

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

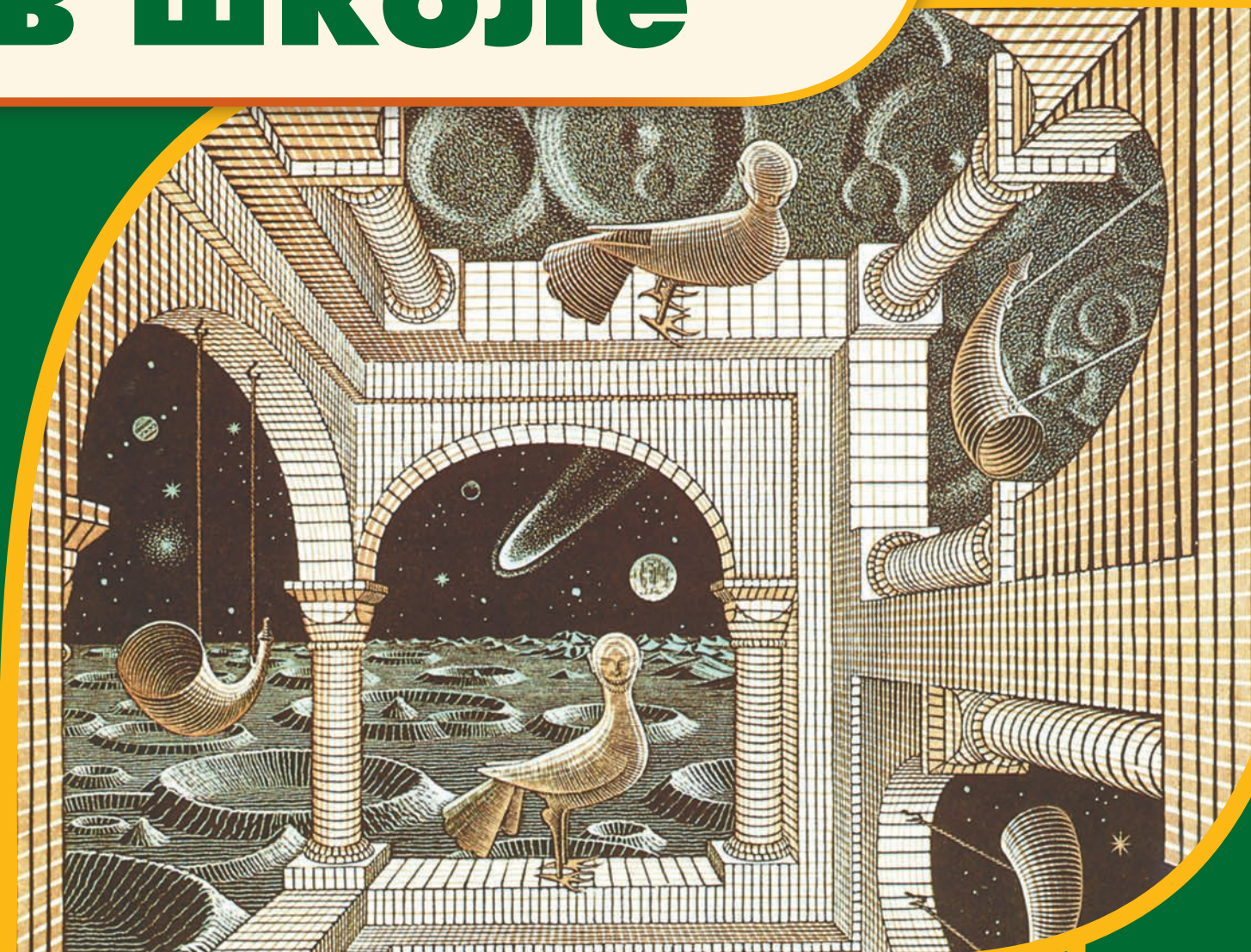


научно-теоретический и методический журнал

6 2022

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



Экстремальные задачи по геометрии. 11 класс

Лабораторные работы по математике как инструмент формирования экспериментального мышления обучающихся

Графы в решениях задач

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



О тревожности математической, и не только

Название и содержание слова главного редактора в предыдущем номере нашего журнала (про объём гиппокампа и прочие особенности строения мозга в связи с математи-

ческими возможностями) вызвала заинтересованный отклик читателей и даже полемику. Одним кажется, что профессиональный журнал не должен выходить за жёсткие пределы, ограниченные методикой преподавания математики в школе. Других, напротив, заинтересовал тот новый пласт знаний, о котором шла речь в материале — об особенностях строения и активизации определённых зон мозга и умственной деятельности детей, непосредственно связанных с выполнением простейших арифметических действий.

Хочется всё же поддержать естественный для настоящего педагога интерес к особенностям восприятия математики детьми и zároveň вернуться к чуть более традиционной проблеме на стыке психологии и методики преподавания математики, которую обычно обозначают термином «математическая тревожность».

Важность этой проблемы и поисков путей её преодоления подчёркивает хотя бы тот факт, что в школьном образовании именно «математическая тревожность» стала общеизвестной, в то время как едва ли кто-то слышал о какой-то другой специфической тревожности — будь то географической, биологической или, скажем, литературной...

Конечно, отрицательно на успехи в математике у детей влияют индивидуальные особенности ученика, объём рабочей памяти, генетическая предрасположенность и др. Но одновременно, как показывают исследователи этого феномена, на математическую тревожность ребёнка влияет и общая атмосфера в классе

и школе (которую, кстати, не замерить никакими модными рейтингами).

И ещё об атмосфере, но теперь уже в другом контексте. Оказывается, и тут всё серьёзно: в исследовании китайских учёных доказано, что даже загрязнение воздуха может снизить способности к изучению математики.

Однако особенно для нас важно, что совсем недавно международная группа учёных в рамках обширного исследования более миллиона учеников из 65 стран мира установила такой существенный для школы (и для нашего журнала!) факт, что «снижение математической тревожности напрямую связано с верой в учителя».

То есть, на индивидуальном уровне всё работает через учителя: уверенность педагога в преподавании предмета снижает математическую тревожность и её влияние на успеваемость. Значит, это напрямую зависит от наших знаний, профессионализма и человеческих качеств, от восприятия учеником учителя как компетентного и справедливого (и всё это дотошно продемонстрировано в графиках и вычислено в коэффициентах — как мы любим).

Интересно при этом, что участие родителей в домашних заданиях, наоборот, ассоциируется с ростом математической тревожности (это также дотошно рассчитано и показано).

Однако от родителей, конечно, не только вред — ещё в одном исследовании продемонстрировано, например, что высшее образование родителей напрямую коррелирует с хорошей успеваемостью по математике у детей.

В общем, нельзя педагогу, профессионалу не учитывать наличие математической тревожности, не стараться минимизировать её проявление у детей. Особенно на фоне общей тревожности нашего времени.

Евгений Бунимович

ОЛИМПИАДЫ

- 3 Петерсон Л.Г., Агаханова О.Н.
Проблемы олимпиадной подготовки по математике учащихся общеобразовательных школ и пути их решения в системе «Учусь учиться»

ОТКРЫТЫЙ УРОК

- 20 Смирнов В.И., Смирнова И.М.
Экстремальные задачи по геометрии. 11 класс

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 29 Хэкало С.П.
Внеурочная проектная деятельность учащихся по планиметрии: методы креативного мышления и функциональная грамотность

МУЛЬТИМЕДИА

- 38 Сгибнев А.И.
**Интерактивные модели в помощь учителю математики
(на примере коллекции живых чертежей по курсу геометрии 9 класса)**

ВНЕ УРОКА

- 46 Панкратова Л.В.
Применение оценок для среднего логарифмического в решении задач

ЭКСПЕРИМЕНТ

- 51 Закирова А.В., Ладэ Э.О., Леконцева В.А., Бодряков В.Ю.
**Лабораторные работы по математике как инструмент формирования
экспериментального мышления обучающихся**

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 59 Мельников Р.А., Саввина О.А., Черноусова Н.В.
Вячеслав Иосифович Крупич (к 100-летию со дня рождения)

ХРОНИКИ

- 64** Кузнецова Т.И., Кондратьева Г.В.
Всероссийский научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2021/2022 учебном году

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 68** Акулич И.Ф.
Из жизни туристов

ЗАДАЧИ

- 75** Иванова Е.Ю.
Графы в решениях задач



Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3677. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2022, № 6 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ПРОБЛЕМЫ ОЛИМПИАДНОЙ ПОДГОТОВКИ ПО МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ В СИСТЕМЕ «УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

PROBLEMS OF OLYMPIAD TRAINING IN MATHEMATICS OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS AND WAYS TO SOLVE THEM IN THE «LEARNING TO LEARN» SYSTEM

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_3

Л.Г. Петерсон, д.пед.н., проф.,
petersonlg@mail.ru,
О.Н. Агаханова,
agakhanova@phystech.edu;
НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной
педагогики», Москва

L.G. Peterson, Dr.Sci. (Pedagogy), Prof.,
petersonlg@mail.ru,
O.N. Agakhanova,
agakhanova@phystech.edu;
NOU DPO Institute of System-activity Pedagogy,
Moscow

Аннотация: в статье описаны проблемы современной олимпиадной подготовки учащихся 1–9 классов общеобразовательной школы и пути их решения в рамках нового курса «Олимпиадная математика» системы «Учусь учиться» (Л.Г. Петерсон). Изложены методологические основы и ключевые инструменты данного курса – принципы обучения, закон рефлексивной самоорганизации (РСО), технология деятельностного метода (ТДМ), технология «Математический театр», метод ролей. Показано, как метод ролей позволяет выращивать у детей общие интеллектуальные способности к решению любых нестандартных задач, приведены конкретные примеры практической реализации нового педагогического инструментария

Abstract: the article describes the problems of modern Olympiad training of students of grades 1–9 of a secondary school and ways to solve them within the framework of the new course «Olympiad Mathematics» of the «Learning to learn» system (L.G. Peterson). The methodological foundations and key tools of this course are outlined – the principles of teaching, the law of reflexive self-organization (RSO), the technology of the activity method (TDM), the «Mathematical Theater» technology, the role method. It is shown how the role method allows students to develop general intellectual abilities to solve any non-standard tasks, and specific examples of the practical implementation of new pedagogical tools are given

Ключевые слова: олимпиадная математика, система «Учусь учиться» (Л.Г. Петерсон), рефлексивная самоорганизация (РСО), технология деятельностного метода (ТДМ), театрализация, коммуникация, метод ролей

Keywords: olympiad mathematics, «Learning to learn» system (L.G. Peterson), reflexive self-organization (RSO), activity method technology (TDM), theatricalization, communication, role method

Математические олимпиады в настоящее время принято считать элитным направлением: в них вовлечено ограниченное число школьников, чаще всего из математических или профильных классов.

При этом мощный ресурс олимпиадной математики как эффективного инструмента интеллектуального и личностного развития детей в массовой школе используется недостаточно.

Олимпиадные задачи – это, как правило, нестандартные задачи, поэтому для их решения недостаточно просто применить изученные знания. Это всегда пусть маленькое, но открытие, позволяющее пережить радость творчества и удовольствие от интеллектуальной деятельности. Решение олимпиадных задач развивает у *каждого* ребёнка умение не бояться трудностей, воображение и творческие способности, глубину и гибкость мышления, самостоятельность и трудолюбие, повышает интерес к математике и уровень знаний по математике. Поэтому вовлечение в олимпиадную математику полезно *для всех* учеников: математически одарённые дети в творческой доброжелательной среде смогут полнее реализовать свой потенциал, а все остальные – развить свои математические способности и успешнее учиться.

Между тем, можно выделить целый ряд проблем, создающих препятствия для привлечения в олимпиадную среду учащихся массовой школы, таких как недостаточная мотивация школьников к участию в олимпиадном движении, «оторванность» олимпиадной математики от основного школьного курса, недостаточная системность олимпиадной подготовки, отсутствие преемственности между разными уровнями образования.

Для решения проблем развития детей средствами олимпиадной подготовки по математике в системе «Учусь учиться» разрабатывается курс «Олимпиадная математика», рассчитанный на учащихся 1–9 классов общеобразовательной школы. **Концептуальная идея** курса состоит в том, чтобы: 1) разработать педагогический инструментарий для учителей 1–9 классов (содержание, технологии, методики, методическое обеспечение), ориен-

тированный на повышение мотивации учащихся и вовлечение их в самостоятельную математическую деятельность, 2) организовать обучение и методическое сопровождение педагогов и, за счёт этого, 3) повысить качество олимпиадной подготовки по математике и математического образования в целом.

Целью данного курса является интеллектуальное и личностное развитие школьников средствами непрерывной олимпиадной подготовки по математике на основе системно-деятельностного подхода.

В качестве **методологической основы** реализации поставленной цели были выбраны следующие принципы:

1) **Принцип развития**, который состоит в том, что олимпиадная подготовка должна быть нацелена, прежде всего, на создание условий для всестороннего развития мышления и личностных качеств каждого ученика, а не ограничиваться тренингом в освоении методов решения олимпиадных задач. Суть этого принципа можно кратко выразить тезисом: *«развитие средствами олимпиадной математики каждого ученика»*.

2) **Принцип «выращивания»** состоит в совмещении, с одной стороны, внутренней активности ученика, его целенаправленных попыток раскрыть и реализовать свой потенциал, а с другой, – внешней организации этой активности со стороны учителя в рамках той же цели [1, с. 503].

3) **Принцип успешности** состоит в акцентировке на успешность, то есть в создании такой среды, где к ошибке относятся как к ступеньке роста, а не поводу для огорчения и порицания, где ценится и поддерживается успех каждого ученика относительно себя, независимо от начального уровня его подготовки и математических способностей.

Основными особенностями курса «Олимпиадная математика» являются:

1) системность и непрерывность олимпиадной подготовки с 1 по 9 класс (на уровне принципов, технологий, содержания и методик), её достаточная полнота;

2) мотивация и вовлечение учащихся в самостоятельную математическую деятельность на основе системно-деятельностного подхода;

3) вырабатывание общеучебных интеллектуальных умений, необходимых для решения олимпиадных задач: умения эффективно преодолевать трудности, владение общими подходами к решению нестандартных задач;

4) создание творческой, эмоционально окрашенной образовательной среды, где каждый ученик имеет возможность добиться успеха;

5) создание единого пространства урока и внеурочной деятельности (синхронизация с непрерывным курсом математики «Учусь учиться» для 1–9 классов и системной математических олимпиад ВсОШ);

6) широкое методическое обеспечение (программа, учебные пособия, методические рекомендации по организации занятий в технологии «Математический театр», сценарии занятий с подробными решениями, презентациями, раздаточными и демонстрационными материалами);

7) методическая поддержка учителей в рамках Инновационной методической сети (ИМС) «Учусь учиться» (консультации, курсы, сетевые события с демонстрацией открытых занятий, творческие лаборатории и др.).

