

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

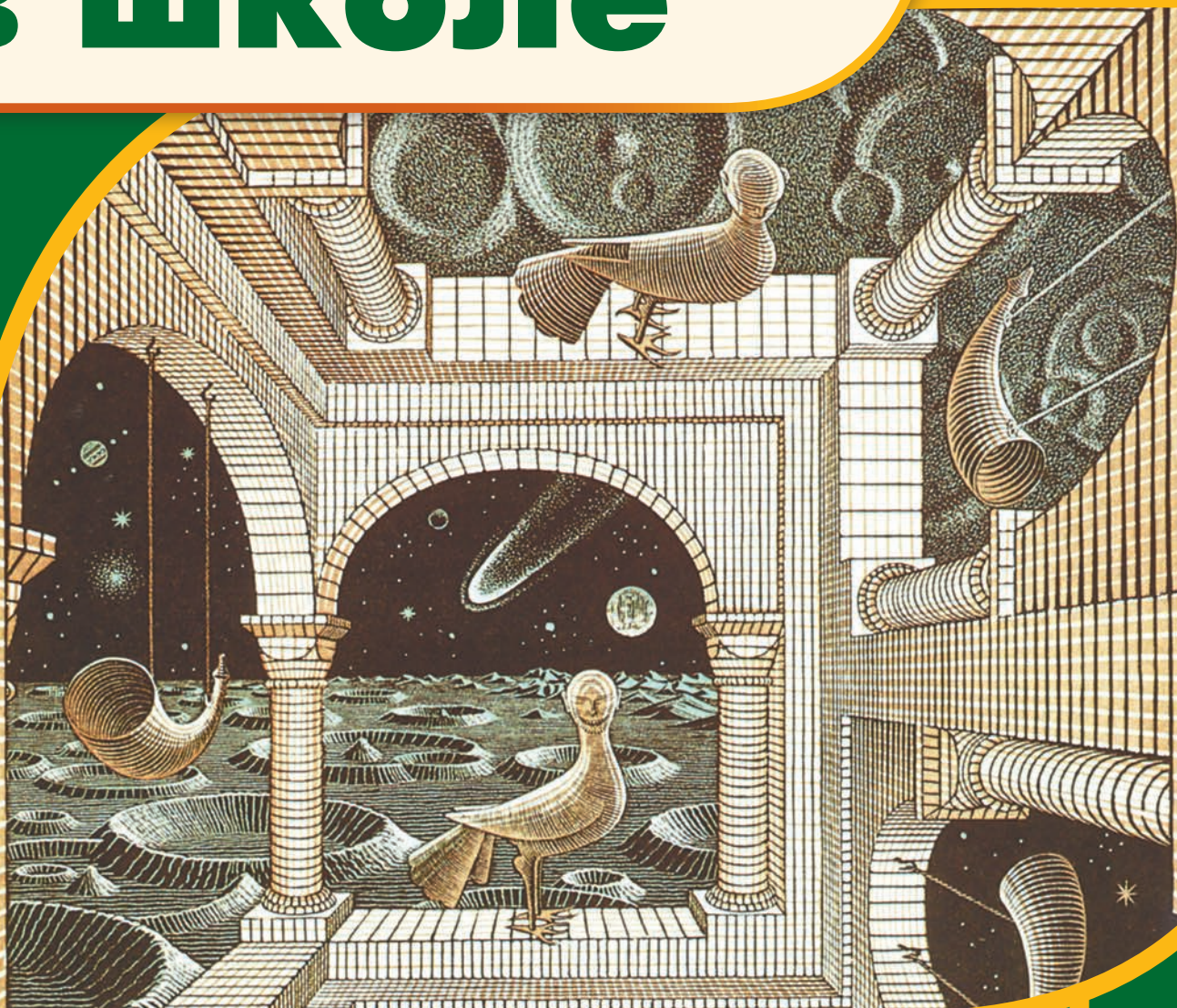


научно-теоретический и методический журнал

6 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА **В ШКОЛЕ**



Муниципальный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области

Пирамида математической грамотности

Ещё раз о теореме Менелая

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



НОВЫЙ ФГОС: ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА В ШКОЛЕ

Успехи математического образования в России в средней и высшей школе общепризнаны. При этом до недавнего времени Россия была одной из немногих стран, где вероятностно-статистическая линия оставалась вне пределов школьных программ по математике. Данному факту, наверное, можно найти объяснение, хотя стоит отметить, что это всегда вызывало удивление учёных и педагогов разных стран, ибо в профессиональном сообществе хорошо известно — российская научная школа теории вероятностей в XIX и XX веках была едва ли не сильнейшей в мире (вспомним хотя бы основополагающие работы П.Л. Чебышёва, А.М. Ляпунова, А.А. Маркова, А.Н. Колмогорова и др.), тогда её в шутку называли «русской наукой».

Однако с наступлением XXI века стохастика постепенно входит в практику отечественной средней школы, и сейчас мы видим новый важный этап. Теперь в федеральных образовательных стандартах (ФГОС) учебный предмет «Математика» предметной области «Математика и информатика» включает в себя помимо привычных учебных курсов «Алгебра» и «Геометрия» базовый и профильный курсы «Вероятность и статистика». Соответственно, и в государственную итоговую аттестацию, в ОГЭ и ЕГЭ, включаются результаты освоения программ всех трёх составных частей предмета «Математика».

Напомню: нынешний этап начинался с первых попыток ввести элементы вероятности и статистики ещё в 1990-е годы (учебники под редакцией Г.В. Дорофеева, затем и других авторов, первые учебники, целиком посвящённые теории вероятности и статистике). В 2004 году ФГОС уже предполагал введение элементов комбинаторики, вероятности и статистики в основную школу, в 2010 году появились соответствующие задания в ГИА-9, в 2012 — в ЕГЭ, а в 2013

году в Концепции математического образования теория «Вероятность и статистика» была названа перспективным направлением для школы.

Так что о внезапности появления стохастики говорить не приходится. Однако немало учителей математики с настороженностью относятся к этому нововведению. И на то есть реальные основания, ведь преподавательского опыта немного, а методические основы преподавания вероятностно-статистической линии в школе разработаны явно недостаточно. Это, кстати, заметно и в упомянутых выше новых ФГОСах, где материал базового и профильного уровней нередко абсолютно идентичен, а отличие лишь в словах «владеть» и «свободно владеть». Чем отличается «владеть» от «свободно владеть», — предлагается решать учителю, зачастую впервые в сентябре начинающему системно преподавать новый курс. Да и методически этот материал для школьной математики непривычный (много рассуждений, ссылок на опыт, мало формул), здесь необходимы иные формы и приёмы обучения, особенно при формировании базовых понятий.

Кстати, о базовых понятиях. Не забудем, что только в XVII веке начало формироваться более-менее внятное представление о проблематике теории вероятностей, появились первые математические методы решения вероятностных задач. Знаменитая переписка Блеза Паскаля и Пьера Ферма свидетельствует о том, как много ошибались в этом и даже великие учёные.

Наш журнал «Математика в школе» уже несколько десятилетий старается помочь учителю в освоении основ стохастики, методики преподавания данной линии. Эти материалы несколько не устарели, сегодня они приобретают новую актуальность, и наши читатели найдут в подшивках журнала много полезного. При всех сложностях появление в XXI веке в российской школе курса «Вероятность и статистика» закономерно и неизбежно. Будем исходить из этого.

Евгений Бунимович

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 3 *Малышев И.Г.*
Красивые задачи на фигуры вращения

ОЛИМПИАДЫ

- 9 *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.*
Муниципальный этап XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ

- 19 *Шабанова М.В., Котова С.Н., Томилова А.Е., Удовенко Л.Н.*
Компьютерная поддержка конструктивной деятельности учащихся при решении стереометрических задач повышенного уровня сложности

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 30 *Журавлева А.С.*
Пирамида математической грамотности

МАТЕМАТИКА И ОБРАЗОВАНИЕ

- 35 *Семёнов П.В.*
От действительных чисел к исследованию функций

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 40 *Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.Н.*
Освобождение от иррациональности в знаменателе

ПРОФИЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ

- 46 *Рыжик В.И., Осипов А.В.*
Ещё раз о теореме Менелая

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 54 *Мельников Р.А., Саввина О.А.*
Научное и педагогическое наследие Льва Дмитриевича Кудрявцева (к 100-летию со дня рождения)

- 60 Кондратьева Г.В.
**Переход от рукописи к печатному изданию:
у истоков создания отечественных учебников математики**

ХРОНИКИ

- 69 Кузнецова Т.И., Кондратьева Г.В.
Всероссийский научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2022/2023 учебном году

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 72 Карпушина Н.М.
«Экцентричный гений нашего времени» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 76 Подаев М.В.
Счёт углов

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 78 Карпушина Н.М.
Дело о пропавшем гороскопе

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3786. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 6 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

КРАСИВЫЕ ЗАДАЧИ НА ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

BEAUTIFUL PROBLEMS ON SOLIDS OF REVOLUTION

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_3

И.Г. Малышев, доцент,
Лицей №40 (г. Нижний Новгород),
migniro@mail.ru

I.G. Malyshev, Associate Professor,
Liceum №40 (Nizhny Novgorod),
migniro@mail.ru

Аннотация: на примере задач по теме «Фигуры вращения», показана красота стереометрических задач, которой можно лишиться в результате изменения программ и переориентирования на новые разделы в школьной математике

Abstract: using the example of problems on the topic «Figures of rotation», the beauty of stereometric problems is shown, which can be lost as a result of changing programs and reorienting to new sections in school mathematics

Ключевые слова: программа по математике, усечённый конус, цилиндр, шар, шаровой сегмент, шаровое кольцо

Keywords: program in mathematics, truncated cone, cylinder, ball, ball segment, ball ring

© И.Г. Малышев 2023

«Школьный курс перегружен никому не нужными вещами (пример – формула объёма усечённого конуса)».

Из выступлений на Всероссийском съезде 2010 г.,
«Математика в школе», 2011, № 1

ФГОС не стоит на месте, а посему реформы математического образования продолжают. В 2020 г. это привело к исчезновению в старших классах Геометрии как предмета и появлению интегрированного предмета «Математика» в учебных планах по ФГОС. Явным образом это не декларировалось, а было всего лишь толкованием документов местными чиновниками от образования. И вот только сейчас Министерство просвещения РФ постепенно стало исправлять ситуацию. Промежуточные изменения (очередной приказ с изменениями и дополнениями от 12.08.2022 г. №732 и приказ об утверждении образовательной программы №1014 от 23.11.2022 г.) декларируют введение курсов вместо отдельных предметов: «Алгебра и начала

математического анализа», «Геометрия», «Вероятность и статистика», а также корректируют недельную нагрузку по математике. Реализуется мечта реформаторов – повысить значимость раздела, отделив вероятность от **основных** частей математики (согласно математической энциклопедии – это арифметика, геометрия, алгебра и анализ). Это решение ничем не обусловлено, кроме желания не мытьём, так катаньем перестроить мышление детей с детерминистического на стохастическое.

Кому-то интересны расчёты вероятности разрушения жилого дома, спроектированного безграмотным архитектором, а кому-то комфортнее проживание в доме, построенном грамотными строителями,

при этом не интересоваться нулевой, в данном случае, вероятностью разрушения. Между прочим, гораздо больше пользы с точки зрения инженерного образования принесло бы выделение в отдельный курс тригонометрии (как было многие десятилетия до 1960 г.). Но зачем всё-таки плодить сущности, вместо того, чтобы придерживаться традиции, изложенной в энциклопедии: «В известном смысле, почти всю математику можно рассматривать как развивающуюся из взаимодействия алгебры (первоначально арифметики) и геометрии, а в смысле метода — из сочетания выкладок и геометрических представлений» (Александров А.Д.). Однако, кроме этого замечания напрашивается и другое. Министерство вряд ли покусится на «идеологию» ФГОС. То, что это симулякры (подобие театральной бутафории), и об этом неоднократно писалось в журнале «Математика в школе» [1, 2], официально признать никак нельзя. Иначе 10 лет пошли прахом, и заподозрят в ретроградстве, желании вернуть всё в нормальное состояние, т.е. отменить стояние на голове и поставить всё на ноги. А ведь достаточно вернуться к стандарту 2004 г. С одной стороны, предлагаемые нововведения по содержанию и нагрузке указывают на серьёзность изменений, а, с другой стороны, следование в колее вымученных понятий вне здравого смысла делает всё несерьёзным проектом.

Старый ФГОС (2012–2022 гг.) привёл к снижению порогового значения на ЕГЭ с 6 первичных баллов до 5, а в базовом экзамене 2022 г. не нашлось даже задания по математике за старшую школу. В будущем ЕГЭ возможно это будет 3 балла в профильном экзамене, а базовый экзамен просто отменят, по причине того, что математика старшей школы в базовых классах вообще не нужна. А пока, введение нового

курса (Вероятность и статистика) не отодвинуло на задний план Геометрию, того, чем мы до сих пор отличались от Запада, обращая внимание на главы геометрии, которые мы можем потерять. Почему есть такое опасение?

Обратимся к постоянно звучащим предложениям возвращения прагматичности в школьную математику, дескать, давно пора приблизить математику к реальной жизни. Следует напомнить, что геометрия и есть самый настоящий практико-ориентированный раздел математики. В этой связи обращает на себя внимание предложение (см. эпиграф) выбросить из программы формулу объёма усечённого конуса. Так если нет объёма, то зачем другие параметры усечённого конуса и зачем вообще давать понятие этого конуса? Следуя этой логике, нужно выбросить из программы и усечённую пирамиду, как более сложную фигуру, чем конус. Действительно, это же древняя история — пирамиды Саккары, Чичен-Ица. Из учебника надо изъять все такие «вредные» параграфы. Таким образом, выпускник на выходе из школы не в состоянии будет посчитать объём градирни, ведра, каморы орудия, трубы, ракетного двигателя и т.п.

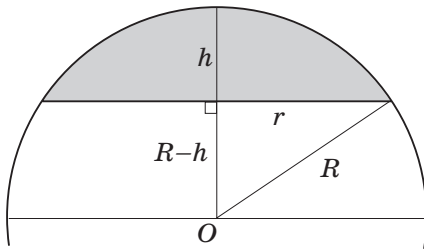
В результате, мы получим школьников, малоприспособленных к реальной научной или инженерной работе. И в перспективе ученик будет не в состоянии решить задачу выпускного экзамена в гимназии за 1891 г.: «Из параллельных сторон трапеции большая равна a , а меньшая равна b ; каждая непараллельная сторона равна c . Трапеция эта вращается около прямой, проведённой перпендикулярно к стороне a через конец последней. Вычислить полную поверхность полученного тела вращения ($a = 15$ см; $b = 9$ см; $c = 5$ см)».

А теперь приведём примеры, доказы-

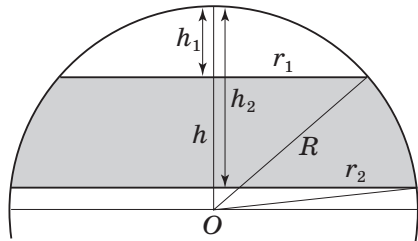
вающие, насколько красива геометрия фигур вращения.

Примем за основу готовую формулу объёма шарового сегмента из учебника геометрии (рис. 1а):

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$



а)



б)

Рис. 1

Объём шарового слоя находим как разность двух шаровых сегментов (рис. 1б):

$$\begin{aligned} V_c &= \pi h_2^2 \left(R - \frac{h_2}{3} \right) - \pi h_1^2 \left(R - \frac{h_1}{3} \right) = \\ &= \pi R (h_2^2 - h_1^2) - \frac{\pi (h_2^3 - h_1^3)}{3} = \\ &= \frac{\pi (h_2 - h_1)}{3} (3R(h_2 + h_1) - h_2^2 - h_1^2 - h_2 h_1). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$r_2^2 = R^2 - (R - h_2)^2 = 2Rh_2 - h_2^2,$$

$$r_1^2 = 2Rh_1 - h_1^2 \text{ и } h_2 - h_1 = h,$$

получаем следующее выражение для объёма:

$$V_c = \frac{\pi h}{3} \left(\frac{3}{2} r_1^2 + \frac{3}{2} r_2^2 + \frac{3}{2} h_2^2 + \frac{3}{2} h_1^2 - h_2^2 - h_1^2 - h_2 h_1 \right),$$

или

$$V_c = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Вычитая из объёма шарового слоя объём усечённого конуса, получаем объём шарового кольца (см. рис. 2) [3]:

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) - \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \\ &= \frac{\pi h}{6} ((r_1 - r_2)^2 + h^2), \end{aligned}$$

или

$$V_k = \frac{\pi h l^2}{6}, \quad (1)$$

где l – длина образующей усечённого конуса.

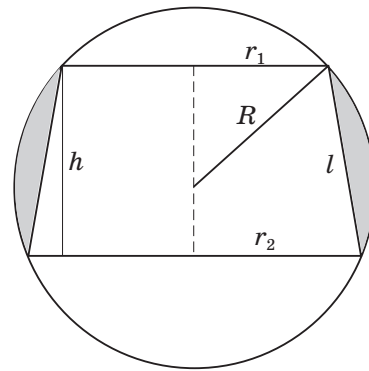


Рис. 2

Интересно, что эта формула может быть получена и иным путём. Найдём сначала объём шарового кольца простейшей формы, когда $h = l$. Обратимся к рисунку 3.

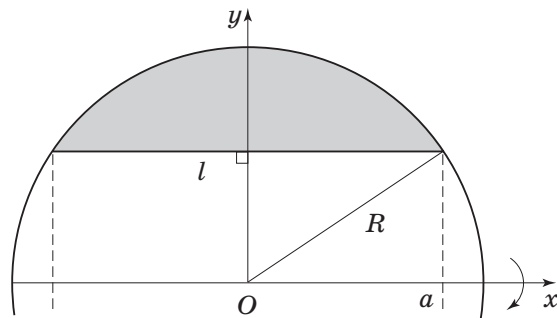


Рис. 3

На рисунке 3 вращающаяся пластина

закрашена. Объём тела вращения за вычетом цилиндра равен

$$\begin{aligned} V_0 &= 2\pi \int_0^a y^2 dx - 2\pi a(R^2 - a^2) = \\ &= 2\pi \left(\int_0^a (R^2 - x^2) dx - aR^2 + a^3 \right), \\ V_0 &= 2\pi \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{\pi l^3}{6} \end{aligned}$$

(имеем тот же результат, если принять $h = l$ в формуле (1)). А теперь обратимся к рисунку 4 и найдём объём произвольного шарового кольца.

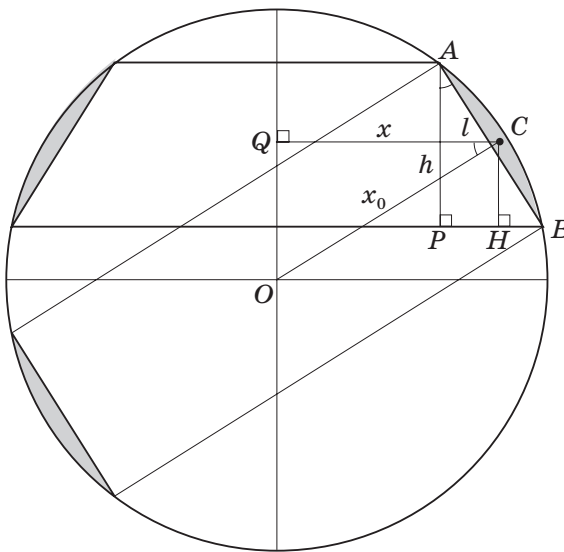


Рис. 4

При вращении кругового сегмента вокруг диаметра объём шарового кольца можно найти по формуле Паппа-Гюльдена [4]: $V = 2\pi xS$, где $QC = x$ есть расстояние от центра тяжести пластинки до оси вращения, а S – площадь пластины. Но точно так же можно получить объём ещё одного (простейшего) шарового кольца при вращении этого сегмента вокруг центра окружности: $V_0 = 2\pi x_0 S$. Учитывая подобие прямоугольных треугольников OQC и APB , получаем отношение объёмов $\frac{V}{V_0} = \frac{x}{x_0} = \frac{h}{l}$. Таким образом, получаем объём произвольного шарового кольца

$$V = V_0 \cdot \frac{h}{l} = \frac{\pi h l^2}{6}.$$

Обратите внимание, что итоговые формулы не зависят от радиуса шара. На эти красивые формулы есть и задачи. Например, задача выпускного экзамена в гимназии 1877 г.: «В шаре радиуса R просверлено вдоль его диаметра цилиндрическое отверстие радиусом вдвое меньше. Найти объём оставшейся части шара». Для решения этой задачи, вообще говоря, достаточно знать формулы объёмов шарового сегмента и цилиндра. Но, используя полученные соотношения, ответ получается быстрее.

$$\text{В этой задаче } h = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Отсюда } V = \frac{\pi h^3}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} R^3.$$

Но если до этих красивых формул нужно ещё добираться, то формула шарового сегмента необходима для решения задачи из ЕГЭ старого формата (2008–2009 гг.): «Ось прямого кругового цилиндра с радиусом 4 совпадает с диаметром шара радиуса 5. Найдите отношение объёма части цилиндра, находящегося вне шара, к объёму цилиндра». Стоит отметить, что в том старом формате ЕГЭ встречаются и задачи на усечённую пирамиду, которые благополучно потом исчезли. Решим задачу в общем виде (рис. 5).

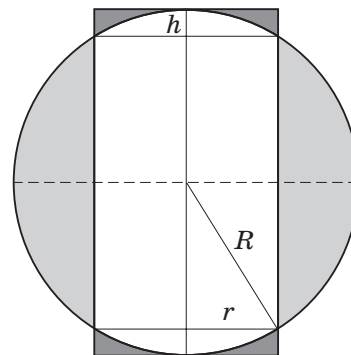


Рис. 5

В задаче сначала нужно из объёма цилиндра высотой $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ вычесть объём шарового сегмента той же высоты (тем самым мы найдём половину объёма части цилиндра, находящегося вне шара):

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi r^2 h - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \\ &= 2\pi R h^2 - \pi h^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \\ &= \pi h^2 \left(R - \frac{2}{3} h \right).\end{aligned}$$

Таким образом, ответ следует из формулы:

$$\frac{2\Delta V}{V} = \frac{2\pi h^2 \left(R - \frac{2}{3} h \right)}{2\pi R r^2} = \frac{h}{2R} \left(\frac{1 - \frac{2h}{3R}}{1 - \frac{h}{2R}} \right).$$

Для исходных данных задачи из ЕГЭ получаем $\frac{2\Delta V}{V} = \frac{11}{60}$.

У этой задачи может быть продолжение. Рассмотрим пиалу высотой h и формой в виде цилиндра с вырезанной из него частью шара (см. рис. 6).

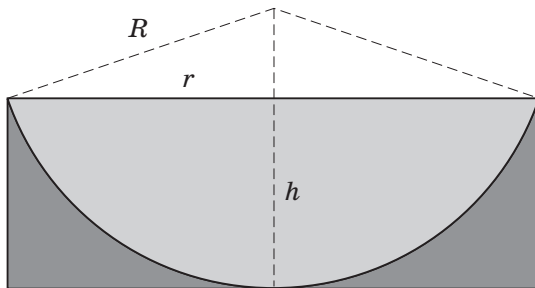


Рис. 6

Как известно из предыдущей задачи, объём материала, из которого сделана чаша, равен $\pi h^2 \left(R - \frac{2}{3} h \right)$. Если вычесть из объёма, заполненного жидкостью, объём корпуса, получим интересный результат:

$$V - V_m = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right) - \pi h^2 \left(R - \frac{2}{3} h \right) = \frac{\pi h^3}{3}.$$

И опять, результат не зависит от радиуса шара. Таким образом, объём материала чаши равен $V_m = V - \frac{\pi h^3}{3}$, где V – полный объём, занимаемый жидкостью. Пусть внутренний объём сосуда 100π см³, а высота уровня жидкости $h = 6$ см. Тогда объём материала чаши равен $100\pi - 72\pi = 28\pi$ (см³).

Рассмотрим задачу № 3618 из классического «Сборника задач по курсу математического анализа» Г.Н. Бермана «Вычислить тройным интегрированием объём тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ и конусом $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (имеется в виду часть шара, лежащая внутри конуса)». Для учеников школы эта задача может быть предложена в такой формулировке, уже без тройного интегрирования: «Определить объём мороженого в рожке, если $r_1 = \frac{3}{5}R$, $r_2 = R$ (рис. 7)».

Для решения нужно уже из объёма шара вычесть объём кольца.

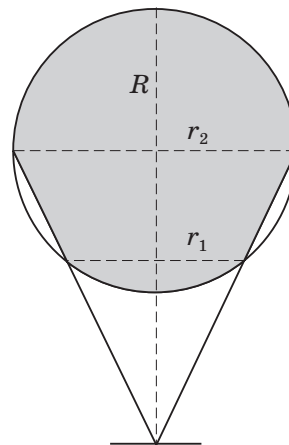


Рис. 7

Находим высоту шарового слоя между сечениями шара

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{3}{5}R\right)^2} = \frac{4}{5}R$$

и квадрат образующей кольца

$$l^2 = \left(\frac{2}{5}R\right)^2 + \left(\frac{4}{5}R\right)^2 = \frac{20}{25}R^2 = \frac{4}{5}R^2.$$

В результате, объём кольца равен

$$V_k = \frac{\pi h l^2}{6} = \frac{8}{75}\pi R^3,$$

а объём мороженого

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{75}\pi R^3 = \frac{92}{75}\pi R^3.$$

В учебниках этих красивых задач и формул нет. Жаль. Только может быть под угрозой и то, что там осталось.

Список источников

1. Саввина О.А. Признаки кризиса отечественной методики преподавания математики // Математика в школе. — 2017. — № 2. — С. 3–8.
2. Шевкин А.В. ФГОС 4.0. Если это не вредительство, то что такое вредительство? // Математика в школе. — 2021. — № 7. — С. 3–11.
3. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия. Преобразования пространства. — М.: МИЦМО, 2006. — 256 с.
4. Малышев И.Г. Теоремы Паппа-Гюльдена // Математика в школе. — 2015. — № 4. — С. 48–54.

Статья поступила в редакцию

27.04.2022.

Принята к публикации

15.06.2023.

К СВЕДЕНИЮ

Как минимум 2 предмета сдали хуже, чем год назад

В Министерстве просвещения раскрыли первые предварительные итоги ЕГЭ 2023 года. Выпускник-рекордсмен в этом году пока один: среди всех сдавших нашёлся единственный абитуриент, который набрал 300 баллов.

266 выпускников получили по 200 баллов на единых государственных, 6087 — по 100 баллов.

Также стали известны предварительные средние баллы ЕГЭ-2023:

русский язык — 68,43,
 профильная математика — 55,62,
 базовая математика — 4,07 (по пятибалльной шкале),
 литература — 63,97,
 химия — 56,23,
 география — 54,6,
 физика — 54,85,
 история — 56,37.

По сравнению с ЕГЭ 2022 года, по всем предметам, кроме профильной математики и истории, баллы выпускников выросли.

Математику профильного уровня абитуриенты на этот раз сдали хуже: 55,62 против 56,9 баллов в 2022 году.

Также снизился средний балл выпускников по истории: 56,37 против 58 баллов в 2022 году.

По материалам www.kommersant.ru

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

THE MUNICIPAL STAGE OF THE XLIX ALL-RUSSIAN OLYMPIAD ON MATHEMATICS FOR SCHOOL STUDENTS IN MOSCOW REGION

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_9

Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский,
Московский физико-технический институт (на-
циональный исследовательский университет),
nazar_ag@mail.ru

N.Kh. Agakhanov, O.K. Podlipskii,
(Moscow Institute of Physics and Technology),
nazar_ag@mail.ru

Аннотация: в статье приводятся задания (с ре-
шениями) муниципального этапа Всероссийской
олимпиады школьников по математике 2022/2023
учебного года в Московской области

Abstract: problems with solutions of the munici-
pal stage of the All-Russian Olympiad on mathe-
matics for school students of 2022/2023 academic
year in Moscow region are provided

Ключевые слова: Всероссийская олимпиада
школьников по математике, муниципальный
этап, олимпиадная задача

Keywords: All-Russian Olympiad on mathematics
for school students, municipal stage, olympiad
problem

© Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский 2023

Авторы статьи, являясь на протяжении ряда лет составителями муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в Московской области (задания прошлых лет можно найти в книге [1]), составляют задания олимпиады из новых задач.

Авторы задач и составители при-
ведённой олимпиады Н.Х. Агаханов и
О.К. Подлипский. Задачи 7.1, 7.2 и 8.1
предложены А.В. Резниковым, задача
8.2 – О.И. Южаковым, задача 9.4 – А.Д. Те-
рёшиным, 11.2 – И.А. Кухарчуком.

Условия задач 6 класс

6.1. Про натуральное число, написан-
ное на доске, Петя сказал, что оно боль-
ше 10, Коля сказал, что оно не меньше

11, Вася сказал, что оно больше 12, Дима
сказал, что оно меньше 12, а Олег сказал,
что оно не больше 12. Какое наибольшее
число высказываний могли оказаться
правильными?

6.2. У Пети есть семь карточек с цифра-
ми 2, 3, 4, 5, 7, 8, 0. Он хочет, используя
все карточки, составить наибольшее на-
туральное число, кратное 25. Какое число
должно у него получиться?

6.3. Можно ли разрезать клетчатый
квадрат 25×25 на клетчатые прямоуголь-
ники такие, что у каждого из них длина
и ширина отличаются на 1?

