей через начало координат, следовательно, M_3 принадлежит этой прямой. Кроме того, так как M_1M_2 – средняя линия искомого треугольника, то M_1M_2 параллельна AB . Значит, если построить прямую M_1M_2 , которая пересекает гиперболу в точках F и N , можно получить хорду, параллельную хорде AB . Осталось

найти её середину E , провести прямую OE , построить окружность Эйлера с центром в точке D радиуса DO . Пересечение построенной прямой и окружности даёт середину хорды AB – точку M_3 .

Дальнейшие построения очевидны: через M_3 провести прямую, параллельную M_1M_2 . Эта прямая в пересечении с гиперболой даст точки A и B . Через точки B и M_1 провести прямую. Прямая BM_1 в пересечении с гиперболой даёт точку C . Поскольку все вершины определены, треугольник построен.

Задача 14. Можно ли восстановить треугольник ABC , вписанный в равностороннюю гиперболу $xy = k$, по середине M_1 стороны BC и центру вписанной окружности?

Решение. Для построения стороны BC достаточно построить окружность с центром в точке M_1 радиуса OM_1 . Построенная окружность, пересекаясь с осями координат, даст точки B_1 и C_1 . Прямая B_1C_1 , пересекаясь с гиперболой, определит сторону BC (см. задачи 7, 10).

Поскольку радиус окружности, про-

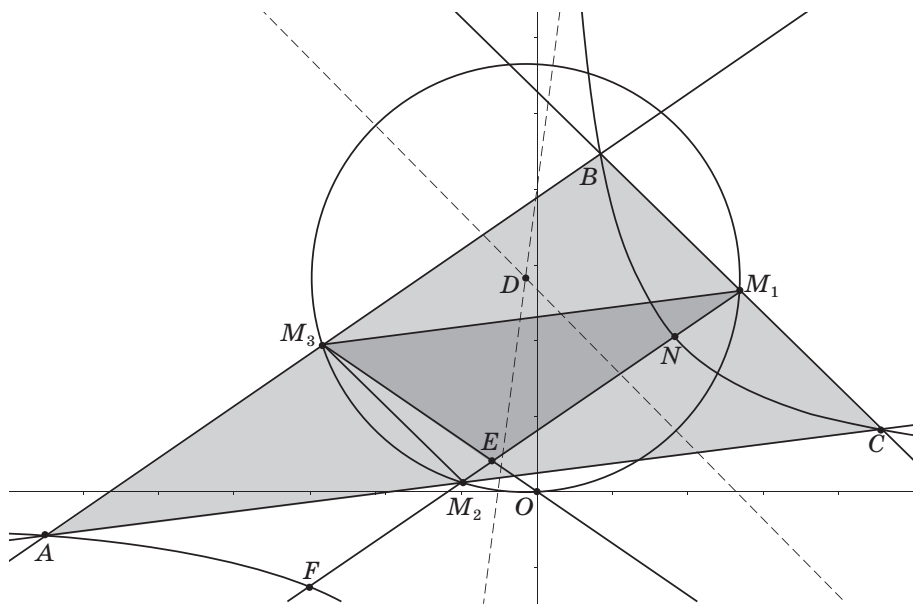


Рис. 13

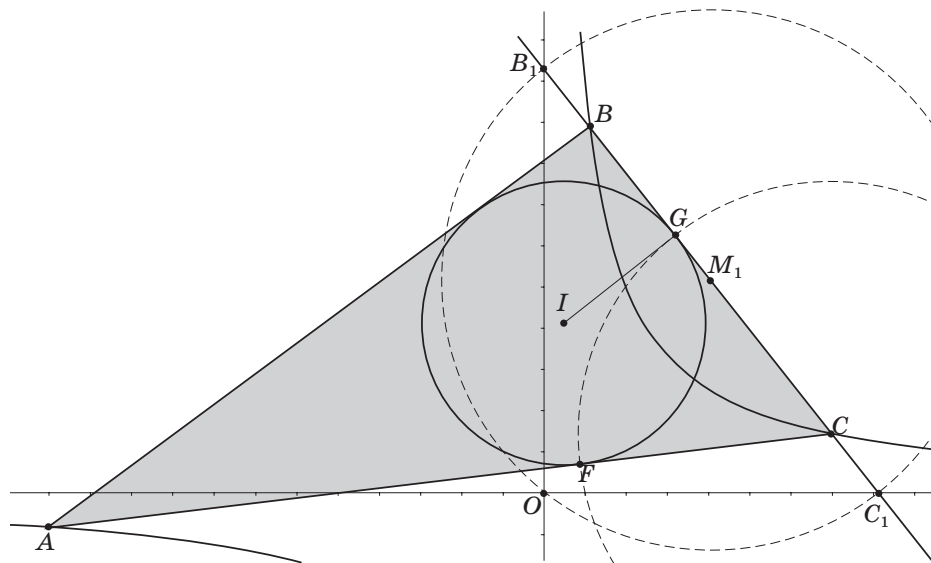


Рис. 14

ведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то для нахождения точки касания окружности и прямой достаточно построить перпендикуляр IG к стороне BC (рис. 14).

Так как отрезки длин касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны, то точка касания вписанной окружности и стороны AC принадлежит как вписанной окружности, так и окружности с центром в точке C радиуса CG . Следовательно, для получения точки касания достаточно построить эти две окружности, которые, пересекаясь, дадут точку F (рис. 14). Далее строим прямую CF , которая в пересечении с гиперболой даёт вершину A .

Список источников

1. Беляев С.А. Восстановление треугольника по заданным точкам // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 19. – М.: МЦНМО, 2015. – 272 с.
2. Международный математический Турнир Городов. Восемнадцатый турнир городов, 1996–1997 гг. Осенний тур. URL: <https://www.turgor.ru/problems/18/index.php> (дата обращения 05.06.2023).
3. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. – 640 с.

Статья поступила в редакцию	14.03. 2023.
Принята к публикации	25.07. 2023.



ПРОБЛЕМНАЯ СИТУАЦИЯ НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ В 5–6 КЛАССАХ

APPLYING A PROBLEM-BASED SITUATION METHOD IN MATHEMATICS CLASS IN MIDDLE SCHOOL

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_41

А.В. Белошистая, докт. пед. наук, профессор,
Мурманский Арктический государственный уни-
верситет, beloshistayaav@email.su

A.V. Beloshistaya, SciD (Pedagogy), Professor,
Murmansk Arctic State University,
beloshistayaav@email.su

Аннотация: в статье обоснована возможность эффективного использования проблемных ситуаций на уроках математики в 5–6 классах. Дан дидактический и методический анализ понятия «проблемная ситуация». Приведены примеры организации уроков на основе использования проблемных ситуаций при знакомстве с новым материалом

Abstract: the article substantiates the possibility of effective use of problem-based situation method in mathematics classes in middle school for grades 5 to 6. The study presents a didactic and methodical analysis of the problem-based situation, as well as the examples of organizing lessons using this concept for teaching new material

Ключевые слова: проблемная ситуация на уроке математики, развивающее обучение, учебная самостоятельность, методическое творчество учителя

Keywords: problem-based situation in mathematics class, developmental teaching, educational independence, teacher's methodical creativity

© А.В. Белошистая 2023

Проблемная ситуация является одним из самых сильных способов организации развивающего обучения – это факт, общепризнанный в дидактике. Однако большинством учителей этот способ обучения школьников на уроке математики рассматривается как эпизодический, и более того – «редко-эпизодический». Общение с учителями показывает, что многие убеждены в следующем:

А) не на каждом уроке можно использовать проблемную ситуацию, а только на некоторых «удобных» для неё уроках;

Б) проблемная ситуация может быть только небольшой частью урока, а построить весь урок на проблемных си-

туациях (серии проблемных ситуаций) невозможно;

В) проблемная ситуация годится как приём обучения не для всех детей, а только для подготовленных, успевающих, сообразительных школьников;

Г) использовать проблемную ситуацию на уроке можно только тогда, когда уже накоплен приличный запас знаний и умений математического характера в соответствующей теме, то есть как способ знакомства с новым материалом на уроке математики проблемная ситуация обучения не годится.

Рассмотрим дидактическое понятие «проблемная ситуация» с точки зрения

возможности её использования при обучении математике в 5–6 классах, безотносительно к используемому учебнику на самом обычном «рабочем» уроке. При этом отметим следующее: для приведения примеров разработки конспекта урока на основе постановки проблемной ситуации **в принципе выбор учебника не существенен**. Страницы учебников могут различаться, но их математическое содержание остаётся постоянным, поскольку все авторы должны содержательно ориентироваться на стандарт / программу. При этом внешняя форма заданий может различаться значительно. Более того, по одной и той же странице разные учителя могут составить разные проблемные ситуации для урока. В данном материале будем опираться на самый устоявшийся и привычный учителям учебник авторов Н.Я. Виленкина, В.И. Жохова и др. Этот учебник выбран по той причине, что он никак не ориентирует учителя на использование проблемной ситуации на уроке. И именно эта структура «безличного объяснительно-иллюстративного характера» в подаче нового материала является весьма удобной для самостоятельного методического творчества учителя. Иными словами, если страница учебника «не навязывает» учителю методическую структуру урока, то он имеет полное право строить урок так, как считает нужным, используя тот материал, который кажется ему целесообразным и разумным для выбранного им дидактического подхода к его построению.

Сформулируем исходный методический постулат проблемно-поискового подхода к обучению: роль педагога в организации учебного процесса состоит в умении сформулировать систему познавательных задач на предметном материале, требующих от ребёнка решения либо в умственном, либо в практическом плане. Таким

образом, методическая подготовка самого урока должна быть такова, чтобы дети **сумели справиться** с решением поставленной задачи своими силами, «законно» пережив при этом чувство успешности. Это означает, что под методической подготовкой урока подразумевается разработка системы заданий, специально выстроенных педагогом с целью **подвести детей к правильному решению поставленной учебной задачи**. Учебная задача связана с необходимостью усвоения детьми конкретного (предметного) содержания (в виде представления, умения или навыка). Учебная задача, таким образом, вытекает из темы урока. Тема урока определяет его математическое содержание.

Постановка **учебной задачи** может быть проведена явным способом, то есть учитель объявляет детям тему урока или пишет её на доске. Но таким образом снимается «интрига», то есть заранее объявив тему, мы изначально снимаем «проблему». Чтобы проблемная ситуация выполнила свою роль, необходимо, чтобы дети с ней столкнулись и осознали её, то есть поняли, что перед ними проблема, требующая поиска решения (в дидактике это называют «принятие учебной задачи»).

Проблемная ситуация есть учебная ситуация, в которой ребенок сталкивается либо с необходимостью получить новые знания (умения), чтобы справиться с предложенным заданием, либо должен применить имеющиеся знания и умения в новой ситуации (не просто повторить то, что он умеет, а применить в том виде, которого требует от него новая ситуация). В дидактике это называют **переносом**. Легкость и адекватность такого переноса говорит о высоком уровне обучаемости ребёнка.

Организуя **проблемную ситуацию**, учитель должен продумать и спланировать следующие её классические этапы.

Первый этап:

- подготовительная работа к постановке проблемной ситуации;
- постановка проблемной ситуации, организация осознания учебной задачи и её принятия учениками;
- подготовка и организация системы предметных (моделирующих) действий или помогающих заданий для решения проблемной ситуации;

Второй этап:

- организация ситуации, стимулирующей перенос нового знания или умения на расширенный содержательный объём, обобщение и упрочение в виде обобщённого способа действий или обобщённого понятия.

Сразу отметим следующее: не следует думать, что слово «проблема» (проблемная ситуация) нужно воспринимать в каком-то глобальном контексте. Проблема должна быть сформулирована для учеников таким образом, чтобы её уровень сложности лишь немного превышал уровень их реальных возможностей (этот уровень называют актуальным). Именно в этом и состоит идея обучения «в зоне ближайшего развития». Иными словами, решение проблемы должно быть для ребёнка **посильным** либо полностью самостоятельно, либо при минимальной помощи взрослого. Если это правило нарушается, то есть ребёнок постоянно сталкивается со слишком сложными для себя проблемами, которые он не может решить своими силами, а постоянно вынужден прибегать к посторонней помощи, это формирует отрицательное отношение к предмету деятельности. К сожалению, при обучении математике такая ситуация возникает довольно часто. А причиной её возникновения является неумение педагога «дозировать» уровень поставленной перед ребёнком проблемы,

а также неумение методически организовать **систему косвенной помощи** ребёнку в решении этой проблемы.

Уточним смысл понятий. Чаще всего можно видеть, что взрослый при обучении ребёнка прибегает к **прямой помощи** (родители делают это почти всегда, да и педагоги довольно часто тоже). Это выглядит так: я вам сейчас покажу / объясню, как это сделать / решить, а вы сделайте так же¹. Иными словами, взрослый даёт образец деятельности (действием или вербально), а роль ребёнка – повторить, запомнить, «усвоить».

Косвенная помощь в отличие от прямой, помогает ребёнку решить проблему «своими силами», создавая у него иллюзию полной самостоятельности. Как организовать косвенную помощь? Только через систему подготавливающих и направляющих правильный ход мысли ребёнка заданий, предваряющих проблемную ситуацию. Иными словами: для того чтобы дети успешно (и притом «как бы» самостоятельно!) справились с решением проблемной ситуации, нужно предусмотреть подготовительную работу к постановке проблемной ситуации. Обычно эта работа реализуется в предыдущем к проблемной ситуации (подготовительном) задании. В этом задании на более простом содержательно, или более знако-

¹ Именно так выглядит излюбленный многими учителями объяснительно-иллюстративный метод: учитель сначала всё подробно объясняет и делает образец на доске, сообщает правило, а потом дети должны использовать этот образец и правило в дальнейшей деятельности. Многие приверженцы этого метода категорически не понимают, как можно учить путём постановки проблемной ситуации и её самостоятельного разрешения детьми, именно потому, что «Я же это им ещё не объяснила! И правила они не знают! Как они справятся!?»

мом детям материал актуализируются нужные представления или способы действий. Нужно ли говорить, что косвенный способ помощи укрепляет уверенность ребёнка в своих силах и желание ещё заниматься этим видом деятельности, поскольку он создаёт у ученика иллюзию полной самостоятельности при решении проблемы, что укрепляет уверенность в своих силах.

Следует отметить, что для реализации такой системы работы с учениками её нужно использовать **постоянно**, тогда дети будут реагировать на неё адекватно, то есть не будут теряться при обнаружении проблемы, требующей решения. На практике легко определить, какой стиль работы использует учитель: если он постоянно использует прямую помощь в обучении, требующую от детей воспроизведения имеющихся знаний и умений в знакомых ситуациях (сначала скажи правило, а потом сделай), то в ситуации необходимости решения какой-то проблемы его дети часто теряются и либо вообще отказываются от действий («я этого не умею»), либо просят предварительного показа образца действий.