Каждая из перечисленных особенностей положительно образом влияет на качество олимпиадной подготовки учащихся и обеспечивается педагогическими инструментами системы «Учусь учиться» (метод

рефлексивной самоорганизации, технология деятельностного метода (ТДМ), система дидактических принципов, метод ролей, технология «Математический театр»).

Ключевым отличием курса «Олимпиадная математика» в сравнении с другими курсами, разработанными в данной области, является опора на общую теорию деятельности ММПК [1], что позволяет не случайным образом технологически оснастить педагогов практическими инструментами решения актуальных проблем подготовки к математическим олимпиадам: вовлечение детей в самостоятельную математическую деятельность, развитие мотивации, познавательных процессов, творческого потенциала личности, индивидуальный темп продвижения и эмоциональная поддержка каждого ребёнка в условиях разноуровневого обучения, системность и непрерывность олимпиадной подготовки в начальной и основной школе, единое пространство реализации системно-деятельностного подхода на уроках и во внеурочной деятельности. Благодаря этому у детей открывается возможность осваивать не только содержание олимпиадной подготовки на уровне своего максимума, но и развивать общие интеллектуальные способности к решению нестандартных задач, что жизненно важно для каждого ученика.

Содержание курса «Олимпиадная математика» соотнесено с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для начальной и основной школы 1–9 (авторы Л.Г. Петерсон, Н.Х. Агаханов, Г.В. Дорофеев и др.), но может использоваться и в школах, работающих по другим программам математики. Курс строился с опорой на золотой фонд олимпиадной литературы и проверенные временем методы и приёмы решения олимпиадных задач по математике.

В курсе выделены 3 этапа олимпиадной подготовки учащихся, учитывающие возрастные особенности их личностного развития.

I этап – мотивационный
(подготовительный) (1–2 классы).

Основной целью этапа является формирование мотивации к решению нестандартных математических задач на основе механизма «надо» – «хочу» – «могу».

На данном этапе реализуется проект «Задача дня». Детям систематически предлагаются нестандартные математические задачи в зоне их ближайшего развития («надо») и создается ситуация успеха, которая всегда вызывает радостные чувства и эмоции («хочу»). В результате удовлетворяются базисные потребности детей в безопасности, общении и поддержке, накапливается опыт решения нестандартных задач, готовится мышление и снимается страх перед новым и неизвестным («могу»). Здесь же происходит первое знакомство детей с коммуникативными ролями автора и понимающего и ролями мыслителя, решающего задачу. Все роли построены на основе метода рефлексивной самоорганизации (РСО).

II этап – ознакомительный
(3–6 классы).

Основной задачей этапа является знакомство учащихся с базовыми подходами, методами и приёмами решения олимпиадных задач в соответствии с содержанием курса «Олимпиадная математика», а также формирование первичного опыта применения этих методов.

Технология «Математический театр», позволяет создать в классе творческую среду, где вырабатываются уважение и признание достижений каждого ученика, устойчивая познавательная мотивация, вера в себя. Роли мыслителя, которые дети постепенно осваивают, дают возможность овнешнить

внутренние мыслительные действия по решению нестандартных интеллектуальных задач, сделать их доступными для детей с разными типами мышления и за счет этого – вовлечь более широкий круг учащихся в олимпиадное движение.

III этап – практический
(7–9 классы).

На данном этапе увеличивается доля самостоятельности учащихся в применении РСО при решении олимпиадных задач [2, с. 95]. Продолжается отработка базовых приёмов и методов олимпиадной математики, но основной задачей становится освоение общих подходов к решению нестандартных задач, применение их к решению более сложных, «многоходовых» задач и переход к самостоятельной разработке новых способов.

Использование технологии «Математический театр» помогает поддерживать в классе творческую среду, окрашенную позитивными эмоциями. При этом роли мыслителя, овнешняющие умственные действия при решении нестандартных задач, постепенно переходят во внутренний план, их исполнение автоматизируется и становится прочной базой не только самостоятельного применения новых подходов к решению задач, но и самостоятельного поиска (например, появляются задачи на дополнительные построения в геометрии, где недостаточно «знать», а нужно «увидеть» новый, неожиданный способ решения).

Соответственно коллективные и групповые формы достижения успеха в решении олимпиадных задач всё чаще дополняются индивидуальными. Всё это отвечает потребностям детей в познании, открытии, созидании, порождает важное для их познавательной мотивации интеллектуальное удовольствие и уважение к достижениям (своим и других).

Таким образом, в результате прохождения этих трёх ступеней открывается возможность не только повысить уровень олимпиадной и общей математической подготовки школьников, но и создать в классе среду уважения к успеху и стремления к успеху, поддержать психологическое здоровье детей и их личностный рост к наивысшим уровням развития.

За счёт чего и как это происходит?

Ключевым инструментом, обеспечивающим реализацию *принципа развития* в курсе «Олимпиадная математика», является методологический закон РСО (ММК и ММКП). РСО – это процесс, в котором происходит развитие человека посредством «правильного» (эффективного) преодоления затруднений. Суть закона РСО состоит в том, что в ситуации затруднения следует направить свои эмоциональные и интеллектуальные ресурсы на выявление причины, которая мешает двигаться вперёд, и её целенаправленно устранить [5, с. 33].

Рефлексивная самоорганизация, мини-цикл (РСО, рис. 1)

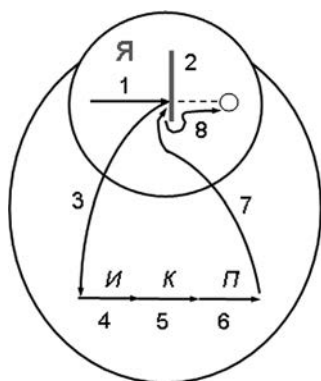


Рис. 1

1. Признаю **моё** затруднение в достижении цели, спокойно к нему отношусь.

2. Фиксирую его в форме: «**Я пока не могу** (решить данную конкретную задачу)».

3. Начинаю думать.

4. Анализирую ситуацию (*Исследование*).

5. Нахожу **причину** затруднения (*Критика*).

6. Придумываю способ преодоления затруднения (*Проект*).

7. Начинаю действовать.

8. Реализую проект и достигаю цели.

Метод РСО положен в основу технологии деятельностного метода Л.Г. Петерсон (ТДМ), реализованной в непрерывном курсе математики «Учусь учиться» [6]. Из схемы, приведённой ниже, видно, что при работе в ТДМ учащиеся на каждом уроке проходят мини-цикл РСО (этапы 2–5), а значит, учатся действовать в нестандартной ситуации, эффективно преодолевать трудности, тренируют свои *soft skills*. При этом они глубоко и прочно усваивают математические знания за счёт развития мотивации и системного прохождения всех этапов формирования умственных действий (П.Я. Гальперин), которые также заложены в ТДМ [14, с. 52–58].

Технология деятельностного метода Л.Г. Петерсон (ТДМ, рис. 2)

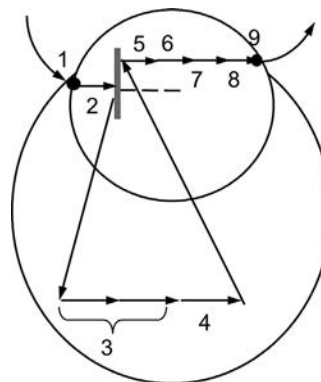


Рис. 2

1. Мотивация к учебной деятельности.

2. Актуализация и *фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии*.

3. *Выявление места и причины затруднения.*

4. *Построение проекта выхода из затруднения.*

5. *Реализация построенного проекта.*

6. Первичное закрепление с проговариванием в громкой речи.

7. Самостоятельная работа с самопроверкой.

8. Включение в систему знаний и повторение.

9. Рефлексия учебной деятельности.

(Курсивом выделены этапы, позволяющие ученику пройти полный цикл РСО.)

В олимпиадной подготовке важны и способность ребёнка не бояться нового задания, не встречавшегося ранее, и его рефлексивные умения, и качественное усвоение способов решения олимпиадных задач.

Однако в отличие от уроков в школе, где учащиеся открывают новое практически всегда под руководством учителя, а затем уже сами тренируются в применении новых знаний на аналогичных заданиях, в олимпиадной математике от них, как правило, требуется самостоятельно придумывать новые приёмы решений. Для того чтобы самим придумать новое, детям необходимо применить инструмент РСО, который им трудно освоить в абстрактном виде в силу возрастных особенностей. Встает вопрос: как им его передать?

С этой целью разработан *метод ролей*, который каждому мыслительному действию в РСО сопоставляет знакомый детям жизненный образ, помогающий им «расшифровать», упорядочить и «присвоить» соответствующие мыслительные действия. При этом был выбран расширенный цикл РСО для случая решения нестандартной интеллектуальной задачи [5, с. 38].

РСО, расширенный цикл («4 доски», рис. 3)

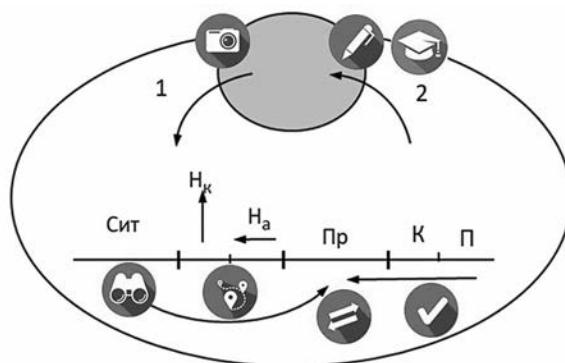


Рис. 3

1 – выход из действия, в котором возникло затруднение; Сит – ситуационная реконструкция и анализ прошедшего действия; К, П – построение концепции (К) «случая» на базе имеющегося аппарата понятий и категорий (П) и с учётом результатов ситуационного анализа; Пр – использование построенной концепции для проблематизации прошлого опыта; H_a – использование концепции и знания проблемы для построения абстрактной нормы («стратегии»); H_k – конкретизация абстрактной нормы деятельности («тактика»); 2 – возврат в действие.

Действительно, для того чтобы грамотно зафиксировать своё затруднение при решении нестандартной задачи, ученик должен, прежде всего, прочитать текст, «погрузиться» в описанную ситуацию и точно определить условие и вопрос задачи. Чтобы сделать понятным для учащихся это внутреннее мыслительное действие, «овнешнить» его, оно соотносится с образом *фотографа*, который на фотографии точно отображает реальную картинку (стрелка 1).

Далее ученику необходимо провести

анализ описанной в задаче ситуации, выявить связи между условиями и требованиями, которые определил фотограф, и понять, в каком направлении двигаться, какие из имеющихся знаний помогут построить модель. Для перевода этих мыслительных действий во внешний план

используется образ *разведчика* ( – Сит), который, с одной стороны, устанавливает взаимосвязи между элементами задачи, а с другой, высказывает идеи и предположения о последующем выборе или создании модели.

Поиск решения задачи начинается с построения модели, то есть «перевода» текста задачи на математический язык (при этом может быть использована известная модель, либо построена новая – своя собственная). Мыслительные шаги по построению математической модели

осуществляет *переводчик* ( – Пр). Его миссия состоит в том, чтобы в наглядной (графической, знаковой, табличной) форме показать условия и вопрос задачи, а также все существенные взаимосвязи между её элементами. Таким образом, поиск решения выводится на уровень: «знаю что, но не знаю как» (проблематизация). В ходе построения модели переводчик определяет, какие знания из имеющихся в арсенале у учащихся (К, П), помогут проложить путь к решению задачи.

Далее *навигатор* ( – Н_а, Н_к) определяет общий подход к решению задачи, уточняет ключевые факты из теоретической базы (определения, свойства, теоремы), которые будут использоваться для решения, и на их основании выстраивает план решения.

Осуществляет этот план и аккуратно, грамотно, понятно для других записыва-

ет решение *мастер* ( – стрелка 2). В завершение *эксперт*, опираясь на кри-

терии ( – К, П), проверяет пра-

вильность решения. *Магистр* ( – РСО) самим проводит рефлексию решения, отвечая на вопросы:

- Что получилось?
- Что можно было улучшить?
- Какие выводы можно сделать?

Роли мыслителя вводятся на отдельном, специально отведённом для этого занятии (с учётом возрастных особенностей детей). Полученные ключи ролей (средства, помогающие ученику в достижении целей соответствующей роли) фиксируются в таблице (Приложение), которую дети могут использовать её в дальнейшем при решении задач (подготовке «спектаклей»).

Продemonстрируем, как метод ролей может помочь при решении нестандартной задачи по теме «Маршруты» курса «Олимпиадная математика» [16, с. 46].

Задача. «Между некоторыми планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают между Землей и Марсом, Марсом и Венерой, Ураном и Нептуном, Нептуном и Сатурном, Сатурном и Юпитером, Юпитером и Нептуном, Сатурном и Ураном, Венерой и Землей. Можно ли добраться с Земли до Урана?»

Работа по решению любой задачи начинается с анализа её текста в роли *фотографа*. Вначале фотограф представляет картинку («фотографию») этой задачи, её образ в целом, а затем фиксирует условие и вопрос (требование) задачи.

Роль	Ключи	Исполнение роли учителем и учениками
ФОТОГРАФ 	КАРТИНКА	Варианты детей, например: 1) Я представляю себя разглядывающим фантастическую схему космических маршрутов между планетами Солнечной системы. 2) Я представляю себе планеты, а между ними летит космический корабль.
	УСЛОВИЕ, ВОПРОС (ТРЕБОВАНИЕ)	Условие: между некоторыми планетами установлены космические пути – ЗМ, МВ, УН, НС, СЮ, ЮН, СУ, ВЗ. Вопрос: можно ли построить путь от Земли до Урана (ЗУ)?

В отличие от стандартного шага алгоритма решения задач – «Внимательно прочитай задачу, назови условие и вопрос», – который не вызывает у детей никаких ассоциаций и эмоций, образ фотографа обращает их к своему личному опыту, будит воображение и ориентирует на создание «картинки» задачи. С другой стороны, этот образ выводит во внешний план внутреннюю мыслительную процедуру, которую им нужно осуществить: с «фотографической» точностью запечатлеть в сознании каждый элемент задачи, выделить её условие и вопрос для того, чтобы создать возможность анализа задачи.