6.4. Четыре пирата разделили добы-
чу в 100 монет. Известно, что среди них
ровно два лжеца (которые всегда лгут) и
ровно два рыцаря (которые всегда говорят
правду).

Они сказали следующее.

Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 20 монет».

Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».

Четвёртый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».

Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

6.5. По кругу выписано 100 чисел. Известно, что среди любых трёх подряд идущих есть положительное число. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?

7 класс

7.1. Десять экскурсоводов водили по залам Эрмитажа десять экскурсионных групп. Составы групп были не обязательно равными, но в среднем в каждой группе было 9 человек. Когда одна из групп закончила экскурсию, среднее количество экскурсантов в группе уменьшилось до 8 человек. Сколько человек было в завершившей экскурсию группе?

7.2. В школьном спортзале один стол для армрестлинга. Учитель физкультуры организовал школьный турнир. Он вызывает на схватку любых двух участников турнира, ещё не встречавшихся друг с другом. Ничьих не бывает. Если участник схватки терпит второе поражение, то он выбывает из турнира. После того, как было проведено 29 схваток, из турнира выбыли все участники, кроме двух. Сколько школьников участвовало в турнире?

7.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоуголь-

ники такие, что у каждого из них длина и ширина отличаются на 3?

7.4. Четыре пирата разделили добычу в 100 монет. Известно, что среди них ровно два лжеца (которые всегда лгут) и ровно два рыцаря (которые всегда говорят правду).

Они сказали следующее.

Первый пират: «Мы разделили монеты поровну».

Второй пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось хотя бы 15 монет».

Третий пират: «У каждого количество монет делится на 5».

Четвёртый пират: «У всех разное количество монет, но каждому досталось не более 35 монет».

Какое максимальное количество монет могло достаться одному пирату?

7.5. По кругу выписаны 100 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 100 выписанных чисел?

8 класс

8.1. Учащиеся школы отправились на экскурсию на шести автобусах. В автобусах было не обязательно равное количество школьников, но в среднем в каждом автобусе было 28 школьников. Когда первый автобус доехал до пункта назначения, в автобусах, продолжавших движение, среднее количество школьников стало равным 26. Сколько школьников ехало в первом автобусе?

8.2. В рабочие дни (с понедельника по пятницу) Петя пять раз занимался в тренажёрном зале. Известно, что суммарно он провел в зале 135 минут, при этом время, проведённое в зале в любые два

разных дня, отличалось, по крайней мере, на 7 минут. Какую наибольшую продолжительность могло составлять самое короткое занятие?

8.3. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 25×25 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18?

8.4. Дан треугольник ABC . Вне треугольника ABC выбраны точки D, E, F так, что $AD = DB, BE = EC, CF = FA$. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы углов ADB, BEC и CFA , пересекаются в одной точке.

8.5. По кругу выписано 101 число. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее количество положительных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

9 класс

9.1. В посёлке проживают семь человек. Некоторые из них лжецы (всегда лгут), а остальные – рыцари (всегда говорят правду). Каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 42 полученных ответов 24 были «Он – лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может проживать в посёлке?

9.2. Можно ли разрезать клетчатый квадрат 35×35 на клетчатые прямоугольники такие, что периметр каждого из них равен 18, 22 или 26?

9.3. Положительное число a – коэффициент при x^2 квадратного трёхчлена $f(x)$, не имеющего корней. Докажите, что при любом x выполняется неравенство $f(x) + f(x - 1) - f(x + 1) > -4a$.

9.4. Четырёхугольник $ABCD$ ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . Известно, что $AD = CD$. Докажите, что биссектриса угла ADB отсекает от угла BAC равнобедренный треугольник.

9.5. По кругу выписаны 300 целых ненулевых чисел таких, что каждое число больше произведения трёх следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди этих 300 выписанных чисел?

10 класс

10.1. Учитель математики договорился с пришедшими на факультатив одиннадцатую школьниками, что он выйдет из кабинета, а школьники договорятся между собой, кто из них будет лжецом (всегда лгать), а кто – рыцарем (всегда говорить правду). Когда учитель вернулся в класс, он попросил школьников, чтобы каждый из них сказал про каждого из остальных кто он: рыцарь или лжец. Из 110 ответов 56 были «Он – лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди школьников?

10.2. Можно ли разрезать куб $20 \times 20 \times 20$ на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными натуральными числами?

10.3. Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите, что если в треугольнике угол, лежащий против стороны b , больше 60° , то уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$ имеет два различных корня.

10.4. На окружности с центром O и диаметрами AB и CD выбраны точки E и F так, что OD – биссектриса угла EOB и $AE = CF$ (точки E и F – по разные стороны от CD). Докажите, что хорда EF отсекает от угла EDC равнобедренный треугольник.

10.5. По кругу выписано 103 числа. Известно, что среди любых пяти подряд идущих чисел найдутся хотя бы два положительных числа. Какое наименьшее

количество положительных чисел может быть среди этих 103 выписанных чисел?

11 класс

11.1. Можно ли разрезать куб $40 \times 40 \times 40$ на прямоугольные параллелепипеды такие, что у каждого из них длина, ширина и высота в некотором порядке являются последовательными нечётными числами?

11.2. Известно, что

$$\frac{1}{\cos(2022x)} + \operatorname{tg}(2022x) = \frac{1}{2022}.$$

Найдите $\frac{1}{\cos(2022x)} - \operatorname{tg}(2022x)$.

11.3. Рассматривается квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также корни трёхчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных четырёх чисел?

11.4. По кругу выписано 101 целое ненулевое число так, что каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 101 выписанного числа?

11.5. Боковые грани пятиугольной пирамиды $SABCDE$ – остроугольные треугольники. Назовём боковое ребро пирамиды *хорошим*, если оно равно высоте противоположной боковой грани, проведённой из вершины пирамиды (например, ребро SA – хорошее, если оно равно высоте треугольника SCD , проведённой из вершины S). Какое наибольшее количество хороших рёбер может иметь пирамида?

Решения задач

6.1. Ответ: 4.

Все пять высказываний не могли оказаться верными, так как высказывания Васи и Димы противоречат друг другу. Четыре высказывания могли оказаться верными, если на доске записано число 11.

6.2. Ответ: 8743250.

Так как число делится на 25, то оно должно заканчиваться на 25, 50 или 75. В любом случае среди последних двух цифр будет цифра 5. Число тем больше, чем бо́льшая цифра стоит в более левом разряде. Поэтому нужно, чтобы вместе с цифрой 5 осталась самая маленькая возможная цифра. А это цифра 0. Из оставшихся карточек составляется начало числа. Слева направо ставятся карточки в порядке убывания. В итоге получаем ответ: 8743250.

6.3. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 1, то одна из этих величин – чётное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечётному. Противоречие.

6.4. Ответ: 35 монет.

Заметим, что первый и четвёртый пираты не могли одновременно сказать правду. Также не могли одновременно сказать правду второй и третий пираты. Действительно, если они оба сказали правду, то у каждого количество монет делится на 5, при этом у всех разное количество, не меньше 20. Тогда у них вместе не меньше $20 + 25 + 30 + 35 = 110$ монет, чего быть не может. Поэтому среди первого и четвёртого пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец (и среди второго и тре-

твого пиратов ровно один рыцарь и ровно один лжец).

Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). И в этом случае максимальное количество равно 25.

Если же четвёртый пират рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. Покажем, что в этом случае одному из пиратов могло достаться ровно 35 монет (и тогда ответ в задаче будет 35). Такая ситуация также возможна, если, например, пиратам досталось 35, 30, 20 и 15 монет (второй пират солгал, а третий сказал правду).

Замечание. Есть и другие способы распределить монеты так, чтобы одному из пиратов досталось 35 монет. Например, пиратам досталось 35, 24, 21 и 20 монет (третий пират солгал, а второй сказал правду).

6.5. Ответ: 34.

Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 99 разобьём на 33 подряд идущих тройки. В каждой такой тройке будет не менее одного положительного числа. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1 + 33 = 34$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 4, 7, ..., 100.

7 класс

7.1. Ответ: 18.

Суммарное количество экскурсантов изначально было равно $9 \cdot 10 = 90$. После того, как одна из групп закончила экскурсию, осталось $8 \cdot 9 = 72$ экскурсанта. Значит, в завершившей экскурсию группе было $90 - 72 = 18$ экскурсантов.

7.2. Ответ: 16.

Каждый участник выбывает, потерпев

ровно два поражения. В ситуации, когда остались двое «финалистов», общее количество поражений равно 29. Если из турнира выбыло n человек, то суммарно они потерпели $2n$ поражений, а на счету «финалистов» могло быть 0 ($0 + 0$), 1 ($0 + 1$) или 2 ($1 + 1$) поражения. Учитывая, что $2n$ и $2n + 2$ – чётные числа, приходим к уравнению $2n + 1 = 29$, откуда $n = 14$, а общее количество участников равно 16.

7.3. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина и ширина прямоугольника отличаются на 3, то одна из этих величин – чётное число. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечётному. Противоречие.

7.4. Ответ: 40 монет.

Заметим, что первый и четвёртый пираты не могли одновременно сказать правду.

Если первый пират – рыцарь, то всем досталось по 25 монет (такая ситуация возможна). В этом случае максимальное количество равно 25.

Если же четвёртый пират рыцарь, то каждому досталось не больше 35 монет. И в этом случае максимальное количество монет не больше 35.

Если же оба первый и четвёртый пираты лжецы, то второй и третий пираты сказали правду. Тогда любым трём пиратам досталось не менее $15 + 20 + 25 = 60$ монет, а значит, четвёртому не более 40. Такая ситуация возможна, если пиратам досталось 15, 20, 25 и 40 монет. В этом случае максимальное количество равно 40 (и тогда ответ в задаче будет 40).

7.5. Ответ: 50.

Заметим, что два подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих двух натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причём, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнётся», мы придём к противоречию.

Значит, в любой паре соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 100 чисел на 50 пар, мы получим, что записано не меньше 50 отрицательных чисел, а значит, положительных чисел будет не больше 50. Если же мы будем чередовать положительное число 2 и отрицательное число -2 , мы получим пример расположения 50 положительных и 50 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

8 класс**8.1. Ответ: 38.**

Суммарное количество школьников изначально было равно $28 \cdot 6 = 168$. После того, как первый автобус закончил поездку, осталось $26 \cdot 5 = 130$ школьников. Значит, в первом автобусе было $168 - 130 = 38$ школьников.

8.2. Ответ: 13 минут.

Обозначим минимальное время тренировки за x минут, тогда вторая (по продолжительности) – не меньше, чем $x + 7$, третья – не меньше, чем $x + 14$, четвёртая – не меньше, чем $x + 21$, пятая – не меньше, чем $x + 28$. Тогда суммарно тренировки делятся не менее чем $5x + 70$ минут.

Решая неравенство $135 \geq 5x + 70$, полу-

чаем $x \leq 13$. Подходит продолжительность тренировок в 13, 20, 27, 34 и 41 минуту.

8.3. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметр прямоугольника равен 18, то сумма длины и ширины прямоугольника равна 9. Это означает, что одна из этих величин – чётное число, а другая – нечётное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Значит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 25, то есть числу нечётному. Противоречие.

8.4. Первое решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса DM угла ADB является одновременно медианой и высотой этого треугольника. Также и биссектриса EN угла BEC является медианой и высотой треугольника BEC . Рассмотрим точку O пересечения прямых, содержащих биссектрисы углов ADB и BEC . В треугольнике AOB отрезок OM является одновременно медианой и высотой. Поэтому $AO = OB$. А из того, что точка O лежит на прямой EN , следует, что $OB = OC$. Мы получили равенство $OC = AO$, то есть равенство треугольников CFO и AFO по третьему признаку, из которого следует, что точка O лежит также и на биссектрисе угла CFA . Утверждение доказано.

Второе решение. Из условия следует, что треугольник ADB – равнобедренный, поэтому биссектриса угла ADB является одновременно его медианой и высотой. Тогда прямая, содержащая эту биссектрису, является серединным перпендикуляром к отрезку AB . Аналогично, две другие прямые из условия задачи являются серединными перпендикулярами: одна к стороне BC , другая – к стороне CA

треугольника ABC . А серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника ABC .

8.5. Ответ: 41.

Рассмотрим любые 5 подряд идущих чисел. Среди них есть положительное. Зафиксируем его, а остальные 100 разобьём на 20 подряд идущих пятёрок. В каждой такой пятёрке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $1 + 2 \cdot 20 = 41$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 3, 6, 8, 11, ..., 98, 101.

9 класс

9.1. Ответ: 3.

Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре рыцарь-лжец фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 24 раза, пар рыцарь-лжец всего 12, откуда (учитывая, что количество людей в посёлке равно 7) находим, что рыцарей 3, а лжецов 4, или наоборот.

Замечание. Условие, что в посёлке живут 7 человек, вообще говоря, является избыточным, поскольку немедленно следует из того факта, что в результате опроса было получено 42 ответа ($42 = 7 \times 6$).

9.2. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как периметры прямоугольников равны 18, 22 или 26, то сумма длины и ширины равна 9, 11 или 13. Это означает, что одна из этих величин – чётное число, а другая – нечётное. Поэтому площадь каждого прямоугольника разрезания будет чётным числом. Зна-

чит, и сумма площадей прямоугольников разрезания также будет чётным числом. Но эта сумма должна равняться площади квадрата со стороной 35, то есть числу нечётному. Противоречие.

9.3. Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда приведённое в задаче выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c + a(x-1)^2 + b(x-1) + \\ & + c - a(x+1)^2 - b(x+1) - c = \\ & = ax^2 - 4ax + bx - 2b + c. \end{aligned}$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & a(x-2)^2 + b(x-2) + c - 4a = \\ & = f(x-2) - 4a > -4a, \end{aligned}$$

так как из условия задачи следует, что $f(x) > 0$ при любом x .

Замечание. Можно показать, что дискриминант трёхчлена $f(x) + f(x-1) - f(x+1) + 4a$ равен дискриминанту трёхчлена $f(x)$.

9.4. Пусть биссектриса угла ADB пересекает хорды AC и AB соответственно в точках M и N и пересекает Ω в точке P . Для доказательства утверждения задачи покажем равенство углов AMN и ANM . Из равенства вписанных углов ADP и BDP (DP – биссектриса угла ADB) следует равенство дуг AP и BP . Также равны дуги AD и CD , стягиваемые равными хордами AD и CD . По свойству угла между пересекающимися хордами, угол AMN является полусуммой градусных мер дуг AP и CD , а угол ANM является полусуммой градусных мер дуг BP и AD . Следовательно, углы AMN и ANM равны.

9.5. Ответ: 200.

Заметим, что три подряд идущих числа не могут быть положительными (то есть натуральными). Предположим противное. Тогда их произведение положительно, и перед ними (против часовой стрелки) также стоит натуральное число. Так как оно больше произведения этих трёх

натуральных чисел, то оно больше каждого из них. Продолжая рассуждения, мы получим, что все числа будут натуральными, причём, если идти против часовой стрелки, числа будут возрастать. Но когда «круг замкнётся», мы придём к противоречию.

Следовательно, в любой тройке соседних чисел есть хотя бы одно отрицательное. Разбив наши 300 чисел на 100 троек, мы получим, что записано не меньше 100 отрицательных чисел, а значит, положительных чисел не больше 200. Если же мы будем чередовать два положительных числа 2 и одно отрицательное число -2 , мы получим пример расположения 200 положительных и 100 отрицательных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

10 класс

10.1. Ответ: 7.

Фразу «Он – рыцарь» скажут рыцарь про рыцаря и лжец про лжеца, а фразу «Он – лжец» скажут рыцарь про лжеца и лжец про рыцаря. Следовательно, в каждой паре «рыцарь-лжец» фраза «Он – лжец» прозвучит дважды. Поскольку всего эта фраза прозвучала 56 раз, пар рыцарь-лжец всего 28, откуда (учитывая, что количество школьников равно 11) находим, что рыцарей 7, а лжецов 4, или наоборот.

Замечание. Условие, что факультатив посещают 11 человек, вообще говоря, избыточно, поскольку является следствием того, что в результате опроса было получено 110 ответов ($110 = 11 \times 10$).

10.2. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными натуральными числами, то одна из этих величин – число, делящееся на 3. Поэтому объём каждого

параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объёмов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объёму куба с ребром 20, то есть числу, не делящемуся на 3. Противоречие.

10.3. Запишем теорему косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$. Из условия следует, что $\cos \beta < 0,5$, значит, $b^2 > a^2 + c^2 - ac$. Оценим четверть дискриминанта данного в условии трёхчлена: $D/4 = b^2 - ac > a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 \geq 0$, то есть $D > 0$. Утверждение доказано.

10.4. Пусть хорда EF пересекает радиус OD в точке K . Докажем равенство углов EDK и EKD . По свойству вписанных углов $\angle EDK = \angle EDC$ измеряется половиной градусной меры дуги EAC , то есть полусуммой градусных мер дуг EA и AC . Угол EKD является полусуммой градусных мер дуг ED и FC . Вторая дуга равна дуге EA , так как равны стягивающие их хорды AE и CF . Теперь утверждение задачи следует из того, что дуги AC и DB равны, так как на них опираются равные центральные углы AOC и DOB , и дуги ED и DB равны, поскольку радиус OD является биссектрисой угла EOB .

10.5. Ответ: 42.

Покажем, что найдутся 3 подряд идущих числа, среди которых есть по крайней мере 2 положительных. Это можно сделать, например, так. Рассмотрим 15 подряд идущих чисел. Они разбиваются на 3 пятёрки подряд идущих чисел, значит, среди них есть по крайней мере 6 положительных. Но эти 15 чисел можно разбить на 5 троек подряд идущих чисел. Значит, по принципу Дирихле, в какой-то тройке есть хотя бы 2 положительных числа.

Зафиксируем эти 3 подряд идущих числа. Среди них есть хотя бы 2 положи-

тельных. Остальные 100 разобьём на 20 подряд идущих пятёрок. В каждой такой пятёрке будет не менее двух положительных чисел. Таким образом, общее количество положительных чисел не менее $2 + 2 \cdot 20 = 42$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Положительными можно взять числа с номерами 1, 2, 6, 7, ..., 96, 97, 101, 102.

Замечание. То, что найдутся три подряд идущих числа, среди которых есть по крайней мере два положительных, можно доказать по-другому. Например, можно рассмотреть какое-то положительное число. Тогда либо среди двух чисел справа от него, либо среди двух чисел слева от него есть хотя бы одно положительное, иначе мы нашли пять чисел, среди которых только одно положительное.

11 класс

11.1. Ответ: нельзя.

Предположим, что такое разрезание возможно. Так как длина, ширина и высота параллелепипеда являются тремя последовательными нечётными числами, то это означает, что одна из этих величин — число, делящееся на 3. Поэтому объём каждого параллелепипеда разрезания будет делиться на 3. Значит, и сумма объёмов параллелепипедов разрезания также будет делиться на 3. Но эта сумма должна равняться объёму куба с ребром 40, то есть числу, не делящемуся на 3. Противоречие.

11.2. Ответ: 2022.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \\ & = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Поэтому искомое выражение равно 2022.

11.3. Ответ: 5.

Пусть у трёхчлена $P(x)$ корни $x_1, x_2 > 0$. Тогда у трёхчлена $Q(x)$ корнями будут числа $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

Сумма чисел, выписанных на доску, есть $S = x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Для положительного k верно неравенство $k + \frac{1}{k} \geq 2$,

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $k = 1$. Поэтому $S \geq 4$. Но $S = 4$, только если $x_1 = x_2 = 1$, а по условию x_1, x_2 различные. Поэтому $S > 4$. Значит, наименьшее возможное целое значение S равно 5. Такая ситуация возможна. Пусть $x_1 = 1$, а x_2 — такое число, что $x_2 + \frac{1}{x_2} = 3$. Тогда трёхчлен с корнями x_1, x_2 — искомый.

11.4. Ответ: 67.

Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Все они не могут быть отрицательными. Следовательно, среди них есть положительное. Зафиксируем его и его соседа (это число может быть отрицательным), а остальные 99 разобьём на 33 тройки подряд идущих чисел. В каждой такой тройке будет не более двух отрицательных чисел. Таким образом, общее количество отрицательных чисел не более $1 + 2 \cdot 33 = 67$. Такая ситуация возможна. Занумеруем числа по кругу. Пусть положительными будут числа с номерами 1, 4, 7, 10, ..., 100, а остальные — отрицательными. Несложно проверить, что если все положительные числа равны 5, а отрицательные равны -2 , то каждое число больше произведения двух следующих за ним по часовой стрелке чисел.

11.5. Ответ: 2.

Покажем, что два боковых ребра, не являющихся соседними рёбрами пирамиды, не могут быть одновременно хорошими. Пусть это не так, и, например, рё-

бра SA и SC являются хорошими, то есть $SA = SP$ – высоте грани SCD , и $SC = SQ$ – высоте грани SAE . Но, по свойству высоты остроугольного треугольника, $SP < SC$, и $SQ < SA$. Тогда $SA = SP < SC = SQ < SA$ – противоречие.

Теперь заметим, что среди трёх боковых рёбер пятиугольной пирамиды всегда найдутся два несоседних ребра. Значит, пирамида может иметь не более двух хороших рёбер.

Покажем, что существует пятиугольная пирамида с двумя хорошими боковыми рёбрами.

Рассмотрим квадрат $AMNE$ с центром O . Пусть в плоскости AMN прямая, проходящая через вершину M перпендикулярно EM , и прямая, проходящая через вершину N перпендикулярно AN , пересекаются в точке C . Точки B и D выберем так, что точки M и N – соответственно, середины отрезков BC и DC . Выберем произвольно точку S на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через точку O . Тогда, в силу теоремы о трёх перпендикулярах, SM и SN – высоты треугольников SBC и

SDC . И, как следует из равнобедренности треугольников ESM и ASN , рёбра SE и SA – хорошие.

Список источников

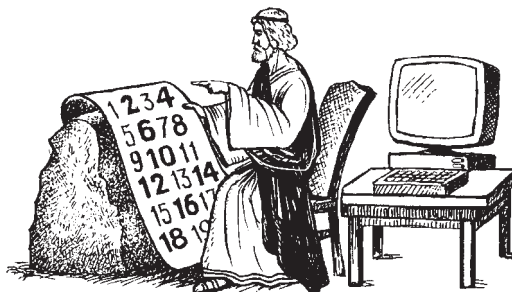
1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Задачи по геометрии на муниципальном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике // Математика в школе. – 2010. – № 3. – С. 68–74.
3. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Идея чётности в задачах муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике // Математика в школе. – 2010. – № 7. – С. 55–63.
4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Квадратичная функция в задачах муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике // Математика в школе. – 2010. – № 9. – С. 60–66.

Статья поступила в редакцию

26.11.2022.

Принята к публикации

25.02.2023.



КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА КОНСТРУКТИВНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

COMPUTER SUPPORT FOR THE CONSTRUCTIVE ACTIVITY OF PUPILS IN SOLVING STEREOMETRIC PROBLEMS OF AN INCREASED LEVEL OF COMPLEXITY

Научная статья 5.8.7

Scientific article 5.8.7

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_19

М.В. Шабанова, д.п.н., профессор, ФГАОУ ВПО «САФУ им. М.В. Ломоносова», Архангельск, shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru;

С.Н. Котова, ст. преподаватель, ФГАОУ ВПО «САФУ им. М.В. Ломоносова», Архангельск, kotovasn22@bk.ru

А.Е. Томилова, к.п.н., доцент, ФГАОУ ВПО «САФУ им. М.В. Ломоносова», Архангельск, a.tomilova@narfu.ru;

Л.Н. Удовенко, к.п.н., доцент, ФГБОУ ВО «МПГУ»; ОЧУ ВО «ПСТГУ», Москва, ln.udovenko@mpgu.su

M.V. Shabanova, ShiD (Pedagogy) Professor, FSAOU VPO «SAFU named after M.V. Lomonosov», Arkhangelsk, shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru;

S.N. Kotova, senior lecturer, FSAOU VPO «SAFU named after M.V. Lomonosov», Arkhangelsk, kotovasn22@bk.ru

A.E. Tomilova, PhD (Pedagogy), Associate Professor, FSAOU VPO «SAFU named after M.V. Lomonosov», Arkhangelsk, a.tomilova@narfu.ru;

L.N. Udovenko, PhD (Pedagogy), Associate Professor, FGBOU VO «MPSU»; OCH VO «PSTSU», Moscow, ln.udovenko@mpgu.su

Аннотация: в статье представлены методические возможности динамического моделирования в GeoGebra для организации и поддержания конструктивной деятельности учащихся при решении стереометрических задач. На примере одной задачи повышенного уровня сложности в формате задачи № 13 профильного ЕГЭ по математике показано, как с помощью GeoGebra можно снимать трудности, связанные с построением и использованием учащимися проекционных изображений в ходе решения стереометрических задач

Abstract: the article presents the methodical possibilities of dynamic modeling in GeoGebra for the organization and maintenance of constructive activity of students in solving stereometric problems. Using the example of one problem of an increased level of complexity in the format of task No. 13 of the profile Unified State Exam in mathematics, it is shown how by means of GeoGebra it is possible to remove difficulties associated with the construction and use of projection images by students in the course of solving stereometric problems

Ключевые слова: GeoGebra, моделирование в GeoGebra, конструктивные инструменты GeoGebra, профильный ЕГЭ по математике, стереометрическая задача, динамическая модель, проекционный чертёж

Keywords: GeoGebra, modeling in GeoGebra, GeoGebra constructive tools, profile unified state exam in mathematics, stereometric problem, dynamic model, projection drawing

© М.В. Шабанова, С.Н. Котова, А.Е. Томилова, Л.Н. Удовенко 2023

Стереометрические задачи повышенного уровня сложности предлагаются к решению выпускникам средней общеобразовательной школы, выбравшим для прохождения государственной итоговой аттестации ЕГЭ по математике профильного уровня, а значит, наиболее подготовленным и планирующим продолжение математического образования в вузе. Однако даже эти выпускники не справляются с решением стереометрических задач, о чём свидетельствует традиционно низкий процент их выполнения на экзамене. По данным Федерального института педагогических измерений он оказался самым низким в 2022 г. и составил всего 2,5% [1, с. 33]. Разработчики экзамена считают, что неиспользованным ресурсом повышения уровня геометрической подготовки учащихся является повышение их навыков конструктивной деятельности при решении стереометрических задач: «отработка стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, правильной пирамиды по-прежнему остаётся неиспользованным ресурсом повышения уровня математической подготовки выпускников» [1, с. 22].

О компьютерной поддержке деятельности этого вида при решении стереометрических задач и пойдёт речь в данной статье. Говоря об использовании компьютера, мы будем иметь в виду свободно распространяемое и быстро развивающееся программное обеспечение GeoGebra [6]. Это среда с удобным интерфейсом и набором конструктивных инструментов, поддерживающая построение моделей пространственных фигур. Она также допускает исследование построенных моделей за счёт варьирования ракурса изображения, изменения его параметров, выделения значимой части фигуры, построения выносных планиметрических моделей, ото-

бражения текущих значений величин.

Покажем целесообразность и методические возможности использования GeoGebra для снижения трудностей, которые испытывают учащиеся при работе с проекционным чертежом в ходе решения стереометрической задачи.

Задача. Дана шестиугольная призма, основаниями которой являются правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Через точки B , D и F_1 проведена плоскость α .

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является многоугольник, имеющий хотя бы пару равных сторон.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит объём данной призмы.

Как показывает опыт, при анализе и поиске решения стереометрической задачи перед учащимися возникает ряд характерных трудностей, которые опишем ниже.

Первая трудность – построение правильного наглядного изображения пространственной фигуры, заданной условием задачи.

Преодолению этой трудности поможет постановка перед учащимися вспомогательной задачи: создать в GeoGebra динамическую модель пространственной фигуры, описанной условием задачи.

Получить правильное изображение нижнего основания призмы, а также увидеть свойства правильного шестиугольника, сохраняемые и искажаемые проекционным изображением, выбрать удобный ракурс его изображения на листе бумаги позволяет совмещение 2D и 3D полотен GeoGebra (рис. 1).

Для самостоятельного построения такого изображения учащимся потребуются три конструктивных инструмента GeoGebra: ползунок (параметр), отрезок

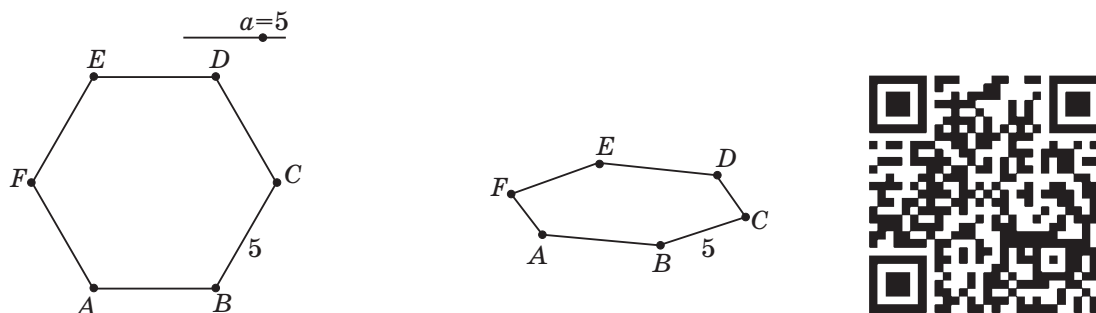


Рис. 1. Изображения одного и того же правильного шестиугольника с длиной стороны, заданной параметром, на двух полотнах GeoGebra и QR-код для выбора ракурса проекционного изображения

заданной длины и правильный многоугольник. Построение проводится на полотне 2D, а его результаты автоматически отображаются на полотне 3D. Для выбора ракурса проекционного изображения потребуются инструменты «Перемещать» или «Вращать чертёж», которые позволяют менять положение плоскости xOy . Приведённый на рисунке 1 QR-код можно использовать для перехода на страницу, чтобы поэкспериментировать с выбором ракурса изображения.