Таким образом, умение учителя управлять процессом усвоения математического материала на уроке в любом классе состоит в умении осознанно подобрать (составить) задания и выстроить эти задания в нужной последовательности, той, которая приведёт к достижению цели урока. Правильно составленная система заданий на уроке – это то главное, что обеспечит достижение целей обучения, а также уровень самостоятельности учеников на уроке. Иными словами, чтобы дети что-то делали на уроке самостоятельно, необходимо спланировать и подготовить эту самостоятельность посредством специально подобранных и вы-

строенных в систему учебных заданий.²

Покажем, что при правильном методическом подходе использование проблемной ситуации на уроке математики в 5–6 классе возможно при изучении практически любой темы. Более того, самым методически сильным вариантом будет урок, полностью построенный на взаимосвязанных проблемных ситуациях, вытекающих одна из другой и завершающихся достижением поставленной учителем цели. Именно такой урок будет проходить «на едином дыхании», при постоянном интересе и активности детей, а, следовательно, будет наиболее эффективен для развития учебной самостоятельности и формирования умения учиться самостоятельно, столь важного для школьника любого возраста. Для приведения образцов фрагментов уроков обратимся к одной из самых методически сложных тем «Обыкновенные дроби и действия с ними». Данная тема является центральной в математике в 5–6 классах, и хотя она по-разному «расфасована» в различных учебниках, содержательный объём понятий и способов действий в соответствии с ФГОС в них единый, то есть ученик в итоге должен усвоить один и тот же объём знаний, умений и навыков в этой области. Поэтому будем более ориентироваться на этот объём, а не на конкретику страниц того или иного учебника³, что позволит утверждать, что предлагаемый подход мо-

² Часто молодой учитель полагает, что эту проблему за него решил автор учебника, составив соответствующее содержание страницы учебника. Это не так. Страница учебника содержит в лучшем случае основные задания, рекомендуемые к работе на уроке и задания для домашней работы. Это содержательная основа урока. Все «методические частности» учитель вносит в урок сам, в том числе придумывает проблемную ситуацию и способ её подачи детям.

жет быть универсально применим к любому учебнику.

Предварительно также отметим следующее. Беседы с учителями показывают, что многие из них «не рискуют» выйти «в открытое море» проблемных ситуаций на уроке математики, поскольку не уверены в наличном запасе знаний и умений вчерашних младших школьников («Да, у меня такие слабые дети, какая уж им проблемная ситуация, им бы понять мои объяснения и научиться делать по образцу!»). К сожалению, именно на этой позиции стоят и многие авторы учебников математики для 5–6 классов. Достаточно сказать, что первые полгода ученики 5-х классов изучают тему «Натуральные числа», что является повторением всего того, что они делали на уроках математики в 3–4 классах. Анализ учебников математики для 5-го класса различных авторов также показывает, что даже в области решения задач в 5-м классе (да и в 6-м классе тоже) дети не встречают ни одной новой структуры, с которой бы они не встречались в начальной школе. И только во втором полугодии 5-го класса ученики начинают сталкиваться с новыми понятиями: неправильные дроби, смешанные числа, сравнение дробей с разными знаменателями, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями и сложение и вычитание смешанных чисел. Именно эти

понятия являются для учеников новыми, поскольку с понятием доли и дроби они знакомились в начальной школе.

Кратко опишем систему знакомства с дробями в начальных классах. Что в неё входит? Знакомство с понятием доли, то есть дроби вида $\frac{1}{n}$ (3 класс), и дроби (правильной дроби, в которой числитель меньше знаменателя, 4 класс), сравнение дробей с опорой на предметную модель, решение двух видов задач с дробями: нахождение дроби от числа и нахождение числа по его дроби. Эти знания и умения предполагаются к формированию во всех учебниках математики для начальной школы, но в некоторых учебниках присутствуют также действия с дробями с одинаковыми знаменателями (сложение и вычитание).

Обратимся к особенностям и методике работы с понятием «Дробь» в начальной школе, поскольку они значимо отличаются от соответствующей методики работы с дробями в основной школе и учителю математики это полезно знать.

С математической точки зрения понятие дроби связано с **расширением** множества целых чисел до множества рациональных чисел. Теоретически считается, что знакомство младших школьников с долями и дробями имеет целью расширение их представлений о числе, однако, практически этого не происходит, поскольку понятие дроби в том виде, в каком оно всегда рассматривалось в начальной школе, с множеством чисел фактически не связывается.

Дробь в классической методической трактовке курса математики для начальных классов – это, скорее, способ получения части объекта, при этом искомая часть необходимо удовлетворяет ряду специальных требований.

³ Автор статьи – методист с 40-летним стажем, часто сталкивается с тем, что учитель винит в плохом качестве обученности детей учебник, по которому он работает. Учитель часто убеждён, что если бы ему дали «хороший учебник», то ему и работать было бы легче, и дети были бы научены лучше. На самом деле, никакой учебник не помешает талантливому учителю хорошо учить, независимо от исходного уровня подготовки класса. Просто этот уровень следует считать «отправной точкой» и работать «от неё».

В математике рассматривается два подхода к определению понятия дроби – аксиоматический (через словесное определение и описание свойств) и практический – на основе измерения длин отрезков. По определению дробь – это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа, причем n не равно 0. Далее определяется ряд операций для чисел этого вида (что понимать под сложением и вычитанием дробей, что понимать под умножением и делением дробей, какую дробь считать большей, а какую – меньшей) и ряд свойств, которыми обладают дроби. Такой подход отражён в учебниках математики для основной школы, что позволяет говорить о возможности формирования понятия **дроби как числа**.

В учебниках математики для начальных классов отражён **другой** подход к определению понятия дроби – через измерение длины отрезка. Для описания результата этого процесса используют дробь. Суть процесса состоит в следующем: если удаётся разделить некоторый объект A (например, отрезок) на b равных частей (то есть взятую мерку b уложить по длине отрезка без остатка) и взять c таких частей, то результат этой операции можно выразить так: получена $\frac{c}{b}$ **часть объекта A** . При этом $\frac{c}{b}$ не рассматривается как самостоятельное число, а только как « $\frac{c}{b}$ -ая часть объекта A »⁴.

Например, для ученика начальных классов фактически не имеет смысла символ $\frac{1}{4}$ (или словосочетание «одна четвер-

тая») сам по себе, т.к. непонятно, что именно разделено на 4 равные части. В то же время словосочетание «одна четвертая часть яблока» имеет смысл: из него ребёнку ясно, что яблоко было разделено на 4 равные части и взята 1 часть.

Таким образом, сведения о дробях ребёнок получает только через практические действия над реальными объектами, величинами, множествами и осваивает описание этих действий на языке специальных символов (дробей). Данный подход к формированию представлений о долях и дробях реализован во всех действующих учебниках математики для начальных классов. Именно поэтому при сравнении дробей необходимо указать исходный объект, причём один и тот же, то

есть сравнить можно $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$ часть яблока,

а не просто $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$. Для младшего школьника не имеет смысла неправильная дробь $\frac{4}{3}$, поскольку объект можно разде-

лить на 3 равные части, но взять 4 из них невозможно! В большинстве учебников математики для начальной школы не даются действия с дробями, поскольку ребёнок должен будет при этом представлять сложение и вычитание частей яблока (торта, круга, множества), что вряд ли разумно с точки зрения формирования адекватных представлений о рациональном числе. Представляется целесообразным «не упираться» в 5-м классе на тот способ моделирования понятия дроби, который был использован в начальной школе и который снова и снова копируют практически все авторы учебников для 5-го класса. Иначе это будет создавать большие проблемы при знакомстве с неправильной дробью, смешанным числом и тем более с действиями с дробями, где разумнее отойти от пред-

⁴ Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. Учебник для студентов СПО. М., Академия, 2014. С. 254–257.

метной наглядности, а использовать «родное» определение дроби как рационального числа, подчиняющегося ряду специальных (специфических именно для дроби) правил действий с ними.

Исходя из всего вышесказанного, построение уроков формирования понятия о дробях и действиях с ними на основе проблемной ситуации с использованием актуального запаса знаний и представлений школьников является наиболее продуктивным и интересным детям. Учителю нужно просто учесть специфику формирования этого понятия в начальной школе, а при построении урока довериться детям и дать им возможность показать себя и свои возможности. Поэтому, конструируя урок, будем исходить из того наличного списка знаний и умений детей, который они принесли с собой из начальной школы, и построим этот урок на плавно перетекающих одна в другую проблемных ситуациях в соответствии с данным выше планом.

Урок 1.

Тема: Обыкновенные дроби.

Цель: Актуализировать представление о доле и дроби; учить читать, моделировать и записывать долю и дробь. Познакомить с понятием правильной дроби и новыми терминами: числитель и знаменатель.

В качестве **подготовительного к новому материалу** задания накануне, на уроке математики следует повторить деление с остатком⁵. Домашнее задание дано на карточках, и урок начинается с разбора и комментирования домашнего задания:

А) подчеркнуть выражения, в которых остаток не может превысить: 2 (красным), 3 (синим), 7 (зелёным):

⁵ Изучалось в 3-ем классе.

$$7 : 3, 6 : 4, 41 : 2,$$

$$15 : 7, 213 : 5, 111 : 2.$$

Запись: $6 : 4 = 1$ (ост.2). *Комментарий:* при делении на 3 остаток не может превысить 2; при делении на 7 остаток не может превысить 6.

Б) Как записать деление для случаев: $5 : 7, 3 : 5, 29 : 41$?

Запись: $5 : 7 = 0$ (ост. 5), $29 : 41 = 0$ (ост. 29).

В) Вычислить: $612 : 6, 327 : 3$.

Комментарий: если в разряде не хватает единиц, чтобы выполнить деление, то в частное в соответствующем разряде записываем 0 ($612 : 6 = 102$).

Используя содержание задания Б, учитель показывает новый вид записи без указания остатка в скобках. Данный вид записи является соглашением и поэтому комментариев / пояснений не требует⁶. Детям сообщается, что вместо того способа записи, который они использовали в начальной школе, теперь будет использоваться другой вид записи: $5 : 7 = \frac{5}{7}$, где черта понимается как знак деления вместо двоеточия.

Переход к записи нового вида:

$$3 : 7 = \frac{3}{7}, 29 : 41 = \frac{29}{41}.$$

Постановка проблемной ситуации

Учитель: В начальной школе вы встречались с записями такого вида. Как называют числа, записанные таким образом? (О т в е т: дроби.)

Кто может объяснить, что означает каждое число в записи $\frac{3}{7}$? (О т в е т: предмет разделили на 7 равных частей и взяли три таких части).

⁶ Стойлова Л.П. Математика. Учебник для ВО. М., «Академия», 2005. Глава 1. Параграф 3: Определение понятий.

Организация системы предметных (моделирующих) действий для решения проблемной ситуации

Учитель: Для объяснения используйте рисунок отрезка. Рисунок должен быть заранее заготовлен на доске, лучше на отвороте, чтобы его не было видно сразу.



Рис. 1

Ученик у доски отмечает нужную часть отрезка дугой и подписывает.

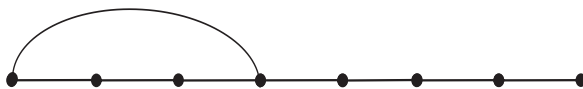


Рис. 2

Комментарий: Отрезок разделили на 7 равных частей и взяли 3 таких части.

Учитель: Если вся длина отрезка 7 см, то чему равны $\frac{3}{7}$ отрезка? (О т в е т: $\frac{1}{7}$ отрезка – это 1 см, а $\frac{3}{7}$ отрезка – это 3 см).

Учитель: А если длина отрезка 14 см? 21 см? (О т в е т: 6 см, 9 см).

Организация ситуации, стимулирующей перенос нового знания или умения на расширенный содержательный объём, обобщение и упрочение в виде обобщённого способа действий или обобщённого понятия

Учитель: А если я спрошу так: $\frac{1}{7}$ отрезка – это 5 см. Чему равна вся длина отрезка?⁷ (О т в е т: $5 \text{ см} \cdot 7 = 35 \text{ см}$).

Учитель: Если длина $\frac{1}{7}$ отрезка это

⁷ Задачи на нахождение доли или дроби числа и числа по его доле или дроби входят в программу 4-го класса.

10 см? (20 см? 45 см?) Чему равен весь отрезок? (О т в е т: $20 \text{ см} \cdot 7 = 140 \text{ см}$, $45 \text{ см} \cdot 7 = 315 \text{ см}$).

Учитель: Чему равны $\frac{3}{7}$ каждого из этих отрезков? (О т в е т: $5 \text{ см} \cdot 3 = 15 \text{ см}$, $20 \text{ см} \cdot 3 = 60 \text{ см}$, $45 \text{ см} \cdot 3 = 135 \text{ см}$).

Учитель сообщает детям новые термины, которые будут использоваться в отношении дроби: $\frac{3 - \text{числитель}}{7 - \text{знаменатель}}$.

Термины вводятся «по соглашению», это просто названия компонентов, поэтому их не следует никак пояснять. Дети должны принять их к сведению, запомнить, научиться узнавать и правильно использовать в речи. Для закрепления новых терминов может быть использован рисунок задания 884 из учебника, но задание формулируется так: Запишите с помощью дроби, какая часть фигуры закрашена. Назовите числитель и знаменатель каждой дроби.

Организация ситуации, стимулирующей перенос нового знания или умения на расширенный содержательный объём, обобщение и упрочение в виде обобщённого способа действий или обобщённого понятия

Задание на доске заготовлено заранее, лучше на отвороте, чтобы открыть его в нужный момент: записать в виде дроби и назвать числитель и знаменатель

$16 : 4$, $17 : 17$, $20 : 21$, $30 : 6$, $5 : 7$,
 $3 : 10$, $30 : 10$, $18 : 9$, $18 : 19$, $10 : 11$.

Учитель: Теперь отметьте «галочкой» случаи деления без остатка и найдите ответы. Можно ли в этих случаях обойтись без записи дроби? (О т в е т: да.)