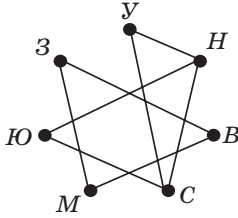
Аналогичным образом все остальные роли «мыслителя» помогают ученику продвигаться по шагам РСО, а учитель как «режиссёр» занятия направляет это движение.

Наиболее важные и трудные этапы

решения задачи, особенно нестандартной, – это этапы её анализа и построения математической модели, которая, отбрасывая всё несущественное, описывает взаимосвязи между всеми элементами задачи в удобной для восприятия и поиска решения форме («переводит» содержание задачи на математический язык). Соответственно, функции анализа задачи передаются *разведчику*, а функции построения её математической модели – *переводчику*.

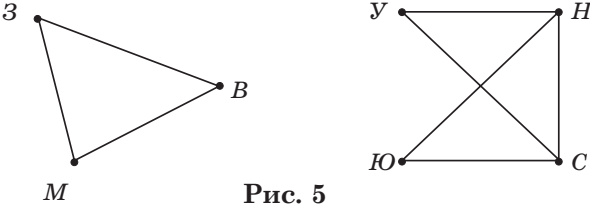
Для того чтобы подготовить мышление детей к самостоятельному решению новых задач, в сценариях занятий предусмотрен этап актуализации знаний. Так, на занятии по теме «Маршруты» дети вспоминают, как можно изобразить связи на схемах, а вариант исполнения ими ролей разведчика и переводчика под руководством учителя может быть следующим.

РАЗВЕДЧИК 	ВЗАИМОСВЯЗИ	1) Всего 7 планет: Земля, Марс, Венера, Уран, Нептун, Сатурн, Юпитер. 2) Некоторые из них связаны путями, но не все со всеми. 3) Летать можно и в одну, и в другую сторону (собщение двустороннее). 4) Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно либо назвать путь от Земли до Урана, либо объяснить, почему такого пути нет.
	ИДЕИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ	По записи условия маршруты между планетами анализировать неудобно. Можно начать с того, чтобы понятно изобразить все планеты и связи между ними с помощью схемы (графа).

ПЕРЕВОДЧИК 	МОДЕЛЬ (известная или своя)	1) Планеты на схеме (графе) изобразим точками (кружочками, звёздочками, треугольниками и т.д.). 2) Располагать их можно как угодно, но так, чтобы было удобно решать задачу. 3) На схеме (графе) рядом с точками удобно подписать первые буквы названий планет. 4) Поскольку летать можно в обе стороны, то связи (пути) между планетами обозначим линиями без стрелок. Вариант модели:  Рис. 4
--	---	--

На основе построенной схемы определяется общий подход к решению задачи и строится план решения.

Эти функции выполняет *навигатор*, а затем построенный план реализует *мастер*.

НАВИГАТОР 	ПРАВИЛА, СВОЙСТВА, ПОДХОД	Нужно по схеме (графу) перебирать все возможные пути, ведущие от Земли, и либо назвать путь от Земли до Урана, либо убедиться, что такого пути нет.
	ПЛАН РЕШЕНИЯ	1) Перерисовывать граф в удобном для анализа виде (при необходимости). 2) Перебрать все пути, ведущие от Земли. 3) Назвать путь от Земли до Урана либо доказать, что такого пути нет.
МАСТЕР 	РЕШЕНИЕ, ОФОРМЛЕНИЕ	1) Перерисовываем граф в удобном для анализа виде.  Рис. 5 2) По графу устанавливаем, что от Земли можно добраться только до Марса и Венеры. 3) По условию, ни одна из этих трёх планет не связана ни с какими другими. Значит, добраться с Земли до Урана нельзя. Вариант записи решения: З связана только с М и В, а они не связаны ни с какими другими. Значит, путь от З к У построить нельзя. О т в е т: нет.

Итоговое решение проверяется *экспертом*, а *магистр* делает выводы из решения задачи.

При этом важно отметить, что как в подготовке, так и в исполнении под руко-

водством учителя-«режиссёра» в каждой роли мыслителя активно участвует не только «артист» на сцене, но и все его партнёры по спектаклю – «артисты»-ученики в классе.

ЭКСПЕРТ 	ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ И ОТВЕТ	Нужно проверить, что на схеме изображены все планеты и связи, данные в условии. О т в е т: нет.
МАГИСТР 	ВЫВОДЫ	• Для решения задач про связи между объектами (пути, маршруты, игры) удобно использовать схемы (графы), где объекты изображены точками, а связи между ними – линиями. • Точки можно располагать произвольно, но так, чтобы схема была как можно проще. • Линии могут быть как прямыми, так и кривыми, со стрелками (если связь односторонняя) и без них (если связь двусторонняя). • Связи удобнее считать, когда линии не пересекаются.

Таким образом, использование метода ролей позволяет учащимся погрузиться в решение задачи, а учителю – лучше подготовиться к работе с возможными затруднениями, которые могут появиться на любом этапе решения нестандартной задачи.

Дополнительно к ролям мыслителя вводятся **роли коммуникативного взаимодействия**, ведь умение работать в команде, кратко и чётко излагать свои мысли, слушать и слышать других, адекватно понимать их высказывания, согласовывать свою позицию с другими необходимы сегодня в любом деле. При работе по курсу «Математический театр» учащиеся имеют возможность систематически тренироваться в исполнении коммуникативных ролей *автора, понимающего, критика и организатора*, которые описаны в схеме коммуникации ММПК [1, с. 281–282].

По инициативе и желанию детей и учителя на занятиях можно использовать в мотивационных целях ролевые ситуации, переносясь в разные страны, временные

периоды, литературные произведения и кинофильмы – это не является целью «театрализации» в рамках курса, но при условии интереса и желания детей может работать на их внешнюю мотивацию.

Метод ролей реализован в *технологии «Математический театр»*, которая является модификацией ТДМ для развития интеллектуальных способностей школьников в ходе освоения олимпиадной математики. Одновременно данная технология помогает детям освоить рефлексивный метод преодоления трудностей и стратегии решения нестандартных математических задач, включает творческий эмоциональный компонент через ролевую игру, перевоплощение, командную работу, соревновательность, переживание радости побед.

Каждое отдельное занятие в этой технологии – это постановка нового спектакля, у которого есть своё название (тема занятия), сценаристы (учитель и авторский коллектив проекта), сценарий (задачи, которые предстоит решить), режиссёр

(учитель). Ученики выступают во всех ролях – они и актёры, и зрители, но при этом сценаристы и режиссёры своих выступлений, в ходе которых они представляют построенные ими решения задач.

«Математический театр» – это своеобразный спектакль-форум, элементами которого являются мини-спектакли детей.

Технология «Математический театр»

ЭТАП 1. Математическое фойе

Обычно в театральном фойе зрители погружаются в атмосферу театра и внутренне готовятся к спектаклю. В Математическом фойе также идет подготовительная работа. При этом учащиеся проходят этапы 1–5 ТДМ.

Занятие начинается с мотивации к учебной деятельности на основе механизма «надо» – «хочу» – «могу». Чтобы заинтересовать учеников, учитель в течение 1–3 минут погружает их в тему занятия с помощью ситуации, побуждающей повторить ранее изученный материал, который подготовит их к освоению / открытию нового знания.

Затем учащиеся знакомятся с новыми приёмами и способами решения олимпиадных задач. Учитель предлагает **ключевую задачу** – это новая для школьников задача по теме занятия, которая помогает вывести «советы» (содержательный ориентир для решения задач, включенных в занятие).

Ключевая задача решается под руководством учителя, при этом в ходе её решения может использоваться как подводящий диалог, так и организация самостоятельных открытий детей на основе РСО. Если в ходе решения ключевой задачи возникает затруднение, используется метод ролей: роли мыслителя переводят

внутренние мыслительные действия во внешний план и таким образом помогают учащимся найти путь решения.

В завершение дети обобщают свои действия и фиксируют собственные версии «совета» карандашом в учебном пособии (этот шаг важен, так как он пробуждает в учениках желание узнать, как правильно). После озвучивания и согласования версий, дети аккуратно дописывают в пособии «совет» ручкой, а затем на основе этого формулируют *тему* и *цель* занятия.

ЭТАП 2. Творческая мастерская

Представлению спектакля на сцене театра предшествует творческая работа группы актёров под руководством режиссёра. На репетициях актёры осваивают новые роли, приёмы и техники, совершенствуют своё мастерство перевоплощения, размышляют, фантазируют.

В Творческой мастерской школьники распределяются в группы по 4–6 человек (актёрские труппы), каждой из которых предлагается свой сценарий – олимпиадная задача из данного раздела, по уровню соответствующая уровню подготовки группы.

В течение 4–5 минут группы пытаются самостоятельно выполнить полученное задание, распределяясь по ролям. При этом они могут пользоваться подсказками или обратиться за помощью к учителю. Решение дети фиксируют на черновиках и готовят его представление на сцене «Математического театра».

ЭТАП 3. Сцена

Каждая группа («актёры») представляет свой мини-спектакль (вариант решения) перед всеми участниками («зрителями»). На сцену может выйти один артист («моноспектакль») или несколько (спектакль разыгрывается «по ролям»).

Перед тем как представить решение, актёр должен дать зрителям некоторое время на знакомство с задачей: пересказать условие, начертить схему, чтобы каждый участник «спектакля» качественно сыграл роль фотографа – «погрузился» в условие задачи, сделал его «своим».

Задача актёра (или актёров) – донести до зрителей суть содержания и решения своей задачи. Возможно, он расскажет, какие вопросы себе ставил.

Задача зрителей – просмотреть спектакль, не перебивая актёра, вникнуть и понять предлагаемый способ решения.

Если несколько групп решали одну и ту же задачу, то после выступления первой группы участники каждой из остальных уточняют решение методом дополнения (не представляя его заново, а уточняя какой-то элемент: формулировку условия и вопроса, построенную модель, способ решения и проверки, ответ и т.д.). При этом зрители могут задать актерам в коммуникативной форме вопросы на понимание («Правильно ли я понял(а), что ...?»). Таким образом, учащиеся получают ценный опыт выступлений, презентации своих идей и их обсуждения в форме коммуникативного взаимодействия.

Представленное решение уточняется (если оно не получено, отыскивается) с помощью подводящего диалога. Возможность ответа предоставляется сначала членам группы / групп, решавших данную задачу, а если потребуется, – всем участникам. Разбираются разные варианты решения, согласованный способ учитель фиксирует на доске, а дети аккуратно записывают ручкой. Так они постепенно создают для себя «умный решебник», который поможет им при подготовке к математическим соревнованиям разных уровней.

По окончании спектакля звучат аплодисменты как знак признания (в случае успеха выступления) или поддержки (в случае неудачи). А если спектакль восхитил и впечатлил зрителей, то могут звучать даже возгласы «браво!».

ЭТАП 4. Антракт

Данный этап является аналогом этапа 6 уроков в ТДМ – первичное закрепление с проговариванием во внешней речи, – необходимой ступени прочного усвоения знаний (П.Я. Гальперин).

Учитель просит школьников проговорить вслух в группах приёмы решения задач по выбранной теме, которые они открыли и научились применять.

После этого он с помощью подводящего диалога проводит рефлексия решения задач, фиксирует достижения учащихся и то, что можно улучшить. Постепенно, по мере взросления детей, проведение рефлексии решения переходит к учащимся, выступающим в роли магистра.

В завершение учитель подводит итог всех выступлений и создаёт в классе ситуацию успеха, которую также можно сопровождать аплодисментами в поддержку позитивных результатов, полученных на занятии.

ЭТАП 5. Выход на бис

Все дети получают возможность выступить «на бис» – выбрать себе для тренинга 1–2 задания, аналогичных решённым на занятии, а затем проверить себя по решению, приведённому в пособии.

Данный этап соответствует этапу 7 уроков в ТДМ – самостоятельная работа с самопроверкой по эталону, – где новое знание переходит у учащихся во внутренний план, что является необходимым этапом процесса его формирования усвоения (П.Я. Гальперин).

ЭТАП 6. Зеркало

Это этап рефлексии деятельности на занятии. Чтобы побудить детей провести самоанализ своей работы, учитель предлагает вопросы:

- Какую цель вы сегодня ставили на занятие? Достигли ли вы этой цели?
- Что нового узнали? Чему научились?
- Какие задачи получились? Какие нет?
- Какие задачи показались сложными? Какие понравились?
- Какие роли помогли вам лучше понять решение задач?
- Кто в ходе представления задач был в роли автора, понимающего? Какая из этих ролей вам больше нравится?
- Довольны ли своей работой? Как можно её улучшить?
- Какие личные победы сегодня удалось одержать? Кто хочет о них рассказать?
- С каким настроением вы сегодня решали задачи? Нарисуйте своё отражение в зеркале.
- Определите своё отношение к решённым задачам с помощью согласованных значков («царская», «легкая», «сложная», «красивая» и т. д.).

За кулисами

В этом разделе для детей, которые работают быстрее и, решив все задания на занятии, хотят потренироваться дома, предлагаются дополнительные задания, как правило, более высокого уровня сложности.

Итак, при работе в технологии «Математический театр» учащиеся на системной основе осваивают стратегии, методы и приёмы решения олимпиадных задач по математике, учатся не бояться трудностей, преодолевать их на основе метода РСО, работать в команде. Вводимые роли переводят внутренние мыслительные действия по решению любых нестандартных задач на уровень знакомых детям жиз-

ненных образов, помогают им грамотно работать с текстами, наполняют процесс решения олимпиадных математических задач соревновательностью и позитивными эмоциями.

Использование технологии «Математический театр» требует создания в классе образовательной среды, основанной на перечисленных выше методологических принципах *развития, выращивания и успешности*, а также на дидактических принципах деятельностного метода: *психологической комфортности, деятельности, минимакса, вариативности, творчества*. Для их конкретизации можно использовать аналогию интереса детей к компьютерным играм. Почему дети с азартом играют порой в самые сложные компьютерные игры, а трудности решения математических задач их вдохновляют далеко не всегда?