Стоит обратить внимание на то, что проекционное изображение правильной шестиугольной призмы чаще всего для школьников не представляет трудностей, и в нашем случае полезно об этом вспомнить и попытаться выполнить проекционное изображение правильной шестиугольной призмы в тетради.

В условии задачи не сказано, что заданная призма является прямой. Для того, чтобы случайно не воспользоваться особенностями прямой призмы в ходе решения задачи, учащимся рекомендуют изображать её на листе бумаге как наклонную. Моделирование в GeoGebra позволяет задать произвольный угол наклона бокового ребра к плоскости нижнего основания.

Алгоритм построения призмы следую-

щий: 1) инструментом «Перпендикулярная прямая» проводим прямую, перпендикулярную плоскости xOy и проходящую через одну из вершин шестиугольника $ABCDEF$, лежащего в основании (на рисунке 2 прямая проведена через точку A); 2) инструментом «Точка на объекте» фиксируем произвольную точку на построенной прямой (на рис. 2 это точка H); 3) инструментом «Параллельная плоскость» строим плоскость, проходящую через эту точку параллельно xOy ; 4) инструментом «Точка на объекте» фиксируем произвольную точку на построенной плоскости (на рисунке 2 это точка A_1 , варьирование её позиции позволяет изменять угол наклона бокового ребра AA_1 к плоскости основания призмы; 5) инструментом «Призма» завершаем построение, указав им на нижнее основание и точку A_1 .

Результат построения представлен на рисунке 2. На динамической модели, перемещая точку H , можно менять высоту призмы, а перемещая точку A_1 , – угол наклона её бокового ребра.

Вторая трудность – решение «задачи на построение» на проекционном чертеже.

В нашем случае это задача на построение сечения. Обучению решению задач на

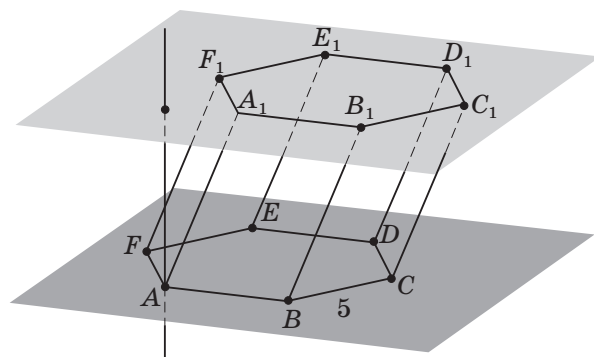


Рис. 2. Изображение динамической модели призмы, в основании которой лежит правильный шестиугольник, и QR-код для перехода к самой модели. Модель допускает варьирование позиций свободных точек H и A_1

построение сечений посвящены отдельные темы школьных учебников [2] и учебные пособия [3, 4, 5]. Трудности, которые испытывают учащиеся при овладении способами решения этих задач, делятся на два типа: 1) учащиеся сразу «видят» результат решения задачи и правильно изображают сечение, но не могут описать последовательность конструктивных действий, которая приводит к его построению; 2) учащиеся «не видят» результат даже после выполнения всех построений, поэтому могут принять за сечение любую построенную фигуру, которая выйдет на проекционном чертеже как многоугольник.

Для ликвидации затруднений обоих типов желательно запретить учащимся использовать те конструктивные инструменты GeoGebra, которые позволяют получить сечение указанием опорных объектов (это инструменты вкладки «Плоскость» и «Кривая пересечения»). Программа позволяет убрать их с панели инструментов.

Построение сечений в GeoGebra имеет чёткую структуру действий. В нашем случае алгоритм построения сечения плоскостью шестиугольной призмы, заданной в условии задачи, без использования вышеуказанных инструментов будет следующим:

1. Построить прямую BD инструментом «Прямая». Для этого потребуется указать на точки B и D (если секущая плоскость имеет с плоскостью основания две общие точки, то эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через эти точки) (рис. 3).

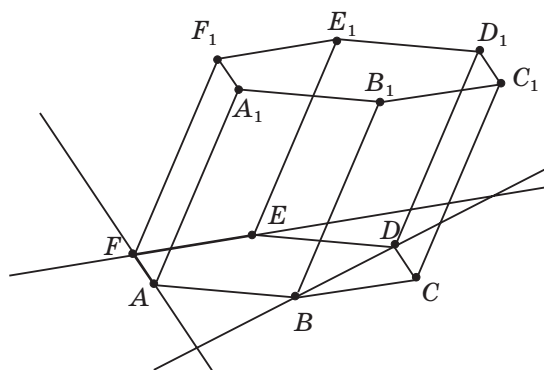


Рис. 3. Результат шага 1 построения сечения инструментами GeoGebra

2. Построить точки N и L – следы прямой BD на плоскостях боковых граней, содержащих точку F , как точки пересечения прямых FA и FE с прямой BD (прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей и непараллельная второй плоскости, пересекает эту плоскость в точке, принадлежащей их линии пересечения).

Для построения необходимо сначала

инструментом «Прямая» провести прямые FA и FE , а затем отметить N и L как точки пересечения этих прямых с BD инструментом «Пересечение» (рис. 4). Для этого достаточно указать курсором на пересекающиеся объекты или место их пересечения.

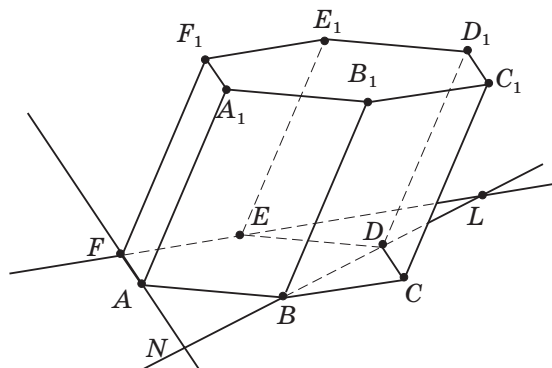


Рис. 4. Результат шага 2 построения сечения инструментами GeoGebra

3. Провести инструментом «Прямая» прямые NF_1 и LF_1 . Отметить инструментом «Пересечение» точки K и P – точки пересечения секущей плоскости с рёбрами AA_1 и EE_1 (рис 5).

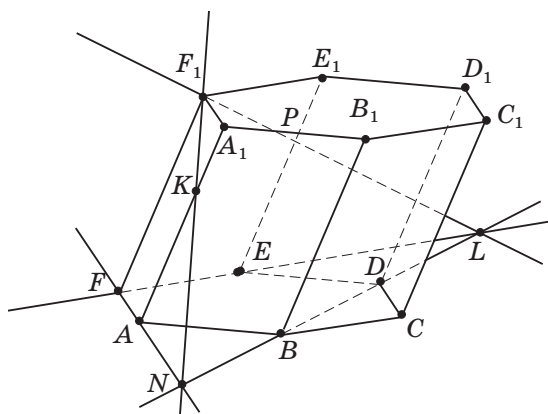


Рис. 5. Результат шага 3 построения сечения инструментами GeoGebra

4. Построить изображение сечения призмы плоскостью α инструментом «Многоугольник», последовательно указав его

вершины – точки B, K, F_1, P, D и снова B (рис 6).

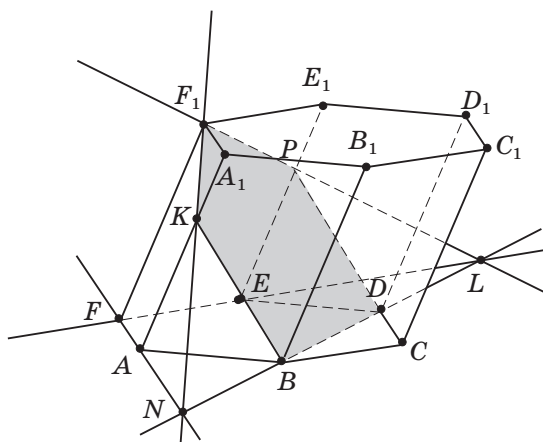


Рис. 6. Результат шага 4 построения сечения инструментами GeoGebra

Преимущества построений в GeoGebra состоят в том, что если шаги построения не записывались по ходу решения, то всегда можно просмотреть их, выведя на экран протокол построения инструментом «Вид» (рис. 7), и просмотреть его, нажав на кнопку «Проиграть».

При построении сечения на листе бумаги ученики ошибочно могут принять скрещивающиеся прямые за пересекающиеся, а несколько точек (четыре и более), лежащие в разных плоскостях, за точки одной плоскости. Моделирование в GeoGebra не позволяет допустить этих ошибок, так как применение инструмента «Точка пересечения» к скрещивающимся прямым или инструмента «Многоугольник» к точкам, не лежащим в одной плоскости, просто не даст результата.

Третья трудность – распознавание формы и свойств исследуемой фигуры по её проекционному изображению.

Проекционные изображения сохраняют лишь часть свойств фигуры-оригинала,

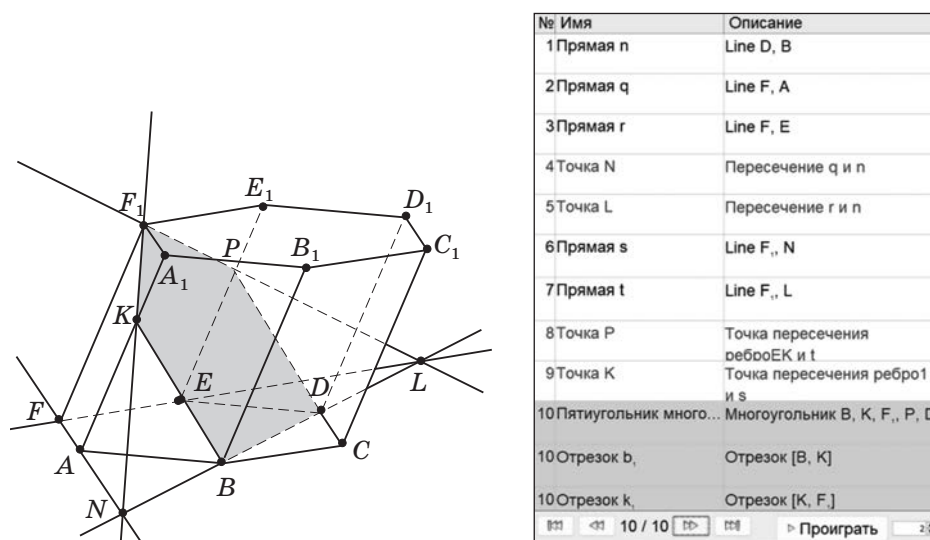


Рис. 7. Протокол построения сечения призмы плоскостью $\alpha(B, D, F_1)$ и QR-код для просмотра процесса построения

что нередко приводит учащихся к ошибочным выводам. Важно помнить и уметь использовать свойства параллельного проектирования при построении проекционных изображений фигур [2, с. 60–65; 174]; выполнять требования к проекционным изображениям фигур [2, с. 175–176]; знать правила изображения окружностей и многоугольников (треугольников, параллелограммов, трапеций и др.) [2, с. 177–187], а затем и многогранников [2, с. 189–195], уметь применять эти правила. Для того, чтобы избежать ошибок при исследовании фигуры по её проекционному изображению, прибегают к построению «неискажённого» изображения этой фигуры на плоскости или, говорят, к построению **выносного** чертежа. В случае с рассматриваемой задачей, будем исследовать пятиугольник, получаемый в сечении. Наиболее внимательные заметят, что пара сторон этого пятиугольника лежит на паре параллельных граней призмы ($AB \subset ABB_1$, $PD \subset EDD_1$, $(ABB_1) \parallel (EDD_1)$).

При решении задачи с использованием GeoGebra получить выносной чертёж элементов, принадлежащих выбранной плоскости, помогает опция «Создать 2D вид на многоугольник или на плоскость» (рис. 5), которая появится в диалоговом окне, если нажать правой кнопкой мыши на изображение плоскости или многоугольника. Преимущество выносной планиметрической модели состоит в сохранении связи с базовой 3D моделью. Изменение одной из них приводит к изменению другой.

Так, например, представленная на рисунке 8 выносная модель секущей плоскости может быть использована для уточнения утверждения, которое должно быть доказано в пункте а) задачи. Для этого нужно инструментом «Расстояние или длина» вывести на экран текущее значение длин сторон многоугольника, полученного в сечении. Искомой будет та пара отрезков, равенство которых сохраняется при перемещении вершины A_1 призмы на полотне 3D.

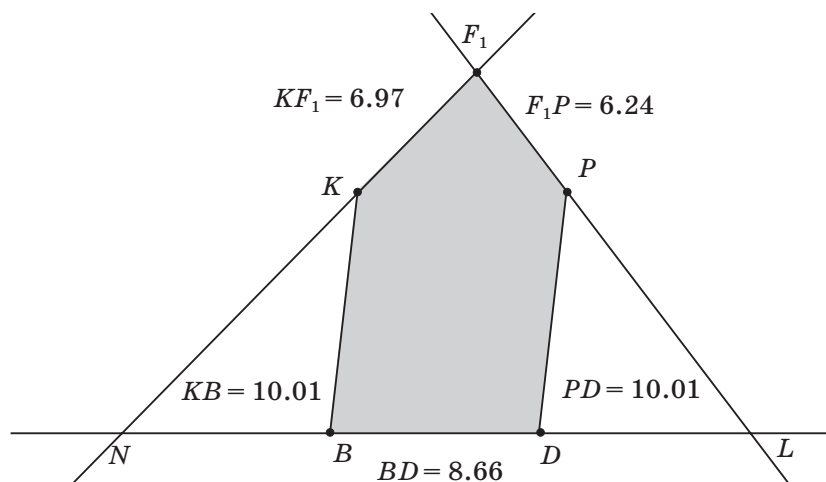


Рис. 8. Выносная модель сечения призмы с текущими значениями длин сторон и QR-код для исследования равенства сторон от положения вершины A_1

Четвёртая трудность – направленное переключение внимания с одной части чертежа на другую в ходе рассуждений.

Проведение логических рассуждений и вычислений при решении геометрических задач обычно сопровождается переключением внимания с одной части чертежа на другую. Такое переключение должно быть «направленным» на продолжение правильного решения задачи, связывать предыдущие рассуждения с последующими, веду-

щими к обоснованному результату.

Трудности, связанные с переключением внимания, в динамической модели позволяют снять цветовые выделения значимой части чертежа, маркировка значимых объектов. Полезно использовать возможность скрыть, сделать невидимой «лишнюю» часть изображения.

Для целей обучения динамические выделения могут быть заготовлены учителем заранее и упорядочены с использованием инструмента «Ползунок» (рис. 9).

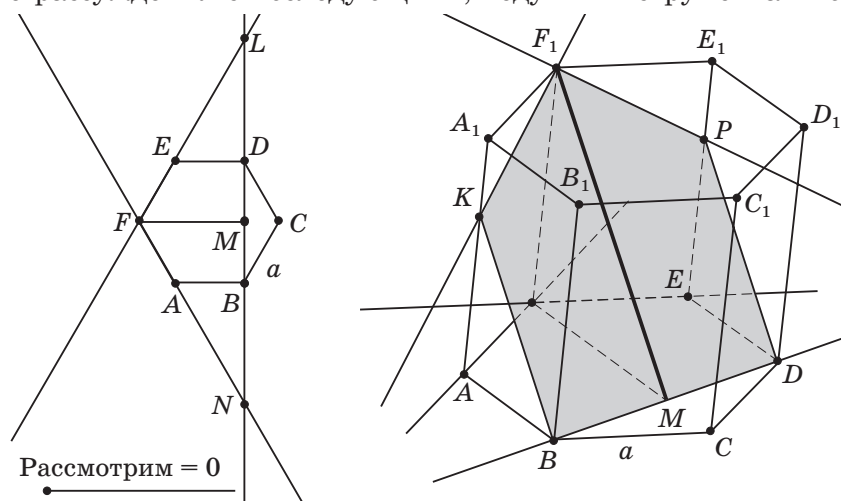


Рис. 9. Динамические выделения частей изображения, значимых для доказательства утверждения пункта а) задачи, и QR-код для управления ими

Использование динамических выделений позволяет подсказать учащимся шаги доказательства утверждения пункта а) задачи.

1. Рассмотрим $ABCDEF$. Отметим точку M – середину BD . По свойствам правильного шестиугольника:

$$M \in FC, FC \parallel AB, FC \perp BD, \angle MFA = 60^\circ$$

(рис. 10).

2. Рассмотрим $\triangle ABN$ – прямоугольный (по п. 1 $AB \perp BD$), $\angle BAN = \angle MFA = 60^\circ$ как соответственные углы при параллельных прямых и секущей и по п. 1). Пусть $AB = a$. Следовательно, $AN = 2AB = 2a$. Отсюда получаем, что $NB : BM = NA : AF = 2 : 1$ (рис. 11).

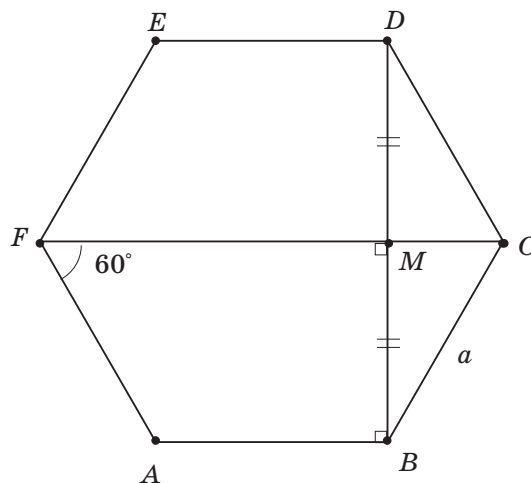
3. Рассмотрим $\triangle FNF_1$ и пересекающие его прямые $AA_1 \parallel FF_1$. По теореме Фалеса $NK : KF_1 = NA : AF = 2 : 1$ (по п. 2) (рис. 12).

4. Рассмотрим $\triangle KNB \sim \triangle F_1NM$ ($\angle N$ – общий, $NF_1 : NK = NM : NB = 3 : 2$ (по п.п. 3 и 2)). Тогда по свойству подобных треугольников $KB = \frac{2}{3} F_1M$ (рис. 13).

Рассуждения, аналогичные шагам 1–4, приводят к выводу, что $DP = \frac{2}{3} F_1M$. Таким образом, получаем, что $KB = DP$. Следовательно, сечением является многоугольник, имеющий пару равных сторон.

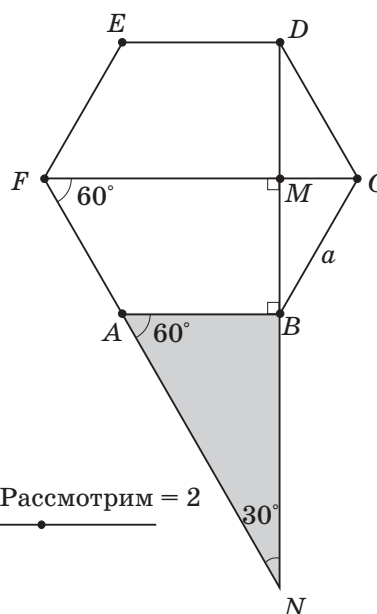
Трудность пятая – включение данной фигуры в другую (комбинирование фигур) для использования её свойств в рассуждениях.

В некоторых случаях решению стереометрических задач помогает разбиение пространственной фигуры на части или включение её в многогранник известного вида, то есть использование приёма достраивания до сопровождающего многогранника.



Рассмотрим = 1

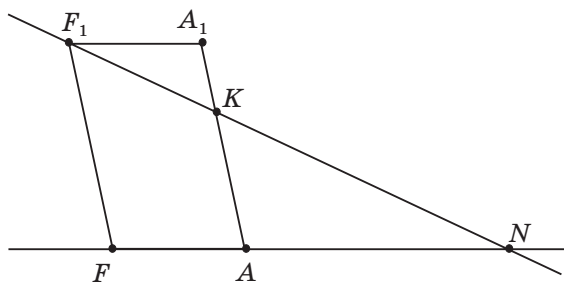
Рис. 10. Подсказки к шагу 1 доказательства



Рассмотрим = 2

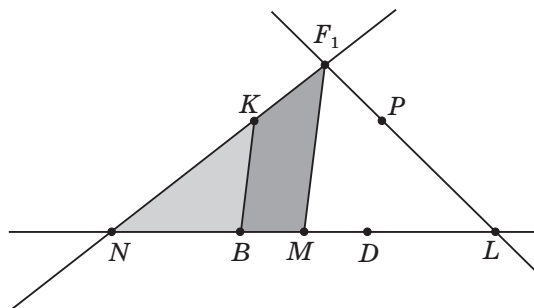
Рис. 11. Подсказки к шагу 2 доказательства

В данном случае такая необходимость возникает при решении пункта б) задачи, так как части, на которые разбивает призму плоскость α , не относятся к многогранникам известного вида, что затрудняет



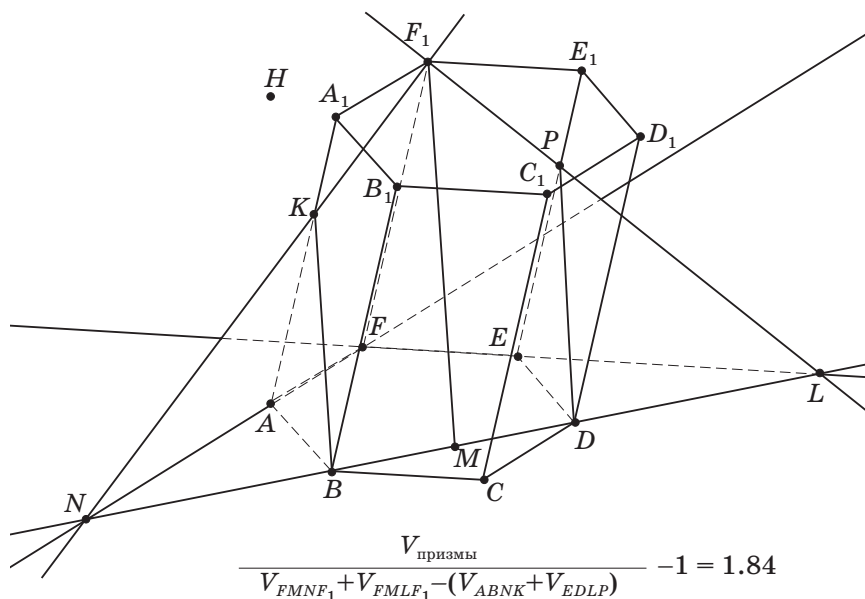
Рассмотрим = 3

Рис. 12. Подсказки к шагу 3 доказательства



Рассмотрим = 4

Рис. 13. Подсказки к шагу 4 доказательства



$$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{FMNF_1} + V_{FMLF_1} - (V_{ABNK} + V_{EDLP})} - 1 = 1.84$$

Рис. 14. Комбинация многогранников, необходимая для вычисления отношения объёмов частей призмы, на которые её разбивает сечение (результат вычислений представлен с точностью до сотых) и QR-код для проверки независимости результата от параметров призмы

ет установление отношения их объёмов.

Рисунок 14 показывает, что задача может быть сведена к вопросу о нахождении объёма данной призмы и четырёх треугольных пирамид: $ABNK$, $FMNF_1$, $EDLP$ и $FMLF_1$. Дополнительное построение указанных пирамид в GeoGebra позволяет получить не только зрительное выделение рассматриваемых объектов, но

и сведения об искомом значении отношения объёмов частей призмы с выбранной точностью.

Получение точного результата требует аналитических выкладок. Обозначим длину стороны шестиугольника a , а длину высоты призмы – h . Тогда

$$V_{\text{призмы}} = h \cdot 6 \cdot S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3}a^2h,$$

где O – центр правильного шестиугольника.

Найдём объёмы призм $FMNF_1$ и $FMLF_1$:

$$\begin{aligned} V_{FMNF_1} &= V_{FMLF_1} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}NF \cdot NM \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{1}{12}h \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}ha^2. \end{aligned}$$

Пирамиды $FMNF_1$ и $ABNK$, а также $FMLF_1$ и $EDLP$ имеют общие трёхгранные углы, следовательно,

$$\text{и} \quad \frac{V_{ABNK}}{V_{FMNF_1}} = \frac{NA}{NF} \cdot \frac{NB}{NM} \cdot \frac{NK}{NF_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{V_{EDLP}}{V_{FMLF_1}} = \frac{LE}{LF} \cdot \frac{LD}{LM} \cdot \frac{LP}{LF_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Таким образом,

$$V_{ABNK} = V_{EDLP} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}ha^2.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{FMNF_1} + V_{FMLF_1} - (V_{ABNK} + V_{EDLP})} - 1 = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot 3\sqrt{3}a^2}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}ha^2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)} - 1 = \frac{54 - 19}{19} = 1\frac{16}{19}. \end{aligned}$$

Заключительные замечания

Представленный нами обзор выполнен лишь на одной стереометрической задаче, выбранной так, что методические возможности привлекаемого программного продукта GeoGebra становятся оправданно необходимыми. Существенным является факт постоянного аналитического подтверждения выводов, на которые «наводит» GeoGebra, независимо от частоты обращения к ней.

Способы и мера использования GeoGebra в обучении решению стереометрических задач диктуются наличием

и характером трудностей, испытываемых учениками при работе с задачей, и определяются образовательными целями, которые планируется достичь на каждом этапе обучения.

Как показывает опыт, начинать работу по обучению решению стереометрических задач целесообразно без использования GeoGebra. Только тогда, когда трудности при работе с построением и анализом стереометрических изображений, выявлением и рассмотрением существенных и, при необходимости, несущественных частей таких изображений оказываются непреодолимыми, полезно привлекать GeoGebra. При этом всякий раз при построении учениками изображений стереометрических фигур учитель принимает решение о целесообразности запретов и ограничений на использование встроенных инструментов и вкладок в программный продукт GeoGebra. Предположения и выводы, сделанные с опорой на динамическую модель, требуют от учеников обязательного доказательства и аналитического подтверждения.

Мы видим основное значение GeoGebra в стимулировании активного поиска путей и способов решения задачи, аналитического подтверждения получаемых результатов, развития пространственных представлений обучающихся. Значимым является результат, демонстрирующий обретение учениками умений и способов деятельности по решению стереометрических задач без привлечения средств GeoGebra. Достижение этого результата очень важно, так как в условиях экзамена ученики не смогут помогать себе, обращаясь к компьютерной программе.

Список источников

1. Яценко И.В., Высоцкий И.Р., Семёнов А.В. Методические рекомендации для

учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2022 года. – М., 2022. – 35 с. // URL: http://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2022/ma_mr_2022.pdf (дата обращения: 25.12.2022).

2. *Потоскуев Е.В.* Геометрия, 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич – М. : Дрофа, 2008. – 223 с. // URL: <https://file.11klasov.net/3314-geometriya-10-klass-uglublennoe-i-profilnoe-obuchenie-potoskuev-ev-zvavich-li.html> (дата обращения: 25.12.2022).

3. *Далингер В.А.* Стереометрические задачи на построение. – Санкт-Петербург: Изд-во Тесса, 2000. – 192 с.

4. *Резникова Н.М., Фридман Е.М.* Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Сечения многогранников: учебное пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2017. – 80 с.

5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. Сечения многогранников. – М.: Издательство «Экзамен», 2011. – 255 с. (Серия «ЕГЭ. 100 баллов»).

6. Официальный сайт GeoGebra // URL: <https://www.geogebra.org/download> (дата обращения: 25.12.2022).

Статья поступила в редакцию

05.03.2023.

Принята к публикации

11.06.2023.

ИНФОРМАЦИЯ

Россия отказалась от участия в международном исследовании оценки знаний школьников TIMSS

Россия отказалась участвовать в международном исследовании уровня знаний школьников по математике и естественным наукам. На его основании корректировали программу и делали выводы о том, какие факторы влияют на качество образования.

TIMSS — международное исследование качества школьного образования по математике и естественно-научным предметам, его проводят раз в четыре года. Во время исследования эксперты оценивают знания школьников четвёртых и восьмых классов из разных стран, а также то, как дети могут интерпретировать свои результаты и применять их на практике. Исследование также позволяет оценить динамику в образовании четвероклассников через четыре года, когда они приходят как раз в восьмой класс.

Россия участвовала в TIMSS с 1995 года, последний раунд проводили в 2019 году. Тогда в исследовании участвовали почти 8 тыс. школьников из 49 регионов, и Россия заняла шестое место. В пятёрке по качеству школьного образования в математике и естественно-научных дисциплинах — Сингапур, Гонконг, Корея, Тайвань и Япония.