Эти случаи с доски стираются и остаются только дроби:

$$\frac{3}{10}, \frac{20}{21}, \frac{18}{19}, \frac{5}{7}, \frac{10}{11}.$$

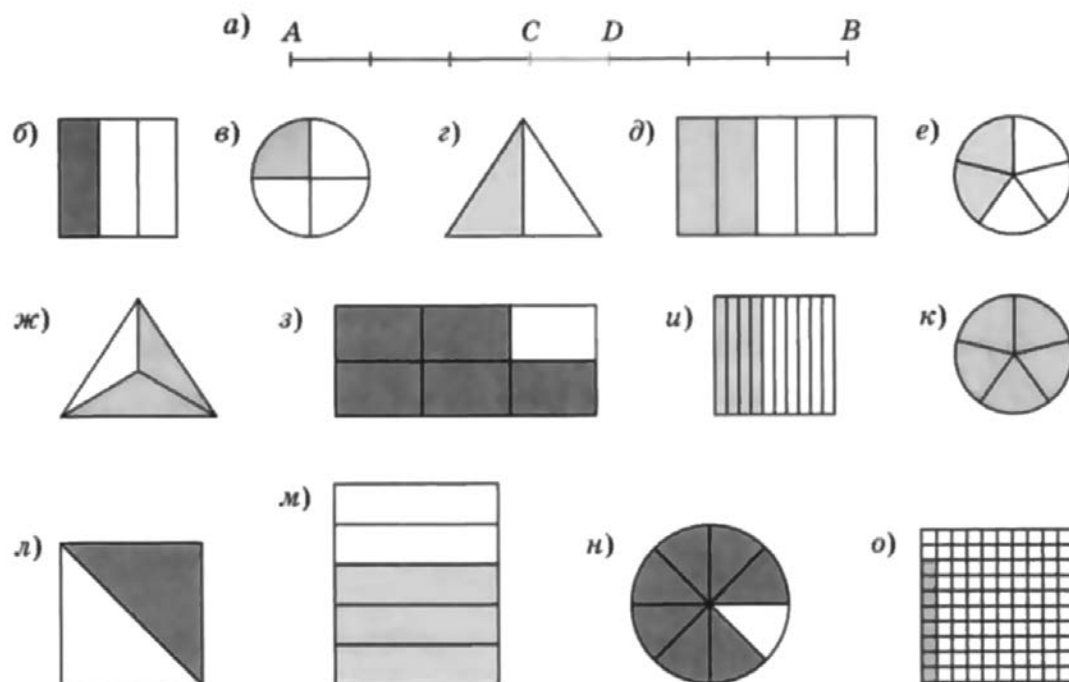


Рис. 3

Постановка проблемной ситуации

Учитель: На доске вы видите пять разных дробей, но у них есть одно общее свойство (сходство). Кто заметил это сходство? Но тот, кто его заметил, должен использовать слова: числитель и знаменатель.

Возможно, дети сразу заметят эту особенность, возможно, сделают несколько предположений. Учителю следует дождаться правильного ответа. В крайнем случае, можно использовать косвенную подсказку: сравните их числители и знаменатели. Когда дети поняли, на что следует обратить внимание, учитель сообщает новый термин: правильные дроби. Предлагает детям самим сформулировать определение: «Дроби, у которых числитель меньше знаменателя, называют правильными».

Организация ситуации, стимулирующей перенос нового знания или умения на расширенный содержательный объём, обобщение и упрочение в виде обобщённого способа действий или обобщённого понятия

Задание: записать три правильные дроби со знаменателем 6 (5, 4). Можно ли это сделать для знаменателей 3 и 2?

(О т в е т: $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{4}$;

для знаменателя 3 можно записать только $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$; для знаменателя 2 можно записать только $\frac{1}{2}$).

Организация системы предметных (моделирующих) действий для решения проблемной ситуации

Используем задание 885, но в таком варианте: Начертите в тетради квадрат со

стороной 6 клеток. На доске должен быть аналогичный рисунок квадрата с расчерченными клетками. Лучше его заготовить заранее.

Задание: Покажите на этом квадрате $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$.

Для ответов используем цветные мелки, закрашивая нужные части квадрата. Учителю следует помнить, что задание в таком виде неоднозначное, дети могут показывать разные модели требуемых дробей.

Задание: Начертите ещё один такой же квадрат. Покажите на нём $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{7}{9}$.

Выполнение этого задания в таком виде будет готовить детей к пониманию сути сокращения дроби на следующем уроке.

Учитель: Какую из записей на доске в начальной школе называли словом «доля»? (О т в е т: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$). Учитель предлагает детям самостоятельно сформулировать определение доли через дробь: «Дробь с числителем 1 и знаменателем, большим 1».

Учитель: Будет ли доля правильной дробью? (О т в е т: Да.)

Далее устно могут быть сделаны номера 887, задачи 889, 890 и 891 (с опорой на рисунок в отрезках задачи можно решить устно).

Задание 887: Как называется:

- одна сотая доля метра;
- одна тысячная доля тонны;
- одна двадцать четвертая доля суток;
- одна шестидесятая доля часа;
- одна миллионная доля квадратного метра;
- одна миллионная доля кубического метра?

Задание 889: Купили кусок ткани дли-

ной 2 м 50 см и из $\frac{1}{5}$ куска сшили платье для куклы. Сколько сантиметров ткани ушло на это платье?

Для работы над задачей используем рисунок, заготовленный на доске заранее:



Рис. 4

Учитель: Обозначьте на рисунке данные задачи. Для удобства переведите 2 м 50 см в сантиметры.

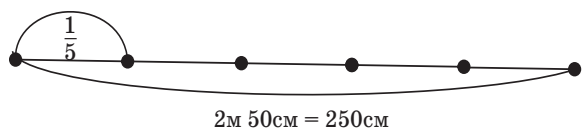


Рис. 5

Учитель: Найдите устно ответ на вопрос задачи. (Ответ: 50 см) Запишите решение в тетради. (Запись: $250 : 5 = 50$ см).

Задание 890. От дыни массой 2 кг 400 г Ване отрезали $\frac{1}{5}$ дыни, а Маше – $\frac{1}{6}$ дыни. Чему равна масса каждого отрезанного куска. Сколько граммов дыни осталось?

Учитель: На сколько вопросов нужно ответить в задаче? (О т в е т: на три – масса $\frac{1}{5}$ дыни, масса $\frac{1}{6}$ дыни и масса остатка.)

Учитель: Кто поправит рисунок на доске так, чтобы можно было ответить на первый вопрос?

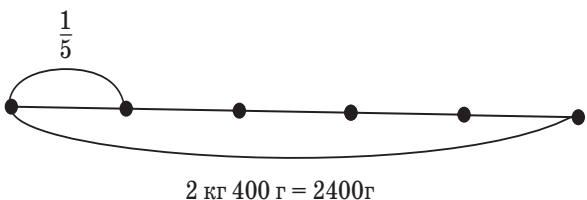


Рис. 6

Запишите действие, дающее ответ на первый вопрос. (Запись: $2400 \text{ г} : 5 = 480 \text{ г}$).

Учитель: Как нужно изменить рисунок, чтобы с его помощью можно было ответить на второй вопрос? (Ответ: нужно этот отрезок разбить на 6 равных частей). Учитель помогает поправить рисунок и предлагает записать действие. Запись: $2400 \text{ г} : 6 = 400 \text{ г}$.

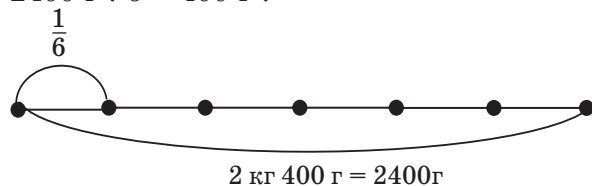


Рис. 7

Учитель: Запишите, как найти ответ на третий вопрос. Вычислите результат.

Запись: $2400 \text{ г} - 400 \text{ г} - 480 \text{ г} = 1520 \text{ г} = 1 \text{ кг } 520 \text{ г}$.

Учитель: Прочитайте задачу 891. Переведите 1 ч 40 мин в минуты.

(Ответ: $60 \text{ мин} + 40 \text{ мин} = 100 \text{ мин}$).

Учитель: Сколько минут было потрачено на математику? Запишите решение. Запись: $100 \text{ мин} : 5 = 20 \text{ мин}$.

Учитель: Сколько времени осталось после этого на уроки? Запишите действие. Запись: $100 - 20 = 80 \text{ мин}$.

Учитель: Что сказано в условии о времени, потраченном на историю?

(Ответ: $\frac{1}{4}$ оставшегося времени, то есть 80 мин).

Учитель: Чему равна $\frac{1}{4}$ от 80? Запишите решение. Запись: $80 : 4 = 20$.

Отвечили мы на вопросы задачи? (Ответ: да, по 20 мин на каждый).

Домашнее задание: 895, 896 (читать решение), по образцу сделать 897, 898 и 899. Разбор и обсуждение домашнего задания в начале следующего урока будет

подготовкой к знакомству с новой темой «Основное свойство дроби». И хотя в рассматриваемом учебном комплекте эта тема отнесена к 6-му классу, но она уже подготовлена данным уроком и органично вытекает отсюда как его продолжение. И следом органично выстраиваются уроки на темы: «Смешанные числа», «Сравнение дробей с одинаковыми и разными знаменателями», «Сложение дробей с одинаковыми и разными знаменателями», поскольку в основе этих трёх уроков лежит использование основного свойства дроби.

Методический комментарий:

представленный урок построен как серия плавно перетекающих одна в другую проблемных ситуаций. «Микро-проблемных» как это нужно на уроках знакомства с новым материалом. Дети работают под руководством учителя, но все задания выполняют самостоятельно. На каждый вопрос учителя они отвечают, предварительно проанализировав ситуацию. Нет ни одного вопроса, на который можно ответить просто по памяти. В ходе всего урока педагог использует только косвенную помощь. Сам урок динамичен, содержательно насыщен и нужные знания формирует как результат выполнения интересной ребёнку самостоятельной деятельности.

Очень часто можно слышать от учителя, что построить всю систему обучения математике на проблемных ситуациях невозможно. А также, что в математике большая часть материала должна «усваиваться» через многократные тренировочные упражнения и многократные повторения детьми выученного материала. Это глубокое заблуждение. Конечно, в одной статье можно показать лишь несколько фрагментов организации обучающего процесса, построенного на системе про-

блемных ситуаций, но и несколько фрагментов могут показать, насколько органично такое обучение психологическим особенностям младших подростков, которые уже начинают активно стремиться к самостоятельности во всём и хотят быть признанными взрослым участниками субъект-субъектных отношений на уроке. Если «задавить» это стремление и свести его с субъект-объектным отношениям (учитель – субъект обучающего процесса, он учит, а ученик – объект этого обучения, его задача – слушать, запоминать и воспроизводить то, чему его учат), то потеря познавательного интереса и, соответственно, желания самостоятельно разбираться в тайнах математики как великой науки будет гарантирована. И восстановить это желание, однажды по-

гашенное, уже практически невозможно (во всяком случае, очень и очень трудно).

Список источников

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. Математика 5 класс. М., 2013 (2021).
2. Виленкин Н.Я., Жохов В.И. и др. Математика 6 класс. М., 2013 (2021).
3. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др. Математика 5 класс. М., 2013 (2021).
4. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др. Математика 6 класс. М., 2013 (2021).
5. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. и др. Математика 5 класс. М., 2021.
6. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. и др. Математика 6 класс. М., 2021.

Статья поступила в редакцию

14.03.2023.

Принята к публикации

09.06.2023.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Открытие: «чистая математика» является частью эволюционной генетики

Исследователи выявили взаимосвязь между теорией чисел и эволюционной генетикой, предположив, что чисто математические принципы могут влиять на биологию. Это открытие, основанное на фенотипической устойчивости, показывает, что генотипы могут быть организованы в соответствии с математическими закономерностями. Эта перспектива открывает новое направление исследований, указывая на то, что чистая математика может быть более неразрывно связана с жизнью, чем считалось ранее.

Этот вывод позволяет предположить, что природа в своём стремлении к оптимизации может принимать генетические конфигурации, соответствующие точным математическим моделям. Другими словами, математические принципы – это не просто аналитические инструменты, они могут быть неразрывно связаны с тем, как эволюционирует и адаптируется жизнь. Это позволяет по-новому взглянуть на традиционное понимание эволюционной биологии и предположить, что математика может лежать в самом сердце механизмов эволюции. Такое слияние биологии и математики открывает путь к новым методам исследования и лучшему пониманию эволюции. Распознав математические закономерности, лежащие в основе генетики, учёные теперь могут предложить новые подходы к изучению эволюции и, возможно, даже повлиять на неё.

Источник: New-Science.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМИКСОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

USING COMICS IN TEACHING MATHEMATICS AT SCHOOL

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_53

О.В. Панишева, к.п.н., доцент, ФГБОУ ВО ЛГПУ (Луганск), Panisheva-ov@mail.ru;

И.В. Рысыч, ассистент, ГБОУ ВО ЛГПУ (Луганск)

O.V. Panisheva, PhD (Pedagogy) Associate professor, LGPU (Lugansk), Panisheva-ov@mail.ru;

I.V. Rysych, assistant, LGPU (Lugansk)

Аннотация: статья посвящена комиксам как одному из современных дидактических средств, которое позволяет сделать обучение школьников математике более наглядным, эмоциональным, живым и запоминающимся

Abstract: the article is devoted to comics as one of the modern didactic tools that allows students to learn mathematics more visual, emotional, lively and memorable

Ключевые слова: комикс, наглядность в обучении, клиповое мышление

Keywords: comics, visual learning, clip thinking

© О.В. Панишева, И.В. Рысыч 2023

В эпоху цифровых технологий ученики не представляют своей жизни без гаджетов, сети Интернет и социальных сетей, которые пестрят различными постами с фотографиями и картинками. В психолого-педагогической литературе всё чаще высказывается предположение, что мышление современных подростков стало «клиповым» из-за того, что они с детства взаимодействуют с гаджетами, а не с текстом в книгах, на которых выросло предыдущее поколение.

Наши наблюдения подтверждают наличие учащихся с этим типом мышления. Для него характерны алогичность, фрагментарность и разнородность информационного потока, высокая скорость переключения между фрагментами информации.

Школьники с таким типом мышления предпочитают смотреть, а не читать, не видят картинку в целом, отличаются

быстрой скоростью включения и могут выполнять несколько действий одновременно.

В связи с этим возникает необходимость поиска наилучшей стратегии преподавания учебных предметов детям с клиповым мышлением.

Потребность в невербальной коммуникации у современных школьников очевидна. Нежелание читать объёмные научные тексты учебников увеличивает интерес к лаконичным иллюстрированным текстам, к которым относятся рассказы в жанре комиксов [3]. Использование на уроках образовательных комиксов – один из возможных способов учесть запрос учащихся на «живое» преподавание. Потенциал использования историй в картинках в обучении чаще всего рассматривается в зарубежных источниках, а с недавних пор стал исследоваться и отечественными педагогами.

История использования комиксов в обучении

Идея использования комиксов в обучении не нова. Стэн Ли в своём руководстве по рисованию пишет, что «комикс почитают во всём мире»: большинство комиксов в США долгое время создавались исключительно для детей, зато в Азии комиксы читают все – от 8 до 80 лет, в Европе издаются утончённые графические романы для взрослых [1].

Историческим предшественником российского комикса служит карикатура, и до конца 80-х годов прошлого века русский комикс развивался в русле пропаганды и сатиры. В Советском Союзе комиксы для детей можно было увидеть в журналах «Мурзилка» и «Весёлые картинки». В эпоху перестройки в СССР появились западные приключенческие комиксы, для отечественных авторов стало возможно издавать свои, основой их служили всё те же европейские и американские комиксы. Значительными тиражами издавались познавательные комиксы для детей: «Мир компьютеров в вопросах и ответах» (1988), «Весёлая механика» (1991) и другие.

В 1990-е годы комикс претерпел значительное развитие, но всё ещё считался несерьёзным жанром, поэтому истории в картинках издавались исключительно для детской аудитории, а с 2009 года в России стала развиваться индустрия: появились издательства, специализирующиеся на комиксах, и магазины, продающие комиксы, начали создаваться серии графических романов в ведущих издательствах страны, таких как «Росмэн» и «Эксмо»*.