На наш взгляд, это связано с тем, что в компьютерные игры дети играют по собственному желанию и выбору, их никто не заставляет; у них есть право на ошибку, никто не ругает их за то, что им не удалось перейти на более высокий уровень, они добиваются этого сами в своём индивидуальном темпе, и это рождает у каждого позитивные эмоции от самостоятельно одержанной победы. Значимыми для детей факторами являются похвала, поощрение за успешные шаги, уважительное отношение сверстников и друзей к игровым успехам друг друга.

Для формирования у учащихся интереса к решению олимпиадных задач можно использовать аналогичные **правила**:

1) *Не заставлять, а вдохновлять*, дать ребёнку право выбора.

2) *Исключить порицание* – дать право на ошибку, уважительно относиться к любой версии ученика, фиксировать его успехи, а не неудачи (например, ученик заметил важное обстоятельство, законо-

мерность, впервые предложил собственную версию и пр.).

3) *Предлагаемые задачи должны быть разноуровневыми* – каждому должна предлагаться задача в зоне его ближайшего развития, что позволит организовать площадку для самостоятельных проб детьми своих сил и создания ситуации успеха.

4) *Создать систему фиксации успехов и награждений детей (уровней / статусов)* – подобно тем, которые используют в компьютерных играх.

5) *Сделать успехи в решении «задач дня» значимыми событиями класса и семьи каждого ученика* – удовлетворение потребностей в признании является необходимой ступенью личностного роста каждого ребёнка и важным мотивирующим фактором.

Данные и другие правила, которые может ввести учитель, основываясь на перечисленных выше принципах, должны запустить механизм выращивания у школьников интереса к решению нестандартных задач по математике. На первых порах у детей нередко возникает лишь внешний, «спортивный» интерес, но он может помочь каждому ребёнку развить своё мышление, испытать радость озарения (я смог, я добился, у меня получилось!), обрести веру в себя, привить вкус к решению математических задач ради получения удовольствия уже от самого процесса решения, наработать инструментарий, который станет основой возникновения «внутренней» мотивации.

В этом процессе перехода от внешней мотивации к внутренней, который продолжается на всех этапах обучения, принципиально важна доброжелательность, создание творческой среды, умение замечать успехи каждого ученика, их моральная поддержка в случае удачи и осо-

бенно неудачи, социализация – признание значимости достигнутых результатов в решении олимпиадных задач другими учениками класса, учителями, родителями. Поэтому система поощрений должна быть видимой для окружающих – систематически отражаться на стенде или сайте класса, в сообщениях родителям (например, в чатах сети Интернет) и т.д., это есть мощнейший мотиватор для детей.

Оценивание результатов в курсе «Олимпиадной математики» происходит **в логике достижений** – не только математических, но и личностных, «относительно себя». При этом для каждого следующего шага ребёнку необходимо предпринять определённые усилия, проявить терпение, трудолюбие, но трудность должна быть преодолимой. Обсуждаются вопросы: «Что получилось?», «Что вызвало затруднение?», «Чему научился, решая (разбирая) задачу?», «Что пожелаю себе?», «За что могу похвалить себя, других?». Учитель организует в классе ситуацию взаимной поддержки и совместного переживания радости победы, которая, как и в настоящем театре, может выражаться аплодисментами.

Текущий контроль по данному курсу осуществляется в течение всего учебного года. При оценивании работ следует исходить из того, что основной целью подведения итогов в рамках курса «Олимпиадная математика» является формирование положительной мотивации учащихся к решению математических задач. Поэтому обязательным является соблюдение следующих требований:

1) Фиксируются только достижения, а относительно неудач проводится рефлексия и намечается план коррекции.

2) Акцент в оценивании смещается на *САМООценку* детьми своих достижений: ежедневно в проекте «Задача дня» и /

или один раз в неделю в курсе «Математический театр».

3) При подведении итогов следует учитывать не только результат, но и вложенные учеником усилия, а также динамику результатов относительно себя.

4) По результатам психологического тестирования качеств личности никакие отметки не выставляются.

Уровень освоения учащимися той или иной темы учитель может выявить в ходе предложенных в курсе математических игр.

Основным показателем результативности проводимой работы по курсу «Олимпиадная математика» является возрастание познавательной мотивации учащихся, их участие и результаты в математических олимпиадах разного уровня (в том числе, в обучающей «Олимпиаде Петерсон»), повышение качества знаний по школьному курсу математики.

Содержание курса «Олимпиадная математика» согласовано с содержанием непрерывного курса математики «Учусь учиться» для 1–9 классов школы и структурировано в 21 тематическую линию. Эти линии непрерывно развиваются с 1 по 9 класс, достаточно полно представляют традиции олимпиадной подготовки и углубляют знания школьной программы по математике.

В настоящее время опубликована программа курса, разрабатывается методическое обеспечение курса «Математический театр» – учебные пособия для учащихся 3–9 классов (ступени I–VII), методические рекомендации и сценарии занятий для учителей, презентации к занятиям, демонстрационные и раздаточные материалы. Изучение I ступени курса может начаться не только в 3 классе, но и позже – в 4, 5, 6 классах. Содержание нестандартных математических задач интересно и полез-

но учащимся любого возраста, а учебный план можно скорректировать за счет увеличения числа занятий в неделю.

Пособия всех ступеней состоят из *разделов*, которые удобны для реализации технологии «Математический театр» (МТ). Внутри каждого занятия выделены подразделы: «Советы» – приёмы и способы решения задач по изучаемой теме с пропусками для заполнения учащимися, «Творческая мастерская» – олимпиадные задания для открытий; «Выход на бис» – аналогичные задания для тренинга; «Зеркало» – пространство для рефлексии своей деятельности на занятии; «За кулисами» – олимпиадные задания повышенной трудности по данной теме. Кроме того, имеются разделы: «Игры» – для повторения и тренинга изученного; «Советы» – полные версии, с помощью которых дети уточняют версии; «Подсказки», которые дают учащимся направление для поиска решения заданий «Творческой мастерской»; «Варианты ответов» – к заданиям «Творческой мастерской» и «За кулисами»; «Варианты решений и ответов» к заданиям раздела «Выход на бис».

Однако методическое обеспечение разработано так, что его удобно использовать учителю, работающему любым методом и в любой технологии – математическое содержание с полным разбором решений выделено отдельными блоками. Независимо от выбранного метода главная задача взрослого – создать атмосферу уважения и взаимной поддержки, научить детей не бояться трудностей, спокойно и конструктивно относиться к своим ошибкам и неудачам, верить в себя и добиваться успеха. Как отмечал В.А. Сухомлинский, «Успех в учении – единственный источник внутренних сил ребёнка, рождающий энергию для преодоления трудностей, желания учиться» [4, с. 84].

На данный момент прошли апробацию с убедительными результатами учебные пособия «Математический театр» для 3–5 классов. Кроме программы, опубликовано пособие для 3 класса, а пособия для 4–5 классов готовятся к печати. Методические рекомендации ко всем занятиям вместе с разработанными для них презентациями, демонстрационными и раздаточными материалами по мере их создания выкладываются на сайтах www.sch2000.ru, <http://peterson.institute/>.

Список источников

1. Анисимов О.С. Методологический словарь для стратегов. Т. 1 / О.С. Анисимов. – М.: Энциклопедия управленческих знаний, 2004.
2. Анисимов О.С. Гегель: мышление и развитие (путь к культуре мышления). – М.: Агро-Вестник, АМБ-агро, 2000.
3. Венгер Л.А. Педагогика способностей. – М.: Знание, 1973.
4. Сухомлинский В.А. Собрание сочинений в 5 томах. Т. 4. – Киев: Радянська школа, 1979.
5. Петерсон Л.Г. Система и структура учебной деятельности в контексте современной методологии. Монография. / Л.Г. Петерсон, Ю.В. Агапов, М.А. Кубышева и др. – М.: Институт СДП, 2018.
6. Петерсон Л.Г. Деятельностный метод обучения: построение непрерывной сферы образования. Монография / Л.Г. Петерсон, М.А. Кубышева и др. – М.: АПК и ППРО, 2007.
7. Рабочая концепция одарённости: Федеральная целевая программа «Одарённые дети» / Под ред. Д.Б. Богоявленской, В.Д. Шадрикова. – М.: Министерство образования РФ, 2003. (http://narfu.ru/school/deti_konchep.pdf).
8. Хинчин А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Математика в школе. – 1962. – № 3. – С. 30–40.
9. Гнеденко Б.В. Развитие мышления и речи при изучении математики // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 3–9.
10. Гингулис Э.Ж. Развитие математических способностей учащихся // Математика в школе. – 1990. – № 1. – С. 14–17.
11. Агаханов Н.Х. Средовой подход как условие развития математически одарённых школьников / Н. Х. Агаханов // Вестник ТГПУ. – 2013. – № 1 (129). – С. 120–124.
12. Мелик-Пашаев А.А. Проявление одарённости как норма развития // Психологическая наука и образование. – 2014. – Т. 19. – № 4. – С. 15–21.
13. Петерсон Л.Г., Абатурова В.В., Кубышева М.А. Система «выращивания» одарённости школьников: методологический аспект и практика. – Профильная школа. – 2016. – № 2. – С. 6–22.
14. Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Как научить учиться: технология деятельностного метода в системе непрерывного образования (детский сад – школа – вуз) // Педагогическое образование и наука. – 2014. – № 2. – С. 52–58.
15. Петерсон Л.Г., Агаханова О.Н. Программа курса внеурочной деятельности «Олимпиадная математика». 1–9 классы / Подготовка учащихся общеобразовательных школ к решению нестандартных задач. – М.: Институт СДП, 2022.
16. Петерсон Л.Г., Агаханова О.Н. Математический театр: учебное пособие по олимпиадной математике для 3 класса (ступень I). – М.: Институт СДП, 2021. (https://www.sch2000.ru/lessons/math_theatre/, занятие 9.)

Приложение

КЛЮЧИ РОЛЕЙ МЫСЛИТЕЛЯ

Ключ роли мыслителя (при решении задачи) – средство, помогающее ученику в достижении целей данной роли.

Роль	Ключи	Содержание ключей
ФОТОГРАФ 	КАРТИНКА	Образ, возникающий при чтении текста задачи, который помогает погрузиться в задачу. Этот образ позволяет сделать задачу своей, принять её, стать её субъектом (участником, а не внешним наблюдателем). У каждого ребёнка – своя картинка
	УСЛОВИЕ, ВОПРОС (ТРЕБОВАНИЕ)	Выписанные в явном виде отдельные элементы условия задачи. Вопрос(ы), требование(я) задачи
РАЗВЕДЧИК 	ВЗАИМОСВЯЗИ	Описание связей между определёнными фотографом условиями и требованиями задачи. Анализ вопроса (требования) задачи (если он необходим)
	ИДЕИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ	Соотнесение анализа текста задачи с имеющимся опытом для последующего выбора или создания модели
ПЕРЕВОДЧИК 	МОДЕЛЬ (известная или своя)	Математическая модель задачи
НАВИГАТОР 	ПРАВИЛА, СВОЙСТВА, ПОДХОД	Описание эталонов – ключевых определений, правил, свойств, алгоритмов и т.д., которые используются для решения задачи. (Если дети правильно найдут эталон, то учитель в завершение обобщает их высказывания и описывает общий путь, способ решения. А если эталона найти не удалось, то учитель подводит детей к описанию возможного пути решения.)
	ПЛАН РЕШЕНИЯ	План решения задачи
МАСТЕР 	РЕШЕНИЕ, ОФОРМЛЕНИЕ	Описание решения задачи и его запись (аккуратная, краткая, понятная, грамотная)
ЭКСПЕРТ 	ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ И ОТВЕТ	Проверка решения задачи
	ВЫВОДЫ	Формулировка выводов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 11 КЛАСС

EXTREME PROBLEMS IN GEOMETRY. GRADE 11

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_20

В.А. Смирнов,
v-a-smirnov@mail.ru,
И.М. Смирнова,
i-m-smirnova@yandex.ru;
Московский педагогический государственный
университет

V.A. Smirnov,
v-a-smirnov@mail.ru,
I.M. Smirnova,
i-m-smirnova@yandex.ru;
Moscow State Pedagogical University

Аннотация: в работе рассматриваются задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 11-м классе

Abstract: the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 11-th grade

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 11 класс

Keywords: extreme geometry problems, 11-th grade

Данная статья завершает серию статей, опубликованных в журнале «Математика в школе», в которых были представлены задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7, 8, 9 и 10 классов.

В ней рассматриваются задачи на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), связанные со сферой, цилиндром, конусом, объёмами и площадями поверхностей тел в пространстве. Эти задачи могут быть использованы при обучении в 11-м классе на основных уроках, при проведении обобщающего повторения и курсов по выбору, организации проектной и исследовательской деятельности учащихся.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным задачам, рекомендуем книги [1–6].

Начнём с задач на взаимное расположение сферы и точки, сферы и плоскости, двух сфер, являющихся аналогами соответствующих задач для окружностей, которые были рассмотрены в первой статье этой серии.

Задача 1. Точка A , расположена вне сферы с центром в точке O . На этой сфере найдите точку, расстояние до которой от точки A : а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 1).

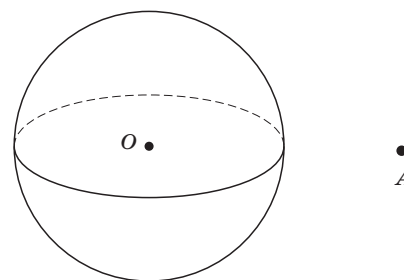


Рис. 1

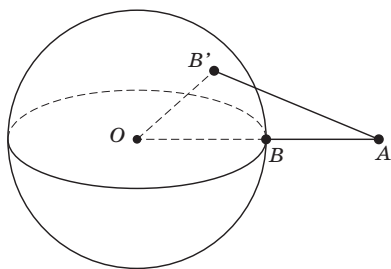


Рис. 2

Решение. а) Искомой точкой является точка B пересечения отрезка AO с данной сферой (рис. 2). Для любой другой точки B' этой сферы из неравенства треугольника следует неравенство $OA < OB' + AB'$. Учитывая, что $OA = OB + AB$ и $OB = OB'$, получаем неравенство $AB < AB'$.

б) Искомой точкой является точка C пересечения прямой AO с данной сферой, не принадлежащая отрезку AO (рис. 3). Для любой другой точки C' этой сферы из неравенства треугольника следует неравенство $AC' < AO + OC'$. Учитывая, что $OC' = OC$, получаем неравенство $AC' < AC$.

Задача 2. Плоскость γ не имеет общих точек со сферой с центром в точке O . На этой сфере найдите точку, расстояние от которой до плоскости γ : а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 4).