Подробнее на РБК:

<https://www.rbc.ru/society/17/03/2023/6413f8bd9a79474d7f6ad85c>

ПИРАМИДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

PYRAMID OF MATHEMATICAL LITERACY

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_30

А.С. Журавлева, ГБОУ лицей № 273 имени Л.Ю. Гладышевой (Санкт-Петербург),
aaas21@mail.ru

A.S. Zhuravleva, Lyceum № 273 named after L.Yu. Gladysheva (St. Petersburg),
aaas21@mail.ru

Аннотация: статья посвящена проблеме формирования математической грамотности; процесс этот должен отражать индивидуальный рост ученика, который можно представить как восхождение по ступеням пирамиды математической грамотности

Abstract: the article is devoted to the problem of the formation of mathematical literacy; this process should reflect the individual growth of the student, which can be represented as climbing the steps of the pyramid of mathematical literacy

Ключевые слова: функциональная грамотность, математическая грамотность

Keywords: functional literacy, mathematical literacy

© А.С. Журавлева 2023

Одной из задач современного учителя является развитие функциональной грамотности учащихся. Одним из её компонентов является математическая грамотность — способность человека мыслить математически и применять математику для решения задач в разнообразных практических контекстах. Она включает в себя понятия, процедуры и факты, а также инструменты для описания, объяснения и предсказания явлений.

В последнее время доля прикладных задач в учебниках, методических пособиях и, наконец, в экзаменационных работах, возросла. И подчас складывается впечатление, что знание математики сводится к умению посчитать количество рулонов обоев для оклейки стен или выбрать наиболее выгодный тариф сотовой связи. Но ведь математику отличают прежде всего красота логических рассуждений, возможность предложить несколько способов ре-



Пирамида математической грамотности

шения одной задачи; она учит анализировать данные и делать открытия.

Зачем развивать математическую грамотность? Только ли для того, чтобы решать чисто бытовые практические задачи? Конечно же нет! В своей работе я реализую многоуровневую систему развития математической грамотности. Перед вами пирамида, в которой выделены че-

тыре уровня: практико-ориентированный, метапредметный, абстрактно-логический и креативно-творческий. Чтобы подняться на высшую ступень, ученику необходимо преодолеть все промежуточные ступени.

Практико-ориентированный уровень – это уровень зарождения математической грамотности. Находящийся на нём человек как бы скован и ограничен своими знаниями, но они позволяют ему сделать вывод о необходимости освоения азов математики. Именно на этом этапе отрабатывается умение решать задачи бытового характера.

Приведём примеры таких задач¹.

1. Маша может вытереть пыль в квартире за 28 мин., а мама – за 21 мин. За сколько минут вытрут пыль Маша и мама, работая вместе?

Решение. Примем объём работы за 1, тогда $1/28$ – производительность Маши, а $1/21$ – производительность мамы. Значит, вместе они выполнят работу за $1 : (1/21 + 1/28) = 12$ минут.

Ответ: за 12 минут.

2. Ходики показывают 4 часа. Какое время будут показывать ходики, когда минутная стрелка достигнет часовой стрелки в восьмой раз?

Решение. В полном обороте стрелки по циферблату 360 градусов. Скорость вращения часовой стрелки $360 : 12 = 30$ градусов в час. Скорость вращения минутной стрелки – 360 градусов в час. Скорость сближения $360 - 30 = 330$ градусов в час. Минутная стрелка должна пройти треть круга (120 градусов), чтобы встретиться с часовой стрелкой первый раз. Это про-

изойдёт через $120 : 330 = 4/11$ часа. Затем стрелки встретятся ещё семь раз, причём каждый раз через $360 : 330 = 12/11$ часа. Таким образом, всего пройдёт $4/11 + 7 \cdot 12/11 = 8$ часов. Значит, на часах будет $4 + 8 = 12$ часов.

Ответ: 12 часов.

3. Стоимость квартиры выросла на 117%. Во сколько раз подорожала квартира?

Решение. Если квартира стоила S руб., то после повышения цены на 117% она стала стоить $S + 1,17S = 2,17S$ руб., то есть подорожала в 2,17 раз.

Ответ: в 2,17 раз.

4. Банк предоставляет ипотечный кредит (кредит на покупку квартиры под залог квартиры) сроком на 10 лет под 19% годовых. Это означает, что ежегодно заёмщик возвращает 19% от непогашенной суммы кредита и $1/10$ суммы кредита. Так, в первый год заёмщик выплачивает $1/10$ суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год – $1/10$ суммы кредита и 19% от $9/10$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую должен выплатить банку заёмщик, больше суммы предоставленного кредита, если по договору досрочное погашение кредита невозможно?

Решение. Пусть заёмщик получил кредит в размере S ед. под 19% годовых. Тогда каждая выплата будет состоять из фиксированной суммы $0,1S$ и 19% от непогашенной части кредита. Поэтому через десять лет заёмщик выплатит банку $S + 0,19(1 + 0,9 + 0,8 + \dots + 0,1)S = 2,045S$. Эта сумма будет больше суммы кредита в 2,045 раза.

Ответ: в 2,045 раза.

5. На одной полке можно разместить 11 одинаковых книг. Какое наименьшее число полок потребуется для того, чтобы разместить 69 таких книг?

¹ Некоторые задачи взяты из книги: Шестаков С.А. и др. Сборник задач для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс (М., АСТ, Астрель, 2008, 2-е изд., испр.).

Решение. $69 : 11 = 6$ (ост. 3).

Ответ: 7 полок.

6. Пол в комнате, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 10 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 10 см и 25 см. Сколько таких дощечек потребуется?

Решение. Пол в комнате имеет площадь $4 \cdot 10 = 40 \text{ м}^2$, а площадь одной дощечки $0,1 \cdot 0,25 = 0,025 \text{ м}^2$, значит, понадобится $40 : 0,025 = 1600$ дощечек.

Ответ: 1600 дощечек.

Список можно продолжать бесконечно. В настоящее время разработаны целые серии задач такого плана. Они составлены с учётом возраста учащихся и их базового уровня знания математики. Некоторые объединены в тематические группы, снабжены дополнительным справочным материалом.

Метапредметный уровень характеризуется развитием связей, позволяющих установить взаимодействие математики с другими науками. На этом этапе у учащихся формируются умения и навыки, которые в дальнейшем могут быть спроецированы на выбранную ими профессиональную область.

Приведём фрагмент урока геометрии по теме «Правильные многоугольники» в 9 классе. Учитель предлагает учащимся побыть в роли специалистов, отвечающих за благоустройство улиц, и разрешить следующую проблему.

Многие жильцы на газонах под окнами устраивают цветники и, чтобы сохранить свои цветы в тот момент, когда косят траву, решили высадить их в старые покрышки от автомобильных шин. Экологическая служба города сообщила вам, что это наносит вред окружающей среде. Покрышки надо срочно убрать. Жители, конечно, обескуражены и обеспокоены происходящим.

Как им теперь защитить свои импровизированные клумбы? Решено выделить средства для оформления единообразных экологически безопасных клумб. Выясните, какой формы должны быть клумбы, чтобы при наименьших затратах на материалы для их ограждения внутри помещалось как можно больше цветов.

Конечно, первое, что приходит в голову, сделать круглую клумбу, но задачу усложнили и попросили разработать клумбы такой формы, чтобы ими можно было полностью покрыть участок некоторого газона. Форму каких правильных многоугольников можно выбрать для клумб? Ученики приходят к выводу: покрыть плоскость без зазоров можно только равными равносторонними треугольниками, квадратами или правильными шестиугольниками. Далее им предлагается выбрать только одну форму, которая будет удовлетворять всем вышеперечисленным требованиям.

Переведём задачу на язык математики. Требуется при наименьших затратах на материалы для ограждения клумб добиться того, чтобы на ограниченном участке газона помещалось как можно больше цветов. Какая из фигур с одинаковыми периметрами: равносторонний треугольник, квадрат или правильный шестиугольник будет иметь наибольшую площадь?

Для простоты вычислений будем считать, что длина ограждения клумбы 12 м (12 делится без остатка и на 3, и на 4, и на 6). Периметр равен 12. Найдите площадь каждой фигуры и сделайте вывод.

Решение. Вычислим площади указанных фигур, пользуясь формулами

$$S_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad S_4 = a^2, \quad S_6 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2},$$

где a – сторона правильного многоугольника, $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Для правильного треугольника

$$a = 12 : 3 = 4,$$

$$S_3 = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,8.$$

Для квадрата

$$a = 12 : 4 = 3, S_4 = 3^2 = 9.$$

Для правильного шестиугольника

$$a = 12 : 6 = 2,$$

$$S_6 = \frac{3 \cdot 2^2 \sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3} \approx 10,2.$$

Замечание 1. В зависимости от уровня математической грамотности учащихся учитель может привести приближённое значение $\sqrt{3}$ или не делать этого, а повторить с учениками, как сравниваются иррациональные числа.

Замечание 2. Задача может быть решена в общем виде. Для этого сторону каждого многоугольника следует выразить через периметр P .

Итак, наибольшую площадь имеют клумбы в форме правильного шестиугольника. Удивительно, но, похоже, этими же знаниями обладают пчёлы, которые строят соты в форме правильных шестиугольников, полностью покрывая пластину и затрачивая на постройку такое количество воска, чтобы мёда помещалась как можно больше!

Абстрактно-логический уровень – это уровень, на котором развивается критическое и абстрактно-логическое мышление, а также умение структурировать, обрабатывать массивы данных, делать самостоятельные выводы.

Формирование математической грамотности на этом уровне можно осуществить на уроках по любому школьному предмету. Покажем один из возможных вариантов, который могут использовать в своей работе учителя русского и иностранного языков. Для решения подходящих задач не требуется знание языка, а необходимо

владеть базовыми логическими операциями: сравнением и анализом.

Рассмотрим следующую лингвистическую задачу².

Даны венгерские существительные и все их переводы на русский язык (в перепутанном порядке):

nyirfa, korte, almak, kortefa, nyirfak, alma, almafa;

берёза, груша, яблоня, яблоко, берёзы, яблоки.

Установите правильные переводы. Объясните своё решение.

Решение. Выделим однокоренные слова в русском языке:

- берёза, берёзы;
- яблоня, яблоко, яблоки;
- груша.

А теперь в венгерском языке:

- nyirfa, nyirfak;
- korte, kortefa;
- almak, alma, almafa.

Мы замечаем, что шести русским словам соответствуют семь венгерских. Чем это объясняется? Груша – название дерева и название плода.

Три однокоренных слова almak, alma, almafa соответствуют трём однокоренным слову *яблоко* словам.

Среди венгерских слов есть три группы однокоренных, причём все они образованы прибавлением *-fa* и *-k*. Одна из этих частиц обозначает множественное число, а другая – признак дерева. У нас есть только одно дерево, название которого дано во множественном числе: *берёзы*. Среди венгерских слов имеется только одно слово, в котором есть и *-fa*, и *-k*: nyirfak. Тогда *берёза* – это nyirfa, следовательно, *-fa* – признак дерева, а *-k* – признак мно-

² Задача № 995 (В.А. Плунгян, 1989) из «Базы лингвистических задач», см. на <http://lingproblems.online>.

жественного числа. Значит, слова *korte* и *kortefa* переводятся как *груша*. Разница в том, что первое из них обозначает плод, а второе – дерево.

О т в е т:

Берёза	n y i r f a
Берёзы	n y i r f a k
Яблоня	a l m a f a
Яблоко	a l m a
Яблоки	a l m a k
Глуша (плод)	k o r t e
Груша (дерево)	k o r t e f a

Решение лингвистических задач – это наиболее яркий пример развития математической грамотности на уроках гуманитарного цикла. Существует огромное количество таких задач, выложенных в сети Интернет. С 1965 года и по сегодняшний день ежегодно проводится «Московская открытая традиционная олимпиада по лингвистике и математике».

Развитое абстрактно-логическое мышление позволяет перейти на последнюю ступень пирамиды.

Креативно-творческий уровень характеризуется формированием потребно-

сти в созидании и в красоте математических рассуждений, стремления к самовыражению, желания делать самостоятельные открытия, которые влекут за собой в конечном итоге развитие науки в целом.

Достичь такого уровня учащемуся помогает проектная деятельность. Например, ученица 9 «А» класса Румянцева Анастасия, работая над проектом «Лингвистические задачи», на примере решения нескольких лингвистических задач выявила алгоритм их решения, придумала и решила собственную лингвистическую задачу. В ноябре 2022 года работа была оценена дипломом второй степени на Всероссийской научно-практической конференции имени Жореса Алферова в номинации «Точные науки».

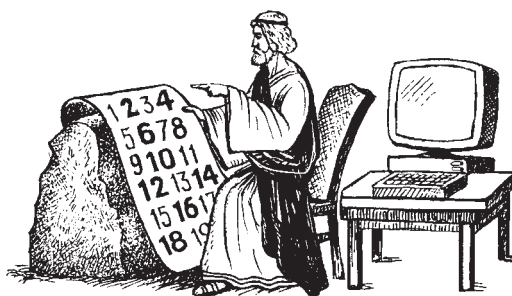
В заключение хочется ещё раз подчеркнуть, что формирование математической грамотности в школе – это не засилье на уроках притянутых за уши текстовых задач с требованием немедленного привлечения учащихся к вычислениям, а прежде всего развитие интеллекта и абстрактно-логического мышления школьников.

Статья поступила в редакцию

31.03.2023.

Принята к публикации

20.04.2023.



ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

FROM REALS TO THE STUDY OF FUNCTIONS

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_35

П.В. Семёнов, д-р физ.-мат. наук,
профессор, НИУ «Высшая школа экономики»
(Россия, Москва), pavelsssem@gmail.com

P.V. Semenov, ShiD (Phys&Math),
Professor, NRU «Higher School of Economics»
(Russia, Moscow), pavelsssem@gmail.com

Аннотация: в статье показано, что исследование функций на монотонность и экстремумы с помощью производных можно доказательно провести без ссылок на теоремы Лагранжа, Ролля, Ферма, Вейерштрасса, Больцано–Вейерштрасса, Коши–Кантора, а исходя лишь из свойств (аксиом) множества действительных чисел. Подход применим при обучении математике с недостаточным количеством часов на изучение начал математического анализа (элементов высшей математики)

Abstract: the article shows that the study of functions for monotonicity and extrema using derivatives can be carried out conclusively based on the properties (axioms) of the set of real numbers, without references to the theorems of Lagrange, Rolle, Fermat, Weierstrass, Bolzano–Weierstrass, Cauchy–Kantor. The approach is applicable when teaching mathematics with an insufficient number of hours to study the principles of mathematical analysis (elements of higher mathematics)

Ключевые слова: производная функции, исследование на монотонность, аксиома о разделяющем числе

Keywords: derivative of a function, study of monotonicity, axiom on the separating number

© П.В. Семёнов 2023

Введение. Начала математического анализа в старших классах – это, в буквальном смысле слова, «...тяжёлое наследие царского режима...». В 1899 г. *Высочайше*¹ была утверждена комиссия² по вопросу

ОБЪ УЛУЧШЕНИЯХЪ ВЪ СРЕДНЕЙ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛѢ.

По математике в последовавших после этого совещаниях, программах, реформах и съездах, в частности, жарко обсуждались вопросы «...введения в изчисленіе

безконечно-малыхъ...» в старших (VII–VIII) классах. Например, см.³

У. Основанія анализа безконечно малыхъ.
Основанія ученія о предѣлахъ. Приложение ученія о предѣлахъ къ измѣренію длины окружности, площади круга, поверхностей и объемовъ цилиндра, конуса и шара. Предѣлъ отношенія $\frac{\sin x}{x}$ при стремленіи x къ нулю. Предѣлъ бинома $(1 + \frac{1}{n})^n$ при неограниченномъ возрастаніи n .

Геометрическое представленіе теоремы Ролля; теорема Лагранжа. Признаки возрастанія и убыванія функций. Наибольшія и наименьшія значенія функций для данной области аргумента; ихъ размыканіе.

Но, чтобы не менять тематику этой заметки, пропустим пока вопросы исто-

¹ Сиречь – по указу Императора Российского.

² Её Труды напечатаны в 1900 г., в типографии СПб. тюрьмы, см. <http://old.mathedu.ru/before1917.html>.

³ Программа по математике для дополнительного класса реальных училищ, 1907, см. там же.

рии преподавания математики. В современной российской школе производная функции – это удобный и зачастую весьма успешный способ получения более полной информации о поведении самой функции. Основной здесь является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Если производная функции положительна (отрицательна) во всех точках интервала, то сама функция возрастает (убывает) на этом интервале.*

Всякий, кто изучал или преподавал систематический курс математического анализа, знает, что доказательство этой теоремы отделено от первых лекций о действительных числах несколькими месяцами обучения. Вот примерная и несколько укороченная схема:

Аксиоматика множества $\mathbf{R}$ → Точные грани числового множества → Предел монотонной последовательности → Вложенные отрезки → Теоремы Больцано – Вейерштрасса, Коши → Теоремы о непрерывных функциях на отрезке → Теорема Ферма → Теорема Ролля → Теорема Лагранжа → **Исследование функций.**

В настоящей заметке показано, что от начала этой схемы, то есть от свойств (аксиом) множества $\mathbf{R}$, можно доказательно перейти сразу к её концу, то есть к исследованию функций на монотонность и экстремумы.

Такое сокращение, конечно же, бессмысленно при регулярном изучении математического анализа, но оно вполне содержательно при априорно недостаточном количестве часов в учебных планах. Например, в классах с не слишком углублённым уровнем преподавания математики.

Краткий обзор того, что и как делается в действующих УМК по этой теме, при-

ведён ниже, в п. 2; вкратце – все действуют по описанной выше схеме, пропуская шаги, нереализуемые в школе по мнению авторов конкретного УМК.

1. Ограничимся случаем положительной на интервале производной, для отрицательной производной рассуждение аналогично. Кроме, очевидно, необходимого определения производной потребуется лишь тот факт, что из положительности предела функции в точке следует положительность значений самой функции в некоторой окрестности этой точки и, основное, – аксиома о разделяющем числе:

если A и B – непустые числовые множества и каждое число из A не больше каждого числа из B , то существует число s , которое больше или равно всех чисел из A и меньше или равно всех чисел из B ; здесь s – число, разделяющее A и B .

В краткой записи, $A \leq B \Rightarrow \exists s : A \leq s \leq B$; « s – separates A and B ».

Если слово аксиома представляется «излишне учёным», то вполне можно говорить о приведённом выше утверждении как о свойстве множества действительных чисел.

Чисто технический переход от положительности производной в точке к неравенству о значениях функции выделим во вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если в точке x интервала производная функции положительна, то при всех достаточно малых приращениях $\Delta x > 0$ аргумента верно неравенство $f(x - \Delta x) < f(x) < f(x + \Delta x)$.*

Доказательство леммы.

По условию $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Так как предел отношения больше нуля, то и само отношение больше нуля при всех достаточно малых Δx . Тогда числитель отношения, то есть приращение $\Delta f =$

$= f(x + \Delta x) - f(x)$ функции, имеет тот же знак, что и знаменатель отношения, то есть приращение Δx аргумента. Значит, для $\Delta x > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &> 0, f(x) < f(x + \Delta x); \\ f(x - \Delta x) - f(x) &< 0, f(x - \Delta x) < f(x). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы

Пусть $f'(x) > 0$ во всех точках интервала. Надо доказать, что сама функция f возрастает на интервале. Будем действовать методом от противного.

Предположим, что f **не возрастает**, то есть для каких-то двух точек c и d интервала верны неравенства $c < d$ и $f(c) \geq f(d)$. Применим аксиому о разделяющем числе к двум подмножествам промежутка $(c; d]$. Вот определение первого из них:

$$A = \{a: f(c) < f(x) \text{ для всех } c < x \leq a\}.$$

Словесно описать множество A можно следующим образом. Будем двигаться по промежутку $(c; d]$ от его левого конца вправо до тех пор, пока значения функции остаются больше $f(c)$. В результате такого движения мы и «пройдём» всё множество A .

Второе множество – B , по определению состоит из всех точек полуинтервала $(c; d]$, не принадлежащих A , или, как говорят, B – это дополнение $(c; d]$ до A :

$$B = \{b: f(c) \geq f(x)$$

для некоторого $c < x \leq b\}$.

Множество B не пусто, так как $d \in B$: по предположению $f(c) \geq f(d)$, и в определении множества B можно положить $x = d$. Множество A не пусто, так как $f(c) < f(c + \Delta x)$ при всех достаточно малых $\Delta x > 0$ (см. Лемму). Кроме того, если $a \in A$, то и все числа $c < x < a$ также принадлежат множеству A . В частности, левее a нет точек из B , то есть $A < B$.

Рассмотрим число s , разделяющее два множества, $A \leq s \leq B$. Возможны только два случая: 1) $s \in A$ и 2) $s \notin A$, то есть

$s \in B$. Получим противоречие в каждом из них.

1) Если $s \in A$, то $f(c) < f(x)$ для всех $c < x \leq s$. Так как $f'(s) > 0$, то (см. Лемму) при всех достаточно малых $\Delta x > 0$ верно неравенство

$$f(c) < f(s) < f(s + \Delta x).$$

Значит, можно сдвинуться несколько правее s , оставаясь при этом во множестве A :

$$s < s + \Delta x, s + \Delta x \in A.$$

Получаем противоречие с неравенством $A \leq s$.

2) Если $s \in B$, то $f(c) \geq f(x)$ для некоторого $c < x \leq s$. Так как $f'(x) > 0$, то вновь по Лемме получаем, что $f(x - \Delta x) < f(x) \leq f(c)$ при всех достаточно малых $\Delta x > 0$. По определению множества B получаем

$$x - \frac{\Delta x}{2} < s, x - \frac{\Delta x}{2} \in B,$$

что противоречит неравенству $s \leq B$.

Итак, предположение о том, что f не возрастает, привело к противоречию. Вывод: f возрастает⁴.

2. Во всех учебниках [1–8] есть формулировки теоремы о возрастании (убывании) функции на интервале в случае положительности (отрицательности) производной. То же верно и для версий учебников базового уровня. Во всех этих учебниках приводится графическая иллюстрация или же физическое истолкование в стиле «если точка движется по направленной прямой, оставаясь правее точки отсчёта, и скорость её движения всё время положительна (отрицательна), то точка удаляется от точки отсчёта (приближается к точке отсчёта)».

В учебниках [1, 2, 3, 6, 7, 8] приводится вывод теоремы о монотонности функции

⁴ Рассуждение почти повторяет доказательство из версии учебника [5] для углублённого уровня.

из теорем Ролля и Лагранжа. При этом объяснение самих этих теорем в [2, 3] ограничивается либо графической (физической) иллюстрацией, либо ссылкой на курс высшей математики в университете. В [8] теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа авторы выводят из теорем о непрерывных на отрезке функциях, но сами эти теоремы уже только формулируют. В [1, 6, 7] действуют «по полной», стараясь детально придерживаться схемы, приведённой выше. Быть может, честнее всего изложение в [4, 5], где теоремы Ролля и Лагранжа даже и не формулируют, раз нет надёжной возможности аккуратно их доказать.

С аксиоматикой множества действительных чисел ситуация, пожалуй, деликатнее. В [1] приводятся конкретная модель множества $\mathbf{R}$ (десятичные дроби) и наличие разделяющего числа — это не аксиома, а доказываемое утверждение (свойство). В [2, 3] также работают не с аксиоматикой, а с десятичными дробями, но в явном виде свойства полноты или непрерывности множества $\mathbf{R}$ нет. В [6] вместо аксиомы о разделяющем числе использован принцип Кантора вложенных отрезков вместе с аксиомой Архимеда, то есть неограниченностью множества натуральных чисел. В [4, 7] вместо наличия разделяющего числа используется наличие точной грани ограниченного множества. И в [5], и в [8] также обходятся без аксиоматики, при этом в версии [5] для углублённого уровня уже есть и аксиома о разделяющем числе, и приведённое выше доказательство достаточного условия монотонности функции.

Следует отметить, что аксиома полноты (непрерывности) имеет, как минимум, 6 разных по виду, но эквивалентных при наличии остальных аксиом множества $\mathbf{R}$ формулировок. Аксиома о разделяющем числе выбрана здесь, так как для её фор-

мулировки требуется минимум новых понятий: хватает отношения «меньше» и не нужны понятия точной грани, предела, вложенных отрезков, подпоследовательности, фундаментальной последовательности и т. п.

3. В заключение вернусь к истории и частично процитирую циркуляр 1899 г. министра народного просвещения Н.П. Боголепова, обосновывающий характер работы *Высочайше* утверждённой комиссии.

«Среди педагогов и родителей учащихся в гимназиях и реальных училищах давно слышались жалобы на разные недостатки этих учебных заведений. Указывают, например, на отчужденность от семьи и бюрократический характер средней школы, вносящей сухой формализм и мертвенность в живое педагогическое дело и ставящей в ложные взаимные отношения преподавателей и учеников; — на невнимание к личным особенностям учащихся и пренебрежение воспитанием нравственным и физическим; — на нежелательную специализацию школы с самых младших классов, обрекающую детей на известный род занятий, прежде чем выяснились их природные способности и склонности; — на чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников, особенно в низших классах; — на несогласованность программ между собою и с учебным временем и на значительное наполнение их требованиями второстепенными или даже излишними; —

Прочтите внимательно!! Не правда ли, поразительно напоминает стандартный перечень претензий к современной школе? Разве что цифровизации нет, да до компетентностей наши прапрадеды недотумкали, и УУД тогда ещё были не в домёк...

Список источников

1. Виленкин Н.Я., Ивашёв-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углублённый уровень). М.: Мнемозина, 2014.
2. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Ивлев Б.М., Шварцбурд С.И. Алгебра и начала математического анализа: учеб.

для 10–11 классов общеобразоват. учреждений, М.: Просвещение, 2008. 384 с.

3. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профильный уровень. М.: Просвещение, 2021.

4. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс: Учебник (профильный уровень). М.: Мнемозина, 2017.

5. Мордкович А.Г., Семёнов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс: Учебник (базовый уровень). М.: Просвещение-Союз, 2021.

6. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и на-

чала математического анализа. 10 класс, 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и углублённый уровни. М.: Просвещение, 2019.

7. Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профильный уровень. М.: Просвещение, 2018.

8. Рубин А.Г., Чулков П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Профильный уровень. М.: Баласс, 2016.

Статья поступила в редакцию

02.02.2023.

Принята к публикации

21.03.2023.

Минпросвещения: Математика и физика — в топе у будущих педагогов

Абитуриенты педагогических вузов стали чаще выбирать технические направления в педагогическом образовании. Об этом рассказала заместитель министра просвещения Татьяна Васильева.

— Математика, информатика, физика у будущих учителей пользуются спросом. В прошлогодний приём самый большой конкурс был на направления подготовки, связанные с математикой и информатикой — 10 человек на место. Конкурс на учителей физики — почти 5 человек на место, — отметила она.

По словам Васильевой, такая ситуация очень показательна для развития инженерного образования.

Это создание технологического суверенитета страны, то, что сегодня стоит на повестке дня. А любой специалист начинается в школе — с профориентации, с интереса, с основ, с которыми потом можно дальше идти в университет или в колледж. И здесь роль учителя первостепенная. Он формирует интерес к предмету, к науке, к будущей профессии, — подчеркнула замминистра. — Наша задача — привлечь в профессию как можно больше молодых интересующихся педагогикой ребят. Мы готовы работать и с будущими, и с уже состоявшимися учителями, чтобы они смогли стать носителями новых знаний, умений, могли привить интерес к точным наукам.

Главный ориентир здесь — Концепция технологического развития России до 2030 года. В ней, как уточнила Татьяна Васильева, отмечается необходимость популяризации среди молодёжи технического образования.

Источник: <https://news.rambler.ru/education/50879863/>

ОСВОБОЖДЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ
В ЗНАМЕНАТЕЛЕ

LIBERATION FROM IRRATIONALITY IN THE DENOMINATOR

Научная статья 5.8.2

УДК: 512 (075.3)

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_40

А.И. Кузьмичев, к.п.н.,
НГПУ, г. Новосибирск, vnlsof@yandex.ru;
Т.Н. Кузьмичева,
НГПУ, г. Новосибирск, vnlsof@yandex.ru

A.I. Kuzmichev, PhD (Pedagogy),
NGPU, Novosibirsk, vnlsof@yandex.ru;
T.N. Kuzmicheva,
NGPU, Novosibirsk, vnlsof@yandex.ru

Аннотация: данная тема была весьма популярной ещё несколько лет назад, но с повсеместным введением ЕГЭ, который «упразднил» решение многих задач школьного курса математики, она утратила в курсе своё значение, хотя инженерам всё ещё приходится выполнять приближённые вычисления, а иррациональность в знаменателе кратно увеличивает их неточность

Abstract: this topic was very popular a few years ago, but with the widespread introduction of the Unified State Exam, which «abolished» the solution of many problems of the school course of mathematics, it has lost its significance in the course, although engineers still have to perform approximate calculations, and irrationality in the denominator multiplies their inaccuracy

Ключевые слова: иррациональность, НОД многочленов, тождество Безу

Keywords: Irrationality, NOD of polynomials, Identity of Bezou

© А.И. Кузьмичев, Т.Н. Кузьмичева 2023

Определение. Элемент $\alpha \in \mathbf{R}$ называется алгебраическим над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, если α является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами. Если при этом α не является элементом поля $\mathbf{Q}$, то он называется алгебраическим иррациональным элементом над полем $\mathbf{Q}$.

Примеры. 1) Любой элемент $\alpha \in \mathbf{Q}$ является алгебраическим над $\mathbf{Q}$, так как является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x - \alpha \in \mathbf{Q}[x]$.

2) Элемент $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbf{R}$ является алгебраическим иррациональным элементом над полем $\mathbf{Q}$, так как это не рациональное число, являющееся корнем ненулевого многочлена $f(x) = x^2 - 2$ с рациональными коэффициентами.