В США адаптированный образовательный комикс уже стал основным источником народного образования по литератур-

ной классике для всех возрастов, заменив собой первоисточники и учебники литературы. Стэн Ли пишет, что комиксы – это не жанр, а способ передачи информации. Поэтому они могут быть какими угодно, в том числе и обучающими [1]. В современной России также стали появляться образовательные комиксы по разным предметам, что может существенно повлиять на инструментарий учителя для мотивации учеников.

Комиксы как вид искусства

Рассмотрим, что отличает комиксы от обычных иллюстраций, которые педагоги традиционно используют в учебных презентациях. Слово «комикс» является англицизмом и переводится как «смешной». Что касается толкования слова, то оно обозначает «рассказ в картинках, где действия персонажей нарисованы, а слова, сказанные ими, написаны в облачке, выходящем изо рта, или даются в виде подписи под картинкой» [2]. В словосочетании «рассказы в картинках» заключается вся суть этого средства наглядности: с помощью картинок ведётся повествование, в котором есть и вербальная драматургия, и визуальная эстетика.

«Часто в каком-либо издании есть постоянный герой комикса, и в каждом номере описывается очередная серия его приключений. Популярны комиксы становятся основой для фильмов (“Дик Трейси”, “Супермен”) и мультфильмов. В последнее время стали появляться комиксы не в картинках, а в фотографиях» [2].

Комикс находится на стыке литературы и изобразительного искусства. Он наделён такой чертой литературы, как нарративность. В отличие от литературного произведения с иллюстрациями, показывающими определённый момент сюжета, последовательное изложение событий ко-

* См. ru.wikipedia.org/wiki/История_комиксов_в_России.

микса само по себе представляет фабулу произведения.

Комикс также можно сравнить с кино. Собственно, раскадровка (последовательность кадров, описывающих происходящие действия в фильме), широко используемая в 1940-х годах, пришла в кино из комиксов. Следует отметить, что большинство известных фильмов про супергероев были сняты по комиксам.

Помимо традиционных выделяют и другие виды комиксов:

- стрип (комикс, занимающий не более одной страницы в газете или журнале);
- графический роман (законченное произведение объёмом от 60 страниц);
- веб-комикс, манга (японские чёрно-белые комиксы в стиле аниме, читающиеся справа налево);
- манхва (корейские комиксы);
- маньхуа (китайские комиксы);
- независимые комиксы (авторские, издательские и другие).

Классифицируя комиксы по содержанию, можно выделить повествования о супергероях, приключенческие, анималистические, научно-фантастические, фэнтезийные, исторические, политические, мистические, детективные, религиозные, обучающие, а также такие, в которых смешано несколько жанров [1]. Комикс имеет свою структуру (завязка, столкновение, развязка), как и любое литературное произведение.

От изобразительного искусства комикс взял визуальные средства выражения: контраст, форму и цвет, ракурс, композицию и топографику. Так, цветовая гамма может быть разнообразной – начиная от ярких и контрастных цветов и заканчивая монохромностью. Цвет передаёт определённое настроение. Наличие острых деталей на рисунке несёт смыс-

ловую нагрузку: передаёт вспыльчивость характера, агрессивность персонажа или напряжённость обстановки, подчеркивает опасные моменты.

Композиционное решение также играет важную роль. Например, персонажи, повернутые спинами друг к другу, могут означать игнорирование или ссору, а столкновение нос к носу – проявление враждебности. Раньше персонаж изображался целиком (дальний или общий план), а сейчас всё чаще используется средний, крупный план или макро план, чтобы сделать акцент на какой-то важной детали или показать эмоцию на лице героя. Изображения мультипликационные: схематичны и гиперболизированы, вплоть до гротеска, стилизованы.

Топографика также важна. Начертание шрифтов непосредственно связано с филактерами (выноски с репликами или мыслями персонажей) и текстом. Из-за того что для текста выделяется мало места, он лаконичен и насыщен восклицаниями, междометиями, сленгом, жаргонизмами и прочими выразительными средствами языка (тропы, фигуры речи и звукопись) для передачи эмоционального состояния героев, которое усиливается особым начертанием букв. Шрифты и изображения дополняют друг друга.

Комиксы

как дидактическое средство

В комиксе объединены чётко прорисованная картинка без лишних деталей, лаконичный текст и динамика образов и событий, что притягивает ребёнка. Образовательные комиксы можно использовать и как средство мотивации школьников, и как инструмент для развития творческих способностей. Кроме того, они помогут разнообразить уроки математики. Отметим, что работа ученика с комиксом

индивидуальна и требует минимального вмешательства взрослого.

С помощью таких комиксов реализуется принцип наглядности, что особенно важно, так как около 90% информации человек воспринимает с помощью зрения, для многих зрительные образы – средство смыслового восприятия учебной и научной информации. В образовательном комиксе в отличие от других наглядных пособий максимально используется образное представление информации, в полной мере реализована связь между словом и изображением. Так, абстрактные математические объекты становятся одушевлёнными, их роль здесь могут выполнять люди или животные, устанавливается аналогия между действиями людей и математическими операциями. Метафоры и яркие символы способствуют лучшему запоминанию учебного материала.

Дидактический принцип доступности реализуется благодаря тому, что диалоги героев комиксов максимально просты и понятны. Однако это не означает отказ от принципа научности. Поэтому, несмотря на упрощение математического материала и изменение стиля изложения (с научного на публицистический или литературный), в сопроводительных текстах и диалогах не должно быть математических ошибок.

Как и любое другое средство наглядности, комиксы создаются с учётом возрастных особенностей учащихся. Чаще всего их используют с целью мотивации и формирования интереса к предмету у школьников, однако сам по себе сюжет не должен преобладать над математическим содержанием. Комиксы могут решать обучающие, развивающие и воспитательные задачи, например расширять кругозор школьника, воспитывать эмпатию, развивать чувство юмора, смекалку и др.

По каждой теме можно придумать свою историю в картинках, однако возможен вариант, когда герои комиксов являются постоянными и каждый раз объясняют новый учебный материал. Создание комиксов по всему курсу математики считаем целесообразным лишь в виде дополнительного дидактического средства, не заменяющего основные средства обучения. Такое пособие будет востребованным при организации закрепления и систематического повторения учебного материала.

Математические комиксы: обзор существующих продуктов

Комиксов по математике немного. Наиболее популярные издания – серия «Занимательная математика в комиксах» (Х. Колл, С. Миллз) и книга «Математическое приключение» (А. Галатенко, В.В. Панкратьева).

Российские авторы А. Галатенко и В. Панкратьева предлагают в формате комиксов задачник для обобщения знаний по математике, приобретённых в начальной школе [6]. Их книга содержит множество головоломок. Главный герой Нестор живёт в виртуальной реальности будущего, где дома в форме различных геометрических тел летают среди облаков. Парень попадает в приключения с первого дня пребывания в новой школе, а после вынужден спасать одноклассников, не вернувшихся с урока. Ученики, следя за приключениями Нестора, помогают ему разгадывать головоломки, приготовленные герою опасным соперником.

Каждая из книг серии «Занимательная математика в комиксах» от Хилари Колл и Стива Миллза повествует о каком-то виде деятельности: знакомит детей с передовыми достижениями реактивной авиации («Управляй реактивным истребителем»), даёт возможность вычислить преступни-

ка, используя свои знания по математике («Раскрой преступление»), заняться архитектурой («Построй небоскрёб») или отправиться в космос («Запусти ракету в космос»). Ученик каждый раз с большим интересом следует за отважными героями комикса в новое путешествие, покоря математические просторы, учась решать нестандартные логические и вычислительные задачи, выполняя различные по сложности школьные и олимпиадные задания.

Существующие комиксы преследуют разные дидактические цели. Так, книга Зияуддина Сардара [5] рассказывает об истории математики. Эйлин Магнелло использует комиксы для изложения основ статистики [4], а популярный карикатурист Ларри Гоник, изучавший и преподававший математику в Гарвардском университете, в комиксах излагает ряд тем школьного курса алгебры. В образовательной манге Хироюки Кодзимы [7] начальник начинающей журналистки учит её анализировать происходящие в политике и экономике события с помощью дифференциального и интегрального исчисления.

Об использовании комиксов в обучении математике

Комиксы можно применять на разных этапах обучения.

• Мотивация

В виде комикса можно представить некоторые необычные и удивительные факты или задачу, в которой затрагивается некая проблема математического характера из реальной жизни. На рисунке 1 показан фрагмент комикса для знакомства с понятием пересечения множеств, автор – студентка 1 курса ЛГПУ Янова Яна.

• Изложение нового материала

Вместо текста учебника учащимся предлагают рассмотреть комикс, объясняющий суть нового, далее работа орга-



Рис. 1

низуются так же, как и работа с текстом учебника: задаются вопросы, расставляются акценты и т. д.

Комикс визуализирует математические факты, помогает изложить максимум информации в короткий срок. Более всего, на наш взгляд, истории в картинках подойдут для знакомства с историей математики. Иллюстрированные биографии математиков и рассказы об их вкладе в науку будут выглядеть более выигрышно, чем обычный текст.

• Закрепление изученного материала

Одна из педагогических закономерностей гласит: чтобы лучше запомнить материал, его нужно переформулировать, представить разными способами.

После того как материал уже изложен учителем, его можно высказать иначе и переформатировать в комикс. Рассмотрение рисунков позволяет увидеть матема-

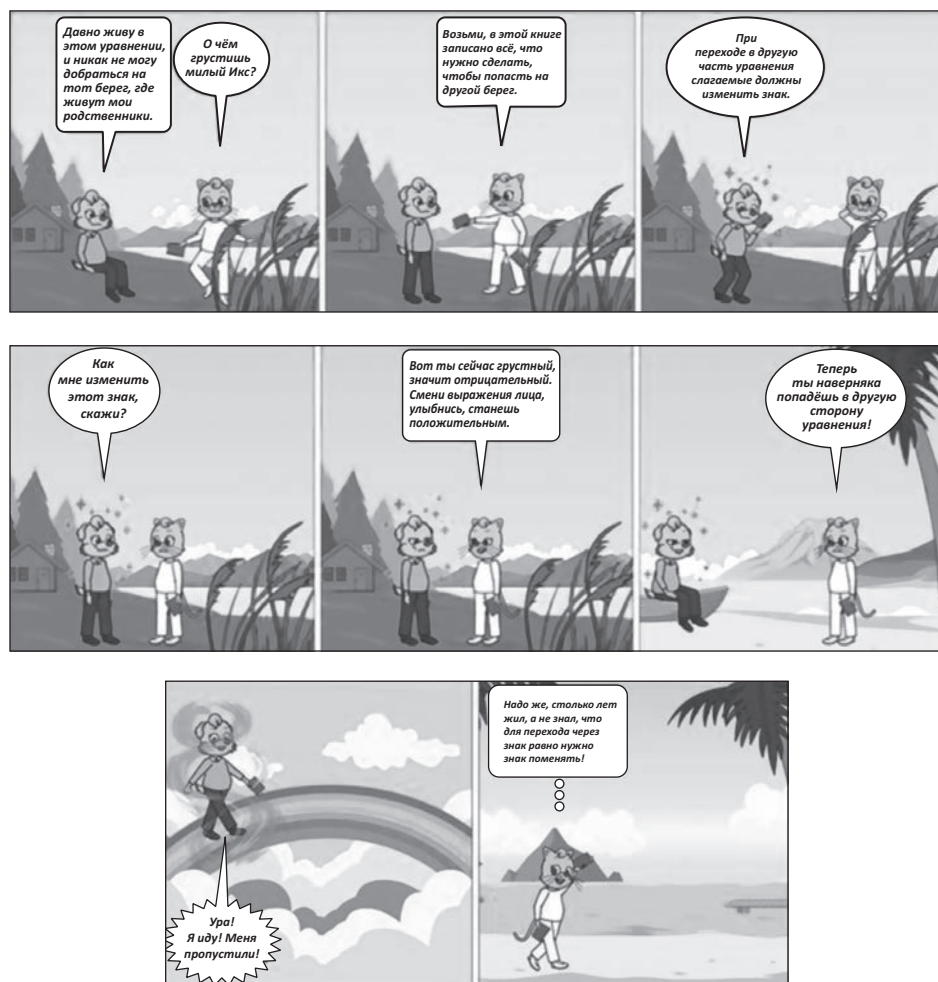


Рис. 2

тический факт под новым углом зрения. На этом этапе комикс может выступать в качестве дополнительного источника знаний, который обладает не только свойством научности, но и эмоциональной подачей, чего так не хватает на уроках математики. На рисунке 2 представлен комикс о решении линейного уравнения, автор – ученица 9 класса Панишева Анастасия.

Кроме того, на этапе усвоения знаний школьникам могут предлагаться задания в виде комиксов. Выполнение математических заданий как шагов по расшифровке их сообщений или спасению литературного героя – такой формат привлекает

учеников, особенно младшего и среднего школьного возраста, гораздо больше, чем традиционное решение примеров и задач.

Задания, где по сюжету герои оказываются в разных затруднительных ситуациях, имеют большие перспективы не только потому, что повышают заинтересованность школьников в их выполнении, но и потому, что выполняют воспитательную функцию, присущую более урокам литературы: стимулируют эмпатию и сопереживание положительным героям, желание и готовность прийти на помощь и т. д. Нестандартный для математики стиль изложения математических фактов в комиксах способствует



Рис. 3

сохранению позитивного психоэмоционального состояния школьников.

Комиксы, где показаны правильные и неправильные действия героев, акцентируют внимание на типичных ученических ошибках. Для профилактики таких ошибок тоже можно использовать комиксы. Один из примеров – для профилактики типичной ошибки при дифференцировании произведения двух функций – показан на рисунке 3, автор – студент 1 курса ЛГПУ Кравченко Юрий.

• **Обобщение и систематизация знаний**

Создание комикса самими учащимися может стать групповым проектным заданием или индивидуальным творческим домашним заданием. В первом случае одни ребята предлагают идеи для сюжета комикса, придумывают диалоги героев, а другие непосредственно рисуют. Таким образом, в проекте может поучаствовать даже тот, кто рисовать не умеет.

Во втором случае школьник может воспользоваться имеющимися в интернете платформами для создания таких коротких рассказов, например Pixton. Однако эти платформы для полноценного использования их потенциала предполагают платную подписку, некоторые из них не

поддерживают русский язык. Не все креативные задумки можно реализовать с их помощью, потому что там нет возможности рисовать, ввести героев в виде чисел или фигур, добавить текст, кроме как в виде диалогов и легенд.

Заметим, что, как и любое другое творческое задание, создание комиксов стимулирует проникновение в суть математического явления, без чего невозможно придумать увлекательную историю в картинках.

• **Контроль знаний**

На этом этапе могут быть использованы комиксы, в которых есть недостающие элементы. Например, необходимо дополнить диалоги героев или расставить значки, указывающие верно или нет справляется с заданием тот или иной герой. Другими вариантами заданий с комиксом могут быть такие: установить правильную последовательность его отдельных картинок, придумать окончание сюжета комикса и др.