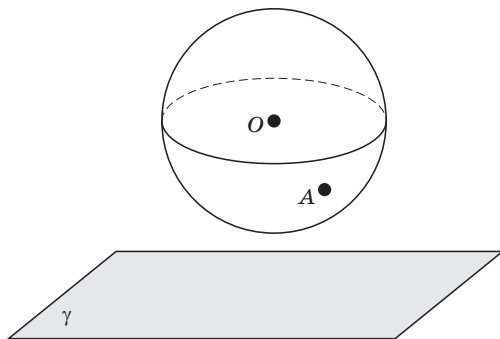


Рис. 4

Решение. а) Искомой точкой является точка A пересечения перпендикуляра OC , опущенного из точки O на плоскость γ , с данной сферой (рис. 5). Для любой

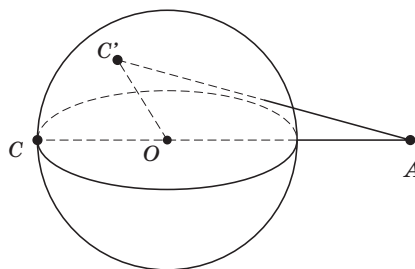


Рис. 3

другой точки A' этой сферы и перпендикуляра $A'C'$, опущенного на плоскость γ , выполняются неравенства $A'C' + OA' > OC' \geq OA + AC$. Учитывая, что $OA' = OA$, получаем неравенство $A'C' > AC$.

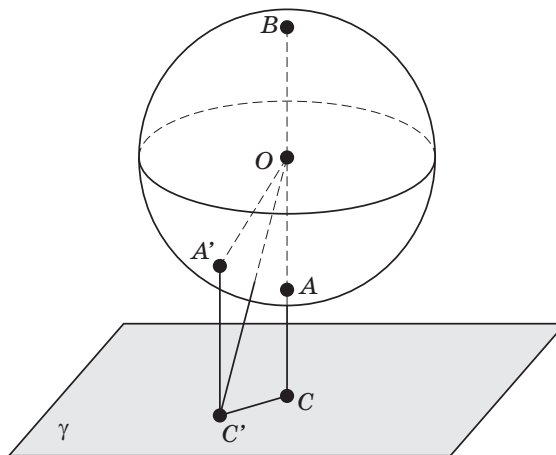


Рис. 5

б) Искомой точкой является точка B пересечения прямой, содержащей перпендикуляр OC , опущенный из точки O на плоскость γ , с данной сферой, не принадлежащая этому перпендикуляру (рис. 6). Для любой другой точки B' этой сферы и перпендикуляра $B'C'$, опущенного на плоскость γ , выполняются неравенства $B'C' \leq B'O < B'O + OC$. Учитывая, что $B'O = BO$, получаем неравенство $B'C' < BC$.

Задача 3. Две сферы с центрами в точках O_1 и O_2 не имеют общих точек и находятся вне друг друга. Найдите точки на этих сферах, расстояние между которыми:

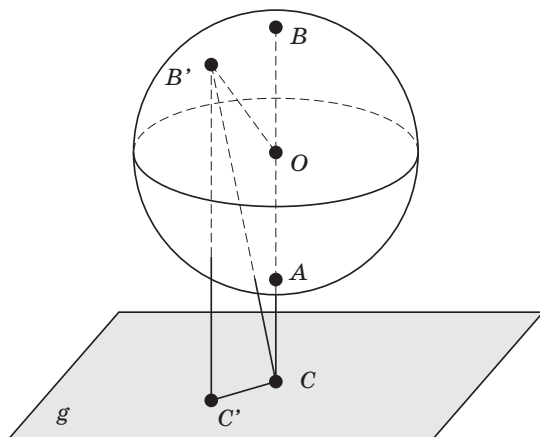


Рис. 6

а) наименьшее; б) наибольшее (рис. 7).

Решение. а) Искомыми точками являются точки B_1 и B_2 пересечения отрезка O_1O_2 с данными сферами (рис. 8).

Пусть B'_1, B'_2 – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим $O_1B'_1 + B'_1B'_2 + B'_2O_2 > O_1O_2 = O_1B_1 + B_1B_2 + B_2O_2$. Так как $O_1B'_1 = O_1B_1$ и $B'_2O_2 = B_2O_2$, то будет выполняться неравенство $B'_1B'_2 > B_1B_2$.

б) Искомыми точками являются точки C_1 и C_2 пересечения прямой O_1O_2 с данными сферами, не принадлежащие отрезку O_1O_2 (рис. 9).

Пусть C'_1, C'_2 – другие точки этих сфер. Воспользуемся тем, что длина ломаной больше расстояния между её концами. Получим

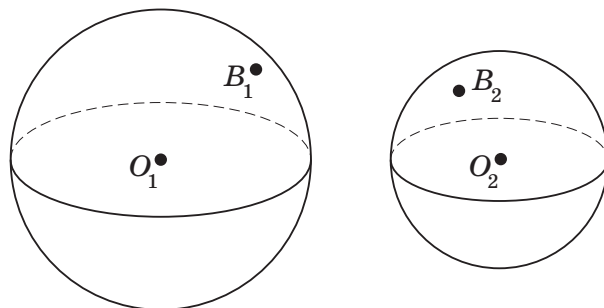


Рис. 7

$$\begin{aligned} C'_1C'_2 &< O_1C'_1 + O_1O_2 + C'_2O_2 = \\ &= C_1O_1 + O_1O_2 + O_2C_2 = C_1C_2. \end{aligned}$$

В следующих задачах требуется найти кратчайшие пути по поверхностям цилиндра и конуса. Они аналогичны задачам на нахождение кратчайших путей по поверхностям многогранников, рассмотренным в предыдущей статье, и решаются с использованием развёрток поверхностей этих тел.

Задача 4. Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки A и B относительно центра симметрии цилиндра (рис. 10).

Решение. Развёрткой боковой поверхности этого цилиндра является прямоугольник со сторонами 2π и 1, изображённый на рисунке 11а.

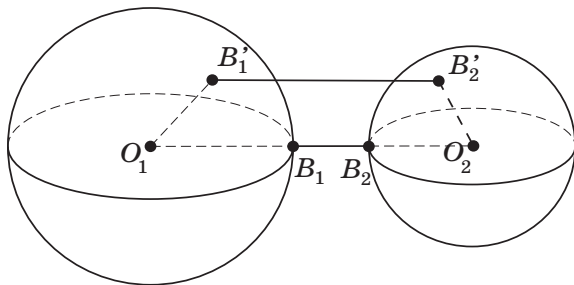


Рис. 8

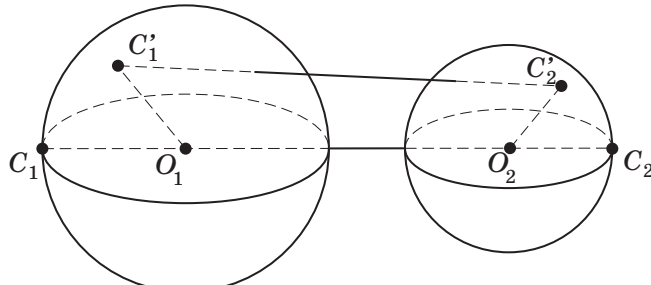


Рис. 9

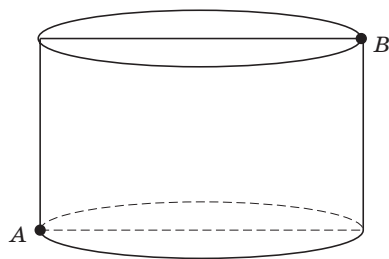


Рис. 10

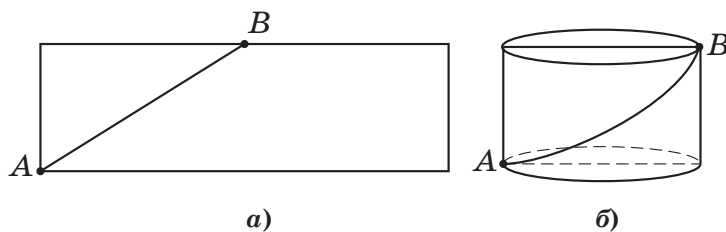


Рис. 11

Кратчайшим путём из точки A в точку B является отрезок AB , длина которого равна $\sqrt{\pi^2 + 1}$. Соответствующий путь по поверхности цилиндра изображён на рисунке 11б.

Задача 5. На внутренней стенке цилиндрической банки в трёх сантиметрах от верхнего края висит капля мёда, а на наружной стенке, в диаметрально-противоположной точке сидит муха (рис. 12). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до мёда. Радиус основания банки равен 10 см.

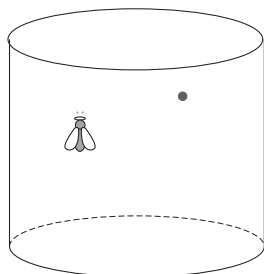


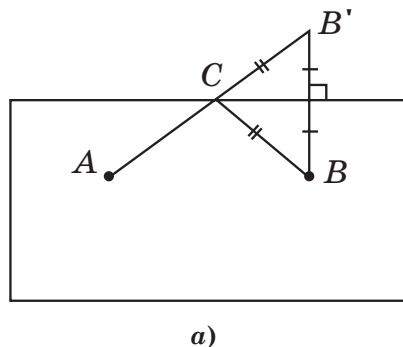
Рис. 12

Решение. Развёрткой боковой по-

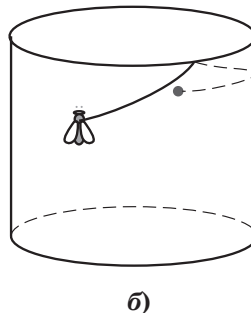
верхности цилиндра является прямоугольник (рис. 13а). Кратчайшим путём между точками A и B , в которых соответственно находятся муха и капля мёда, является отрезок AB . Однако, чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке C .

Рассмотрим точку B' , симметричную точке B относительно стороны прямоугольника. В качестве точки C возьмём точку пересечения отрезка AB' со стороной прямоугольника. Тогда отрезки BC и $B'C$ будут равны. Следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка AB' . Она равна $2\sqrt{25\pi^2 + 9}$. Соответствующий путь по поверхности банки изображён на рисунке 13б.

Задача 6. Осевое сечение конуса — правильный треугольник SAB со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки A в точку C — середину образующей SB (рис. 14).



а)



б)

Рис. 13

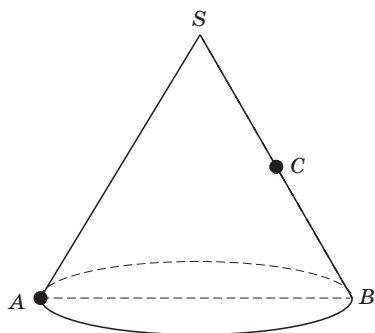
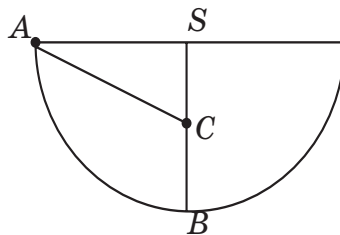
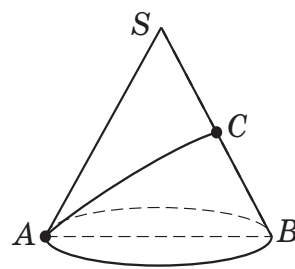


Рис. 14



а)



б)

Рис. 15

Решение. Развёрткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиусом 1 (рис. 15а). Кратчайшим путём из точки A в точку C является отрезок AC, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Соответствующий путь по поверхности конуса изображён на рисунке 15б.

Задача 7. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник ABC со стороной основания 1 и боковой стороной 2. Найдите длину кратчайшей петли по поверхности этого конуса с началом и концом в точке A (рис. 16).

Решение. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 90° . Кратчайшим путём является отрезок A'A'', длина которого равна $2\sqrt{2}$ (рис. 17а). Соответствующий путь по поверхности ко-

нуса изображён на рисунке 17б.

Рассмотрим задачи на нахождение наибольших и наименьших значений, относящиеся к понятию объёма тела. Часть из них сформулирована в виде задач с практическим содержанием.

Задача 8. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной суммой рёбер найдите параллелепипед наибольшего объёма (рис. 18).

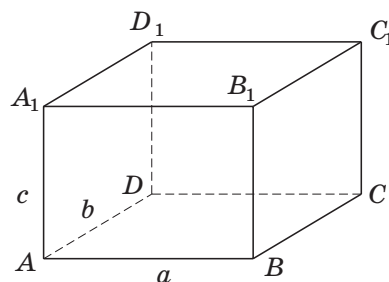


Рис. 18

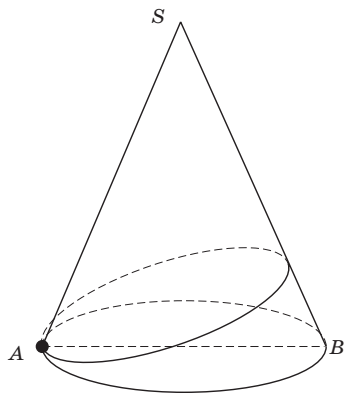
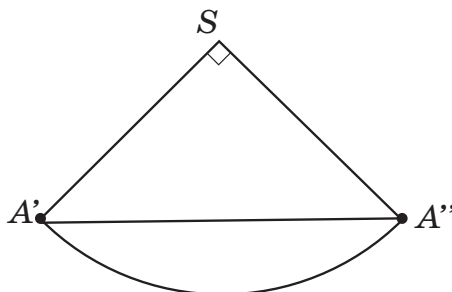
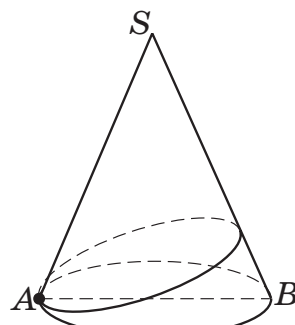


Рис. 16



а)



б)

Рис. 17

Решение. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c . По условию сумма $a + b + c$ фиксирована. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб. Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $a = b = c$. Из него следует неравенство $V \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$, равенство в котором достигается, если $a = b = c$. Следовательно, искомым прямоугольный параллелепипед – куб.

Задача 9. Какие размеры должен иметь аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда без одной грани, чтобы при данной площади поверхности S в него вмещался наибольший объём воды (рис. 19)?