3) Найдём ненулевой многочлен $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, корнем которого является элемент $\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Для этого ищем равенство, в котором нетривиальная линейная комбинация целых неотрицательных степеней α с рациональными коэффициентами равна нулю. Имеем:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \alpha - 1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 5 - 2\sqrt{6} \Rightarrow 2\sqrt{6} = 4 - \alpha^2 + 2\alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow 24 = 16 + 4\alpha^2 + \alpha^4 + 16\alpha - 8\alpha^2 - 4\alpha^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha - 8 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, α является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$.

Вначале задачу об освобождении от алгебраической иррациональности в знаме-

натель дробей над полем $\mathbf{Q}$ решим в общем случае.

Пусть α – алгебраическое иррациональное число над полем $\mathbf{Q}$; $f(x)$, $h(x)$ – ненулевые многочлены с рациональными коэффициентами и $h(\alpha) \neq 0$, $f(\alpha) \neq 0$. Требуется элемент $\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}$ представить в виде линейной комбинации неотрицательных степеней элемента α с коэффициентами из поля $\mathbf{Q}$, то есть исключить α из знаменателя. Достаточно научиться решать эту задачу для дроби $\frac{1}{h(\alpha)}$.

Найдём многочлен $g(x) \in \mathbf{Q}[x]$ такой, что наибольший общий делитель многочленов $g(x)$ и $h(x)$ равен 1 (такие многочлены $g(x)$ и $h(x)$ называются взаимно простыми) и $g(\alpha) = 0$.

Для этого достаточно найти произвольный многочлен $g_1(x)$, корнем которого является α , и рассмотреть многочлен $g(x) = \frac{g_1(x)}{\text{НОД}(g_1(x), h(x))}$. Такой многочлен будет удовлетворять требуемым условиям.

Поскольку $\text{НОД}(g(x), h(x)) = 1$, то существуют такие многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{Q}[x]$, что выполняется равенство:

$$h(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1. \quad (1)$$

Заметим, что в правой части этого равенства может стоять любое ненулевое рациональное число. Доказательство указанного факта проводится аналогично доказательству подобного утверждения для целых чисел (см., например, [4, с. 50, 57]). Равенство (1) называется тождеством Безу для многочленов.

В нашем случае $g(\alpha) = 0$, поэтому из равенства (1) выводим, что $h(\alpha) \cdot u(\alpha) + 0 \cdot v(\alpha) = 1$, значит, $\frac{1}{h(\alpha)} = u(\alpha)$, что и требовалось получить.

Пример 1. Освободитесь от иррацио-

нальности в знаменателе в выражении

$$\frac{63}{\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1}.$$

Решение. В данной задаче можно взять $\alpha = \sqrt[4]{2}$, $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2}$ или $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1$. В зависимости от того, какой элемент выбран в качестве α , будет изменяться и решение задачи.

Способ 1. Возьмём $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2}$. Тогда знаменатель запишется в виде $h(\alpha) = \alpha - 1$ для многочлена $h(x) = x - 1$. Ищем многочлен из $\mathbf{Q}[x]$, корнем которого является α :

$$\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} \Rightarrow \alpha - \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \alpha + 2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2 = 2\sqrt{2} \cdot (2 + \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + 4\alpha^2 + 4 = 8 \cdot (4 + 4\alpha + \alpha^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 - 32\alpha - 28 = 0.$$

Имеем многочлен $g(x) = x^4 - 4x^2 - 32x - 28$. Так как $g(1) \neq 0$, то $\text{НОД}(g(x), h(x)) = 1$. Найдём требуемые многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Для этого разделим $g(x)$ на $h(x)$ с остатком. Можно делить столбиком, а можно по схеме Горнера:

	1	0	-4	-32	-28
1	1	1	-3	-35	-63

Таким образом, имеем равенства

$$g(x) = (x - 1) \cdot (x^3 + x^2 - 3x - 35) - 63,$$

$$63 = g(x) \cdot (-1) + h(x) \cdot (x^3 + x^2 - 3x - 35).$$

Подставим в последнее равенство α вместо x , получим:

$$63 = 0 \cdot (-1) + (\alpha - 1) \cdot (\alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha - 35),$$

$$\frac{63}{\alpha - 1} = \frac{63}{h(\alpha)} = \alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha - 35.$$

Преобразуем полученное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{63}{h(\alpha)} &= \frac{63}{\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1} = \\ &= (\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2})^3 + (\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2})^2 - \\ &\quad - 3 \cdot (\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2}) - 35 = \\ &= 2\sqrt{2} + 12\sqrt[4]{2} + 24 + 8\sqrt[4]{8} + 2 + \end{aligned}$$

$$+ 4\sqrt[4]{8} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 6\sqrt[4]{2} - 35 = \\ = 3\sqrt{2} + 6\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[4]{8} - 9.$$

Способ 2. Возьмём $\alpha = \sqrt[4]{2}$. Тогда знаменатель запишется в виде $h(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - 1$ для многочлена $h(x) = x^2 + 2x - 1$. Ищем такой многочлен из $\mathbf{Q}[x]$, корнем которого является α :

$$\alpha = \sqrt[4]{2} \Rightarrow \alpha^4 = 2 \Rightarrow \alpha^4 - 2 = 0.$$

Поэтому возьмём $g(x) = x^4 - 2$. Найдём НОД($g(x)$, $h(x)$) и одновременно требуемые многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Для этого применим к многочленам $g(x)$ и $h(x)$ алгоритм Евклида деления с остатком. Делим столбиком, при этом выписываем все результаты деления:

$$g(x) = h(x) \cdot (x^2 - 2x + 5) + r_1(x), \\ \text{где } r_1(x) = -12x + 3;$$

$$h(x) = r_1(x) \cdot \left(-\frac{1}{12}x - \frac{3}{16}\right) + r_2(x),$$

$$\text{где } r_2(x) = -\frac{7}{16}.$$

Тогда НОД($g(x)$, $h(x)$) = $r_2(x) = -\frac{7}{16}$. Представим $r_2(x)$ в виде линейной комбинации многочленов $h(x)$ и $g(x)$:

$$-\frac{7}{16} = h(x) - r_1(x) \cdot \left(-\frac{1}{12}x - \frac{3}{16}\right) = \\ = h(x) - (g(x) - h(x) \cdot (x^2 - 2x + 5)) \cdot \left(-\frac{1}{12}x - \frac{3}{16}\right) = \\ = h(x) \cdot \left(1 + (x^2 - 2x + 5) \cdot \left(-\frac{1}{12}x - \frac{3}{16}\right)\right) - \\ - g(x) \cdot \left(-\frac{1}{12}x - \frac{3}{16}\right).$$

Подставив $x = \alpha$, получим

$$-\frac{7}{16} = h(\alpha) \times \\ \times \left(-\frac{1}{12}\alpha^3 + \frac{1}{6}\alpha^2 - \frac{5}{12}\alpha - \frac{3}{16}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha - \frac{15}{16} + 1\right).$$

Следовательно,

$$\frac{63}{h(\alpha)} = \frac{63 \cdot 16}{7} \cdot \left(\frac{1}{12}\alpha^3 + \frac{1}{48}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha - \frac{1}{16}\right) = \\ = 12\alpha^3 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 9 = \\ = 12\sqrt[4]{8} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt[4]{2} - 9 = \\ = 3\sqrt{2} + 6\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[4]{8} - 9.$$

Заметим, что результаты получились одинаковыми, но в первом способе решения выиграли при нахождении тождества Безу для многочленов $g(x)$ и $h(x)$, хотя в финальной части задачи пришлось потрудиться в упрощении выражения, равного дроби $\frac{63}{h(\alpha)}$. Во втором способе основная работа заключалась в нахождении тождества Безу для многочленов $g(x)$ и $h(x)$, зато нахождение итогового значения дроби $\frac{63}{h(\alpha)}$ потребовало выполнение технических более простых преобразований.

Ответ:

$$\frac{63}{\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt[4]{2} + 12\sqrt[4]{8} - 9.$$

Пример 2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{2} + 1}.$$

Решение. В данной задаче можно взять $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1$ или $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2}$. Возьмём $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2}$. Тогда $h(\alpha) = \alpha + 1$ для многочлена $h(x) = x + 1$. Найдём такой многочлен из $\mathbf{Q}[x]$, корнем которого является α :

$$\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 7 - 2\sqrt{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{10} = 7 - \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 = 49 - 14\alpha^2 + \alpha^4 \Rightarrow \alpha^4 - 14\alpha^2 + 9 = 0.$$

Имеем многочлен $g(x) = x^4 - 14x^2 + 9$. Так как $g(-1) \neq 0$, то НОД($g(x)$, $h(x)$) = 1. Найдём требуемые многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Для этого разделим $g(x)$ на $h(x)$ с остатком по схеме Горнера:

	1	0	-14	0	9
-1	1	-1	-13	13	-4

Таким образом,

$$g(x) = (x + 1) \cdot (x^3 - x^2 - 13x + 13) - 4.$$

Поэтому

$$0 = g(\alpha) = h(\alpha) \cdot (\alpha^3 - \alpha^2 - 13\alpha + 13) - 4.$$

Выражаем требуемую дробь и выполняем необходимые преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{4}{h(\alpha)} &= \alpha^3 - \alpha^2 - 13\alpha + 13 = \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 - 13(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + 13 = \\ &= 5\sqrt{5} - 15\sqrt{2} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 5 + \\ &+ 2\sqrt{10} - 2 - 13\sqrt{5} + 13\sqrt{2} + 13 = \\ &= 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + 6. \end{aligned}$$

О т в е т:

$$\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + 6.$$

Пример 3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе в выражении

$$\frac{-50}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} + 1}.$$

Решение. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$. Тогда $h(\alpha) = \alpha + 1$ и $h(x) = x + 1$. Найдём многочлен из $\mathbf{Q}[x]$, корнем которого является α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \Rightarrow \alpha - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 \cdot \sqrt{2} + 6\alpha - 2\sqrt{2} = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^3 + 6\alpha - 3 = \sqrt{2} \cdot (3\alpha^2 + 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^6 + 36\alpha^2 + 9 + 12\alpha^4 - 6\alpha^3 - 36\alpha = \\ &= 18\alpha^4 + 24\alpha^2 + 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^6 - 6\alpha^4 - 6\alpha^3 + 12\alpha^2 - 36\alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $g(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$. Так как $g(-1) \neq 0$, то НОД($g(x)$, $h(x)$) = 1. Найдём требуемые многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Для этого делим $g(x)$ на $h(x)$ с остатком по схеме Горнера:

	1	0	-6	-6	12	-36	1
-1	1	-1	-5	-1	13	-49	50

Таким образом, $g(x) = (x + 1) \cdot (x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 + 13x - 49) + 50$.

Значит, $-50 = g(\alpha) \cdot (-1) + h(\alpha) \cdot (\alpha^5 - \alpha^4 - 5\alpha^3 - \alpha^2 + 13\alpha - 49)$.

Так как $g(\alpha) = 0$, то требуемая дробь равна

$$\begin{aligned} \frac{-50}{h(\alpha)} &= \frac{-50}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} + 1} = \\ &= \alpha^5 - \alpha^4 - 5\alpha^3 - \alpha^2 + 13\alpha - 49 = \\ &= (\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5 - (\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^4 - 5(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^3 - \\ &- (\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^2 + 13(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}) - 49 = \\ &= 3\sqrt[3]{9} + 15\sqrt[3]{3}\sqrt{2} + 60 + 20\sqrt[3]{9}\sqrt{2} + \\ &+ 20\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{3} - 12\sqrt{2} - \\ &- 12\sqrt[3]{9} - 8\sqrt[3]{3}\sqrt{2} - 4 - 15 - 15\sqrt[3]{9}\sqrt{2} - \\ &- 30\sqrt[3]{3} - 10\sqrt{2} - \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3}\sqrt{2} - \\ &- 2 + 13\sqrt[3]{3} + 13\sqrt{2} - 49 = \\ &= -10\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{3}\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{9}\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10 = \\ &= -10\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[6]{72} + 5\sqrt[6]{648} - 5\sqrt{2} - 10. \end{aligned}$$

Соответствующие коэффициенты в разложении степеней взяты по схеме треугольника Паскаля.

О т в е т:

$$\begin{aligned} \frac{-50}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} + 1} &= \\ &= -10\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[6]{72} + 5\sqrt[6]{648} - 5\sqrt{2} - 10. \end{aligned}$$

Пример 4. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$, где α – иррациональный алгебраический элемент над полем $\mathbf{Q}$, для которого выполняется равенство $\alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ [5, № 862(б)].

Решение. В данном случае все требуемые для решения задачи многочлены можно легко ввести, так как:

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 \text{ и } h(x) = x^2 + 2x + 1, \\ g(\alpha) &= \alpha^3 + \alpha^2 + 3\alpha + 4 \text{ и } g(x) = \\ &= x^3 + x^2 + 3x + 4, \\ f(\alpha) &= \alpha^2 - 3\alpha - 1 \text{ и } f(x) = x^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

Найдём многочлены $u(x)$ и $v(x)$ с рациональными коэффициентами такие, что

$$h(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1.$$

Причём за $u(x)$ и $v(x)$ можно взять такие многочлены, чтобы выполнялись дополнительные условия:

$$\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg h(x),$$

где сокращение **deg** обозначает степень соответствующего многочлена. Для нахождения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ применим метод неопределённых коэффициентов.

Требуется найти рациональные числа a, b, c, d, k такие, чтобы выполнялось равенство:

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^2 + 3x + 4) \cdot (ax + b) + \\ & + (x^2 + 2x + 1) \cdot (cx^2 + dx + k) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & (a + c) \cdot x^4 + (a + b + 2c + d) \cdot x^3 + \\ & + (3a + b + c + 2d + k) \cdot x^2 + \\ & + (4a + 3b + d + 2k) \cdot x + (4b + k) = 1. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях неизвестной x , получаем систему линейных уравнений от пяти неизвестных a, b, c, d, k с пятью уравнениями:

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ a + b + 2c + d = 0, \\ 3a + b + c + 2d + k = 0, \\ 4a + 3b + d + 2k = 0, \\ 4b + k = 1. \end{cases}$$

При решении системы линейных уравнений воспользуемся свойствами систем линейных уравнений и методом последовательного исключения неизвестных [3].

Множество всех решений системы не изменится, если

1) обе части любого уравнения или нескольких уравнений умножить на любое ненулевое число;

2) к любому уравнению или нескольким уравнениям системы прибавить любое другое уравнение, умноженное на произвольное число;

3) любые два уравнения поменять местами;

4) из системы исключить нулевое уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0.$$

При решении данной системы ко второму уравнению прибавим первое, умноженное на (-1) ; к третьему – первое, умноженное на (-3) ; а к четвёртому – первое, умноженное на (-4) . Пятое уравнение при этом не изменяется. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + c + d = 0, \\ b - 2c + 2d + k = 0, \\ 3b - 4c + d + 2k = 0, \\ 4b + k = 1. \end{cases}$$

Далее, второе уравнение, умноженное на (-1) , на (-3) , на (-4) , прибавим к третьему, к четвёртому, к пятому уравнениям соответственно. Первое уравнение оставим без изменений. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + c + d = 0, \\ -3c + d + k = 0, \\ -7c - 2d + 2k = 0, \\ -4c - 4d + k = 1. \end{cases}$$

Теперь к четвёртому уравнению прибавим третье, умноженное на (-2) , а к пятому – третье, умноженное на (-1) . Получим равносильную систему

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + c + d = 0, \\ -3c + d + k = 0, \\ -c - 4d = 0, \\ -c - 5d = 1. \end{cases}$$

К первому и второму уравнениям прибавим четвёртое; к третьему – четвёртое, умноженное на (-3) ; к пятому – четвёртое, умноженное на (-1) ; а само четвёртое уравнение тоже умножим на (-1) . Получим равносильную систему

$$\begin{cases} a - 4d = 0, \\ b - 3d = 0, \\ 13d + k = 0, \\ c + 4d = 0, \\ -d = 1. \end{cases}$$

Наконец, исключаем неизвестное d . К каждому из первых четырёх уравнений прибавим пятое, умноженное соответственно на числа (-4) , (-3) , 13 , 4 ; а само пятое уравнение умножим на (-1) . Получим равносильную систему

$$\begin{cases} a = -4, \\ b = -3, \\ k = 13, \\ c = 4, \\ d = -1. \end{cases}$$

Поставив третье уравнение на последнее место, имеем решение

$$\begin{cases} a = -4, \\ b = -3, \\ c = 4, \\ d = -1, \\ k = 13. \end{cases}$$

Значит,

$$g(x) \cdot (-4x - 3) + (x^2 + 2x + 1) \cdot (4x^2 - x + 13) = 1.$$

Откуда

$$g(\alpha) \cdot (-4\alpha - 3) + (\alpha^2 + 2\alpha + 1) \times \\ \times (4\alpha^2 - \alpha + 13) = 1$$

и

$$\frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 4\alpha^2 - \alpha + 13,$$

поэтому

$$\frac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = (\alpha^2 - 3\alpha - 1) \cdot (4\alpha^2 - \alpha + 13) = \\ = 4\alpha^4 - 13\alpha^3 + 12\alpha^2 - 38\alpha - 13.$$

По условию задачи $\alpha^3 = -\alpha^2 - 3\alpha - 4$. Умножая обе части этого равенства на α , получим: $\alpha^4 = -\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha = -2\alpha^2 - \alpha + 4$. Тогда

$$4\alpha^4 - 13\alpha^3 + 12\alpha^2 - 38\alpha - 13 = \\ = -8\alpha^2 - 4\alpha + 16 + 13\alpha^2 + 39\alpha + \\ + 52 + 12\alpha^2 - 38\alpha - 13 = \\ = 17\alpha^2 - 3\alpha + 55.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = 17\alpha^2 - 3\alpha + 55.$$

Список источников

1. Губин А.Ю., Тропина Н.В., Таранова М.В., Пугач А.Ю., Скворцова О.В. Ознакомительная практика: элементарная математика: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2022. – 259 с.

2. Кузьмичев А.И. Учебная практика (алгебра): учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2014. – 136 с.

3. Кузьмичев А.И. Линейная алгебра-1: Курс лекций. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2007. – 136 с.

4. Тропин М.П. Алгебра: теория делимости. Курс лекций. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2007. – 84 с.

5. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва: Наука, 1972. – 304 с.

Статья поступила в редакцию

15.11.2022.

Принята к публикации

10.05.2023.



ЕЩЁ РАЗ О ТЕОРЕМЕ МЕНЕЛАЯ

ONCE AGAIN ABOUT MENELAUS' THEOREM

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_46

А.В. Осипов, канд. физ.-мат. наук, доцент,
СПбГУ, Мат-мех, av_osipov@mail.ru,

В.И. Рыжик, канд. пед. наук,
Лицей «Физико-техническая школа»
им. Ж.И. Алфёрова, Санкт-Петербург,
rvi@inbox.ru

A.V. Osipov, PhD (Phys&Math), Associate Professor,
St. Petersburg State University,
av_osipov@mail.ru,

V.I. Ryzhik, PhD (Pedagogy),
Lyceum «Physico-Technical School»
named after Zh.I. Alferov, St. Petersburg,
rvi@inbox.ru

Аннотация: статья возвращает читателя к классическим теоремам Менелая и Чева. В терминах так называемых «правильных произведений» формулируется теорема Менелая для замкнутой ломаной. Доказательство использует предложенное в книгах [1, 10] проектирование на выделенную прямую и проще традиционного. Теорема Чева доказывается применением теоремы Менелая. Используя понятие гармонической сопряжённости, авторы показывают, что существует естественная связь между обеими теоремами

Abstract: the article proposes a new approach to the classical theorems of Menelaus and Cheva. Menelaus' theorem for a closed polyline is formulated in terms of the so-called «regular products». The proof uses design and is simpler than traditional one. Cheva's theorem is proved by applying Menelaus's theorem. With the concept of harmonic conjugacy the authors show that there is a natural connection between both theorems

Ключевые слова: теорема Менелая, чевианы, гармоническое отношение

Keywords: Menelaus theorem, cevians of a triangle, harmonic ratio

© А.В. Осипов, В.И. Рыжик 2023

В последние годы при изучении школьной планиметрии заметно повышенное внимание к теоремам Чева и Менелая. Предлагаются различные их доказательства, а также множество задач, эффективно решаемых с их помощью. Естественно, последние слова в этом направлении вряд ли сказаны. Ниже предлагается относительно новый подход к этим теоремам и показаны их связи между собой.

Гармонические отношения

Пусть AB – произвольный отрезок и точки P и Q лежат на прямой AB , не совпадая с концами отрезка. Говорят, что

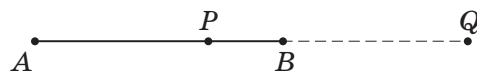


Рис. 1. Отрезок PQ делит гармонически отрезок AB и наоборот

точки P и Q гармонически делят отрезок AB , если равны отношения

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} \quad (1)$$

(от точки деления до одного конца, от точки деления до другого конца). Говорят также, что отрезок PQ делит гармонически отрезок AB . При этом точки P и Q называют гармонически сопряжёнными

относительно отрезка AB . Переставляя внутренние члены пропорции (1), получим, что отрезок AB делит отрезок PQ гармонически.

Задача 1. Если точки P и Q являются гармонически сопряжёнными и находятся по разные стороны от одного из концов отрезка, то при приближении точки P к этому концу точка Q также приближается к нему. И наоборот. Докажите.

Доказательство. Пусть A и B – концы отрезка, P – внутренняя точка, не совпадающая с серединой отрезка (в противном случае у неё не было бы сопряжённой), Q – гармонически сопряжена с P (рис. 1). Ровно один из концов отрезка AB разделяет эти точки. Пусть это, например, точка B . Обозначим через a , x , y длины отрезков AB , PB , BQ . Из условия гармоничности следует, что $x/(a - x) = y/(a + y)$. Заметим теперь, что дробь в левой части равенства уменьшается при уменьшении x (что означает приближение точки P к точке B), а дробь в правой части равенства уменьшается при уменьшении y (это становится очевидным, если представить правую часть в виде $1 - a/(a + y)$).

Задача 2. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C треугольника ABC гармонически делят сторону AB . Докажите.

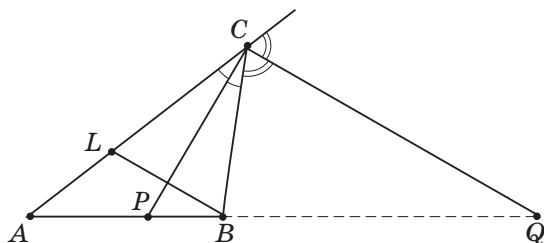


Рис. 2. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C гармонически делят отрезок AB

Доказательство. Известно, что $PA/PB = CA/CB$. Покажем, что такое же

равенство верно с заменой буквы P на букву Q . Для этого проведём отрезок BL , где точка L находится на стороне AC , параллельный CQ . Выпишем пропорции: $QA/QB = CA/CL$. Треугольник CBL равнобедренный, поскольку CP является продолжением и высоты, и биссектрисы. Следовательно, $CL = CB$, откуда получаем искомое соотношение.

По аналогии с прямой скажем, что точка M , лежащая вне прямой AB , вместе с точкой P одинаково делят отрезок AB , если $PA : PB = MA : MB$.

Теорема Менелая для замкнутой ломаной

Рассмотрим замкнутую ломаную. Как угодно обозначим её вершины, то есть концы отрезков, составляющих ломаную (звеньев). Пусть l – произвольная прямая, не параллельная ни одному из звеньев ломаной и не проходящая через вершины. Для каждого звена AB обозначим как угодно, например P , точку пересечения прямой AB с l . Отношения PA к PB и PB к PA будем называть **отношениями Менелая** для отрезка AB и прямой l . Для каждого звена выпишем буквенное обозначение отношения Менелая (одного из двух) и запишем произведение этих отношений. Это произведение, записанное в буквенном виде, назовем **правильным**, если каждая буква встречается в числителе и знаменателе один раз.

Теорема Менелая для замкнутой ломаной. Правильное произведение отношений для всех звеньев равно 1.

Доказательство. В любом месте проведём прямую m , перпендикулярную l (рис. 3). Заметим, что отношение отрезков на любой прямой, не перпендикулярной к m , будет равно отношению проекций этих отрезков на m .

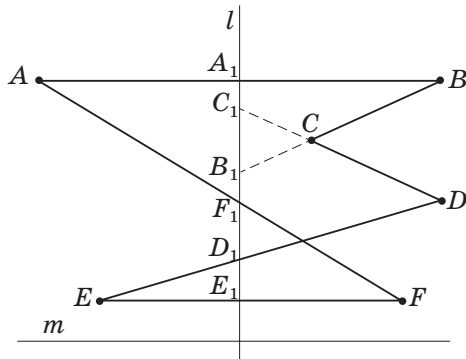


Рис. 3. Пример ломаной $ABCDEFA$ и секущей l

Для примера выпишем отношения Менелая для ломаной на рисунке 3:

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{CB_1}{B_1C} \cdot \frac{DC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1E} \cdot \frac{FE_1}{E_1F} \cdot \frac{FF_1}{F_1A} = 1. \quad (2)$$

Заметим также, что из каждой вершины ломаной выходят два отрезка от этой вершины до пересечения с l , которые участвуют в рассматриваемых отношениях. Например, из вершины B выходят отрезки BA_1 и BB_1 . При этом обозначение одного отрезка будет находиться в числителе, а другого в знаменателе. Проекция этих отрезков на m равны, поэтому в правильном произведении они сократятся. Для получения правильного произведения достаточно взять любое отношение первым, а затем пройти по цепочке последовательных звеньев, переворачивая следующее отношение, если буква, обозначающая последнюю вершину, повторилась. Например, в списке (2) второе отношение следует перевернуть, так как буква B второй раз встретилась в знаменателе. Переворачивая, если нужно, отношения и дальше, получим правильное произведение

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1E} \cdot \frac{EE_1}{E_1F} \cdot \frac{FF_1}{F_1A} = 1.$$

Доказательство закончено.

Задача 3. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямая t пересекает прямые AB , BC , CD и DA в точках K , L , M , N соответственно. При этом точка K находится на стороне AB и делит её в отношении $2 : 3$, считая от вершины A . Точка L находится на стороне BC и делит её в отношении $3 : 4$, считая от вершины B . Точка M делит CD в отношении $4 : 5$, считая от вершины C . Найти ND , если сторона AD равна 6.

Решение. Выписываем правильное произведение Менелая:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1.$$

По условию $AK/KB = 2/3$, $BL/LC = 3/4$, $CM/MD = 4/5$, откуда получаем, что $DN/NA = 5/2$. Следовательно, точка N находится либо с той стороны от точки A , которая не содержит точку D , либо внутри отрезка AD . По условию точки A и B , а также точки B и C находятся по разные стороны от прямой t . Точки A и D не могут находиться по разные стороны от прямой t , так как прямая t может пересекать выпуклый многоугольник только в двух точках. Поскольку $DN > NA$, то $ND = NA + AD$, откуда получаем, что $NA = 4$ и $ND = 10$.

О т в е т: $ND = 10$.

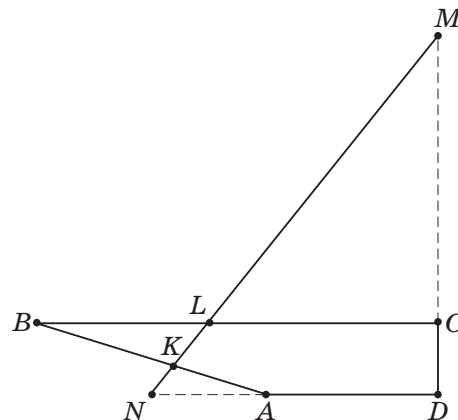


Рис. 4. Четырёхугольник $ABCD$ пересекается прямой t

Теорема Чевы

Рассмотрим треугольник ABC и три отрезка AA_1 , BB_1 , CC_1 , каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

Такие отрезки будем называть **чевианами**. Если чевианы имеют общую точку, то мы будем говорить, что они **встречаются** (рис. 5). Эту общую точку будем называть также точкой Чевы для указанных чевиан. На рисунке 5 она обозначена буквой Q .

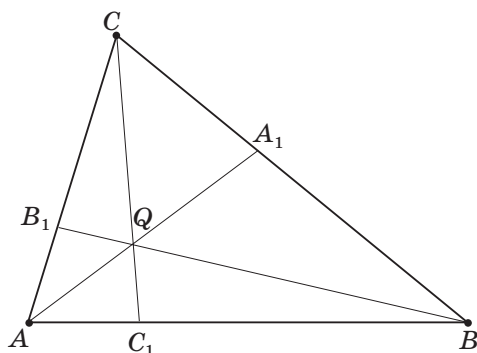


Рис. 5. Три чевианы встречаются в точке Q

Теорема Чевы. Если три чевианы встречаются, то произведение всех отношений отрезков, на которые точки деления A_1 , B_1 , C_1 разбивают соответствующие стороны, равно 1.

Доказательство. Применим дважды теорему Менелая. Сначала применим для треугольника CC_1B и прямой AA_1 :

$$\frac{QC}{QC_1} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{AB} = 1.$$

Затем применим для треугольника CC_1A и прямой BB_1 :

$$\frac{QC_1}{QC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{BA}{BC_1} = 1.$$

Перемножив два этих равенства, получаем

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1.$$

Доказательство закончено.

Связь теорем Менелая и Чевы

Оказывается, теоремы Менелая и Чевы связаны между собой.

Теорема о двойственности. Рассмотрим треугольник ABC и три чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Если эти чевианы встречаются, то точка K пересечения прямых A_1B_1 и AB (рис. 6) гармонически сопряжена точке C_1 относительно отрезка AB .