Достоинства и недостатки использования комиксов в обучении

Подводя итог, перечислим коротко основные достоинства комиксов.

1. Лаконичность (большие фрагменты текста просто не помещаются в «кадр»).

2. Наглядность, объединяющая визуальное восприятие с восприятием текста.

3. В комиксе сочетаются статичная и динамичная наглядность, так как происходит развитие сюжета, действие.

4. Переформулированная математическая информация лучше понимается и запоминается.

5. Структурированное содержание с выделением главного.

6. Упрощается восприятие текстовой информации, которая подаётся маленькими фрагментами.

7. Привлечение ассоциаций для запоминания.

8. Эмоционально окрашенное содержание.

9. В процессе создания комиксов формируются метапредметные умения, развиваются одновременно художественные, литературные и математические способности.

При этом комиксы являются только одним из средств наглядности, а их короткие тексты не заменяют текст учебника, а лишь дополняют его. Отметим также несколько причин, по которым комиксы не могут стать универсальным средством обучения.

1. Слишком упрощенный и облегчённый стиль изложения, недостаточный уровень научности.

2. Как средство наглядности комикс больше рассчитан на школьников-гуманитариев.

3. Процесс создания комиксов довольно трудоёмкий, занимает больше времени и сил, чем, например, создание презентации.

4. Создавать комиксы интересно, но не

все школьники могут выполнить такое задание по разным причинам (не умеют рисовать, плохо понимают математические факты, которые нужно «оживить», и пр.).

Итак, комикс можно рассматривать как одно из средств визуализации математического материала. Он выполняет мотивационную, дидактическую, контролирующую и воспитательную функции, учитывает интересы и особенности мышления и восприятия современного поколения школьников. Комикс не заменяет другие средства наглядности, но органично дополняет их, помогая делать математику более привлекательной для учащихся.

Списки источников

1. *Ли С.* Как рисовать комиксы: эксклюзивное руководство по рисованию. – М.: Эксмо, 2020.

2. Литература и язык. Современная иллюстрированная энциклопедия. – М.: Росмэн, 2006.

3. *Шибкова Д.С., Пяткова О.Б.* Образовательный комикс как средство медиаобразования для восприятия обучающимися нового знания // Педагогическое образование в России. – 2021. – № 3.

4. *Магнелло Э.* Статистика в комиксах. – М.: Эксмо-пресс, 2018.

5. *Сардар З.* Математика в комиксах: зачем нужна математика, основные теории, системы и многое другое... – М.: Эксмо, 2019.

6. *Галатенко А.М., Панкратьева В.В.* Математические приключения. – М.: НЦНМО, 2020.

7. *Кодзима Х.* Занимательная математика. Производные и интегралы. – М.: ДМК Пресс, 2015.

Статья поступила в редакцию

12.06. 2023.

Принята к публикации

03.08. 2023.

К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ГЕОРГИЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ДОРОФЕЕВА



**1 июня 2023 года исполнилось 85 лет
со дня рождения известнейшего математика
и методиста Георгия Владимировича
Дорофеева (1938–2008)**

Дорофеев Георгий Владимирович – доктор физико-математических наук (1981), профессор (1989), действительный член Международной академии педагогического образования (1998). С 1986 г. работал в АПН СССР (ныне РАО): сначала старшим, позже главным научным сотрудником Института содержания и методов обучения (ИСМО), а с 1995 года – заведующим отделом математического образования ИСМО. Одновременно преподавал в Московском государственном открытом университете и Московском городском педагогическом университете.

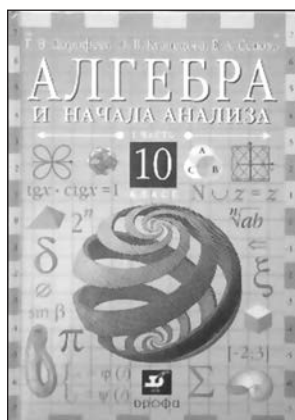
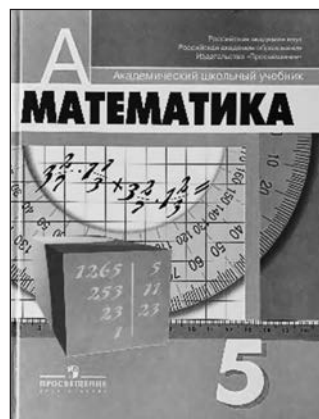
Георгий Владимирович в течение жизни занимался фундаментальными математическими исследованиями, а также исследованием проблем методики обучения математике и прикладной лингвистики, им опубликовано около двухсот работ. Являлся ведущим соавтором, а также редактором учебников и учебных пособий по математике для средней и старшей шко-

лы, рабочих тетрадей, дидактических материалов и методических рекомендаций к ним.

В списке работ Георгия Владимировича есть как статьи по математике, так и по философии и методологии образования, лингвистике, многочисленные публикации в журналах «Наука и жизнь», «Квант», «Математика в школе». Его творчество пронизано идеями семантики языка школьной математики и гуманитаризации школьного математического образования.

Исследования Г.В. Дорофеева в области грамматики и семантики языка математики открыли новое направление в методике преподавания предмета. Его работы важны не только для учителей математики, они представляют собой неопценимый вклад и в общекультурное развитие личности.

С 1976 г. Г.В. Дорофеев являлся членом редколлегии журнала «Математика



в школе». Многие годы он был ведущим отдела задач журнала.

Георгий Владимирович также много работал как член секции Федерального экспертного совета России по общему образованию, входил в состав жюри конкурса учебников математики для средней школы, проводившегося Государственным Комитетом СССР по образованию, был представителем России в редколлегии международного журнала «Educational Studies In Mathematics».

В 2003 г. Г.В. Дорофеев стал лауреатом премии Президента РФ в области образования.

Важно отметить, что к числу учеников Георгия Владимировича Дорофеева относят себя не только учившиеся у него студенты и аспиранты, но и практически все

те, кто когда-либо слушал его выступления или учился по его книгам. Испытав на себе влияние научных идей профессора, человек невольно менялся.

Большой знаток живописи, музыки, поэзии, театра, он также владел английским, немецким и французским языками. К слову, книги «Линейная алгебра и элементарная геометрия» Ж. Дьедонне и «Алгебра» Н. Бурбаки вышли на русском языке в переводе Г.В. Дорофеева.

Георгию Владимировичу были свойственны жизнелюбие, необыкновенное чувство юмора, доброта и честность. После ухода учёного с нами остались его понимание математики, педагогические взгляды и «художественная литература по математике».

Ученики, друзья и коллеги

О ПРИНЦИПАХ ОТБОРА СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Г.В. Дорофеев
(Москва)

Настоящая статья Георгия Владимировича Дорофеева впервые была опубликована в № 6 журнала «Математика в школе» за 1990 г.

1. Выбор приоритета. Интеллектуальный уровень личности характеризуется в целом, хотя и грубо, двумя основными параметрами: объёмом приобретенной информации и способностью использовать эту информацию для достижения определённых целей — для решения возникающих в процессе деятельности задач, разрешения различного рода проблемных ситуаций.

Первый из этих параметров характеризует эрудицию человека, второй — его интеллектуальное развитие. Эрудиция как совокупность конкретных знаний, приобретаемых человеком в процессе обучения, представляет собой в определённом смысле его интеллектуальную «потенциальную энергию», тогда как развитие мышления создаёт возможность её трансформации в необходимую для непосредственной умственной деятельности «кинетическую энергию».

Объём знаний, которые человек может усвоить в период школьного обучения, естественно, ограничен как абсолютно, так и в ещё большей степени относительно: современное состояние науки и общества, динамичный научно-технический и социальный прогресс, увеличение объёма новой информации по экспоненциальному закону резко сокращают долю знаний, получаемых человеком в период школьного образования по отношению к информа-

ции, необходимой ему для полноценной деятельности в изменяющемся обществе.

В этих условиях задача сообщения человеку на уровне среднего и даже высшего образования объёма информации, достаточного для его будущей деятельности, оказывается нереальной. На первый план выходит задача интеллектуального развития, включающего, в частности, способность человека к усвоению новых знаний, к самостоятельному поиску и усвоению новой информации.

Высокий уровень интеллектуального развития, и прежде всего таких его компонентов, как интеллектуальная восприимчивость, то есть способность к усвоению новой информации и интеллектуальная подвижность, гибкость мышления, является в современном обществе существенным условием относительно безболезненной адаптации человека к изменяющимся жизненным обстоятельствам.

Это касается равным образом учёного, сталкивающегося с лавинообразным нарастанием объёма научной информации; инженера, конструирующего новые приборы, создающего технологии, которые опираются на качественно новые знания фундаментального характера; рабочего, осваивающего принципиально новые средства производства или приобретающего новую профессию; крестьянина, эффективность труда которого зависит от

экономической образованности, от умения использовать современные достижения сельскохозяйственной науки и техники.

Таким образом, основной задачей перестройки школьного образования на современном этапе развития общества представляется переориентация методической системы обучения на приоритет развивающей функции обучения по отношению к его образовательной, информационной функции, перенос акцентов с увеличения объёма информации, предназначенной для усвоения учащимися, на формирование умений использовать информацию, то есть, в самых общих терминах, переход от экстенсивного школьного образования к интенсивному.

Традиционная ориентация школьного образования на изучение основ наук, неизбежно предопределяющая, в связи со стремительным развитием науки в современном обществе, экстенсивный характер школьного образования, в значительной степени перестала соответствовать потребностям общества в целом в условиях быстро развивающегося во всем мире движения за переход к обязательному среднему образованию.

С одной стороны, цель такой ориентации оказывается, по существу, нереальной вследствие невозможности сообщить слишком большой объём информации, а для математики, кроме того, из-за её объективной сложности. С другой стороны, знание основ наук в настоящее время для значительного, если не подавляющего большинства выпускников школы стало бы мёртвым грузом, лишь небольшая часть которого, в силу различных случайных обстоятельств, могла бы оказаться непосредственно полезной в жизни конкретного человека.

И хотя совершенно очевидно, что в современной развитой системе наук любые

элементарные конкретные знания тем или иным образом систематизируются в соответствующих науках, то есть представляют собой именно основы, на которых строятся эти науки, рассмотрение начальных знаний именно в этом качестве должно уступить место их трактовке как материала для интеллектуального развития учащихся.

В соответствии с данными психологической науки, интеллектуальное развитие учащихся происходит только в процессе активной целенаправленной деятельности, состоящей в приобретении информации и её переработке для достижения определённых результатов (в частности, для получения новой информации). Конкретные знания, таким образом, представляют собой, с информационной точки зрения, определённую базу данных, максимизируемую потребностями общества в целом и минимизируемую возможностями учащихся, их интересами и склонностями, неадекватными предмету, и предназначенную прежде всего для переработки заложенной в ней информации.

Создание такой базы данных (содержания) вместе с методическим механизмом организации переработки этих данных в процессе учебной деятельности (методов обучения) и является центральной проблемой методической системы обучения в каждом учебном предмете, и прежде всего в математике.

2. Цели математического образования. Идея приоритета развивающей функции обучения математике является, по существу, формой гуманитаризации математического образования, его ориентации на формирование подрастающего человека как интеллектуальной личности. Гуманитарная направленность обучения математике, использование гуманитарно-

го потенциала математической науки и соответствующих возможностей процесса обучения математике приводят к необходимости пересмотра целей и задач обучения математике в школе, и прежде всего их относительной ценности в математическом образовании каждого конкретного человека как в общеобразовательном звене, так и после выбора определённого профиля на старшей ступени обучения. Реализация гуманитарного потенциала, возможная, естественно, лишь на базе изучения определённого учебного материала, требует в настоящее время глубокой и научно обоснованной переоценки роли конкретных компонентов математической науки в современной системе школьного математического образования.

Вся система преподавания математики, как, впрочем, и других школьных предметов, должна строиться как система разрешения диалектического противоречия между конкретным человеком и обществом в целом. Отношения между этими двумя субъектами процесса развития цивилизации, в котором каждый преследует свои интересы, строятся на признании взаимности их обязательств друг перед другом – необходимого условия демократизации системы образования в современном и будущем обществе. Динамическое разрешение этого противоречия требует установления гармоничного сочетания целей, которые преследуют конкретный человек и общество в целом.

С точки зрения общества, система школьного математического образования должна обеспечить расширенное воспроизводство кадрового потенциала, способного осуществлять на современном и перспективном уровне научно-технический прогресс во всех областях принципиальной применимости всего спектра математических знаний. Тем самым задача

полноценной математической подготовки ставится не по отношению к конкретному человеку, но лишь по отношению к каждому новому поколению в целом.

Цель конкретного человека состоит, по существу, в том, чтобы занять в обществе положение, дающее возможность максимально раскрыть свои созидательные возможности и обеспечивающее одновременно адекватную оценку его вклада в развитие общества, должное уважение со стороны общества к его личности как к самостоятельной ценности.

Используя весь представляемый ему системой образования комплекс возможностей, молодой человек с правильно сформированной иерархией ценностей автоматически принимает на себя обязательство о возвращении обществу «долга», накопленного за период обучения, когда человек заведомо больше берёт от общества, чем отдаёт ему. Это обязательство состоит в том, чтобы стать в процессе обучения максимально полноценным членом общества как в профессиональной, трудовой, так и в социальной сфере деятельности.

Залогом успешности функционирования системы образования, основанной на принципе «взаимной эксплуатации», является фактическое совпадение, во всяком случае в идеале, целей конкретного человека и его обязанностей по отношению к обществу: максимальное раскрытие творческих способностей и их реализация являются благом одновременно и для общества, и для самого человека. Разумеется, это совпадение может иметь место лишь при обеспечении правильной социальной ориентации подрастающего человека в процессе его формирования как личности, что заставляет предъявлять весьма высокие требования к системе воспитания учащихся – и самостоя-

тельной системе, и, что в нашем случае особенно важно, к подсистеме обучения математике в рамках общей системы образования.

Гуманитаризация школьного математического образования предполагает, что для достижения своих целей общество берёт на себя обязательство предоставить каждому человеку все возможности для получения математической подготовки, максимально соответствующей его индивидуальным интересам и склонностям, способностям и возможностям.

Реализация этих целей делает неизбежным отказ от единообразного, уравнительного преподавания математики, унифицирующего как содержание обучения, так и уровень требований к математической подготовке учащихся. В то же время именно гуманитарная ориентация обучения математике в условиях развитой уровневой и профильной дифференциации, при создании эффективно действующих систем углублённого изучения математики, внеклассной работы и внешнего образования позволит решать в динамике и глобальную задачу общества – воспроизводство необходимого кадрового потенциала.