Решение. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c . По условию $ab + 2ac + 2bc = S$. Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = ab, y = 2ac, z = 2bc$. Получим неравенство $\sqrt[3]{4a^2b^2c^2} \leq \frac{S}{3}$. Из него следует неравенство $2V \leq \left(\frac{S}{3}\right)^2$, равенство в котором достигается, если

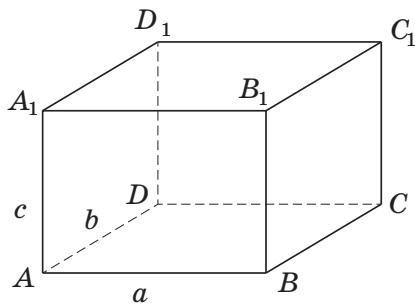


Рис. 19

$ab = 2ac = 2bc$, то есть в случае

$$a = b = 2c = \sqrt{\frac{S}{3}}.$$

Задача 10. Из прямоугольного листа жести требуется изготовить открытую сверху коробку. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и затем загибают получившиеся края (рис. 20). Найдите стороны вырезаемых квадратов, при которых получившаяся коробка имеет наибольший объём.

Решение. Обозначим стороны прямоугольника a и b , а стороны вырезаемых квадратов x . Тогда объём коробки с открытым верхом будет равен $(a - 2x)(b - 2x)x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $12x^2 - 4(a + b)x + ab$. Производная обращается в нуль, если

$$x_{1,2} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Она меняет знак с плюса на минус при переходе через точку

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Следовательно, это значение x является искомым.

Задача 11. Какие размеры должен иметь открытый цилиндрический сосуд, чтобы при данной площади поверхности S в него вмещался наибольший объём воды (рис. 21)?

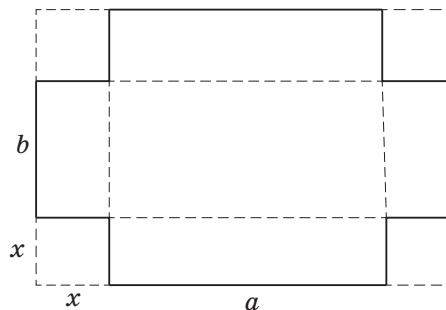


Рис. 20

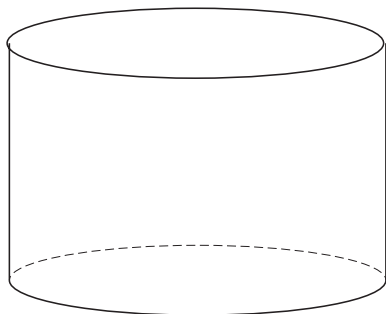


Рис. 21

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x , а его высота равна y . Тогда $\pi x^2 + 2\pi xy = S$. Откуда $y = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x}$.

Следовательно, $V = \frac{Sx - \pi x^3}{2}$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{S - 3\pi x^2}{2}$. Производная обращается в нуль, если $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку.

Отсюда находим $y = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Таким образом, искомым цилиндром наибольшего объёма является цилиндр, его осевым сечением является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой.

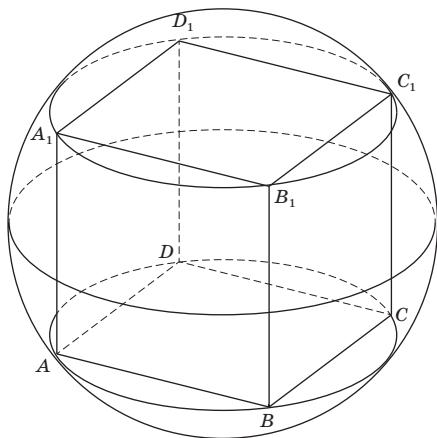


Рис. 23

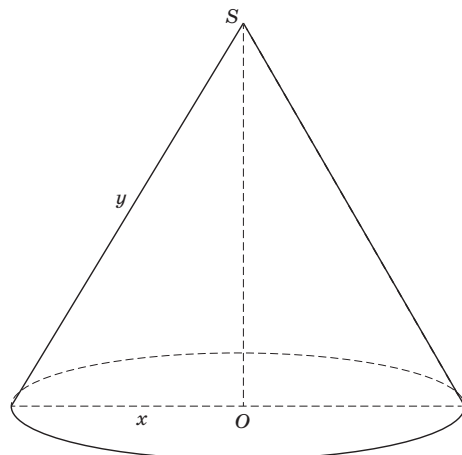


Рис. 22

Задача 12. Из всех конусов с данной площадью поверхности S найдите конус наибольшего объёма (рис. 22).

Решение. Пусть радиус основания конуса равен x , а его образующая равна y . Тогда $\pi x^2 + \pi xy = S$. Откуда $y = \frac{S - \pi x^2}{\pi x}$.

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}$. Отметим, что объём V будет наибольшим, если наибольшим будет квадрат V^2 этого объёма. Имеем,

$$V^2 = \frac{\pi^2 x^4 (y^2 - x^2)}{9} = \frac{S(Sx^2 - 2\pi x^4)}{9}.$$

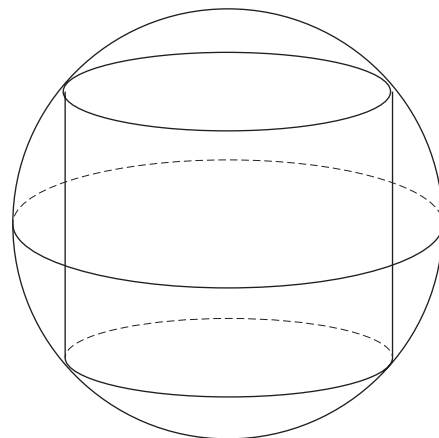


Рис. 24

Его наибольшее значение принимается, если $x^2 = \frac{S}{4\pi}$. Значит, $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Из формулы $y = \frac{S - \pi x^2}{\pi x}$ находим $y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Таким образом, искомым конусом наибольшего объёма является конус, у которого образующая в три раза больше радиуса основания.

Задача 13. Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу диаметром d , найдите параллелепипед наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 23)?

Решение. Пусть рёбра параллелепипеда, выходящие из одной вершины равны a, b, c . По условию $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Докажем, что искомым параллелепипедом является куб (рис. 23). Воспользуемся неравенством Коши $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, равенство в котором достигается только в случае $x = y = z$. Применим его для $x = a^2, y = b^2, z = c^2$. Получим неравенство $\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \leq \frac{d^2}{3}$. Из него следует неравенство $V \leq \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$, равенство в котором дости-

гается, если $a^2 = b^2 = c^2$, то есть в случае $a = b = c$. Следовательно, искомым прямоугольный параллелепипед – куб, объём которого равен $\frac{\sqrt{3}d^3}{9}$.

Задача 14. Из всех цилиндров, вписанных в сферу радиусом R , найдите цилиндр наибольшего объёма. Чему равен этот объём (рис. 24)?

Решение. Пусть высота цилиндра равна $2x$. Тогда радиус r основания равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Объём V цилиндра равен $\pi(R^2 - x^2) \cdot 2x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $2\pi R^2 - 6\pi x^2$. Производная обращается в нуль, если $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, высота искомого цилиндра равна $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$, радиус основания равен $\frac{\sqrt{6}R}{3}$. Объём этого цилиндра равен $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$.

Задача 15. Из всех конусов, вписанных в сферу радиусом R , найдите конус наи-

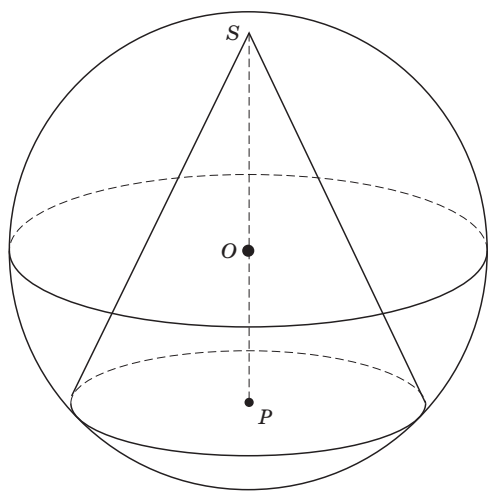


Рис. 25

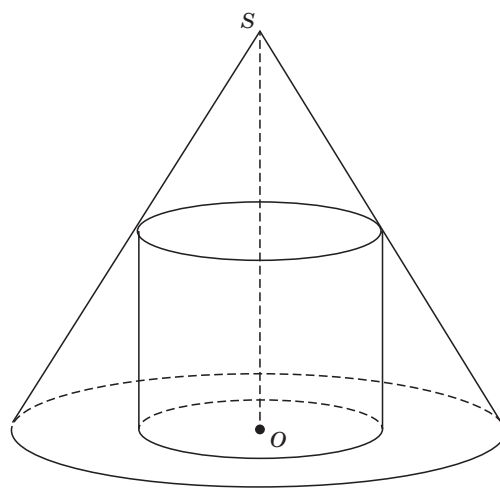


Рис. 26

большого объёма. Чему равен этот объём (рис. 25)?

Решение. Пусть высота конуса равна x . Тогда квадрат радиуса основания равен $R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2$. Объём конуса V равен $\frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2) \cdot x$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{4}{3}\pi Rx - \pi x^2$. Производная обращается в нуль, если $x = \frac{4R}{3}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, высота искомого конуса равна $\frac{4R}{3}$, радиус основания равен $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$. Объём этого конуса равен $\frac{32\pi R^3}{81}$.

Задача 16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найдите цилиндр наибольшего объёма (рис. 26).

Решение. Пусть радиус основания данного конуса равен R , а высота равна h . Обозначим радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в данный конус, соответственно x и y . Тогда $\frac{R-x}{R} = \frac{y}{h}$. Следовательно, $y = \frac{h(R-x)}{R}$. Объём цилиндра

равен $\pi x^2 y = \frac{\pi x^2 h (R-x)}{R}$. Для нахождения наибольшего значения этой функции найдём её производную. Она равна $\frac{\pi h}{R}(2Rx - 3x^2)$. Производная обращается в нуль, если $x = \frac{2R}{3}$, и меняет знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, радиус основания искомого цилиндра равен $\frac{2}{3}R$.

Список источников

1. *Возняк Г.М., Гусев В.А.* Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.
2. *Нагибин Ф.Ф.* Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.
3. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.
4. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.
5. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
6. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.



ВНЕУРОЧНАЯ ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ ПО ПЛАНИМЕТРИИ: МЕТОДЫ КРЕАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГРАМОТНОСТЬ

EXTRACURRICULAR PROJECT ACTIVITIES OF STUDENTS IN TERMS OF PNIMETRY: METHODS OF CREATIVE THINKING AND FUNCTIONAL LITERACY

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_29

С.П. Хэкало, д-р.ф.-м.наук., доцент,
ГСГУ (Коломна);
khekal@mail.ru

S.P. Khekalov, Dr. Sci. (Phis&Math), Ass. Prof.,
SSHU (Kolomna);
khekal@mail.ru

Аннотация: в целях пропедевтического формирования элементов функциональной математической грамотности учащихся на основе классических аналитических методов решения геометрических задач предлагается организация внеурочной проектной деятельности

Abstract: the article endeavors to explore the options for the development of functional literacy in Mathematics through extracurricular projects. Special attention is paid to application of classical analytical methods of solving Geometry problems

Ключевые слова: методы решения геометрических задач, PISA, внеурочная проектная деятельность

Keywords: problem solving methods in Geometry, PISA, extracurricular projects

Всё вокруг – геометрия!
Ле Корбюзье

Французские дети едят все. И ваши могут.
Карен Ле Бийон

В настоящее время мы часто слышим о важности развития у школьников функциональной математической грамотности (ФМГ).

И это не просто веяние, это назревшая необходимость, продиктованная современным пониманием развития техники и технологий.

Одним из инструментов, определяющих уровень сформированности ФМГ школьников, является программа PISA. Очевидно, что учащихся к этому исследо-

ванию нужно пропедевтически готовить. Сейчас общее мнение о PISA таково, что материалы этой программы не поддаются «штамповке» и «тиражированию». Таким образом, нужны действенные методы знакомства учащихся с проявлениями креативности в процессе решения задач и «прививка» в целях формирования устойчивой ФМГ.

Одной из таких «прививок с креативностью» может стать организация внеурочной проектной деятельности по геометрии.

ческому моделированию¹. Предлагаем несколько проектов-«одиночек» и интегрированный пакет. Отметим, что известное и вкусно приготовленное блюдо важно ещё и правильно подать!

Проект № 1.

Метод координат: трапеция

Возрастная группа: 14+.

Тема: Расстояние между точками, заданными координатами.

Оборудование: бумага, цветные карандаши, ручки, линейка.

Задание

Докажите, что если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольную трапецию с равными диагоналями (попробуйте сделать подобный чертёж в пакете GeoGebra²). Привяжите к ней прямоугольную декартову систему координат. Введите координаты вершин трапеции и опишите в этих координатах условие равенства диагоналей трапеции. Рассчитайте при описанном условии (уравнении связи) длины боковых сторон трапеции.

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Пусть рисунок трапеции подготовлен. Первый вопрос для ученика: как привязать к этой трапеции систему координат так, чтобы вычисления (аналитическая часть задачи) были несложными, а записи менее громоздкими?

Этот вопрос, безусловно, требует от исполнителя проекта использования его

креативных компетенций и функциональной математической грамотности.

Привяжем к нашей трапеции систему координат так, как показано на рисунке 1. Это позволит задать координаты вершин трапеции в относительно простой форме:

$$A(0; 0), B(x_B; y_B), C(x_C; y_B), D(x_D; 0).$$

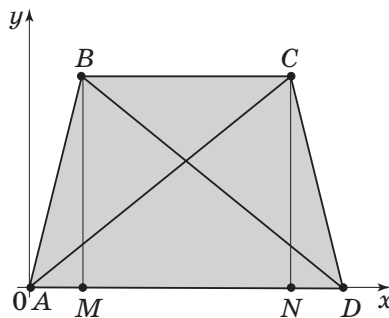


Рис. 1

Поскольку $AC = BD$ по условию и $BM = CN$ (высоты трапеции), то прямоугольные треугольники ACN и DBM равны по гипотенузе и катету. Таким образом, $AN = MD$ и

$$x_D = x_B + MD = x_B + AN = x_B + x_C.$$

Теперь найдём длины боковых сторон трапеции:

$$AB = \sqrt{(x_B - 0)^2 + (y_B - 0)^2} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2},$$

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (0 - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(x_B + x_C - x_C)^2 + y_B^2} = AB. \end{aligned}$$

Итак, задание выполнено. Можно предложить учащимся привязать к трапеции систему координат другим образом, проделать необходимые вычисления и сравнить трудоёмкость вычислений.