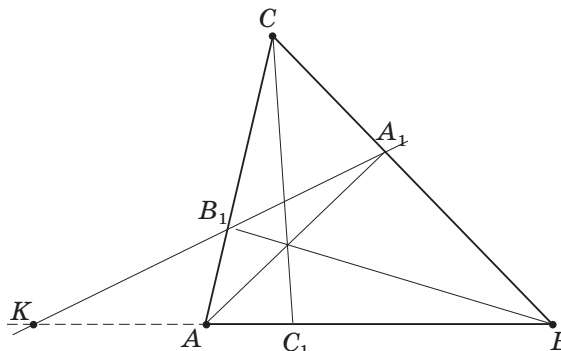


Рис. 6. Точка K гармонически сопряжена точке C_1

Доказательство. Согласно теореме Менелая выполняется равенство

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1.$$

С другой стороны, по теореме Чевы выполняется равенство

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1.$$

В этих равенствах различны только первые сомножители. Следовательно,

$$\frac{KA}{KB} = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

Доказательство закончено.

Следствие. В условиях теоремы о двойственности точки K , L , M , гармонически сопряжённые соответственно точкам C_1 , A_1 , B_1 , лежат на одной прямой.

Доказательство. Обозначим через l прямую, проходящую через точки K и L . Пусть N — точка, в которой прямая l пересекается с прямой AC . Из теоремы Менелая следует, что

$$\frac{KA}{KB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

С другой стороны, поскольку по условию теоремы чевианы встречаются, то

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1.$$

Первые два сомножителя равны по предположению о том, что K и C_1 гармонически сопряжены. Следовательно, равны и третьи сомножители. Но точка N не может совпадать с B_1 (никакая прямая не может пересекать лишь одну сторону треугольника). Значит, точка N совпадает с точкой M .

Следствие доказано.

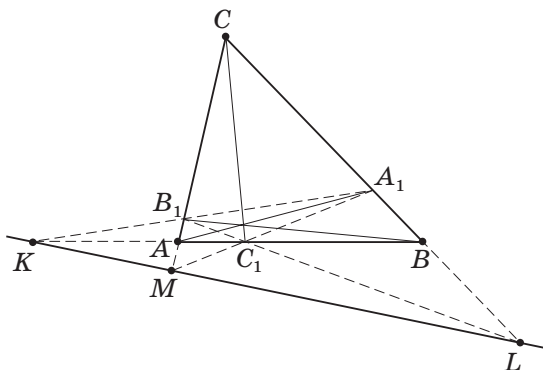


Рис. 7. Иллюстрация к следствию из теоремы о двойственности

Теперь мы можем сформулировать в общем виде теорему Менелая для треугольника.

Классическая теорема Менелая. Пусть ABC – произвольный треугольник. Точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на прямых BC , AC , AB соответственно, но не совпадают с вершинами треугольника. Назовём их **точками разбиения**.

Пусть:

А) одна или все три точки разбиения являются внешними по отношению к соответствующим сторонам треугольника. Тогда равенство

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда точки разбиения лежат на одной прямой.

Б) либо ни одной, либо две точки разбиения являются внешними по отношению к соответствующим сторонам треугольника. Тогда равенство

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

выполняется тогда и только тогда, когда чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 встречаются.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы о двойственности и её следствия.

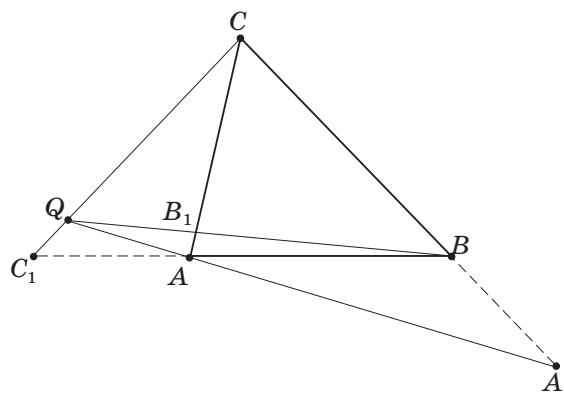


Рис. 8. Иллюстрация к случаю Б) классической теоремы Менелая. Здесь две точки разбиения являются внешними

Теорема Чевы и площади

Теперь мы рассмотрим площади треугольников, которые образуются при разбиении треугольника ABC встречающимися чевианами.

Пусть произвольный треугольник ABC имеет площадь S . Пусть S_1 , S_2 , S_3 , ..., S_6 – такие площади, что

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_6 = S. \quad (3)$$

Будем считать, что эти числа соответствуют площадям так, как указано на рисунке 9.

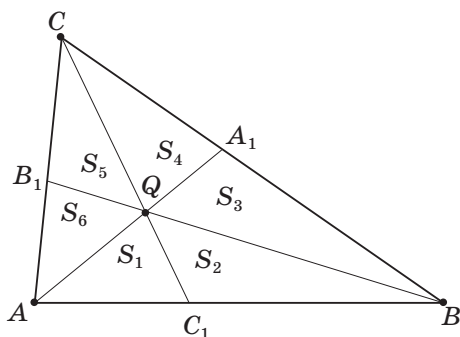


Рис. 9. Обозначения площадей в теореме Чевы

Задача 4. Если:

А) чевианами являются медианы, то

$$S_1 = S_2 = \dots = S_6 = \frac{S}{6};$$

Б) чевианами являются биссектрисы, то $S_1, S_2, \dots, S_6$ равны, соответственно,

$$\frac{bc}{a+b}\lambda, \quad \frac{ac}{a+b}\lambda, \quad \frac{ca}{b+c}\lambda,$$

$$\frac{ba}{b+c}\lambda, \quad \frac{ab}{a+c}\lambda, \quad \frac{cb}{a+c}\lambda,$$

где $\lambda = \frac{S}{P}$, P — периметр;

В) чевианами являются высоты, то соответствующие площади равны

$$R^2 \sin 2B \cos^2 A, \quad R^2 \sin 2A \cos^2 B, \\ R^2 \sin 2C \cos^2 B, \quad R^2 \sin 2B \cos^2 C, \\ R^2 \sin 2A \cos^2 C, \quad R^2 \sin 2C \cos^2 A,$$

где R — радиус описанной окружности.

Во всех случаях выполняется условие

$$S_1 S_3 S_5 = S_2 S_4 S_6, \quad (4)$$

которое будем называть **условием Чевы для площадей**.

Это равенство можно получить, не используя тригонометрию. Для этого достаточно записать отношения площадей частичных треугольников, примыкающих к одной стороне данного треугольника, а затем вычислить соответствующее произведение.

Когда равенство произведений было

получено, один из авторов статьи придал пяти последовательным площадям, начиная с S_1 и по S_5 (против часовой стрелки) такие значения: $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, S_4 = 4, S_5 = 5$. Задание — вычислить S_6 . Согласно полученной формуле $S_6 = 15/8$. Оказывается, результат неверен. Из рисунка ясно, что если $S_1 + S_2 = 3 = S_3$, то $S_6 + S_5 = S_4$, откуда получаем $S_6 = -1$. Как в нормальной формуле получен нелепый результат? Что-то не учтено. Но что?

Мы здесь поставим вопрос: при каком условии на числа $S_1, S_2, \dots, S_6$ существует разбиение чевианами треугольника ABC с такими площадями. Начнём с простейшего случая «свободного» разбиения, а именно: произвольная точка O внутри треугольника соединяется со всеми вершинами и с точками разбиения, лежащими на сторонах.

Утверждение. Для любого набора положительных чисел $S_1, S_2, \dots, S_6$, удовлетворяющих условиям (3) и (4), существуют точки $A_1 \in BC, B_1 \in AC, C_1 \in AB$ и некоторая точка O внутри треугольника ABC такие, что

$$S_{AOC_1} = S_1, \quad S_{BOC_1} = S_2, \quad S_{BOA_1} = S_3, \\ S_{COA_1} = S_4, \quad S_{COB_1} = S_5, \quad S_{AOB_1} = S_6. \quad (5)$$

При этом точка O определяется однозначно.

Для доказательства отметим точки A_1, B_1, C_1 из равенств

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_1}{S_2}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_3}{S_4}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_5}{S_6}.$$

Кроме того, на сторонах AB, BC, AC определим также точки C_2, A_2, B_2 так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{S_5 + S_6}{S_3 + S_4}, \quad \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{S_1 + S_2}{S_5 + S_6}, \quad \frac{CB_2}{B_2A} = \frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2}.$$

Проведём отрезок CC_2 и выберем точку O на нём. При движении точки O от C к C_2 площадь треугольника AOB уменьшается

от S до нуля. Следовательно, найдется положение точки такое, что $SAOB = S_1 + S_2$. И это положение определено однозначно, поскольку монотонность строгая. Зафиксируем это положение точки O и соединим её с точками A_1, B_1, C_1 . Получившееся разбиение является искомым. Действительно, отношение площадей треугольников BOC и AOC определяется выбором точки C_2 , и, следовательно, эти площади определены корректно. А внутри этих треугольников отношение площадей определяется выбором точек A_1, B_1, C_1 .

Примечание. Мы не использовали точки A_2 и B_2 , однако ту же самую конструкцию можно осуществить с использованием каждой из этих точек, что приведёт к той же точке O .

Теорема о реализуемости. Пусть ABC – произвольный треугольник и $S_1, S_2, S_3, \dots, S_6$ – положительные числа, удовлетворяющие условиям (3; 4).

Для того, чтобы этот набор чисел удовлетворял условиям (5), где O – точка Чебы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись любые два из трёх условий:

$$\frac{S_5 + S_6}{S_3 + S_4} = \frac{S_1}{S_2}, \quad \frac{S_1 + S_2}{S_5 + S_6} = \frac{S_3}{S_4},$$

$$\frac{S_3 + S_4}{S_1 + S_2} = \frac{S_5}{S_6}.$$

Заметим при этом, что выполнение всех трёх условий влечет выполнение условия (4).

Доказательство. Необходимость, то есть выполнение каждого из трёх условий, следует из того, что точка O является точкой Чебы, то есть является точкой пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 . Проверим достаточность. Пусть, например, выполняются два первые условия. Тогда точка B_1 совпадает с точкой B_2 , а точка A_1 с точкой A_2 . Следовательно, точка O является пересечением двух отрезков Чебы и, таким образом, в силу равенства (4) через

неё проходит и третий отрезок Чебы. Теорема доказана.

Задача 5. Используя свойства площадей для чевиан, встречающихся в точке Q , докажите равенство

$$\frac{QC_1}{CC_1} + \frac{QB_1}{BB_1} + \frac{QA_1}{AA_1} = 1.$$

Решение. Заметим, что отношение QC_1 к CC_1 равно отношению суммы площадей S_1 и S_2 к площади всего треугольника (рис. 9). Аналогично поступаем с остальными отношениями и складываем полученные дроби.

Для следующей задачи впишем в треугольник ABC окружность и пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания этой окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 будем называть чевианами Жергонна.

Задача 6. Покажите, что чевианы Жергонна встречаются. Точка G их пересечения называется точкой Жергонна. Пусть в треугольнике ABC известны стороны: $AB = 9, BC = 8, AC = 5$. Для чевиан Жергонна найдите величину

$$F = \frac{GA_1}{GA} + \frac{GB_1}{GB} + \frac{GC_1}{GC}.$$

Решение. Обозначим через p полупериметр треугольника. В данном случае он равен 11. Как известно, отрезки касательных к вписанной окружности равны $AB_1 = AC_1 = p - a, BC_1 = BA_1 = p - b, CA_1 = CB_1 = p - c$.

Рассмотрим произведение

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A}.$$

$$\text{Оно равно } \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{p-c}{p-a} = 1.$$

Следовательно, условие Чебы выполняется. В нашем конкретном случае $p - a = 3, p - b = 6, p - c = 2$. Для вычисления F , трижды используя теорему Менелая, получим, что

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{1}{2}; \quad \frac{GB_1}{GB} = \frac{1}{5}; \quad \frac{GC_1}{GC} = 1.$$

Таким образом, $F = 1,7$.

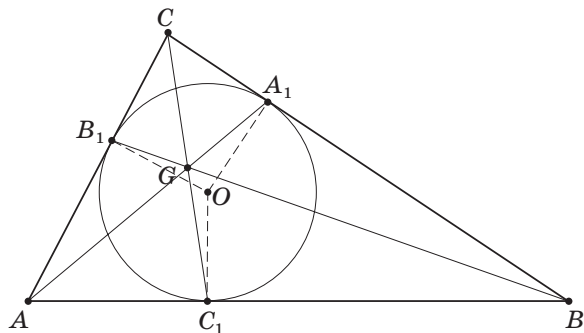


Рис. 10. Чевианы Жергонна

Список источников

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. – М.: Учпедгиз, 1957.
2. Делоне Б., Житомирский О. Задачи по геометрии. – М.: Физматгиз, 1959.

3. Ефремов Д.Д. Новая геометрия треугольника. – М.: Ленанд, 2015.
4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2019.
5. Понарин Я.П. Геометрия для 7–11 классов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
6. Александров А.Д. и др. Геометрия для 8–9 классов. – М.: Просвещение, 1996.
7. Шарыгин И. Теоремы Менелая и Чевы. – Квант, 1976, №11, с. 22–30.
8. Эрдниев Б., Манцаев Н. Теоремы Чевы и Менелая. – Квант, 1990, № 3, с. 56–59.
9. Орач Б. Теорема Менелая. – Квант, 1991, № 3, с. 52–55.
10. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. «Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия. Планиметрия», 1965 (2000).

Статья поступила в редакцию 04.02.2022.
Доработанный вариант статьи поступил 11.10.2022.
Принята к публикации 31.03.2022.

Читайте в третьем номере журнала «Математика для школьников» статьи следующих авторов

ИДУ НА ЭКЗАМЕН

Северюков П.Ф. (г. Ставрополь)

ЗАДАЧА НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ В ПРАВИЛЬНОЙ ПРЯМОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЕ

В задачах стереометрии у учащихся вызывают особые затруднения задачи, в которых требуется определить расстояние от прямой до плоскости и (или) расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

АКАДЕМИЯ МАТЕМАТИКИ

Совертков П.И., (г. Санкт-Петербург)

ДИАГРАММА ВОРОНОГО НА ПЛОСКОСТИ С РАЗЛИЧНЫМИ МЕТРИКАМИ

В статье рассматривается построение диаграммы Вороного на плоскости с различными метриками.

КЛУБ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Смирнов В.А., Смирнова И.М. (г. Москва)

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

В статье рассматриваются классические замечательные кривые, определяемые как геометрические места точек; предлагаются задачи на построение и моделирование, которые можно использовать для организации исследовательской деятельности учащихся 7–9-х классов.

НАУЧНОЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ НАСЛЕДИЕ ЛЬВА ДМИТРИЕВИЧА КУДРЯВЦЕВА (к 100-летию со дня рождения)

SCIENTIFIC AND PEDAGOGICAL HERITAGE OF LEV DMITRIEVICH KUDRYAVTSEV (to the 100th anniversary of his birth)

Персоналии 5.8.1

УДК: 378.12

Personalities 5.8.1

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_54

Р.А. Мельников, канд. пед. наук, доцент,
roman_elets_08@mail.ru;

О.А. Саввина, доктор пед. наук, профессор,
oas5@mail.ru;
ЕГУ им. И.А. Бунина

R.A. Melnikov, PhD (Pedagogy), Associate Professor,
roman_elets_08@mail.ru;

O.A. Savvina, ShiD (Pedagogy), Professor,
oas5@mail.ru;
Bunin Yelets State University

Аннотация: в 2023 году исполняется 100 лет со дня рождения учёного-математика, доктора физико-математических наук, профессора, члена-корреспондента РАН Льва Дмитриевича Кудрявцева (1923–2012), известного специалиста в области теории функций, топологии и функционального анализа. В статье кратко описаны биография и научный путь учёного; впервые раскрыты его мировоззренческие взгляды, выявлены достоинства созданной им учебно-методической литературы (учебников и задачников по математическому анализу). Реконструированы взгляды Л.Д. Кудрявцева на проблемы отечественного высшего и среднего математического образования

Keywords: 2023 marks the 100th anniversary of the birth of the mathematician, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, corresponding member of the Russian Academy of Sciences Lev Dmitrievich Kudryavtsev (1923–2012), a well-known specialist in the field of function theory, topology and functional analysis. The article briefly describes the biography and scientific path of the scientist; his worldview views are revealed for the first time, the advantages of the educational and methodological literature created by him (textbooks and problems on mathematical analysis) are revealed. L.D. Kudryavtsev's views on the problems of domestic higher and secondary mathematical education are reconstructed

Ключевые слова: Л.Д. Кудрявцев, математик, топология, теория функций, математический анализ, учебник, задачник

Abstract: L.D. Kudryavtsev, mathematics, topology, theory of functions, mathematical analysis, textbook, problem book

© Саввина О.А., Мельников Р.А. 2023



Лев Дмитриевич Кудрявцев родился 25 марта 1923 года в Златоглавой. «Его отец Дмитрий Васильевич (1886–1943), был выпускником Аракчеевского кадетского корпуса, служил офицером царской армии, участвовал в Первой мировой войне» [1, с. 78]. «Мать Евгения Львовна (1895–1982) происходила из дворянского рода Кожиных, окончила с золотой медалью Алфёровскую женскую гимназию и курсы Московского Серафимовского комитета Красного Креста» [1, с. 78]. У четы Кудрявцевых было три сына: Юрий (1919–1943), Лев (1923–2012) и Александр

(1934–1993). После окончания в 1940 году московской средней школы № 59 Лев Дмитриевич подал аттестат круглого отличника в приёмную комиссию МГУ и был зачислен без вступительных экзаменов на механико-математический факультет ведущего вуза страны. «В 1941 году большая группа студентов и преподавателей университета была эвакуирована в Ашхабад (столицу Туркменистана). Оставшись в столице, Лев Дмитриевич перевёлся в Московский городской педагогический институт, где проучился всего один семестр. Уже весной 1942 года всех оставшихся студентов и преподавателей МГУ собрали, и университет возобновил свою работу» [1]. Сначала студент Кудрявцев с особым увлечением посещал занятия И.М. Гельфанда (1913–2009). Когда же в 1943 году в столицу вернулись известные математики Н.Н. Лузин (1883–1950), П.С. Александров (1896–1982) и А.Н. Колмогоров (1903–1987), вектор научных интересов Л.Д. Кудрявцева переместился в область топологии и теории функций. «В 1945 году он с отличием окончил университет и поступил в аспирантуру Института математики МГУ» [1].

На протяжении двух с половиной лет он увлечённо «изучал гомоморфизмы и изоморфизмы различных гомологических групп топологических пространств. В частности, Лев Дмитриевич доказал изоморфизм различных гомологических групп локально компактных пространств со счётной базой» [1]. Эти изыскания легли в основу содержания кандидатской диссертации «О группах Бетти топологических пространств», которую он блестяще защитил в 1948 году под руководством П.С. Александрова.

Будучи аспирантом, Л.Д. Кудрявцев начал работать на физико-техническом факультете *alma mater*, позднее перерос-

шем в МФТИ. Заручившись рекомендацией профессора Л.А. Люстерника (1899–1981) в том же 1948 году, он устроился на работу в отдел численных методов МИАН им. В.А. Стеклова.

В начале 1950-х годов Л.Д. Кудрявцев занялся изучением геометрических свойств дифференцируемых отображений областей n -мерных пространств. При достаточно широких предположениях он доказал «принцип сохранения области», «принцип соответствия границ» и ряд других свойств, аналогичных геометрическим свойствам отображений, задаваемых гармоническими функциями. Обобщил теоремы Руше и Гурвица, хорошо известные в классическом анализе. Используя понятие дифференцируемого отображения на измеримом множестве, получил формулу замены переменных в кратном интеграле Лебега, без предположения о взаимной однозначности отображения, задаваемого этой заменой. «За цикл работ по теории дифференцируемых отображений Л.Д. Кудрявцев был удостоен премии Московского математического общества для молодых учёных (1953 г.)» [1].

В 1954 году он стал докторантом М.А. Лаврентьева, возглавлявшего МИАН им. В.А. Стеклова. В это время под влиянием выдающегося математика С.М. Никольского (1905–2012) в область научных интересов Л.Д. Кудрявцева вошли вопросы вложения функциональных пространств. В 1956 году в стенах МИАН им. В.А. Стеклова он защитил докторскую диссертацию «Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области». Вскоре получил звание профессора.

Его административно-научная карьера складывалась довольно успешно. С янва-

ря 1954 года Лев Дмитриевич возглавил кафедру высшей математики МФТИ, приняв «эстафету» от С.М. Никольского. Затем был заместителем директора МИАН (1961–1968), заведующим отделом теории функций (1988–1994).

Научно-педагогическая деятельность Л.Д. Кудрявцева была неразрывно связана с МФТИ, где он начал трудиться на кафедре высшей математики ещё в 1947 году. Именно на физтехе раскрылся его многогранный талант лектора-математика и автора учебной литературы. В МФТИ он работал без перерыва до 2002 года.



Первая печатная работа Л.Д. Кудрявцева, связанная с проблемами преподавания математики в вузе, – небольшая заметка «О преподавании высшей математики в МФТИ», была написана для выступления на совещании заведующих кафедрами высшей математики втузов в мае 1959 года и вошла в сборник «Проблемы преподавания высшей математики» (1961). Своё педагогическое кредо автор сформулировал так: «Только тот преподаватель сможет добиться успеха в воспитании студента, которого студенты любят и уважают за его увлечённость своим делом и добросовестное отношение к своей работе, к своим обязанностям, за его доброту и человечность, принципиальность и об-

ективность, нетерпимость к несправедливости» [2].

Его двухтомный учебник «Математический анализ» [3], впервые вышедший в свет в 1970 году, позднее неоднократно переиздававшийся, по праву вошёл в число бестселлеров учебной литературы для технических вузов, официально рекомендованной для изучения этого раздела высшей математики.

Лев Дмитриевич возглавлял авторский коллектив «Сборника задач по математическому анализу» [5]. В него вошли упражнения, охватывающие все ключевые темы классического математического анализа. К достоинствам собранных в этих книгах задач следует отнести фундаментальность знаний, необходимых для их решения; систематичность подачи материала и его практическая ориентированность.

В 1974 году на Всемирной ассамблее математиков Л.Д. Кудрявцева избрали «членом исполнительного комитета Международной комиссии по математическому образованию» [1]. Новые полномочия и обязанности потребовали от него погружения в изучение проблем математического образования и поиска путей их преодоления. Работая в этом направлении, в декабре 1975 года Л.Д. Кудрявцев в стенах центрального лектория Всесоюзного общества «Знание» прочитал лекцию на тему «Современное математическое образование инженера». В августе 1976 года он сделал доклад «О математическом образовании в высших технических учебных заведениях» на Третьем Международном конгрессе по математическому образованию в городе Карлсруэ (ФРГ). Эти материалы были положены в основу содержания небольшой брошюры «Мысли о современной математике (1977 г.)». «Основная мысль, которую развивает её автор, заключается в том, что нет «чистой»

и прикладной математики, что, несмотря на внешнюю разобщённость своих частей, она едина и это единство основано на самой сущности математики» [4, с. 4]. Отсюда вытекает, «что обучение математике нельзя подменять обучением ряду её приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий и не учитывая внутреннюю логику самой математики» [4]. Как это звучит актуально в эпоху ОГЭ, ЕГЭ и тотальной цифровизации образования!

Будучи православным христианином, Л.Д. Кудрявцев не оставлял без внимания проблемы нравственности в образовании. Неудивительно, что в эпистолярном наследии учёного есть брошюры [6], [7], [8], посвящённые мировоззренческому контексту проблем образования.

В них он рассмотрел, например, такие вопросы, как вера, наука, образование; нравственное воспитание молодёжи; культура речи; раскаяние и покаяние. Высказанные им мысли звучали и продолжают звучать актуально. Л.Д. Кудрявцев утверждал: «Светское общее образование должно стимулировать желание духовного роста, духовного совершенствования, возникновение внутренней потребности руководствоваться в жизни общечеловеческими нравственными принципами и чувством долга, дабы человек осознал, что духовное — это главное в жизни, что без обретения духовного нельзя стать по-настоящему культурным человеком» [6, с. 78].

Л.Д. Кудрявцев был глубоко порядочным, чутким и интеллигентным человеком. Весь его внешний облик, высокая культура общения и отзывчивость свидетельствовали о его благочестии, унаследованном, по-видимому, от родителей. В личной беседе с одним из авторов этой статьи он признавался, что ежедневно исполняет молитвенное правило, поми-

нает поимённо знакомых и родственников. В его педагогическом наследии сохранились такие слова: «Самой высокой составляющей личности человека является его духовность. Можно, соблюдая моральный кодекс, быть нравственным человеком, но вместе с тем быть лишённым духовности. Духовность человека определяется по его устремлениям, жизненным целям, его идеалам и отношением к людям. Духовность составляют чистота помыслов человека, бескорыстная любовь к людям, милосердное к ним отношение, познание самого себя как ничтожной частицы и вместе с тем частью Вселенной. Вершиной духовности является восприятие своей жизни, как величайшего Божия дара, самоотвержение ради Господа Бога, осознание необходимости этого, что только и может породить истинное чувство личного смирения, сочувствия другим людям и высокую нравственность» [7, с. 29].

В культуре общения в России конца XX века, касающейся использования русского языка, Л.Д. Кудрявцев с болью отмечал следующие тенденции: «В целом за последние десятилетия русский язык заметно обеднел, засорился грамматически неправильными образованиями и не всегда правильными американизмами, приобрёл казённый стиль» [7, с. 72].

Размышляя о путях повышения уровня среднего образования; о принципах, лежащих в основе его модернизации, Л.Д. Кудрявцев замечал: «Необходимо, чтобы те, кто ещё понимает, что смысл жизни состоит не только в приобретении материальных благ и обретении власти, что жизнь на самом деле гораздо богаче и интереснее, начали самые активные действия, содействующие перестройке нашей жизни в сторону повышения духовности и нравственности» [8].

Многогранная деятельность Льва Дмитриевича включала также и его редакторскую работу. Начиная с 1965 года, он «был членом редколлегии, а потом стал старшим редактором отдела дифференциальных уравнений с частными производными реферативного журнала «Математика» [1]. Являлся одним из ведущих редакторов научно-популярного журнала «Квант», целевой аудиторией которого была советская молодёжь, интересующаяся точными науками и техникой. На протяжении без малого 30 лет (с 1965 г. по 1992 г.) был внештатным сотрудником редакции научного журнала «Дифференциальные уравнения». Его первый выпуск появился в 1965 году в Минске, и с течением времени журнал стал буквально культовым. Опубликовать статью в нём стремились ведущие математики СССР. Это способствовало тому, что планка требований к рукописям была поднята на недостижимый для многих уровень, а Лев Дмитриевич оценивал качество поступающих работ, писал рецензии на них. Для многих молодых учёных прохождение такого отбора становилось «путёвкой» в необъятный мир дифференциальных уравнений. Кроме того, Л.Д. Кудрявцев был востребованным экспертом и в нескольких редакциях международных журналов, например, таких, как «Educational Studies in Mathematics» (Нидерланды), «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», а также участвовал в разработке соглашения и его реализации между АН СССР и Национальной академией США по совместному выпуску англо-русского (в СССР) и русско-английского (в США) словарей математических терминов.

«В 1966 году Лев Дмитриевич был консультантом ЮНЕСКО по математике в Индии, членом Комитета научно-технической помощи при Комиссии СССР

по делам ЮНЕСКО, а летом 1967 г. вместе с профессором М.А. Наймарком в течение месяца читал лекции по математике в ряде университетов Канады (Кингстон, Оттава, Монреаль, Торонто, Ванкувер, Эдмонтон), в 1975–1978 гг. был членом Исполнительного комитета Международной комиссии по математическому образованию (ICMI)» [1].

Был участником Международных математических конгрессов в Стокгольме (1962), Москве (1966), Ванкувере (1974), Хельсинки (1978) и многих международных конференций.

«На протяжении 27 лет (с 1959 по 1986) Л.Д. Кудрявцев работал экспертом Высшей аттестационной комиссии (ВАК)» [1]. Заметим, что ныне В.М. Филиппов (1951 г.р.) – действующий председатель ВАК Минобрнауки РФ и академик РАН, является учеником Льва Дмитриевича.

В течение многих лет он являлся заместителем президиума и председателем секции технических, экономических и сельскохозяйственных вузов Научно-методического совета (НМС) по математике при Минвузе СССР, под влиянием которого в советское время формировалось содержание математического образования в вузах различных профилей. Находясь на этом поприще, Л.Д. Кудрявцев направлял все свои усилия на то, чтобы поддерживать фундаментальность высшего математического образования и сохранять его лучшие традиции.

Лев Дмитриевич являлся скромным и в то же время щедрым душой человеком, но его заслуги были настолько заметны, что уже при его жизни были довольно высоко оценены. Он состоял членом-корреспондентом Академии наук СССР (1984), действительным членом Академии педагогических и социальных наук (1987), членом Европейской акаде-

мии наук в Брюсселе (2002). «В 1996 году за учебно-методический комплект по математическому анализу для высшей школы получил главную премию Международной академической издательской компании «Наука // Интерпериодика» за лучшую книгу по науке, технологии и образованию» [1]. «В 2004 году за выдающийся вклад в теорию функций, топологию и образование Л.Д. Кудрявцев получил медаль имени Блеза Паскаля, учреждённую ЕАН» [1]. Кроме того, он награждён медалью им. К.Д. Ушинского и Орденом Почёта.