Гуманитарная направленность обучения математике, приоритет развивающей функции обучения требуют некоторой детализации в этом аспекте целей обучения математике, выдвинутых в статье «К концепции математического образования» (Математика в школе. 1989. № 2). С учётом естественной необходимости приобретения учащимися определённого объёма конкретных математических знаний мы можем сформулировать цели школьного математического образования следующим образом:

– овладение комплексом математических знаний, умений и навыков, необхо-

димых: а) для повседневной жизни и профессиональной деятельности, содержание которой не требует использования математических знаний, выходящих за пределы потребностей повседневной жизни; б) для изучения на современном уровне предметов естественнонаучного и гуманитарного циклов; в) для продолжения изучения математики в любой из форм системы непрерывного образования (в том числе при переходе к обучению по любому профилю на старшей ступени обучения);

– формирование и развитие качеств мышления, необходимых образованному человеку для полноценного функционирования в современном обществе, в частности формирование эвристического и алгоритмического мышления;

– формирование и развитие абстрактного мышления, и прежде всего его дедуктивной составляющей как специфической для математики;

– реализация возможностей математики в формировании научного мировоззрения учащихся, в освоении ими научной картины мира;

– формирование и развитие у учащихся потребности и способности непрерывно и целенаправленно расширять и углублять свои знания;

– формирование математического языка и математического аппарата как средства описания и исследования окружающего мира и его закономерностей, в частности как базы компьютерной грамотности;

– ознакомление с ролью математики в развитии человеческой цивилизации, в научно-техническом прогрессе, в современной науке и производстве;

– ознакомление с природой научного знания, с принципами построения научных теорий в единстве и противоположности математики и естественных наук;

– формирование и развитие морально-этических качеств личности, адекватных процессу полноценной математической деятельности.

Диалектическое сочетание потребностей конкретного человека и общества в целом, обеспечиваемое системой математического образования в условиях гуманитарной ориентации обучения, приводит к необходимости разделения целей обучения, ставящихся перед школой в целом, перед каждой ступенью образования в отдельности и перед каждым конкретным учащимся. Прежде всего необходимо сформулировать цели общего математического образования, понимаемого как образование «для всех».

Общим математическим образованием ограничиваются учащиеся, избирающие после единой, непрофилированной ступени обучения либо профессиональную школу, либо профиль обучения, не связанный с использованием математики вообще или требующий минимального расширения или углубления отдельных компонентов математического знания, уже заложенных в непрофилированной ступени, но не реализованных в ней по тем или иным причинам.

Возникающая при этом возможность существенного ослабления роли математики в образовании значительного числа учащихся приводит к необходимости поставить перед обучением математике уже в непрофилированной школе достаточно серьёзные цели: учащиеся должны не только овладеть базисными компонентами математического знания, но и сформировать в себе ряд личностных качеств, адекватных гуманитарному потенциалу обучения математике.

Поэтому сформулированные выше цели школьного математического образования фактически относятся именно к

общему математическому образованию, однако мера их достижения на непрофилированной ступени обучения, естественно, должна быть согласована с возрастными возможностями учащихся. Разумеется, кроме того, что цели обучения математике в различных конкретных профилях нуждаются в модификации и дополнительной детализации, однако эта проблема требует специального исследования, и здесь мы её не касаемся.

3. Принципы отбора содержания обучения математике.

Содержание школьного математического образования представляет собой систему знаний – социально необходимое и дидактически обоснованное отражение определённой совокупности компонентов математической науки в учебном предмете «Математика». Правильное определение содержания обучения математике, обеспечивающее оптимальные возможности для достижения целей математического образования, является, безусловно, одной из главных проблем перестройки методической системы обучения математике на современном этапе развития советской школы.

Решение этой проблемы требует научно обоснованного вычленения из всего комплекса математических знаний – понятий, утверждений, приёмов и методов рассуждений – своего рода квинтэссенции, достаточно представительной совокупности элементов, систематизация которых на основе психолого-педагогических, дидактических и логических требований позволила бы реализовать современные цели школьного математического образования, значительная часть которых имеет чётко выраженный гуманитарный характер, направлена на интеллектуальное развитие личности.

Важнейшей особенностью современно-

го этапа развития советской школы, оказывающей решающее влияние на сами принципы отбора содержания обучения математике, является развитие и широкое внедрение уровневой и профильной дифференциации, предполагающей максимальную гибкость как в определении самого объема информации, так и в требованиях к уровню овладения этой информацией различными учащимися.

Отсюда вытекают два ведущих социально обусловленных принципа отбора содержания – информационная ёмкость и социальная эффективность: обучение математике должно обеспечивать приобретение всеми учащимися объема знаний, достаточного для реализации целей математического образования, и формирование кадрового потенциала общества во всех сферах деятельности, требующих математических знаний и интеллектуальной культуры.

Если принять за точку отсчёта действующие программы школьных математических курсов, то реализация принципа информационной ёмкости представляется возможной при существенном сокращении объема изучаемого материала, так что этот принцип отбора содержания, в особенности с учётом всеобщности поставленной в нём задачи, имеет в значительной степени минимизирующий характер – реализация гуманитарного потенциала обучения математике вполне возможна на достаточно ограниченном материале, не выходящем далеко за пределы потребностей повседневной жизни.

Что же касается принципа социальной эффективности, то при нынешнем унифицированном содержании математического образования его можно считать в достаточной степени реализованным: объём математических знаний, усвоение которых предусмотрено школьной програм-

мой, вполне достаточен для продолжения обучения в высшей школе, в том числе и по физико-математическим специальностям, а следовательно, и для воспроизводства кадрового потенциала общества (во всяком случае, при существующих взаимосвязях в системе «школа – вуз»). В то же время совершенствование системы высшего образования неизбежно повлечёт за собой повышение требований к знаниям выпускников школы, и поэтому принцип социальной эффективности в динамике развития системы «школа – вуз» всегда будет иметь максимизирующий характер.

Таким образом, сочетание принципов информационной ёмкости и социальной эффективности в методической системе обучения математике имеет чётко выраженный оптимизационный характер.

Наряду с этими двумя социально обусловленными принципами отбора содержания, отражающими взаимосвязи «школа – общество» и имеющими в силу этого внешний по отношению к системе обучения характер, следует сформулировать принципы внутренние, касающиеся самой системы школьного обучения и обусловленные психолого-педагогическими, дидактическими и методическими требованиями.

Содержание обучения математике должно обеспечивать:

- максимальные возможности для организации полноценной математической деятельности учащихся (интеллектуальная ёмкость);
- реализуемость усвоения программных знаний всеми учащимися в условиях развитой уровневой и профильной дифференциации и ограниченности объема учебного времени совокупностью внешних факторов (дифференцированная реализуемость);

– максимальные возможности для формирования, поддержания и развития интереса к изучению математики на каждом этапе обучения (познавательная ёмкость);

– выявление математических и общеинтеллектуальных способностей учащихся с целью их обоснованной ориентации на профиль обучения и выбор специальности (диагностико-прогностическая ёмкость);

– возможность изучения других школьных предметов на современном уровне развития соответствующих наук и методик обучения.

Наконец, наряду со сформулированными внешними и внутренними принципами отбора содержания представляется совершенно необходимым руководствоваться принципом преемственности, то есть традиционности и разумного консерватизма. Этот принцип обусловлен в первую очередь тем объективным фактом, что традиционное содержание обучения математике, сложившееся в течение многих десятилетий и даже столетий, отражает тот объём математических знаний, который, с одной стороны, является фундаментом математической науки, а с другой – в принципе доступен большинству учащихся. В то же время изменение содержания математического образования не может не учитывать естественную инерционность громадного механизма системы математического образования – прежде всего системы обучения математике в школе и системы подготовки и повышения квалификации учителей.

Из принципа преемственности следует, в частности, что отбору содержания, «идеально» соответствующего современным целям математического образования, необходимо должен предшествовать достаточно длительный переходный период, учитывающий социальные реалии.

4. Механизм отбора содержания.

Как уже говорилось, содержание обучения математике в школе является отражением определенных компонентов математической науки в соответствующем учебном предмете, точнее – в совокупности конкретных математических курсов. Для их реализации необходимо иметь своего рода механизм, совокупность критериев, более конструктивных по сравнению с общими соображениями о соответствии содержания сформулированным целям школьного математического образования.

Предлагаемый механизм основан на разделении заданной совокупности математических знаний – понятий, теорем, методов рассуждений – в соответствии с их ролью в математической подготовке учащихся. Исходная совокупность знаний определяется на основе принципа преемственности с учётом современных тенденций развития советского и зарубежного математического образования. Из этой совокупности, естественно, несколько огрублённо вычлениаются несколько групп основных знаний, освоение которых на определённом уровне – общепрагматическом (прикладном в «повседневной жизни»), дидактико-прагматическом (операционном в процессе обучения) или общекультурном (фактологическом) – соответствует реализации целей математического образования.

Из всего многообразия конкретных знаний прежде всего выделяются знания целевые, то есть непосредственно отражающие цели обучения математике на современном этапе развития школы и общества в целом. В то же время вследствие специфики математической науки и вытекающих из неё особенностей соответствующего учебного предмета, выражающихся прежде всего в достаточно жёсткой взаимозависимости и иерархии много-

образных конкретных знаний, целевые знания не могут быть освоены учащимися без предварительного изучения существенно большего объёма вспомогательных знаний, которые сами по себе не представляются необходимыми в плане достижения целей математического образования.

В качестве наиболее яркого примера здесь можно привести курс начал математического анализа, при полноценном изучении которого вспомогательные знания – теория действительных чисел, теория пределов, теория определённого интеграла – потребовали бы значительно большего времени по сравнению со знаниями целевыми: исследование функций с помощью производной, решение соответствующих оптимизационных задач, нахождение площадей и объёмов геометрических фигур и тел. В достаточной степени велик относительный объём вспомогательных знаний по отношению к целевым и в традиционных курсах алгебры и геометрии.

В то же время разделение знаний на целевые и вспомогательные самым существенным образом зависит от конкретных форм профильной дифференциации, и поэтому вполне естественно, что определённые знания, безусловно вспомогательные на уровне общего математического образования, следует рассматривать как столь же безусловно целевые в математическом и естественно-научных профилях на старшей ступени или в системе углублённого изучения математики на средней ступени обучения.

Представление номенклатуры целевых знаний как основная задача отбора содержания тесно связана с их структурированием, однако проблема структурирования представляется весьма сложной и заслуживающей специального обсуждения. По-

этому мы ограничиваемся здесь лишь их перечислением с очевидной группировкой элементов знаний в содержательном плане.

На уровне общего математического образования целевыми представляются следующие группы знаний.

1. Арифметика: натуральные числа, округление натуральных чисел, обыкновенные и десятичные дроби, округление десятичных дробей, проценты и пропорции, целые числа, положительные и отрицательные рациональные числа.

2. Геометрия: плоские и пространственные фигуры и конфигурации, изображения на плоскости (на рисунках и чертежах), измерение длин, площадей и объёмов, измерение углов.

3. Стохастика: вероятность и частота, вероятностно-статистическое прогнозирование, независимость событий и испытаний, условная вероятность, равномерное и нормальное распределения, статистические параметры, проверка гипотез.

4. Логика: равносильность и следствие, законы дедуктивных рассуждений, доказательство, определение, теорема, аксиоматика.

5. Алгоритмика: алгоритмы в математике и вне математики, алгоритмизация, элементы информатики.

6. Математический язык: терминология и символика.

7. Математический инструментальный: математический язык, операции, выражения, тождественные преобразования, функции, графики, уравнения и неравенства, целые, рациональные, действительные и комплексные числа.

8. Начала математического анализа: измерение величин, действительные числа, приближения и приближённые вычисления, числовые функции, произ-

водная, интеграл, дифференциальные уравнения.

9. История математики: исторические факты, история возникновения и развития математических теорий, вклад выдающихся математиков.

10. Математика и внешний мир: математическое моделирование, математика в системе наук, специфика математики как науки.

Перечисленные группы знаний, соответствующие различным разделам математики и её связей с наукой, практикой и культурой (арифметика, алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика, логика, информатика, язык, история и философия математики), составляют, на наш взгляд, в достаточной мере полноценную содержательную основу школьного математического образования.

В то же время исключение из предла-

гаемой системы отдельных элементов или целых групп знаний, очевидно, обеднит как собственно математическую, так и общеинтеллектуальную и общекультурную подготовку выпускников школы. Нельзя не учитывать также, что указанные элементы знаний в том или ином виде представлены в школьных программах с высоким уровнем математического образования, так что существенные расхождения в содержании обучения математике в советской и зарубежной школе стали бы труднопреодолимым препятствием в решении проблемы взаимного признания дипломов о среднем образовании.

Объём настоящей статьи не позволяет провести совершенно необходимый анализ и достаточно подробную детализацию указанных групп знаний для последующего решения многих конкретных вопросов отбора содержания — это должно явиться предметом специальной публикации.

АНОНС

Читайте в четвёртом номере журнала «Математика для школьников» статьи следующих авторов

Файнштейн А.С. (г. Магнитогорск)

ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ В ФИНАНСОВЫХ ЗАДАЧАХ НА КРЕДИТ

Статья посвящена решению финансовых задач на кредит, встречающихся в материалах профильного ЕГЭ по математике. Предлагаются теоремы и формулы для обоснования решений таких задач. Рассмотрены аннуитетная схема и различные варианты дифференцированной схемы кредитования. Приведены примеры решений задач и упражнения для самостоятельного выполнения.

Смирнов В.А., Смирнова И.М. (г. Москва)

О КРАСОТЕ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ

В статье рассматриваются полярные координаты и их использование при моделировании различных спиралей в компьютерной программе GeoGebra. Показываются проявления спиралей в природе и технике.

Карпушина Н.М. (г. Москва)

НЕОЖИДАННЫЙ ПАСКАЛЬ

400 лет назад родился Блез Паскаль (1623–1662), блестящий французский математик, физик, изобретатель, философ и публицист XVII века. Первые открытия в математике он совершил ещё в юности, а в историю этой науки вошёл как один из основоположников теории вероятностей. Однако на счету Паскаля немало других замечательных достижений. Поговорим о его вкладе в геометрию, арифметику, теорию чисел и комбинаторику.

Барометр ЕГЭ

ОПЯТЬ АННУЛИРОВАЛИ!

(многоликая статистика нарушений на госэкзаменах)

* Не иссякает поток энтузиастов, стремящихся обойти систему и нарушить правила проведения ЕГЭ, и никакие видеокамеры и нейросеть им нипочём. В последние годы с Единого госэкзамена за это традиционно удаляют около тысячи участников. В этом году, сообщили чиновники Рособнадзора, таких было 969 человек, из них 327 решили воспользоваться средствами связи и 390 принесли с собой бумажные шпаргалки. Сличение почерков в бланках ЕГЭ с почерками в базе итоговых сочинений выявило 8 работ сомнительного происхождения, которые в итоге отправили на экспертизу.

* Как всегда, не обошлась без скандалов. Несколько историй просочились в СМИ. Так, в Краснодарском крае из-за использования словарей аннулировали результаты ЕГЭ по русскому языку у 33 из 157 выпускников. Книги в аудитории ППЭ заранее принесли сами организаторы, хотя пользоваться ими строго запрещено. В Ингушетии за использование аудиоустройств и телефонов в одной из школ с ЕГЭ удалили сразу 13 человек. Массовое списывание на ОГЭ было зарегистрировано в одном из районов Дагестана. Выяснилось, что только четверым из более ста девятиклассников никто не помогал, остальным подсказывали «сторонние люди». Нарушителей не смутило даже видеонаблюдение. Антирекорд установили девятиклассники одной из школ Екатеринбурга: сразу 34 ученика из двух классов завалили ОГЭ по математике.