Проект № 2.

Метод координат: правильный шестиугольник

Возрастная группа: 14+.

Тема: Расстояние между точками, заданными координатами.

¹ См. http://genius.pstu.ru/file.php/1/pupils_works_2012/Razhik_Alisa_Zaharova_Sofja_1.pdf (дата обращения: 03.10.2021) и цитированную там литературу.

² <https://www.math10.com/ru/geometria/geogebra/geogebra.html> (дата обращения: 03.10.2021).

Оборудование: бумага, цветные карандаши, ручки, линейка, циркуль.

Задание

Пусть M – середина диагонали AC правильного шестиугольника $ABCDEF$, а N – середина стороны DE . Докажите, что треугольник MNF – правильный.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольный правильный шестиугольник (попробуйте сделать подобный чертёж в пакете GeoGebra). Привяжите к нему прямоугольную декартову систему координат. Введите и/или рассчитайте координаты некоторых, необходимых по вашему мнению, точек и найдите длины сторон треугольника MNF . Попробуйте построить правильный шестиугольник, используя циркуль.

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Обсудите с учащимися алгоритм построения правильного шестиугольника с помощью циркуля.

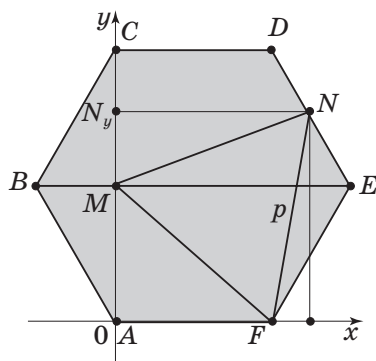


Рис. 2

Пусть рисунок правильного шестиугольника $ABCDEF$ подготовлен. Привяжем к нашей фигуре систему координат так, как показано на рисунке 2. То, что система координат является прямоугольной, следует из свойств правильного ше-

стиугольника. Можно попросить подтвердить это высказывание математически.

Далее для удобства вычислений введём масштаб, приняв $AF = 1$ (в задании нет метрических данных, поэтому учащийся, обладающий функциональной математической грамотностью, может это сделать). Таким образом, у точки A координаты определил выбор системы координат, а у точки F – функциональная грамотность проектировщика: $A(0; 0)$ и $F(1; 0)$.

Теперь необходимо найти координаты точек M и N :

$M(0; y_M)$,

$$y_M = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{BE}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad M\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$N(AF + FN_x; AM + MN_y)$,

$$FN_x = \frac{1}{4}AF, \quad MN_y = \frac{1}{2}AM,$$

$$N\left(\frac{5}{4}AF; \frac{3}{2}AM\right), \quad N\left(\frac{5}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Остаётся найти длины сторон треугольника MNF и убедиться, что они равны:

$$FM = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$FN = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Итак, задание выполнено. Можно предложить учащимся привязать к шестиугольнику $ABCDEF$ систему координат другим образом: начало координат совпадает с вершиной M , ось абсцисс содержит диагональ BE , а ось ординат – ди-

агональ AC . При этом, если, например, за масштабную единицу принять $MN_y = 1$, то получим

$$FM_{\text{новое}} = FN_{\text{новое}} = MN_{\text{новое}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Возникает вопрос: почему

$$FM = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad FM_{\text{новое}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}?$$

Ответ на этот вопрос учащиеся должны пояснить соотношением выбранных масштабов (здесь вновь проявляется функциональная составляющая грамотности проектировщика; это очень поможет, например, при прочтении географических карт с разными масштабными единицами):

$$\frac{AF}{MN_y} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$FM_{\text{новое}} \cdot MN_y = FM \cdot AF$$

и

$$FM_{\text{новое}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Проект № 3.

Векторный метод: скалярное произведение

Возрастная группа: 15+.

Раздел: Векторы.

Оборудование: бумага, цветные карандаши, ручки, линейка, циркуль.

Задание

Пусть на двух неколлинеарных векторах $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ построен треугольник ABC и точка O – центр описанной около него окружности. Докажите, что

$$2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2.$$

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольную окружность, отметьте её центр O . Впишите в окружность произвольный треугольник ABC (попробуйте сделать подобный чертёж в пакете GeoGebra). От-

метьте векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, проведите отрезок OA . Отметьте дугой угол CAO .

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

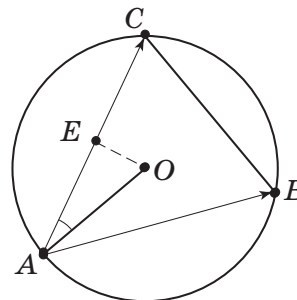


Рис. 3

Пусть нужный рисунок сделан. Обозначим буквой E середину хорды AC (рис. 3), тогда $OE \perp AC$. По определению

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{CAO},$$

$$\cos \widehat{CAO} = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AO}|}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AO}|} \\ &= |\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{2} AC^2. \end{aligned}$$

Отсюда $2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$.

Проект № 4.

Векторный метод: ортогональность

Возрастная группа: 15+.

Раздел: Векторы.

Оборудование: бумага, цветные карандаши, ручки, линейка, циркуль.

Задание

В треугольнике ABC проведены высоты AH и BD . Докажите, что прямая DH , проходящая через основания высот, перпендикулярна прямой, проходящей через

третью вершину треугольника и центр описанной около него окружности.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольную окружность, отметьте её центр O . Впишите в окружность произвольный треугольник ABC (попробуйте сделать подобный чертёж в пакете GeoGebra). Постройте вектор $\overrightarrow{CO}$ и отметьте векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$. Начертите необходимые высоты и прямые (отрезки прямых).

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

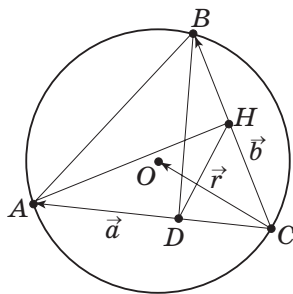


Рис. 4

Пусть нужный рисунок сделан. Обозначим $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{r}$ соответственно векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CO}$ (рис. 4). Основная идея выполнения задания состоит в следующем: любой вектор плоскости можно представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов (базисных векторов плоскости); критерием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

В качестве базисных векторов возьмём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для краткости запишем $|\vec{a}| = a$ и $|\vec{b}| = b$, тогда

$$\overrightarrow{CD} = \frac{CD}{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{CD}{a} \cdot \vec{a}$$

и

$$\overrightarrow{CH} = \frac{CH}{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{CH}{b} \cdot \vec{b}.$$

В результате

$$\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CH} = \frac{CD}{a} \cdot \vec{a} - \frac{CH}{b} \cdot \vec{b}.$$

Выразим CD и CH через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$CD = b \cdot \cos \angle DCB = \frac{a \cdot b \cdot \cos \angle DCB}{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a}$$

и аналогично

$$CH = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{HD} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b},$$

и остаётся найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{CO}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HD} \cdot \vec{r} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b} \right) \cdot \vec{r} = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{a^2} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b^2} \right). \end{aligned}$$

В силу результата выполнения проекта № 3

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{a^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a^2}{a^2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $\overrightarrow{HD} \cdot \vec{r} = 0$, значит, $DH \perp CO$.

Уместно сообщить исполнителю проекта № 4 об утверждении, которое будет доказано в проекте № 3, не дожидаясь его выполнения.

Проект № 5.

Метод преобразований: определение типа фигуры

Возрастная группа: 15+.

Раздел: Геометрические преобразования.

Оборудование: бумага, карандаши цветные, ручки, линейки, циркуль.

Задание

На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены правильные

треугольники ABC' , ACB' и BCA' . Докажите, что центры этих треугольников образуют правильный треугольник.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольный треугольник ABC , отметьте произвольную точку O . Постройте точку пересечения медиан треугольника ABC – точку M . Постройте векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$, как это показано на рисунке 5а. Начертите на листе бумаги ещё один произвольный треугольник ABC и на его сторонах постройте правильные треугольники ABC' , ACB' и BCA' (для этого вам может пригодиться циркуль). Постройте в правильных треугольниках их центры: P , Q и R соответственно. Проведите векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$, как это показано на рисунке 5б. (Попробуйте сделать подобные чертежи в пакете GeoGebra.)

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Пусть нужные рисунки сделаны. В задании рассматриваются четыре равнобедренных треугольника и нет метрических данных, существенно только равенство углов по 60° и равенство сторон у каждого треугольника. Таким образом, можно попробовать воспользоваться идеей поворота плоскости на 60° вокруг фиксированной произвольной точки O , например против часовой стрелки.

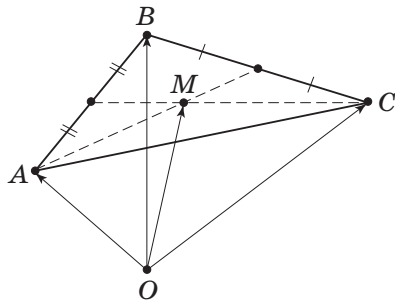


Рис. 5а

Покажем векторную связь точек O и M с вершинами треугольника ABC (см. рисунок 5а):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \right),$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \right),$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

В частности, мы получили векторное свойство центра тяжести треугольника:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Теперь свяжем вектор $\overrightarrow{PQ}$ с вершинами треугольников (см. рисунок 5б):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB'}) - \\ &\quad - \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC'}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}) = \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'B'}), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'}).$$

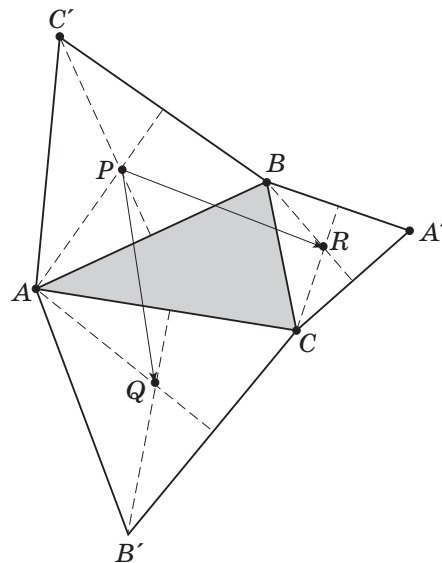


Рис. 5б

Аналогично,

$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BA'}).$$

Теперь произведём поворот плоскости на 60° вокруг фиксированной произвольной точки O против часовой стрелки. При этом

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &\rightarrow \overrightarrow{BA'}, \quad \overrightarrow{C'A} \rightarrow \overrightarrow{C'B}, \quad \overrightarrow{AB'} \rightarrow \overrightarrow{AC} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \rightarrow \overrightarrow{PR}.\end{aligned}$$

Таким образом, $PQ = PR$ и угол RPQ равен 60° . Задание выполнено.

Проект № 6. Метод преобразований: построение фигуры

Возрастная группа: 15+.

Раздел: Геометрические преобразования.

Оборудование: бумага, карандаши цветные, ручки, линейка, циркуль.

Задание

Постройте трапецию по её заданным основаниям и диагоналям.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произвольную трапецию $ABCD$, проведите её диагонали AC и BD . Осуществите параллельный перенос в плоскости трапеции на вектор $\overrightarrow{AC}$. Начертите прямые $l_1 \parallel AD$ и $l_2 \parallel AC$, проходящие через точки B и D соответственно, как это показано на рисунке 6 (попробуйте сделать подобные чертежи в пакете GeoGebra).

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Пусть нужный рисунок сделан и пусть

$$l_1 \cap l_2 = D'.$$

При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AC}$ имеем:

$$\begin{cases} A \rightarrow C, \\ D \rightarrow D' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \rightarrow \overrightarrow{CD'} \text{ и } AD = CD'.$$

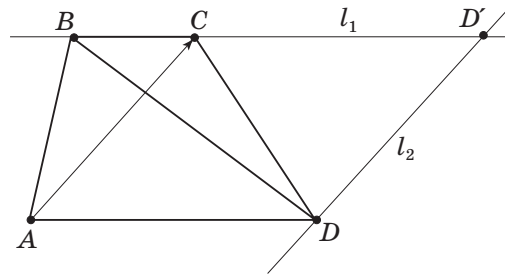


Рис. 6

Таким образом, в треугольнике BDD' все стороны заданы и его можно легко построить циркулем и линейкой. Анализ завершён, перейдём к синтезу. В построенном треугольнике BDD' на стороне BD' отложим отрезок $D'C$. Затем с помощью двух окружностей радиусов, равных CA и DA , с центрами соответственно в точках C и D построим точку A . Итак, трапеция $ABCD$ построена. Остаётся провести этап доказательства, показав, что фигура $ACD'D$ является параллелограммом. Задание выполнено.

В заключение продемонстрируем совокупное применение указанных методов решения геометрических задач.

Проект № 7. Методы решения геометрических задач: интегрированный пакет

Возрастная группа: 15+.

Раздел: Геометрические преобразования.

Оборудование: бумага, карандаши цветные, ручки, линейки, циркуль.

Задание

Основания трапеции имеют длины a и b , $a > b$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

Рекомендации к выполнению

Начертите на листе бумаги произволь-

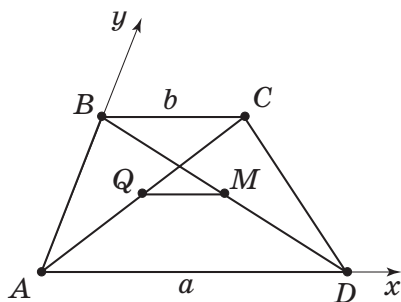


Рис. 7а

ную трапецию $ABCD$, в которой $AD = a$, $BC = b$, проведите её диагонали AC и BD и отметьте их середины Q и M соответственно, проведите отрезок QM (попробуйте сделать подобный чертёж в пакете GeoGebra).

Ученику предлагается решить задачу каждым из трёх рассмотренных методов.

Рекомендации и вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Пусть нужный рисунок сделан. Сначала решим задание на основе метода координат – тут важно «покреативить» (подсказать исполнителю проекта) и проявить собственную функциональную грамотность, введя криволинейную систему координат, как это показано на рисунке 7а. Определим координаты вершин трапеции и точек Q и M :

$A(0; 0)$, $B(0; y_B)$, $C(b; y_B)$, $D(a; 0)$;
по известным формулам координат середины отрезка находим

$$Q\left(\frac{b}{2}; \frac{y_B}{2}\right), M\left(\frac{a}{2}; \frac{y_B}{2}\right).$$

Остаётся отметить, что поскольку ординаты точек Q и M одинаковы, имеем

$$QM = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Первая треть проекта завершена.