Скончался Лев Дмитриевич 17 февраля 2012 года в Москве, последнее пристанище обрёл на Ваганьковском кладбище.

Научное и педагогическое наследие Л.Д. Кудрявцева не потеряло актуальности и в наши дни. Курс математического анализа Л.Д. Кудрявцева остаётся образцовым учебным руководством и поныне. Мысли учёного о приоритете духовно-нравственного над материальным компонентом в образовании, о значимости русского языка нашли воплощение в недавно принятых официальных нормативных документах¹. Так, через 23 года после публикации тезисов Л.Д. Кудрявцева о вреде американизмов вышел Федеральный закон, устанавливающий использование

иностранных слов только в том случае, если они «не имеют общеупотребительных аналогов в русском языке».

Список источников

1. Баврин И.И., Емельянов С.В., Емельянова И.С., Кириллов А.И., Колягин Ю.М., Полотовский Г.М., Розанова С.А., Розов Н.Х., Русаков А.А., Чубариков В.Н., Ягола А.Г. Лев Дмитриевич Кудрявцев (25 марта 1923 – 17 февраля 2012) // Математика в высшем образовании. – 2012. – № 10. – С. 78–84.

2. Колягин Ю.М., Саввина О.А., Тарасова О.В. Лев Дмитриевич Кудрявцев – мыслитель и педагог // Тезисы докладов 3-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвящённой 85-летию Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ. – 2008. – С. 77–78.

3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1–2. – М.: Высшая школа, 1970.

4. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её изучении. – М.: Наука, 1977. – 112 с.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1 – 3. – Изд. 2-е, переработ. и доп. – М.: Физматлит, 2012.

6. Кудрявцев Л.Д. Образование и нравственность. – М.: ПАИМС, 1994. – 95 с.

7. Кудрявцев Л.Д. Современное общество и нравственность. – М.: Наука, 2000. – 63 с.

8. Кудрявцев Л.Д. Среднее образование. Проблемы. Раздумья. – М.: Московский государственный университет печати, 2003. – 84 с.

Статья поступила в редакцию

22.02.2023.

Принята к публикации

17.03.2023.

¹ 9 ноября 2022 г. Президент РФ подписал Указ «Об утверждении Основ государственной политики по сохранению и укреплению традиционных российских духовно-нравственных ценностей», а 16 февраля 2023 года Госдума приняла закон (ФЗ №221977-8) о защите русского языка (О внесении изменений в Федеральный закон «О государственном языке Российской Федерации»).

ПЕРЕХОД ОТ РУКОПИСИ К ПЕЧАТНОМУ ИЗДАНИЮ: У ИСТОКОВ СОЗДАНИЯ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ

THE SHIFT FROM HANDWRITTEN TO PRINTED: AT THE ROOTS OF CREATING THE RUSSIAN MATHEMATICS TEXTBOOK

Научная статья 5.8.1
УДК 37.091.3

Scientific article 5.8.1
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_60

Г.В. Кондратьева, канд. пед. наук, доцент,
Государственный университет просвещения,
kondratevagv@mail.ru

G.V. Kondratyeva, PhD (Pedagogy),
State University of Education,
kondratevagv@mail.ru

Аннотация: в статье рассматривается история создания первого печатного учебника по математике на русском языке. Приведены краткие сведения об авторе И.Ф. Копиевском. Вскрыты особенности издания и сделана попытка их объяснения. Обсуждается роль книги для отечественного учебного книгоиздания

Abstract: the article deals with the history of the creation of the first printed mathematics textbook in Russian. It provides brief information about the textbook author I. Kopyevsky. The article deals with the particularities of the edition and tries to provide an explanation to them. The role of the textbook for Russian publishing is highlighted

Ключевые слова: обучение математике, рукопись, печатное издание, издательский проект

Keywords: teaching mathematics, manuscript, printed edition, publishing project

© Г.В. Кондратьева 2023

История отечественных школьных учебников математики исключительно разнообразна: здесь есть и учебники-долгожители, и учебники, например, созданные, но неизданные. Отдельный корпус представляют собой рукописные учебники. До нас дошли только рукописи XVII в., хотя имеются сведения о существовании рукописных математических текстов и более раннего времени.

Т.С. Полякова выделила следующие методические особенности первых русских рукописных учебных пособий по арифметике.

Первая особенность: в учебниках представлена относительно большая сумма знаний – от элементарных правил нумерации до достаточно сложных приёмов

решения задач. Вторая особенность: изложение материала в учебниках носит сугубо догматический характер, предлагаются готовые правила без каких-либо обоснований. Третья особенность: в центре арифметики находится тройное правило в качестве основного метода решения задач, в учебниках представлены преимущественно задачи коммерческой арифметики. Любая же покупка и продажа связаны с нахождением одного из членов пропорции. Четвертая особенность: задачи классифицируются не столько по методам их решения, сколько по применению в жизненных ситуациях. Пятая особенность: учебники арифметики выполняют не только образовательные функции, но и функции справочных пособий для ком-

мерческих расчётов. Шестая особенность: использование счётов. Седьмая особенность: учёт авторами национальных особенностей (русская система мер, фабула задач) [8]. Особенно нужно подчеркнуть первую и пятую особенности. Действительно, функционал рукописей, очевидно, был двойным: по ним и учились, и использовали в профессиональной деятельности.

Рукописные учебные пособия имели ряд серьёзных недостатков (ошибки, которые множились при переписке, проблемы с тиражированием и фактическая недоступность книг для широкого круга учащихся). Печатные книги не зависели от влияния переписчиков, являлись абсолютно одинаковыми, содержащиеся в них знания были унифицированными. Это было удобно для массового образования. После изобретения книгопечатания произошёл как качественный, так и количественный переворот в учебной литературе. Значительно выросло число и разнообразие учебных изданий. Естественно, увеличилось и число людей, которые читали или даже просто разглядывали то, что в них было напечатано, включаясь тем самым в некоторую образовательную среду.

В России ситуация с книгопечатанием складывалась следующим образом. Первая русская печатная точно датированная книга «Апостол» издана Иваном Фёдоровым и Петром Мстиславцем в 1564 году на Московском печатном дворе. На самом деле это не первая печатная книга. До «Апостола» на Руси с 1553 года было издано шесть книг, и практически одновременно с ним вышла седьмая, но все они без указания года и места издания. Их выпуск осуществила так называемая Анонимная типография. Книги были религиозного содержания.

Первой печатной книгой по математике (а именно: таблицы умножения от

1 до 100) было «Считание удобное, когда всякий человек, купующий и продающий зело может удобно изыскати всякие вещи» (1682 г.), изданное в Москве. Книга имела систему записи чисел кириллицей. Содержала 52 листа. Её нельзя назвать учебником, это однозначно справочные таблицы, которыми, конечно, можно было пользоваться в процессе обучения. Хотя в образовательной практике использовалась другая форма таблиц.

Первым печатным учебником математики, изданным в Москве, стала знаменитая «Арифметика» Л.Ф. Магницкого, точнее Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведённая, и во едино собранная, и на две книги разделена. Издание вышло в 1703 г., хотя очевидно, что автор работал над ней несколько лет. К разработке книги были привлечены лучшие интеллектуалы того времени. Реконструкция, проведенная современными исследователями, позволяет назвать в качестве участника создания книги, например, Фёдора Поликарповича Поликарпова-Орлова, который «правил» книгу, а также Василия Анофриевича Киприянова, который получил за труды по созданию Арифметики 8 рублей [13]. Сам Л.Ф. Магницкий, кстати, получил 12 рублей. Учебник Л.Ф. Магницкого содержит сведения по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии, астрономии, геодезии и навигации. По мнению Б.В. Гнеденко, с которым трудно не согласиться, «Арифметика» больше похожа на энциклопедию, нежели на учебное пособие [1, с. 46]. Отметим, что В.А. Киприянов вскоре создаёт табличный вариант учебника математики «Новый способ арифметики феорики или зрительные, сочинен вопросами ради удобнейшего понятия» – наглядный способ изучения теоретической арифметики (1705).

Часто бытует ошибочное мнение, что Арифметика Л.Ф. Магницкого – первый печатный учебник математики на книжно-славянском языке. В действительности первый печатный учебник математики на книжно-славянском языке был издан несколько раньше в 1699 году в Амстердаме выдающимся просветителем И.Ф. Копиевским.

Полное название книги Копиевского «Краткое и полезное руковедение во аритметыку или в обучение и познание всякого счёта, в сочетании всяких вещей» примечательно уже само по себе. Собственно «арифметика» появится только у Магницкого, как и миллионы, биллионы, другие привычные нам термины. У И.Ф. Копиевского это была пока ещё «аритметыка». В русских рукописях того времени встречаются и арефметика [9, 10], аритметика [11], арефьметика [12]. Термин «арифметика» в старой орфографии был однозначно закреплён изданием Л.Ф. Магницкого.

Естественно возникает вопрос, а почему Амстердам?

Здесь надо сделать небольшой обзор исторических реалий того времени. Задумав грандиозные реформы Московии, Пётр I столкнулся с отсутствием светской профессиональной государственной школы, которая могла бы обеспечивать кадрами преобразовательную деятельность царя. Время Петра Великого было эпохой глобальных перемен, когда на основе старой Московской Руси возникла новая Российская империя. Такой качественный скачок требовал серьёзных изменений в образовательной сфере: модель ученичества, монастырского образования, характерная для допетровской Руси, должна была отойти на второй план, уступив место светской государственной школе.

Обратив своё внимание на положение

дел в Европе, Пётр I попытался использовать для своих целей потенциал европейских стран. И Амстердам был для этих целей один из наиболее удачных локаций. Развитая инфраструктура, наличие передовых учёных того времени, высокие темпы экономического роста выдвигали этот город на одно из первых мест в Европе. И хотя золотой век для Амстердама в конце XVII в. уже закончился, здесь можно было многое взять на вооружение. Наряду с широко известной отправкой молодых людей на обучение в Европу, Пётр параллельно организовал и издательский проект. Планировалось, что книги будут издаваться за рубежом и присылаться в Московию. В Москве была своя типография – Печатный двор (на Никольской), но она печатала издания только по благословению патриарха и прежде всего религиозную литературу.

Амстердамскому коммерсанту Я. Тессингу (старому знакомому Петра I по Архангельску) была дана «отписка», а затем и грамота на издание и монопольную продажу в России напечатанных им учебных книг. Ян Тессинг и начал реализовывать проект Петра I. Для начала издания в Амстердаме русских книг требовалось решить ряд проблем: устроить типографию (с разработкой славянского шрифта и организацией соответствующего набора), а также найти автора учебных книг.

Следующий вопрос, а почему И.Ф. Копиевский?

Деятельность Ильи (Элиаса) Фёдорова (Фёдоровича) Копиевского (ок. 1651, Ляховичи – 12 (23) сентября 1714 года, Москва) достаточно подробно изучено исследователями, но в ней ещё много неясностей. Издатель, переводчик, писатель. Биография Ильи Фёдоровича читается как приключенческий роман: родился в Речи Посполитой на территории современной Бело-

руссии либо России (версии расходятся). Семья, видимо, была обеспеченной и интеллектуальной. Девятилетним ребёнком во время русско-польской войны захвачен в плен (скорее всего, для получения выкупа). Жил сначала в Новгороде у захватившего его боярина, затем сбежал от него в Москву и попал под покровительство царя Алексея Михайловича. Учился в Москве, затем вернулся в Речь Посполитую. По одной из версий продолжил там учиться в известной кальвинистской гимназии города Слуцка (ныне Беларусь). Эта гимназия пользовалась высоким авторитетом, называлась «Слуцкие Афины».

В 1674 году И.Ф. Копиевский становится учителем младших классов этой гимназии. Затем переезжает в Амстердам. Его пребывание здесь совпало со временем Великого посольства Петра I (1697 год). И.Ф. Копиевский удачно вписывается в проект русского царя. Илья Фёдорович хорошо владел русским языком. Он был знаком с практикой преподавания как в России, так и с обучением в зарубежной школе (преимущественно протестантской, но, конечно, и католической). Кроме того, был и практикующим педагогом. Он давал уроки молодым русским, прибывающим по поручению Петра в Амстердам для обучения. Из сохранившихся черепитных И.Ф. Копиевского видно, что обучать молодых людей было дело трудное и затратное. Так, И.Ф. Копиевский жаловался, что его ученики не ценят учителя, перебегают к другим учителям. Но, тем не менее, видимо, практика обучения молодых русских в Амстердаме у Ильи Фёдоровича была достаточно обширна. Поэтому он мог синтезировать различные подходы к преподаванию. Таким образом, кандидатура Копиевского была весьма удачной. В издательстве Тессинга он выпустил ряд разноплановых учебников:

- Копиевский И.Ф. Введение краткое во всякую историю по чину историческому от создания мира ясно и совершенно списанное. Амстердам: Типография Ивана Андреева Тессинга, 1699;
 - Копиевский И.Ф. Краткое и полезное руководство во арифметику. Амстердам: Типография Ивана Андреева Тессинга, 1699;
 - Копиевский И.Ф. Уготовление и толкование ясное и зело изрядное, краснообразного поверстания кругов небесных. Амстердам: Типография Ивана Андреева Тессинга, 1699;
 - Копиевский И.Ф. Номенклатор на русском, латинском и немецком языках. Амстердам: Типография Яна Тессинга, 1700;
 - Басни Эзопа на латинском и русском языках в переводе И.Ф. Копиевского и с его толкованиями. Притчи Эзоповы. Амстердам: Типография Ивана Андреева Тессинга, 1700;
 - Перевод трактата о военном искусстве, написанного византийским императором. Лев VI Мудрый, или Философ. Краткое собрание, показующее дел воинских обучение. Амстердам: Типография Ивана Андреева Тессинга, 1700.
- И.Ф. Копиевский, не удовлетворившись ролью автора и составителя, отделился от Я. Тессинга и стал сотрудничать с другим голландским купцом Яном де Ионгом. В результате уже под патронажем де Ионга он издаёт другие книги:
- Копиевский И.Ф. Учебник латыни для «славянороссийского народа». Амстердам: Типография И.Ф. Копиевского, 1700;
 - Копиевский И.Ф. *Latina grammatica in usum scholarum celeberrimae gentis sclavonico-rosseanae adornata*. Амстердам: Типография Копиевского, 1700;
 - Копиевский И.Ф. Панегирик на взятие

Азова. Слава торжеств и знамён побед / *Gloria triumphorum & trophaeorum*. Амстердам: Типография И.Ф. Копиевского, 1700.

Отметим, что книги издаются в достаточном сжатом виде и перевозятся в Московию, где активно продаются. Амбициозный И.Ф. Копиевский пытался стать книготорговым агентом Петра I, но неуспешно. Карьера его закончилась переводчиком Посольского приказа в Москве.

Богатая фактами, а ещё больше отсутствием информации, биография И.Ф. Копиевского позволяет вскрыть причины особенностей изданного им «Краткого и полезного руководства в арифметику», первого печатного учебника на русском языке. Это была книга, написанная, как и другие, в сжатые сроки и под глубоким влиянием западной традиции. Рассмотрение книги И.Ф. Копиевского вызывает много вопросов.

Хотя по названию учебник посвящён арифметике, в действительности он отводит арифметике только 16 страниц (из 48). «Краткое и полезное руководство в арифметику или в обучении и познании всякого счёта, в сочетании всяких вещей» И.Ф. Копиевского содержало значительное число всевозможного рода притч и поучений.

Собственно математическая часть книги состояла из разъяснения пяти частей: числа, прибавка, убавка, умножение и деление. Этот порядок был нетипичен для отечественных рукописей. Как отмечал Б.Г. Гнеденко, в русских рукописях шло сложение и умножение, затем вычитание и деление, что подчёркивало связи между сложением и умножением и вычитанием и делением [1, с. 37]. И.Ф. Копиевский рассматривает арабские числа, системы записи чисел с помощью кириллицы и римские числа (книжные числа всей

Европы). Автор отмечает, числа всякие считая есть хитрость числа изображать. «Счёт совершенно нарицается, всякое число в сих десяти образуется». Ноль у Копиевского называется «ничево». Остальные цифры: 9 (девять), 8 (осмь), 7 (семь), 6 (шесть), 5 (пять), 4 (четыре), 3 (три), 2 (два), 1 (един).

И.Ф. Копиевский подробно приводит названия цифр 11 (един на десят), 13 (три на десят), 15 (пять на десят), 17 (семь на десят), 21 (двадцать один). Десятки названы привычными для нас терминами: десять, двадцать, тридцать, сорок и т.д.

Иностранные термины соседствуют с терминами русскими: аддация – прибавка, мультипликация – умножение, дивизия – деление. Автор даёт определения действий следующим образом. Например, «Аддация есть многие числа воедино совокупление», «Убавление есть убавка». Слагаемые называет приданные, суммы сводными. Приводит примеры сложения и вычитания в столбик. Разбираемых примеров крайне мало. Так, примеры на сложение он приводит только следующие $5324 + 3063 = 8386$; $326 + 357 = 683$ и $376 + 203 + 179 = 758$. Заданий для самостоятельной работы нет.

Приведена таблица умножения (лестница умножения перстов по девяти перстов в длину и ширину) в стандартной для того времени форме.

Интересно, что при своём малом математическом объёме книга не избежала опечаток. Так, И.Ф. Копиевский [7, с. 12], рассматривая примеры на вычитание, приводит следующую запись:

543	347	4592	92652
421	136	1410	51431
122	211	3182	41221
543	547	4592	92652

Возникает вопрос, зачем четвертая строка. Это, очевидно, строка для про-

верки произведённых действия. Такой подход был широко распространён при обучении за рубежом. Например, в переводной с итальянского языка рукописной книге [11] мы встречаем тот же приём. Надо сказать, что во многих отечественных рукописях он отсутствует. То есть Илья Фёдорович, скорее всего, заимствовал его из зарубежных источников. Очевидно, что вместо числа 547 во втором столбце должно стоять 347. Печатные книги, так же как и рукописные, не избежали ошибок. Но здесь опечатка кажется достаточно странной из-за малого объёма приведённых вычислений.

Естественен вопрос и об изложении умножения и деления. Эти действия были сложны в реализации для большинства людей XVII в., поэтому в книге они изложены как-то невнятно.

Огромный раздел в книге занимают нравоучительные сентенции. Базируясь на латинских нравоучениях, И.Ф. Копиевский даёт их вольный перевод, значительно расширяя контекст. Это связано, видимо, со стремлением автора получить рифмованные строки. Например,

Deo Supplica, Parentes Ama (Молись Богу, люби родителей) [5, с. 17].

Копиевский переводит:

Богу прилежно молися,

Родителей чтить учися.

Vino te tempera, Pugno pro Patria [5, с. 18] (Вином не упивайся, сражайся за Отчизну).

Копиевский перевёл:

Вином ты не упивайся без меры,

за Отчизну бейся смело для Веры.

Отдельно идут притчи. Надо сказать, что И.Ф. Копиевский является создателем книги «Притчи Эссоповы на латинском и русском языке, здесь же Гомера брань жаб и мышей», которая будет издана в 1700 году. В арифметике нашли отпеча-

ток работы И.Ф. Копиевского над «Притчами Эссоповыми...», изданными годом позже. Почему И.Ф. Копиевский уделял такое значение притчам? Пекарский указывает [5, с. 28], что широкое использование притч в ходе обучения было традицией голландских школ. В Руководении помещено 17 притч. Широко известные «О волке и овне» (Волк и ягненок), «О вороне и лисице», «О коленке и волке» (волк, коза и козлёнок). Некоторые из них малоизвестны, например, о раковине, о старике и смерти. После каждой притчи автор приводит прилагание, то есть краткий вывод. Например, первая притча следующая.

Кура, на помойке копаясь, обрела диамант, и рёк такую сияющую диковинку обретая. Если бы сие случилось торговому человеку, жемчужнику, неизречённой радостью возрадовался бы он, ибо известна цена её, а мне она не надобна, а не почитая её не во что, паче всех драгоценных камней лучше желаю обрести себе зерно пшеницы или ячменя.

И.Ф. Копиевский приводит такое трактование данной притчи. Диамант есть премудрость и обучение. Кура малодушна и сластолюбива, малоумные свободных наук премудрости не любят, употреблению их не разумеют. Надо сказать, что такое трактование притчи не единственно. Например, Л.Н. Толстой предлагал другое трактование.

Естественно, возникает вопрос: почему И.Ф. Копиевский внёс такую значительную гуманитарную составляющую в учебник математики? Для русской математической литературы этого времени это было совершенно нетипично. Русская математическая учебная литература того времени являлась рукописной и авторы с большой заботой о читателе тщательно методически отбирали материал, тогда

как И.Ф. Копиевский, видимо, больше ориентировался на более массовую школу. Этот последний вариант кажется более правдоподобным, т.к. в математической части книги отсутствуют пояснения, есть опечатка. Очевидно, что данный учебник не мог никаким образом конкурировать с учебником Л.Ф. Магницкого, хотя и был издан огромным по тем временам числом экземпляров (3350 экземпляров). (П. Пекарский). Отметим, что учебник Л.Ф. Магницкого был издан тиражом 2400 экземпляров. Но он значительно превосходил по объёму, содержанию и качеству полиграфии книгу И.Ф. Копиевского.

На основе анализа текста «Краткого и полезного руководства в арифметику» и сравнения его с существовавшими рукописями по математике на старославянском выделены основные особенности данного издания как учебной книги:

1. Использование арабских цифр,
2. Использование как русских, так и иностранных терминов,
3. Обширная гуманитарная составляющая, представленная притчами и нравоучениями,
4. Скромное полиграфическое качество,
5. Весьма небольшой объём,
6. Отсутствие достаточного числа разобраных примеров,
7. Отсутствие подробных пояснений и рецептурность.

Особенности книги могут быть объяснены ориентацией издания на самое начальное обучение и повышенной загруженностью автора. Обширная гуманитарная составляющая представляется нам попыткой объединить старорусские традиции и европейские обычаи в сфере образования, а также личными предпочтениями И.Ф. Копиевского.

Вместе с тем, значение книги И.Ф. Копиевского трудно переоценить. Это была

первая попытка издания учебника по математике на русском языке. И хотя содержательная часть книги была, очевидно, мало проработана, однако определенный опыт был получен.

Исследователь издательского проекта Петра Великого Ю.П. Зарецкий, размышляя об устоявшемся представлении о невостребованности изданий И.Ф. Копиевского, ставит этот взгляд под сомнение. Он показывает, что несовершенство содержания книг И.Ф. Копиевского не могло стать причиной их невостребованности, потому что книги были первыми. Не поддерживает Ю.П. Зарецкий и аргументы о невостребованности, исходящие из плохой сохранности книг. Действительно, известных экземпляров сохранилось мало (7 штук). В России: – 1; РНБ – 2; БАН – 1; ГИМ – 1. За рубежом: Германия – 1; США – 1. РГБ – Российская государственная библиотека; РНБ – Российская национальная библиотека; БАН – Библиотека Российской академии наук; ГИМ – Государственный исторический музей (данные Ю.П. Зарецкого [2]). Ю.П. Зарецкий видит здесь особый феномен учебной литературы. «Она быстро приходит в физическую негодность из-за активного использования и потому редко живёт долго. К тому же учебники И.Ф. Копиевского были небольшими по объёму и не отличались полиграфическими достоинствами. Вряд ли они часто помещались владельцами в дорогие переплёты и бережно хранились» [3].

Книги И.Ф. Копиевского были первым опытом печатной учебной литературы, издававшиеся значительными по тому времени тиражами, поэтому они просто должны были оказать влияние на развивающееся отечественное книгоиздание. Точно известно, что с книгами И.Ф. Копиевского («Притчи Эзоповы и русско-латинский

номенклатор») [4] тщательно ознакомился Ф.П. Поликарпов, помогавший Л.Ф. Магницкому в создании «Арифметики». Возможно, что Ф.П. Поликарпов мог видеть и «Руководение» И.Ф. Копиевского.

Книга И.Ф. Копиевского ознаменовывает качественно новый этап в развитии русской учебно-математической литературы. Печатное дело расширило возможности применения учебных книг для обучения. Рукописные издания, даже расходившиеся в списках, не могли конкурировать с печатными.

На основе анализа печатного руководства по начальной математике И.Ф. Копиевского можно сделать вывод о достаточно искусственном, формировавшемся «сверху» государственной властью заказе на светские учебные пособия. Междисциплинарный анализ книги И.Ф. Копиевского вскрывает проблемы, с которыми сталкивались авторы при переходе от рукописей к учебной печатной книге.

Переходный этап от рукописной учебной книги к печатному изданию характеризовался одновременным существованием как рукописных, так и печатных книг. Рукопись «Арифметики» Магницкого имеется в редком фонде Новосибирской государственной областной научной библиотеки [14]. Надо сказать, что в России с появлением печатных книг достаточно длительное время сохранялись и книги рукописные. Так, в Фонде 726 рукописных книг И.К. Андропова Российской государственной библиотеки представлены рукописные руководства по математике XVIII в. [9, 10]. В том числе здесь есть и переписанная и дополненная «Арифметика» Л.Ф. Магницкого.

В заключение необходимо отметить, что во времена смены эпох, для которых характерны ситуации бифуркации, когда социум пытается ответить на новые вызо-

вы, встречаются уникальные явления материальной культуры. Они, может быть, и не находят своего дальнейшего развития, но представляют собой своеобразные «кристаллы», в которых застывает время. Такой квинтэссенцией, пытающейся найти новые ориентиры в развитии образовательной математической практики, и стало «Краткое и полезное руководство в арифметыку» И.Ф. Копиевского, уникальный памятник отечественной книжной культуры.

Конечно, «Краткое и полезное руководство» по своему содержанию и методическим идеям несравнимо с «Арифметикой» Л.Ф. Магницкого. Уникальный учебник Л.Ф. Магницкого стал на долгие годы, по определению М.В. Ломоносова, «вратами учёности» для российского юношества. Эталонный образец чёткости, краткости, доступности, наглядности этот учебник-энциклопедия, выходивший далеко за пределы арифметики, справедливо заслужил «Краткое и полезное руководство», изданное на 4 года раньше. Вместе с тем анализ творения И.Ф. Копиевского помогает понять проблемы создания учебной литературы и тем самым подчеркнуть блестящее решение, данное Л.Ф. Магницким.

Список источников

1. Гнеденко Б.Г. Очерки по истории математики в России. – Москва: ЛОГИЗ, 1946. – 247 с.
2. Зарецкий Ю.П. Первые русские печатные учебники // Вопросы образования. – 2022 – № 2. – С. 140–154.
3. Зарецкий Ю.П. Проект Петра Первого по изданию светских учебников: осуществление замысла // Quaestio Rossica. – 2021. – Т. 9. № 4. – С. 1411–1424.
4. Зарецкий Ю.П. Составитель и издатель первых русских учебников Илья Копиевский

(ок. 1651–1714): неизвестные страницы биографии // История и архивы. – 2022. – № 3. – С. 12–28.

5. *Копиевский И.Ф.* Краткое и полезное руководство в арифметику или в обучение и познание всякого счету, в сочетании всяких вещей. – Амстердам: тип. Яна Тесинга, 1699. – 48 с.

6. *Московкин Л.В., Власов С.В.* Из истории создания учебников русского языка как иностранного: «Номенклатор...» (1700) и «Руководение...» (1706) И.Ф. Копиевского // Мир русского слова. – 2009. – № 4. – С. 80–82.

7. *Пекарский П.* Наука и литература в России при Петре Великом. – Санкт-Петербург: типография т-ва «Общество пользы», 1862. – 694 с.

8. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века. Книга I «Век восемнадцатый». – Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского педагогического университета, 1997. – 288 с.

Архивные материалы

9. Отдел рукописей РГБ. Фонд 726. Дело 4.

10. Отдел рукописей РГБ. Фонд 726. Дело 5.

11. Отдел рукописей РГБ. Фонд 256. Дело 242.

12. Отдел рукописей РГБ. Фонд 1781. Дело 932.

13. Российский государственный архив древних актов. Фонд 196. Опись 3. Дело 2298/1.

Электронные ресурсы

14. Рукопись начала XVIII века. «Арифметика» Магницкого [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ngonb.ru/readers/rare_fund/rukopisi/3368/ (дата обращения 01.03.23).

Статья поступила в редакцию 20.03.2023.

Принята к публикации 23.05.2023.

Доказана ли теорема Ферма?

Согласно великой теореме Ферма, уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах при $n > 2$. Несмотря на простую формулировку, доказать это утверждение не удавалось почти четыре века.

Интерес подогревался комментарием Пьера Ферма о том, что он нашёл «поистине чудесное доказательство» этой теоремы. Он наверняка ошибался: тысячи любителей безуспешно пытались и пытаются доказать его теорему средствами элементарной математики.

Настоящее доказательство было получено в 1994 году с использованием современных методов теории чисел и занимает 130 страниц. Английский математик Эндрю Уайлс работал над ним семь лет. В феврале 2016 года ему была вручена Абелевская¹ премия в размере один миллион долларов.

¹ Премия по математике, названная так в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. Основана правительством Норвегии в 2002 году, и, начиная с 2003 года, ежегодно присуждается выдающимся математикам современности. Денежный размер премии сопоставим с размером Нобелевской премии и составляет 6 млн норвежских крон.