* По данным опроса образовательной компании MAXIMUM Education, 22% участников ЕГЭ-кампании заявили, что столкнулись с разного рода нарушениями на экзаменах. По сравнению с 2022 годом количество респондентов, сообщивших об этом, выросло в полтора раза. Больше всего опрошенных (30%) отметили нарушения на ЕГЭ по профильной математике. Каждый второй (49%) признался, что видел нарушения со стороны учеников (использование шпаргалок и телефонов), каждый четвертый (26%) заметил их со стороны экзаменаторов (подсказки ученикам) и 10% – со стороны наблюдателей. Чем проштрафились последние, не уточняется.

Подробности: pedsovet.org, rg.ru, e1.ru, obrnadzor.gov.ru.

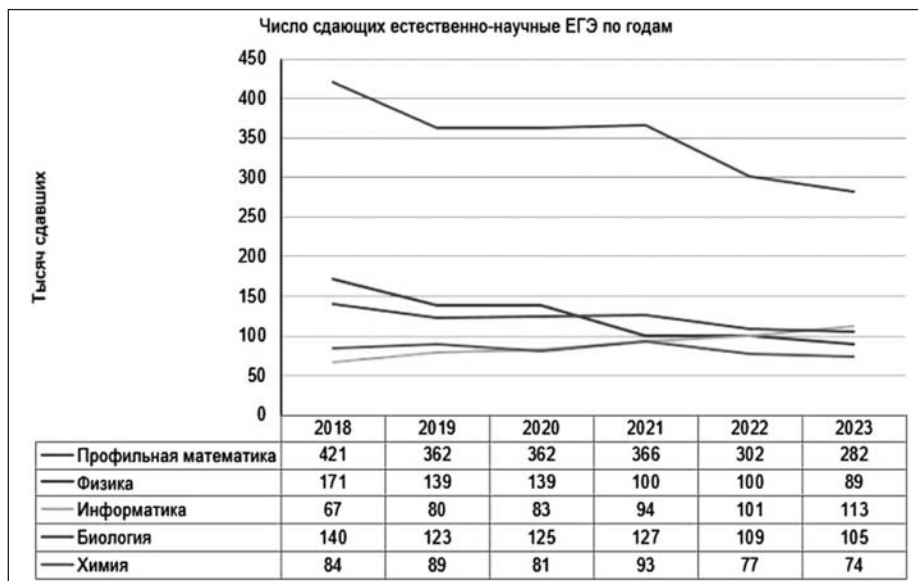
Перспективы далёкие и близкие

ВЕЯНИЕ ВРЕМЕНИ

(как рынок влияет на предпочтения абитуриентов)

В 1990-е годы на рынке наблюдался ажиотажный спрос на менеджеров, экономистов и юристов. Нечто подобное происходит в последние годы. Только нынче модно быть IT-специалистом. Следующая диаграмма позволяет наглядно увидеть предпочтения выпускников – будущих абитуриентов. Так, число сдающих ЕГЭ по профильной математике продолжает сокращаться, за последние пять лет оно уменьшилось на 33%. Хуже дело обстоит только с физикой: на этом фронте «потери» составляют 48%. Совсем иную картину являет

статистика участников ЕГЭ по информатике: за тот же период число их выросло на 68%. Тенденция налицо.



Опрос, проведённый образовательной платформой GeekBrains, показал: 80% россиян видят в своих детях будущих айтишников и мечтают, чтобы их карьера была связана именно с этой сферой. Среди опрошенных родителей 50% выступают за обязательное введение уроков программирования в школе, а 41% считают, что достаточно и факультатива. 95% респондентов хотели бы, чтобы их дети проходили IT-курсы, две трети россиян готовы отдать детей в IT, даже если им это неинтересно. Между тем, по данным главы комитета Госдумы по просвещению, в российских школах не хватает более 3600 учителей информатики.

Подробности: t.me/boilingmephi/5085, hightech.fm, interfax.ru.

А как у других?

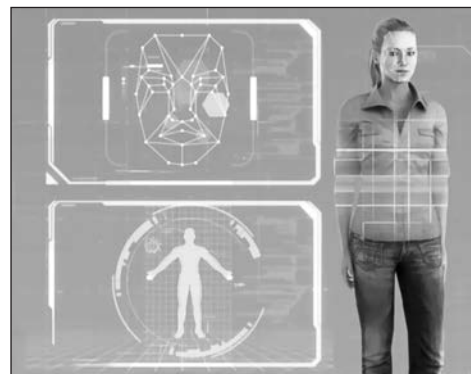
ПОТЕРЯ АНОНИМНОСТИ И НЕ ТОЛЬКО

(что стоит за благими намерениями сторонников внедрения ИИ в вузы?)

В МГПУ разработали и внедрили систему мониторинга и прогнозирования успеваемости студентов с помощью технологии искусственного интеллекта (ИИ). Она ранжирует образовательные результаты, предсказывает, как студенты окончат семестр, и выявляет кандидатов на отчисление. ИИ анализирует более 20 параметров: оценки, пол, возраст, место проживания, платный или бесплатный формат обучения, родной регион, результаты ЕГЭ, курсы по выбору, участие или неучастие в общественной деятельности, пользование библиотекой и др. Для тренировки ИИ использовались данные более 3500 студентов МГПУ. На деле оказалось, что главную роль в прогнозе играют результаты предыдущих экзаменов. Еще один важный показатель – активность использования информационной среды университета (частота посещений личного кабинета, просмотр своих оценок, прохождение онлайн-курсов). В вузе также тестируется система «Умные аудитории», использующая возможности ИИ для оценки эмоций и вовлечённости студентов во время занятий. В ней задействованы две модели на основе нейросетей и множество камер наблюдения.

По мнению уполномоченного по правам студентов и аспирантов Даниила Морозова, обе меры, принимаемые в МГПУ, излишни. Анализировать эмоции учащихся в аудиториях нет необходимости, так как существует анонимная студенческая оценка преподавания. Прогноз успеваемости будет скорее напрягать студентов, как и камеры в аудиториях. Учащиеся трепетно относятся к своей приватности, поэтому эти нововведения будут ими восприняты негативно. Наконец, положительный эффект от ноу-хау совсем не очевиден, его можно достичь и без ИИ, а ресурсы для внедрения таких технологий нужны колоссальные. У каждого студента есть свои психологические особенности, предсказать реакцию (на тот или иной прогноз) всех студентов невозможно, говорит психолог Екатерина Музыка. У таких технологий есть плюсы, но при их использовании студент будет ощущать давление, слежку, считает психотерапевт Наталья Наумова. Не только специалистов, но и общество в целом волнуют этические моменты. Опасения людей по поводу вмешательства в личную жизнь, конечно, справедливы. Для каких целей применяется новая технология? Кто и как будет распоряжаться собранной о студентах информацией? Каким образом интерпретируются те или иные результаты и стоит ли им доверять?

Подробности: iz.ru, myseldon.com.



Житейские истории

ЗНАЙ НАШИХ! ОТЛИЧИЛИСЬ ВСЕ, КТО МОГЛИ

(неожиданности и курьёзы прошедшего госэкзамена)

* На что только не идут современные педагоги, чтобы мотивировать своих учеников на результат. Учитель информатики одной из гимназий города Иваново предложил своим воспитанникам пари: если кто-то сдаст ЕГЭ на 100 баллов, то он побреется налысо. Один из учеников выиграл спор, а учитель, как и обещал, отправился в барбершоп.

* В Санкт-Петербурге у 56-летнего участника ЕГЭ по математике выявили шпаргалку – запрещённые справочные материалы. При удалении с экзамена мужчина (по роду деятельности репетитор) не дал никаких пояснений. На судебное заседание обвиняемый не явился. Суд назначил ему наказание в виде штрафа в размере 3000 рублей.

* В школу при посольстве России в Эфиопии накануне проведения ЕГЭ пришли обезьяны. Организаторы не допустили их до экзамена, поскольку заявление на участие в экзаменах нужно было подать до 1 февраля. Ознакомившись с принтером и прочей техникой и захватив в качестве трофея кусок мела, лохматые «выпускники» покинули ППЭ. Сам экзамен прошёл в штатном режиме.

* В период проведения ЕГЭ-2023 в России существенно выросло потребление глицина и успокоительных средств. Так, за месяц, пока шли экзамены, объём продаж глицина подскочил на 11%. Ежедневные траты на этот препарат возросли с 3,4 млн до 3,7 млн рублей. Всего за время ЕГЭ-кампании было приобретено почти 1,5 млн упаковок глицина на 89,9 млн рублей. Для сравнения: спрос на растительные успокоительные возрос на

16%, а затраты – на 17%. Лидерами по продаже указанных препаратов стали Тверская, Смоленская и Белгородская области.

Подробности: ug.ru, news.myseldon.com, kp.ru, iz.ru.

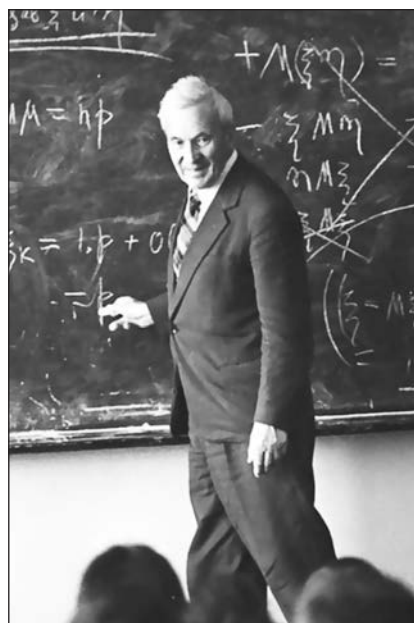
Портрет педагога

ТРИ ПРАВИЛА АКАДЕМИКА

(к 120-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова)

Выдающийся советский математик Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) не только занимался наукой, но и много преподавал студентам и школьникам. Первый учительский опыт он приобрёл в 19 лет. Вспомним несколько важных правил, которых придерживался в своей педагогической деятельности академик Колмогоров. Во-первых, самостоятельная работа учеников. Каждый ребёнок был для него талантливой личностью и творческой единицей. По свидетельству современников, Андрей Николаевич обладал редкой способностью искренне восхищаться успехами своих учеников. Во-вторых, соревновательность, спортивный дух как одно из главных условий формирования будущих учёных. Колмогоров был одним из тех, кто стоял у истоков первой в стране математической олимпиады. В-третьих, он придерживался принципа «математика – всюду». И измерял этой наукой всё. Тем увлекательнее было ученикам постигать её премудрости. У Колмогорова был план того, как сделаться великим человеком; он предусматривал научную работу, открытия, преподавание, создание научной школы и реформу массового образования, занятие спортом, искусством и путешествия. Учащимся, учителям и студентам адресован сборник его избранных статей о школьной математике и её приложениях «Математика – наука и профессия» (М., Наука, 1988, 2022).

Подробности: pedsovet.org.



Нетривиальные суждения

А.Н. Колмогоров о математике и её преподавании

Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивается. Впечатление исключительной трудности математики иногда создается её плохим, чрезмерно формальным изложением на уроке.

Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечён и воспринимает её как живую, развивающуюся науку.

Но даже... простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно.

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Научная статья: 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article: 5.8.2

DOI: 1047639/0130-9358_2023_7_76

Сегодня мы поговорим о Диофантовых уравнениях. Это уравнения, решения которых должны быть целыми числами, и они названы в честь древнегреческого математика Диофанта из Александрии.

Диофантовы уравнения относятся к области теории чисел и играют ключевую роль во многих её аспектах, включая решение задач, связанных с распределением простых чисел, криптографией и многими другими.

Как простые, так и более сложные диофантовы уравнения могут представлять собой большой вызов для решения, особенно если они содержат много переменных или если их решения являются большими числами.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Подаеву Михаилу Валерьевичу по адресу: podaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все целые a, b, c , такие что $a^2 - 2b^2 + 8c = 3$.
2. Решите в целых числах уравнение $2a^2 + ab - b^2 - 7a - 4b = 1$.
3. Найдите все целые a, b , такие что $a^2 - 4ab = 4b^2$.
4. Решите в натуральных числах уравнение $2^a - 3^b = 1$.
5. Найдите все натуральные a, b, c , такие что $a + b + c = abc$.

Решение заданий из № 6–2023. Счёт углов

Одна из самых популярных тем в планиметрии – это счёт углов. То есть задачи, подразумевающие цепочку рассуждений,

основанную на вычислении различных углов, возможно, с введёнными переменными. Приведём соответствующую подборку задач по материалам различных этапов олимпиады Эйлера.

1. Дан прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ с прямым углом C . Точки K, L лежат на катете BC , причём $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB$. На стороне AB лежит точка M , $ML = KL$. Докажите, что проведённый из точки C перпендикуляр на AK не может попасть в середину отрезка KL .

М. Кунгожин

Решение. Проведём окружность ω с центром в точке L и радиусом KL . Она пересекает прямую AB в двух точках или касается её. Рассмотрим первый случай (второй сводится к нему). Одной из двух

точек пересечения будет точка M_1 , симметричная точке K относительно прямой AL , так как она лежит на прямой AB и $LM_1 = LK$. При этом $\angle LM_1A = \angle AKL = \angle ACK + \angle CAK > 90^\circ$. Поэтому угол LM_1A является внешним углом равнобедренного треугольника M_1LM_2 , где M_2 – вторая точка пересечения ω с AB , и точка M_1 лежит между точками A и M_2 .

Положим $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB = \alpha$, а через N обозначим середину основания KM_1 равнобедренного треугольника KLM_1 . Из равенства прямоугольных треугольников ACK и ANK находим $\angle AKN = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle NM_1L = \angle NKL = \angle AKL - \angle AKN = (90^\circ + \alpha) - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

Пусть P – середина отрезка LM_1 , R – середина отрезка LM_2 , а Q – точка пересечения прямой CN с отрезком M_1L . Поскольку $\triangle ACK = \triangle ANK$, $KC = KN$, откуда $CN \perp AK$ и $\angle M_1NQ = \angle KNC = \angle KCN = \alpha < 2\alpha = \angle M_1NP$. Таким образом, точка Q лежит между точками M_1 и P , следовательно, прямая CQ не может проходить через точку P . Через точку R прямая CQ также не может проходить, поскольку $\angle CQL + \angle LQR < \angle CPL + \angle LPR < 180^\circ$.

2. Дан равносторонний $\triangle ABC$, где M – середина стороны AC . Точки P, R лежат на сторонах AM, BC соответственно так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов BMR, MBP, MRA .