Источник: www.wokrugsveta.ru

ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР «ПЕРЕДОВЫЕ ИДЕИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ И ЗА РУБЕЖОМ» В 2022/2023 УЧЕБНОМ ГОДУ

ADVANCED IDEAS IN TEACHING MATHEMATICS IN RUSSIA AND ABROAD IN THE 2020/2023 ACADEMIC YEAR

Материалы семинара 5.8.1

УДК: 51(091)

Seminar materials 5.8.1

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_69

В прошедшем 2022/2023 учебном году семинар продолжил свою работу под руководством академика МАНПО, доктора педагогических наук *Т.И. Кузнецовой* и члена-корреспондента МАНПО, кандидата педагогических наук, зав. кафедрой математического анализа и геометрии Государственного университета просвещения (ГУП) *Г.В. Кондратьевой*. Заседания проходили дистанционно. Некоторые заседания имели и очный формат с онлайн-трансляцией.

8 сентября 2022 года участники семинара обсудили тему «Проблемы начинающего учителя математики». С докладами выступили кандидат педагогических наук, доцент *Борисова Н.В.* (г. Люберцы), кандидат педагогических наук, доцент *Кашицына Ю.Н.* (г. Королёв), кандидат педагогических наук, доцент *Пантелеймонова А.В.* (г. Балашиха). Были вскрыты основные проблемные зоны, возникающие в процессе адаптации и намечены пути их преодоления.

Молодой учитель математики *Бронникова О.И.* (г. Москва) поделилась своим личным опытом, а также обобщила проблемы начинающего учителя на примере коллег.

13 октября с докладом «25 лет и 100

выпусков возрожденного журнала «Математическое образование» выступил доктор физико-математических наук, главный редактор журнала *Имайкин В.М.* (г. Москва). Он коснулся истории создания журнала, в частности, раскрыл положенную в основу издания идею преемственности и неразрывности традиций, изложил ведущие принципы работы редакции, сделал подробный обзор статистических данных, отметив приоритет публикаций по геометрической проблематике. В заключение Валерий Марсович поделился планами на будущее.

10 ноября с докладом «Подготовка, реализация и результаты «РЕФОРМЫ-70» выступил широко известный в научно-педагогических кругах учёный, кандидат физико-математических наук, доцент *Костенко И.П.* (г. Краснодар), который долгие годы занимается вопросами истории математического образования, вводя в научный оборот многие неизвестные ранее факты.

8 декабря с докладом «Синергия математического образования как фактор развития креативности обучающихся» выступил профессор, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук *Е.И. Смирнов* (г. Ярославль), который охарактеризовал понятие сложности

и отметил, что нарастание сложности служит переходом к новому уровню развития, в том числе, в образовательных системах. Были представлены концепция, модели и механизмы развития синергии математического образования на основе адаптации современных достижений в науке. Были вскрыты основные подходы к проблеме творческих способностей как к феномену проявления синергии математического образования. Евгений Иванович обзорно охарактеризовал разработанный дидактический депозитарий образцов современных достижений в науке.

9 февраля состоялась научная полемика на тему «Математическое просвещение: прошлое, настоящее и будущее». Возможность для дискуссии была обеспечена *В.М. Бусевым* (г. Москва), предоставившим сообщение «Методико-математическая периодика прошлого online: состояние и перспективы». О потенциале современной методико-математической периодики для развития российского просвещения обстоятельно рассказал доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ВятГУ, заместитель главного редактора журнала «Математика в школе» *С.И. Калинин* (г. Киров). Он выступил с докладом «Журнал “Математика в школе” и развитие просвещения в России».

Вопросы практической реализации идей математического просвещения на примере конкретного образовательного учреждения предложил обсудить доктор физико-математических наук, главный редактор журнала «Математическое образование» *В.М. Имайкин*. Он выступил с темой «Об организации просветительской деятельности в школе № 179 г. Москвы».

9 марта с докладом выступила доктор физико-математических наук, профессор *Г.И. Синкевич* (г. Санкт-Петербург). До-

клад был посвящён математикам, жившим на Петербургской стороне в XVIII–XX вв., до 1914 г. В центре внимания – история Петербургской стороны, быт учёных, основные точки притяжения: высшие учебные заведения, дома А.Н. Крылова, В.А. Стеклова, Н.М. Гюнтера и П. Эренфеста. Деятельность В.А. Стеклова способствовала появлению ленинградской школы математической физики. Домашние семинары П. Эренфеста выделили область взаимного интереса математиков и физиков, что способствовало возникновению Ленинградского физико-математического общества, зарегистрированного на Петербургской стороне. Были приведены неизвестные драматические биографические материалы о выдающихся математиках, снабжённые большим количеством иллюстраций.

С сообщением «Памяти Н.Х. Розова» выступил кандидат физико-математических наук, доцент *С.В. Дворянинов* (г. Москва). 20 февраля 2023 г. исполнилось 85 лет со дня рождения Н.Х. Розова (20.2.1938–2.11.2020). Николай Христович – советский и российский математик, член-корреспондент РАО по отделению философии образования и теоретической педагогики, доктор физико-математических наук, профессор, декан-организатор факультета педагогического образования МГУ имени М.В. Ломоносова. В кратком сообщении было рассказано, каким могло бы быть сообщение определение предела функции по Розову.

13 апреля участники семинара заслушали доклад «Математическое просвещение: русский математический язык», представленный руководителем семинара доктором педагогических наук *Т.И. Кузнецовой* (г. Москва). Доклад зачитала зав. кафедрой высшей алгебры, математического анализа и геометрии

ГУП *Кондратьева Г.В.* (г. Москва). Исследование проводилось в стенах Института русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова на уровне предвузовского образования иностранных граждан. Была показана актуальность рассматриваемой темы не только для студентов-иностранцев, но и для отечественных работников образования, преподавателей, студентов, учителей, а также всех интересующихся природой русского языка, желающих читать и проговаривать математические тексты по-русски правильно.

Затем выступил доктор педагогических наук, профессор университета МВД России им. В.Я. Кикотя *Жаров В.К.* (г. Москва). В его докладе русский язык рассматривался не только как привычная пониманию учебная дисциплина. Русский язык видится докладчику как метаязык обучения, посредник в обмене информацией в ходе межкультурной коммуникации.

Преподаватель кафедры высшей алгебры, математического анализа и геометрии ГУП *Горячева С.В.* (г. Москва) поделилась опытом преподавания физико-математических дисциплин в Малазийском институте авиационных технологий.

11 мая И.П. Костенко сделал доклад, ставший продолжением его выступления «Подготовка, реализация и результаты «РЕФОРМЫ-70», состоявшегося 10 ноября 2022 года. Доклад был посвящён сложнейшей и неоднозначной теме: результатам

реализации реформы математического образования 1970-х годов.

Заседание семинара завершилось сообщением *Кузнецовой Т.И. и Кондратьевой Г.В.* «Отчёт о работе Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2022/2023 учебном году».

Таким образом, в течение 2022/2023 учебного года было проведено 8 заседаний семинара, заслушано более 20 докладов, представленных авторами разного уровня – от академиков РАЕН и МАНПО до молодых учителей математики – из Москвы, Санкт-Петербурга, Балашихи, Люберец, Королёва, Ярославля, Кирова, Краснодар. В заседаниях семинара приняли участие слушатели из разных регионов России (Москвы, Санкт-Петербурга, Вятки, Ярославля, Ельца, Сыктывкара и других городов). Количество участников отдельных заседаний семинара доходило до 50-ти. Зарегистрировавшимся участникам заседаний были разосланы электронные сертификаты.

Семинар проводит заседания во второй четверг каждого месяца (кроме летних месяцев и января). E-mail (для справок): kuzti45@gmail.com, kondratevagv@mail.ru.

Т.И. Кузнецова, Г.В. Кондратьева,
руководители Всероссийского
научно-методического семинара
«Передовые идеи в преподавании
математики в России и за рубежом»



Барометр ЕГЭ

ОТ НАДЕЖДЫ ДО УВЕРЕННОСТИ

(госэкзамены глазами школьников, студентов и педагогов)

* Любопытные данные были получены в ходе опроса 1900 педагогов-репетиторов, который провёл накануне ЕГЭ-кампании онлайн-сервис «Профи». Согласно ему, 84% репетиторов считают, что к ЕГЭ можно подготовиться самостоятельно: приложив серьёзные усилия (72%) либо изучив методические материалы (12%); 16% педагогов уверены, что успешно сдать госэкзамены можно только с помощью репетитора. На вопрос, от чего зависят результаты ЕГЭ, 46% опрошенных ответили, что от эрудиции ученика, 22% – от знания формата экзамена, 28% – от воли случая.

* В этом году на экзамен по математике базового уровня зарегистрировались более 342 тысяч человек, а профильного уровня – порядка 287 тысяч. Накануне экзамена некоторые выпускники признались, какие задания считают простыми, а какие сложными. В КИМ по базовой математике самыми простыми им кажутся задания 1–4, задачи на вероятность и на проценты, а наиболее сложными – задания 20 и 21. В КИМ по профильной математике (часть 2) это соответственно задания 12 (уравнение), 14 (неравенство), 15 (экономическая задача) и задания 13 (задача по стереометрии), 16 (задача по планиметрии), 17 (задача с параметром). А ещё некоторых обнадеживает тот факт, что можно набрать 100 баллов, совершив ошибки в одном-двух заданиях.

* Всероссийский опрос студентов 1–3 курсов вузов, проведённый ВЦИОМ, показал: каждый третий студент предпочёл бы поступать в вуз, сдав отдельно вступительные экзамены; 57% опрошенных даже при наличии выбора хотели бы сдавать ЕГЭ и как выпускной, и как вступительный экзамен. С тем, что ЕГЭ предоставляет всем выпускникам равные возможности, согласны 59% респондентов, а не согласны – 36%. Интересно, что первое мнение чаще разделяли те, кто выбрал сферу математических, естественных и технических наук (по 62%), а второе – те, кто изучает общественные и гуманитарные науки (39%).

Подробности: vm.ru, edu.ru, wciom.ru.

Перспективы далёкие и близкие

ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ В НЬЮ-ВАСЮКИ!

(о чём мечтают вслух чиновники от образования?)

* Опасения по поводу перевода Единого госэкзамена по большинству предметов в компьютерный формат не подтвердились. По крайней мере такие предметы, как математика, физика и химия, школьники и дальше будут сдавать в привычной форме, а эксперты продолжат проверять письменную часть работы, заверил глава Росособнадзора. По его мнению, серьёзных изменений в ЕГЭ в ближайшие десять лет не ожидается, но на чём основана такая уверенность, не уточнил. По словам директора ФИПИ, все изменения проходят плавно и продолжатся, но «будут заметны разве что специалистам, учителям, чтобы они могли переориентировать возможности своего образовательного процесса». Что за возможности и куда их нужно переориентировать, не уточняется...

* Изменения касаются не только содержания госэкзаменов, но и контроля за его проведением. Сегодня во все пункты проведения экзаменов КИМ доставляются по интернету, и это позволяет избежать какой-то утечки, вскрытия и т. д., уверяют чиновники и с гордостью рассказывают о новейших средствах борьбы с нарушениями при сдаче экзаменов (пресловутых системах видеонаблюдения и средствах подавления сигналов сотовой связи). Вдобавок искусственный интеллект анализирует почерк детей, чтобы исключить подмену ученических работ, а нейросеть помогает анализировать видеоизображения не только в онлайн-формате, но и в записи. Совсем уж блёкло на фоне таких новшеств выглядят старые добрые наблюдатели в пунктах проведения экзаменов...

Подробности: ria.ru, mk.ru.

Портрет педагога

ХОТЕЛИ КАК ЛУЧШЕ, А ПОЛУЧИЛОСЬ КАК ВСЕГДА

(сказ о том, как учителям сверху перепало и что из этого вышло)

Год педагога и наставника в самом разгаре. Ещё весной учителя получили нежданный подарок: в школы спустили списки счастливицев, коим светила онлайн-подготовка вроде курсов повышения квалификации. Казалось бы, учишься и радуешься, а нет: многие схватились за голову – и было от чего! Не каждый день, знаете ли, физкультурникам предлагают изучить курс истории, а историкам углубиться в дебри психологии. Короче, обязали учителей повысить квалификацию, а в одном курсе «больше



20 практических работ, тонны лекций и материалов, километры видеороликов» и откровенно бредовые задания типа «составьте кодекс педагога в одном из жанров: новелла, сказка, рассказ...». Многих спасал только юмор. Один, не мудствуя лукаво, переписал «Пиратский кодекс», заменив пирата учителем, другой сочинил частушку про высокие отношения завуча с училками и т. п. Но самая абсурдная история произошла с педагогом, которого отправили на онлайн-курс с целью «определить образовательный маршрут», дабы «восполнить методические и психолого-педагогические дефициты». Куратор записала учителя на заочный мастер-класс в её же школе. Вот только в этой школе такие мастер-классы вёл только один человек – та самая учительница.

Подробности: mk.ru/social/.

Из жизни учёных

ИССЛЕДОВАТЕЛЬ, ПРОСВЕТИТЕЛЬ, ПОЛИГЛОТ

(к юбилею видного математика и историка науки М.Я. Выгодского)

125 лет назад родился Марк Яковлевич Выгодский (1898–1965) – известный советский учёный и педагог, геометр, историк математики, один из создателей (вместе с С.А. Яновской

и А.П. Юшкевичем) советской историко-математической школы. А ещё автор нескольких учебников и пособий по математике. В 1930-е годы М.Я. Выгодский инициировал издание комментированных переводов классиков науки (И. Кеплера, Л. Эйлера, Г. Монжа) и историко-математических трудов того времени (Г. Цейтена, Г. Вилейтнера, Ф. Клейна, О. Нейгебауэра). Он не только привлекал к этой работе других, но и сам в ней активно участвовал, изучал первоисточники на малодоступных языках (Выгодский свободно владел основными европейскими языками, мог читать на греческом, арабском, латыни), готовил переводы, писал предисловия и вступительные статьи. Выгодский также участвовал в подготовке и редактировании первого тома «Начал» (книги I–VI) в переводе его учителя Д.Д. Мордухай-Болтовского.



Опубликовал несколько статей в сборниках из серии «Историко-математические исследования» (выходит с 1948 года). До сих пор востребованы и переиздаются справочники по элементарной и по высшей математике М.Я. Выгодского, написанные простым и доступным языком, в своё время выходившие ежегодно массовыми тиражами. Не нуждается в особом представлении и его книга «Арифметика и алгебра в Древнем мире» (1941, 1967), в которой автор стремился дать по возможности цельную картину истории вычислительной математики в Египте, Вавилоне, Древней Греции и познакомить читателя с фактическим материалом по первоисточникам. Выгодский адресовал свою книгу широкому кругу читателей, в особенности учителям математики. Уже в наши дни она выдержала несколько переизданий.

Подробнее: Розенфельд Б.А. Марк Яковлевич Выгодский и его работы по истории математики (в книге: Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. М., URSS, 2021).

Хроники

ЭКСЦЕНТРИЧНЫЙ ГЕНИЙ НАШЕГО ВРЕМЕНИ

(готовится к выходу фильм о Григории Перельмане)

Осенью 2023 года в России выйдет в прокат фильм «Витринный экземпляр» о всемирно известном российском математике Григории Перельмане (род. 1966). Двадцать лет назад ему удалось решить одну (и пока единственную) из семи «задач тысячеления»: доказать гипотезу Пуанкаре (была сформулирована Анри Пуанкаре в 1904 году), навсегда вписав своё имя в историю науки. Многим он запомнился тем, что, будучи удостоен самой престижной в математике Филдсовской премии и премии Математического института Клэя в миллион долларов, отказался от обеих. Известности и деньгам математик предпочитает одиночество и тишину. Биографическая драма расскажет о юности и других периодах жизни Перельмана, в том числе о доказательстве им гипотезы Пуанкаре и дальнейшем уходе в затворничество. В художественный фильм войдут фрагменты документальных съёмок, интервью представителей академического сообщества. Чтобы воссоздать разные этапы биографии Перельмана, съёмочная группа больше пяти лет исследовала архивы и общалась с его

учёными-коллегами. Картина приурочена к празднованию 300-летия Санкт-Петербургского государственного университета, где учился Григорий Перельман.

Подробности: film.ru, kino-teatr.ru.

Пополняем ресурсы

ПОСТИГАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

(книга о самой красивой, грандиозной и загадочной математической концепции)

Математические формулы Рамануджана – такое же чудо, как музыкальные построения Баха, а открытия Кантора не менее поразительны, чем произведения Шекспира, считает Хаим Шапира, израильский математик и философ, специалист по теории игр, автор нескольких бестселлеров в жанре научпопа. Его книга «Восемь этюдов о бесконечности» (М., Колибри, 2021) посвящена самой красивой и удивительной из когда-либо созданных человечеством концепций. Автор расскажет просто и ясно о двух завораживающих математических теориях, связанных с бесконечностью: о теории чисел и теории множеств, познакомит читателя с известными парадоксами (апории Зенона, отель Гильберта, парадокс Галилея и пр.) и предложит ему стратегии математического мышления, позволяющие испытать свои способности к решению увлекательных математических задач и головоломок.

Подробности: polit.ru/article/2021/04/01/ps_shapira/ (фрагмент книги).



Нетривиальные суждения

Занятие математикой – подобно мифотворчеству, литературе или музыке – это одна из наиболее присущих человеку областей его творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии.

Герман Вейль, немецкий математик и физик

Если кто-либо хочет кратким и выразительным словом определить само существо математики, тот должен сказать, что это наука о бесконечности.

Анри Пуанкаре, французский математик и физик

Рубрику ведёт **Н.М. Карпушина**

СЧЁТ УГЛОВ

Научная статья: 5.8.2

Scientific article: 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_6_76

Одна из самых популярных тем в планиметрии – это счёт углов. То есть задачи, подразумевающие цепочку рассуждений, основанную на вычислении различных углов, возможно, с введёнными переменными. Приведём соответствующую подборку задач по материалам различных этапов олимпиады Эйлера.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Подаеву Михаилу Валерьевичу по адресу rodaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя. Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точки K, L лежат на катете BC , причём $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB$. На стороне AB лежит точка M , $ML = KL$. Докажите, что проведённый из точки C перпендикуляр на AK не может попасть в середину отрезка KL .

Кунгожин М.

2. Дан равносторонний $\triangle ABC$, где M – середина стороны AC . Точки P, R лежат на сторонах AM, BC соответственно так, что $AP = BR$. Найдите сумму углов BMR, MBP, MRA .

Берлов С.

3. Дан остроугольный $\triangle ABC$, на продолжениях сторон BC и AB лежат соотв. точки E и D . N, M – середины сторон DC и AE . Докажите, что $MN > AD/2$.

Рубанов И.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL . На отрезке BK отмече-

на точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC .

Кузнецов А.

5. В треугольнике ABC провели биссектрису BE и серединный перпендикуляр m к стороне AB . Оказалось, что $BE = EC$, а прямая m пересекает сторону BC . Докажите, что угол C меньше 36 градусов.

Рубанов И.

Решения заданий из №5/ 2023. Квадратный трёхчлен

1 Алёша написал на доске пять целых чисел – коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 . Восстановите стёртое число.

Френкин Б.Р.

Решение. Пусть трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны m и n . По теореме Виета $c = amn$, $b = -a(m + n)$.

Отсюда видно, что c делилось по край-

ней мере на три других числа. Но на доске осталась лишь одна пара чисел, одно из которых делится на другое: 2 и 4. Значит, было стёрто число c .

Так как b делится на a , то $a = 1$, $b = 4$, числа 3 и -5 – корни, а $c = amn = 2 \cdot 3 \cdot (-5) = -30$.

2. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Жуков Г.

Решение. По условию,
 $0 > f(c)f(1/a) = (ac^2 + bc + c)(1/a + b/a + c) = c/a(ac + b + 1)^2$.

Следовательно, $c/a < 0$. Но по теореме Виета c/a равно произведению корней $f(x)$, поэтому они разных знаков.

3. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

Емельянов Л.А.

Решение. Обозначим наши числа a, b, c . Тогда

$$a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c.$$

Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$, то есть

$$(a - b)(a + b - 1) = 0.$$

Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$. Аналогично $a = c$ или $c = 1 - a$.

Следовательно, если $a \neq b$ и $a \neq c$, то $b = 1 - a = c$, то есть в любом случае два числа равны.

4. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет два действительных корня. Каждый из трёх его коэффициентов увеличили на 1.

Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

Евдокимов М.А.

Решение. Предположим, что это произошло.

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения
 $x^2 + bx + c = 0$.

Тогда

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 x_2 = c,$$

$$x_1 + x_2 + 2 = -\frac{b+1}{2},$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = (c + 1)/2.$$

Отсюда $b = 5, c = 9$.

Стало быть, искомым трёхчлен имеет вид $x^2 + 5x + 9$. Однако дискриминант этого трёхчлена отрицателен. Противоречие.

5. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

Бородин П.А.

Решение. Прямая, являющаяся графиком производной $y = 2ax + b$ квадратного трёхчлена, касается параболы $y = ax^2 + bx + c$: если они не пересекаются, то разбивают координатную плоскость на три части, а если пересекаются в двух точках, то разбивают плоскость на пять частей.

Из условия касания графиков получаем, что дискриминант уравнения

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

равен нулю, то есть

$$(b - 2a)^2 - 4a(c - b) = b^2 + 4a^2 - 4ac = 0,$$

откуда дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен

$$D = b^2 - 4ac = -4a^2 < 0,$$

поэтому трёхчлен не имеет корней.

Задачи подготовил

Поддеев М.В.

ДЕЛО О ПРОПАВШЕМ ГОРОСКОПЕ

Ценитель истории, шутник и остролов Александр Сергеевич Пушкин любил собирать исторические анекдоты – краткие рассказы о необычных случаях из жизни известных личностей. Да не просто известных, а зачастую знаковых для своей эпохи людей. Кто бы мог подумать, что среди них окажутся математики!

Большинство историй Пушкин записал с чужих слов в 1834–1836 годах и включил в коллекцию Table-talk – «Застольные разговоры»¹, а некоторые успел опубликовать в журнале «Современник». Впрочем, от разговоров осталось одно название. Ничто в тексте не указывает ни на сами беседы, ни на сопутствующие им обстоятельства. В лучшем случае упомянуто имя рассказчика.

По сути, это стилизация под фольклор с акцентом на быте и нравах эпохи, а также на характерах и поступках главных персонажей. Даже если в таких историях есть немалая доля вымысла (а какая-то доля вымысла есть всегда), подаются они под видом невероятных реальных событий. Устное творчество А.С. Пушкина – так метко окрестил его работу один исследователь. В исполнении русского классика это вообще особый вид словесного искусства. Сам жанр теперь называют литературным анекдотом².

Несколько историй поэт узнал от Натальи Кирилловны Загряжской (1747–1837),

своей свойственницы. Она была дочерью графа К.Г. Разумовского, женой родного дяди Н.И. Гончаровой, тёщи Пушкина. Пожила при шести правителях, в молодости являлась фрейлиной Екатерины II. Послужила одним из прототипов старухи в повести «Пиковая дама».



Н.К. Загряжская.

Акварель П. Соколова, 1821 год

Наведываясь к графине Загряжской с визитами, Пушкин заслушивался её рассказами о минувших временах и не преминул записать некоторые. В одном из них упоминаются сразу два математика.

Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала

¹ Название было заимствовано у кого-то из коллег-англичан. В библиотеке поэта имелось две из книг, в заглавии которых оно упоминалось: сборник застольных бесед с С.Т. Кольридом и собрание эссе У. Хэзлитта.

² Расцвет его пришёлся как раз на пушкинскую эпоху. Поэта считают одним из основоположников этого жанра в русской литературе. Он и сам стал популярным персонажем таких анекдотов.

к Эйлеру приказание составить гороскоп новорождённому. Эйлер сначала отказывался, но принуждён был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, хоть и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков – и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорождённому всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К.Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась.

Современник, том 3, 1836 год

Краткое жизнеописание Иоанна Антоновича (Ивана VI) укладывается в несколько строк. Родился в 1740 году. Ещё в младенчестве был провозглашён российским императором. Через год свергнут Елизаветой, дочерью Петра I. Большую часть жизни провёл в заточении. В 1764 году, в начале царствования Екатерины II, был убит охраной при попытке его освободить.

Леонард Эйлер (1707–1783) в представлении не нуждается. Вторым академиком был Георг Вольфганг Крафт (1701–1754) – немецкий математик и физик, профессор, автор нескольких учебников для гимназии при Академии наук, в том числе «Краткого руководства к теоретической геометрии». Любопытно, что в рукописной редакции анекдота оба названы «добросовестными немцами»: несмотря ни на что, они составили гороскоп по всем правилам астрологии. Однако ничто не помешало им потом так же «добросовестно» его переделывать. Что касается Эйлера, то он, как известно, по происхождению швейцарец.

Гороскоп исследователям разыскать не удалось. Но это не означает, что история вымышленная. Выглядит она вполне правдоподобно, достоверных деталей

здесь много. Подробности её графиня Загряжская могла узнать от отца, который занимал пост президента Петербургской академии наук с 1746 по 1798 год и общался с Леонардом Эйлером.

Известно, что Анна Иоанновна увлекалась астрологией и метеорологией, а учёные мужи составляли для неё гороскопы и определяли погоду «по звёздам». По воспоминаниям Якова Штелина³, императрица очень верила астрологическим прогнозам с тех пор, как ей удачно предсказали вступление на русский престол, поэтому часто обращалась в академию, требуя ответов на свои вопросы. Это дело всегда поручали профессору Крафту, и тому приходилось усердно заниматься астрологией. Один из таких вопросов касался гороскопа несчастного наследника Ивана⁴.



**Яков Штелин. Гравюра И. Штенглина
с рисунка Г. Шмидта, 1764 год**

³ Яков Штелин (1709–1785) – российский академик, историк искусства, литератор и мемуарист. Автор популярного сборника «Подлинные анекдоты о Петре Великом» (1785).

⁴ Пекарский П.П. История Императорской академии наук в Петербурге. Т. 1 (С.-П., 1870).

Фактически на Крафта были возложены обязанности придворного астролога. Уже в начале 1730-х годов он был известен как предсказатель, а один поэт даже назвал его в шутку «прославленным другом звёзд». Но что же сам учёный? Да ничего. Георг Крафт обстоятельно описал свою работу в Петербургской академии наук, но умолчал о занятиях астрологией и сделанных когда-либо предсказаниях.

Как заметил один пушкинский герой: «А что греха таить? Не он первый, не он последний...» И правда, ведь что в эпоху Возрождения, что в Новое время среди авторов гороскопов значились видные европейские астрономы и математики. Вспомним хотя бы Джероламо Кардано, Иоганна Кеплера и Готфрида Лейбница. Последний, например, сорок лет был астрологом при Ганноверском дворе. С Кардано связана история в духе анекдота про Эйлера и Крафта. Она весьма показательная и заслуживает внимания.

В конце 1552 года, находясь в Англии, Джероламо напророчил юному королю Эдуарду VI долгую жизнь и блестящую карьеру. Но тот прожил всего несколько месяцев после этого предсказания. Позже Кардано нашёл себе оправдание. Во-первых, было слишком мало времени, чтобы изучить как следует расположение планет, а во-вторых, он прекрасно знал: предвещать смерть монархам небезопасно. Даже вспомнил о незавидной судьбе двух прорицателей, давших подобные прогнозы. Нет, сам он не осмелился бы сделать такое, поэтому намеренно искажил гороскоп.

Иногда эту историю относят к ряду баек об учёных. Однако это не выдумка. Кардано поведал о ней в книге *Geniturarum Exempla* (1554), куда вклю-

чил и сам гороскоп, и заготовленные комментарии. Кстати, Джероламо был искусным и опытным врачом. По его собственному свидетельству, после встречи с Эдуардом VI он отметил, что юный король держался словно старик и скорее плохо следил за здоровьем, чем страдал от хронических болезней. Одним словом, в борьбе между медиком и астрологом победило чувство самосохранения.

Что за выводы напугали Эйлера и Крафта и почему, можно только догадываться. Какие блага они в итоге предсказали Иоанну Антоновичу, мы тоже никогда не узнаем. Зато хорошо известно, что вскоре после этого случая академики покинули Россию. Эйлер отбыл в июне 1741 года, аккуратно между двумя дворцовыми переворотами, – на четверть века и возвратился только при Екатерине II, Крафт уехал три года спустя – навсегда, а на все предложения вернуться отвечал отказом.

Остаётся добавить, что в жизни Александра Сергеевича были ещё два человека с фамилией Эйлер. Оба – родственники знаменитого математика. Это его племянник Леонтий Карлович, в начале 1810-х годов эконо́м в Царскосельском лицее и один из героев сатирических куплетов лицеистов⁵, и правнучка Александра Александровна, фрейлина, петербургская знакомая поэта.

Наталья Карпушина

⁵ Острые на язык ученики посвящали их товарищам, профессорам, воспитателям и другим работникам лицея. Досталось от них и Леонтию Карловичу, который заведовал хозяйственной частью: «С жидовской рожей эконо́м. Наш Эйлер знаменитый».

ПОЭТ И МАТЕМАТИКИ



А.С. Пушкин. Акварель П. Соколова,
1830-е годы



Джероламо Кардано. Гравюра
К. Аммона Младшего, 1652 год



Леонард Эйлер. Гравюра В. Соколова
с рисунка И. Брукера, около 1766 года



Георг Крафт. Гравюра И. Хайда
с рисунка В. Майера, 1750-е годы

ПОДПИСКА 2024. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



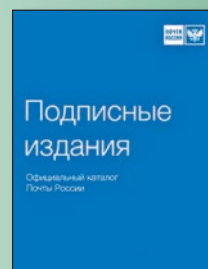
Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 6, 1–80