С. Берлов

Решение. Пусть отрезки AR и BM пересекаются в точке Q . Так как треугольники ABP и BAR равны по первому признаку, $\angle BAR = \angle ABP = \alpha$. Тогда $\angle ARM + \angle BMR = 180^\circ - \angle AQB = 2\alpha + \angle PBM$ (здесь первое равенство – теорема о внешнем угле для треугольника MQR , а второе – теорема о сумме углов для треугольника AQB), откуда $\angle ARM + \angle BMR + \angle PBM = 2(\alpha + \angle PBM) = 2\angle ABM = 60^\circ$.

3. Дан остроугольный $\triangle ABC$, на про-

должениях сторон BC и AB лежат соотв. точки E и D . N, M – середины сторон DC и AE . Докажите, что $MN > AD/2$.

И. Рубанов

Решение. Пусть L и K – середины сторон AB и AC соответственно. Так как средние линии KL и KM треугольников ABC и ACE параллельны одной и той же прямой BC , а точки L и M лежат по разные стороны от прямой AC , точка K лежит на отрезке LM . Заметим, что $\angle NKM = \angle NKC + \angle CKM = \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC > 90^\circ$. Поэтому MN – самая длинная сторона в треугольнике MKN . В частности, $MN > KN = AD/2$, что и требовалось доказать.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL . На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC .

А. Кузнецов

Решение. В равнобедренном треугольнике LNK $\angle KLN = \angle LKN$. Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC . Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL – биссектриса угла AKB . Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB . Кроме того, она равноудалена от прямых $CA = KA$ и CB , так как лежит на биссектрисе угла ACB . Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB , и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1 , где C_1 – точка на продолжении отрезка CB за точку B , а его биссектрисой должен быть луч $BL = BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60° , откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120^\circ$.

5. В треугольнике ABC провели биссек-

трису BE и серединный перпендикуляр m к стороне AB . Оказалось, что $BE = EC$, а прямая m пересекает сторону BC . Докажите, что угол C меньше 36 градусов.

И. Рубанов

Решение. Пусть $\angle ABC = 2b$, а прямая m пересекает сторону BC в точке D . По свойству серединного перпендикуляра $DA = DB$, откуда $\angle DAB = \angle ABD = 2b$. Зна-

чит, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ADC = \angle DAB + \angle ABD = 4b$. Кроме того, поскольку $BE = EC$, $\angle C = \angle DBE = b$. Из треугольника ADC имеем $180^\circ = \angle DAC + \angle ADC + \angle C = \angle DAC + 4b + b$, откуда $\angle C = b = (180^\circ - \angle DAC)/5 < 36^\circ$.

Задачи подготовил
Поддаев М.В.

Требования к содержанию и оформлению авторских материалов в журнале «Математика в школе»

Требования к содержанию авторского материала

1. К рассмотрению не принимаются: авторские программы; фрагменты из диссертационных работ; элективные и курсы в полном объеме.

2. К рассмотрению принимаются материалы, соответствующие тематике и содержанию журнала:

- научные статьи, где в водной части должны быть обоснованы актуальность темы (научной проблемы или задачи) и целесообразность её разработки. В основной части необходимо раскрыть исследуемую проблему, пути её решения, дать обоснования полученных результатов. В заключительной части следует подвести итог, сформулировать выводы, дать рекомендации, указать возможные направления дальнейших исследований;
- практические (методические) статьи, связанные с разработкой уроков и внеклассных мероприятий, проведением математических конкурсов, олимпиад и т.п.;
- обзорные статьи, в которых должны быть проанализированы, сопоставлены и выявлены наиболее важные и перспективные направления развития науки (практики), её отдельных разделов, явлений, событий и пр. Материал должен носить проблемный характер, демонстрировать противоречивые взгляды на развитие научных (практических) знаний, содержать выводы, обобщения, сводные данные;
- рецензии на публикации, учебники и учебно-методические комплекты, которые должны содержать критический разбор, анализ и оценку.

Требования к оформлению авторского материала

Материал, направляемый в редакцию, должен соответствовать следующим требованиям.

1. Заглавие – краткое, отражающее содержание материала (с переводом на английский язык).
2. В сведениях об авторах перечисляются (с переводом на английский язык):
 - фамилия, инициалы автора (-ов) в именительном падеже. В коллективных работах имена приводятся в принятой авторами последовательности;
 - учёная степень, учёное звание;
 - профессия или должность;
 - место работы или учёбы; страна (для иностранных авторов), населённый пункт, наименование учреждения (ВУЗ, школа), подразделение (факультет, кафедра).
3. Аннотация (не более 500 знаков, с переводом на английский язык) кратко знакомит с содержанием статьи, раскрывает её актуальность, научную и практическую значимость. В аннотации следует употреблять значимые слова из авторского материала для обеспечения автоматизированного поиска, а также стандартную терминологию, свойственную языку научной литературы.
4. Ключевые слова (с переводом на английский язык) выбирают из текста материала, приводят в именительном падеже, помещают перед текстом.
5. Требования к набору формул.
Набирать формулы следует в формульном редакторе, например: $\sqrt{f}, \frac{t}{2}, \left\{ \begin{matrix} w \\ 4 \end{matrix} \right.$.
Латинские буквы, прописные и строчные, а также верхние и нижние индексы в тексте необходимо набирать с клавиатуры, а не в формульном редакторе. Например: ABC, a^1, b_2 .
6. Иллюстрации должны быть представлены в виде отдельных файлов в формате tif или jpg качеством не ниже 300 dpi.
7. Список использованных источников оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.7–2021. Автор отвечает за достоверность сведений и ссылок на официальные документы и другие источники.
8. Рукописи (в формате Word 2010, шрифт Times New Roman, размер шрифта – 14, межстрочный интервал 1,5, объём не более 20 печатных страниц) следует присылать в редакцию журнала по адресу: matematikavskole@bk.ru
К рукописям, содержащим задачи, необходимо приложить решения всех задач!

Примечание

Материалы, направленные в редакцию без выполнения вышеуказанных требований, не рассматриваются.

НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ ПО ПЛАТОНУ

Одно из главных достижений пифагорейцев в математике – открытие иррациональных величин в виде несоизмеримых отрезков. Оказалось, что общая мера для двух отрезков определена не всегда. Нет общей меры – нет числа, что их «измеряет». Значит, точно выразить отношение отрезков с помощью целых чисел, как того требовала их теория, невозможно.

Само открытие некоторые античные авторы приписали Гиппасу из Метапонта, младшему современнику и последователю Пифагора, о ком сохранилось ещё меньше сведений, чем о его знаменитом учителе. Имя математика овеяно мрачными легендами. Согласно одной из них, Гиппас разгласил непосвящённым тайну иррациональности, за что и поплатился: погиб при кораблекрушении по воле разгневанных богов.

Ох уж эти секреты пифагорейцев... Скажем прямо, слухи о них сильно преувеличены. Никаких свидетельств того, что в школе Пифагора действовал запрет на распространение научных идей и достижений, нет. Зато известно, что ещё в V веке до н. э. ими пользовались и учёные, и философы. Среди них Гиппократ Хиосский, автор первых «Начал» – свода геометрических знаний того времени, который отметился вкладом в решение проблемы удвоения куба, и Зенон Элейский, знаменитый своими апориями.

Какая именно задача привела к неожиданному открытию? Точно неизвестно. Скорее всего, поиск общей меры для диагонали и стороны квадрата, считают историки. Но это могла быть и проблема, связанная с определением среднего гео-

метрического чисел 1 и 2. К несоизмеримости имеет прямое отношение задача об удвоении квадрата. Требуется построить квадрат, вдвое больший по площади данного квадрата со стороной a . Для этого нужно найти его сторону x . Задача сводится к решению уравнения $x^2 = 2a^2$.

Установить несоизмеримость диагонали и стороны квадрата с помощью измерений или построений, какими бы точными инструменты мы ни пользовались, нельзя. Усмотреть, разглядывая чертёж, тоже невозможно, особенно если не подозреваешь о её существовании, более того, хочешь убедиться в обратном. Без логических рассуждений тут не обойтись.

Рано или поздно пифагорейцы должны были прийти к мысли о неразрешимости поставленной проблемы. Что привело их к такому выводу, история умалчивает. По одной из версий, найдя ряд приближённых отношений диагонали к стороне квадрата, они в конце концов заподозрили, что процесс поисков не закончится никогда и точный ответ в целых числах дать невозможно.

Самое простое из известных им отношений – $7 : 5$. Его можно получить, рассматривая квадратные числа (в арифметике) либо разбирая задачу об удвоении квадрата (в геометрии). Достаточно заметить, что

$$7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1 \approx 2 \cdot 5^2.$$

Числа подобраны с таким расчётом, чтобы квадрат одного отличался от удвоенного квадрата другого всего на 1. Можно было бы начать с 3 и 2, но их отношение $3 : 2 = 1,5$ далеко от истинного.

Заслуживает внимания также один из эпизодов диалога Платона «Менон».

Беседа героев – философа Сократа и мальчика-раба – проливает свет на то, как, решая задачу об удвоении квадрата, можно столкнуться с иррациональностью. При помощи наводящих вопросов Сократ, по сути, подвёл мальчика к тому же открытию, что сделали когда-то последователи Пифагора.

Сначала они вместе выяснили, что при удвоении квадрата со стороной два фута получится восьмифутовый квадрат¹. Затем попробовали определить, сколько футов в стороне большого квадрата. Оказалось, больше 2 и меньше 4. Тогда Сократ попросил уточнить. Мальчик сказал: «Три фута» – и ошибся. Но иного ответа он и не мог дать. Потом сам же его опровергнул, умножив 3 на 3. «Вот и не получился у нас из трёхфутовых сторон восьмифутовый квадрат», – заключил Сократ. Почему так вышло? Не потому ли, что одних только целых чисел недостаточно для решения задачи?

Дальше самое интересное. «Но из каких же получится? – спросил философ и тут же предложил: – Попробуй сказать нам точно. И если не хочешь считать, то покажи». – «Нет, Сократ, клянусь Зевсом, не знаю». Вычислить мальчик никак не смог бы, а вот предъявить искомый отрезок – другое дело. Здесь уже арифметика не помощница, вся надежда на геометрию. Сократ сделал новый чертёж. Из четырёх квадратов со стороной два фута каждый составил квадрат и последовательно соединил отрезками середины его соседних сторон. Выяснив путём нехитрых рассуждений, что в итоге получился восьмифутовый квадрат, мальчик указал на рисунке нужный отрезок – диагональ малого квадрата.

Кто бы сомневался в эффективности знаменитого метода Сократа. Отдадим должное ученику философа Платону: иррациональные величины он представил

для начинающих со знанием дела. Решая задачу, герои «Менона» действуют в духе пифагорейцев. Поиски стороны x восьмифутового квадрата приводят к пропорции $x : 2 = 4 : x$, ибо любые два квадрата подобны (здесь рассмотрены сразу три фигуры разного размера). Отсюда $x^2 = 8$. Не зная, как разрешить это уравнение «в числах», они находят точное решение «в отрезках». Ни с какими приближенными значениями греки в то время не имели дела (первые примеры извлечения корней при решении конкретной задачи встречаются у Архимеда). Мы, в сущности, поступаем так же: не вычисляем корни из неквадратных чисел, а записываем ответ с помощью знака корня.

Из чертежей видно, что $2 < \sqrt{8} < 4$, но

$$\sqrt{8} = 2,8284... \approx 3.$$

О чём это говорит? Автор «Менона» выбрал числа для своей задачи отнюдь не случайно. Как сказал бы классик: и лучше выдумать не мог! Действительно, чтобы показать метод Сократа в лучшем виде, выстроить всю цепь рассуждений и в нужный момент озадачить мальчика, дабы затем легко привести к правильному решению, идеально, как никакой другой подходит именно квадрат со стороной два фута.

Для того чтобы мастерски срежиссировать такую историю, нужно знать об иррациональности $\sqrt{8}$, а в случае Платона – быть уверенным в доказательстве этого факта. На момент создания диалога «Теэтет» – между 370 и 348 годами до н. э. – философ в этом не сомневался. Но знал ли он о том же, берясь за «Менона», который появился как минимум на пятнадцать лет раньше – между 390 и 385 годами?

Очевидно, знал и фактически уже в «Меноне» засвидетельствовал главное достижение своего учителя Феодора Киренского, о коем позже упомянул в «Теэтете».

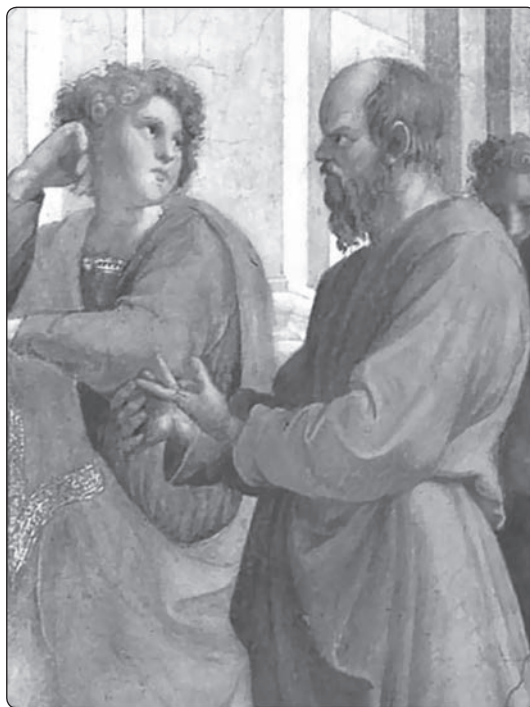
Наталья Карпушина

¹ Квадрат площадью 8 квадратных футов.

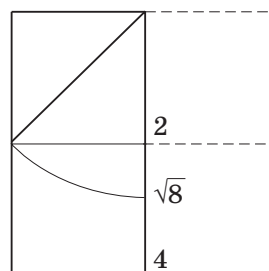
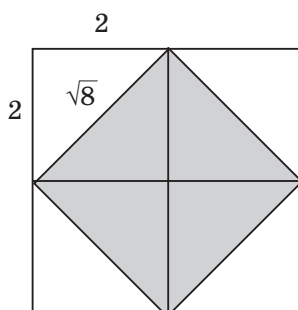
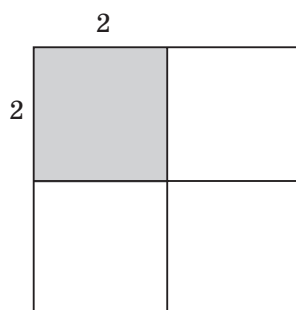
НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ ПО ПЛАТОНУ



Платон и Аристотель.
Фрагмент фрески Рафаэля Санти
«Афинская школа», 1509–1510 годы



Сократ беседует с учеником.
Фрагмент фрески Рафаэля Санти
«Афинская школа», 1509–1510 годы



Чертежи к задаче Сократа об удвоении квадрата.
Оценка квадратного корня из 8

ПОДПИСКА 2024. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



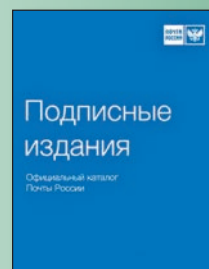
Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 7, 1–80