Теперь решим задание с помощью век-

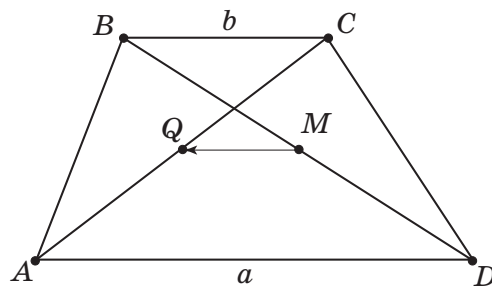


Рис. 7б

торного метода. Поскольку требуется найти длину отрезка QM по заданным длинам оснований трапеции a и b , то целесообразно выразить вектор $\overrightarrow{MQ}$ через векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DA}$ (рис. 7б):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AQ} = \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MQ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MQ}|^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}^2) = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{1}{4}(b-a)^2,\end{aligned}$$

$$MQ = \sqrt{\frac{1}{4}(b-a)^2} = \frac{1}{2}|b-a| = \frac{a-b}{2}.$$

Вторая треть задания выполнена.

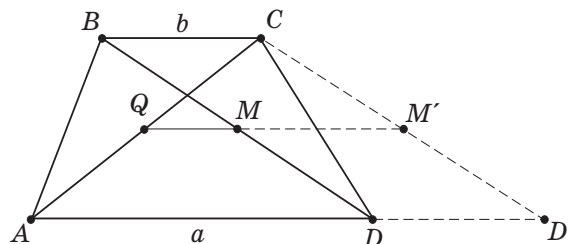


Рис. 7в

Теперь решим задание на основе метода геометрических преобразований. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$. По рисунку 7в видно, что

$$B \rightarrow C, M \rightarrow M', D \rightarrow D' \Rightarrow \\ \Rightarrow M' - \text{середина } CD'.$$

Далее, поскольку QM' – средняя линия треугольника ACD' , то

$$QM' = \frac{1}{2}(a + b)$$

и

$$QM = \frac{1}{2}(a + b) - b = \frac{a - b}{2}.$$

Задание выполнено.

В заключение отметим, что описанные методы решения естественно и необходимо использовать не только при решении задач из курса планиметрии, но и при решении задач по стереометрии, где они существенно облегчают, например, нахождение расстояний и углов между скрещивающимися прямыми.

БИБЛИОТЕКА

Болл Дж. Математика на ладони. Чудеса с числами – просто и ясно.

М., Колибри, Азбука-Аттикус, 2021



В своей книге Джонни Болл, известный британский телеведущий и популяризатор точных наук, в доступной и увлекательной форме рассказывает о математике. Об её истории начиная с древнейших времён и тех непростых задачах, с которыми приходилось сталкиваться учёным; о связях математики с другими науками и её практическом применении в искусстве, технике, инженерном деле и пр.; о классических играх и головоломках. «Математика была моим спутником на протяжении всей жизни. Я всегда очень плохо плавал, но в математику нырял безо всяких раздумий. Каждую новую тему я начинал изучать с нуля, имея свежий взгляд неопита и нерастратченное желание разобраться и понять», – признаётся автор. Вот и читателю он предлагает нырнуть вместе с ним в океан математики, полный сокровищ и захватывающих историй об отважных героях, открывших для нас этот чудесный мир. «Как сказал однажды Эйнштейн: “Если вы не можете объяснить вещь семилетнему ребёнку, значит, вы сами её не понимаете”. Я взялся написать эту книгу так, чтобы она

пришлась по душе читателям любого калибра – молодым и старым, учёным и неучёным. Математика делала мою жизнь богаче на всех её этапах; позвольте ей обогатить и вашу».

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МОДЕЛИ В ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ (НА ПРИМЕРЕ КОЛЛЕКЦИИ ЖИВЫХ ЧЕРТЕЖЕЙ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ 9 КЛАССА)

INTERACTIVE MODELS TO HELP THE MATH TEACHER

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_38

А.И. Сгибнев,

ГБОУ, Школа «Интеллектуал», г. Москва;
a.i.sgibnev@gmail.com

A.I. Sgibnev,

«Intellectual» Boarding School, Moscow;
a.i.sgibnev@gmail.com

Аннотация: в статье обсуждается коллекция интерактивных моделей по курсу геометрии 9 класса, приводится типология моделей и основные приёмы работы с ними на уроках

Abstract: in this paper we discuss the collection of interactive models for the 9th class geometry. We give the types of the models and methods how to use them in the lessons

Ключевые слова: интерактивные математические среды, интерактивные модели, геометрия в школе

Keywords: interactive mathematical systems, interactive models, geometry at school

На платформе GeoGebra [1] я создал коллекцию интерактивных моделей по курсу геометрии 9 класса: <https://www.geogebra.org/m/edfut8r2>

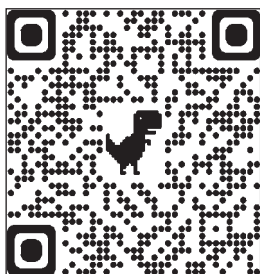


Рис. 1

Последовательность тем, нумерация параграфов и заданий привязана к учебнику М.А. Волчкевича [2], вышедшему в 2021 году в рамках московского проекта «Математическая вертикаль», но вполне может использоваться и отдельно от него.

Этот проект является продолжением альбома подвижных чертежей к задачкинику М.А. Волчкевича 7–8 классов <https://www.geogebra.org/m/kyudvqfx>, о котором было рассказано в статье [3].

В этой статье будет дана типология моделей и основные приёмы работы с ними. Лучше всего читать текст и параллельно манипулировать с моделями. В конце каждого раздела приводится небольшой список моделей аналогичного типа; их можно найти по названиям.

1. Демонстрация

Интерактивная математическая среда позволяет сделать точный наглядный чертёж, увидеть его в динамике. Можно поменять ракурс или формы фигуры, если первоначальный чертёж неудачен. Можно настроить «шаги построения», чтобы но-

вые элементы чертежа возникали поэтапно по щелчку «мышки» и ученики успевали вникнуть. Демонстрации рассчитаны на фронтальный показ всему классу на большом экране или проекторе.

Пример демонстрации *доказательства*: §3 упр. 16 «Доказательство теоремы косинусов с помощью площадей».

1) *С помощью чертежа докажите, что в остроугольном треугольнике продолжения высот делят построенные на сторонах квадраты на три пары равновеликих прямоугольников.*

Двигаем последовательно возникающие ползунки и «перетягиваем» закрашенные площади вот таким образом (рис. 2).

От набора статических картинок модель отличается тем, что мы можем увидеть сам процесс «перетягивания» площадей. Можем остановить его, вернуть,

повторить трудное место, выполнить измерения или дополнительные построения (панель инструментов GeoGebra доступна в полном объёме).

Таким образом, модель позволяет изучить процесс в деталях, «пощупать руками». Далее предлагается ответить на вопросы:

2) *Почему площади закрашенных четырёхугольников не изменяются на шаге 1? На шаге 2? Шаге 3?*

3) *Насколько площадь нижнего квадрата отличается от суммы площадей двух верхних?*

4) *Выразите эту разницу через стороны BC , AC и угол C .*

Выполнив эти пункты, мы получаем нетрадиционное доказательство теоремы косинусов.

Ещё пример (демонстрация *утверждения*): §6 задача 23 (теорема Монжа).

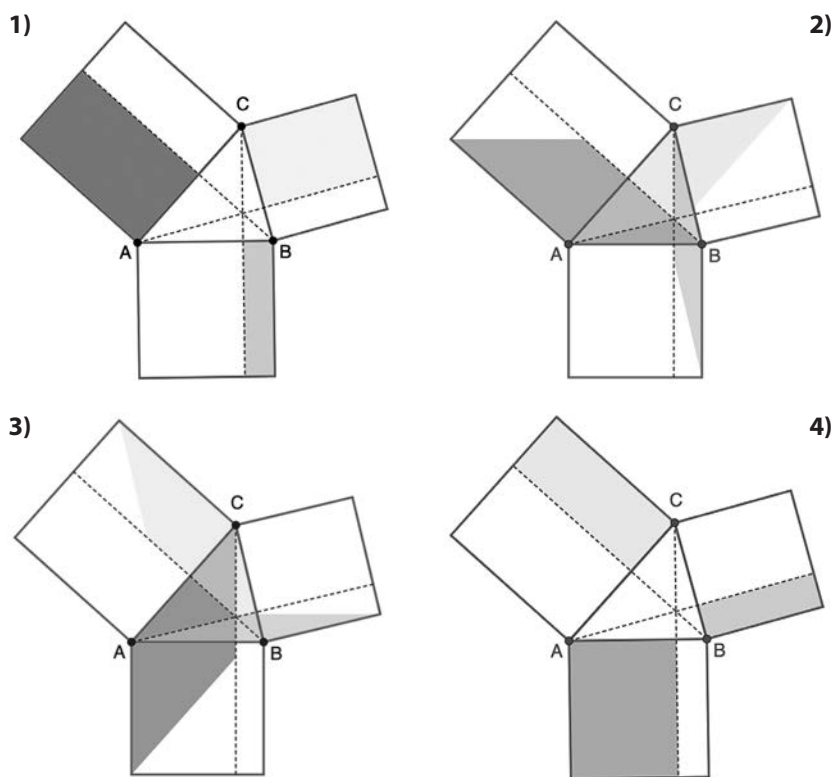


Рис. 2

2. Знакомство с понятием.

Наработка интуиции

При появлении нового понятия многим ученикам важно «прочувствовать» его, изучить динамику поведения. В коллекции есть тренажёры для того, чтобы ученики каждый на своём компьютере или смартфоне смогли поработать с ними.

Пример: §7 модель «Модуль суммы векторов».

Даны два вектора фиксированной длины. Вращая конец одного из них, изучите, как меняется длина вектора суммы. В каких границах? Как векторы должны располагаться, чтобы их сумма имела наибольшую длину? А наименьшую?

Ученик «крутит» один вектор относительно другого, наблюдает изменение длины, выбирает нужные случаи и формулирует ответ.

Ещё примеры: §7 модель «Сумма трёх равных по модулю векторов», §8 модель «Определение скалярного умножения».

3. Формулировка задачи по чертежу

Обычно задача даётся ученику в текстовом виде, а он переводит её в графический вид, строя чертёж. Полезно иногда действовать в обратном направлении, давая задание «сформулируй задачу по чертежу» (задача без слов). Динамика и поэтапное возникновение элементов позволяют постепенно научить учеников считывать с чертежа почти без слов довольно сложные утверждения.

Пример попроще: §2 задача 11. При пролистывании шагов построения поэтапно возникают равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), его чевиана AD (точка D движется по стороне BC), окружности, описанные вокруг треугольников ABD и ACD , их радиусы в виде отдельных горизонтальных отрезков (на рис. 3 приведён

итоговый вид чертежа). Ученику надо заметить, что эти окружности равны при любом положении чевианы AD .

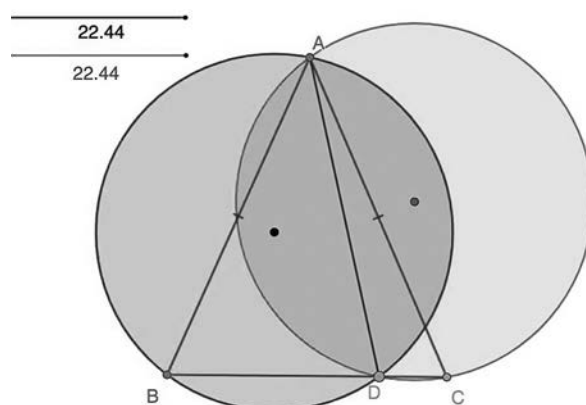


Рис. 3

Пример посложнее: §2 задача 25.

4. Доказательство по чертежу

Учитель может организовать деятельность школьников по «открытию» теоремы или решению опорной задачи по заготовленному чертежу с поэтапно возникающими дополнительными построениями, формулами и наводящими вопросами. Такую модель можно использовать и иначе: например, с её помощью ученик повторяет материал перед зачётом или контрольной работой или даже самостоятельно с её помощью пытается доказать теорему (в последнем случае модель выступает в роли «листка» наподобие тех, которые решают в матшколах)¹.

Пример: §7 пример 7.

Точка O – центр описанной окружности $\triangle ABC$, точка H – пересечение его высот. Докажите, что сумма векторов $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ равна вектору $\vec{OH}$.

¹ В такой технике можно оформлять и готовые доказательства теорем или решения задач (см. альбом Павла Воронина «Все задачи ОГЭ на окружности» <https://www.geogebra.org/m/xrqxq4zt>), но в данной коллекции этого нет.

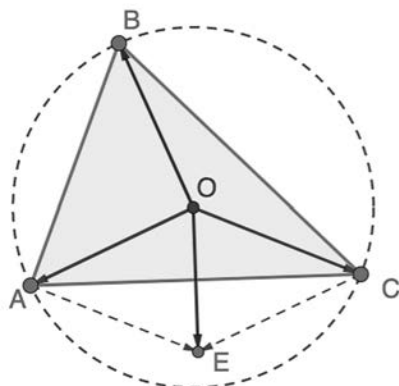


Рис. 4

Школьнику надо заметить по чертежу рисунка 4 и доказать, что вектор $OA + OC$ перпендикулярен прямой AC . В модели графически выделены основные идеи доказательства: окружность напоминает нам, что $|OA| = |OC|$ как радиусы, а отрезки AE и EC – что сложение векторов удобно произвести по правилу параллелограмма (а в данном случае ромба).

Ещё модели: §11 примеры 1, 4, 9, 10.

5. Подсказка к ответу

Точный чертёж позволяет угадать ответ к задаче «методом пристального взгляда». А когда знаешь ответ, то решать задачу гораздо легче, хотя бы психологически.

Пример: §2 задача 22.

Отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, равен радиусу описанной вокруг него окружности. Найдите угол между теми сторонами треугольника, к которым проведены данные высоты.

Ученик (рис.5) двигает вершины A и B треугольника, добивается равенства длин отрезков OC и KL и понимает, что это происходит при градусной мере угла ABC , равной 45° .

Ещё пример: §1 задача 36.

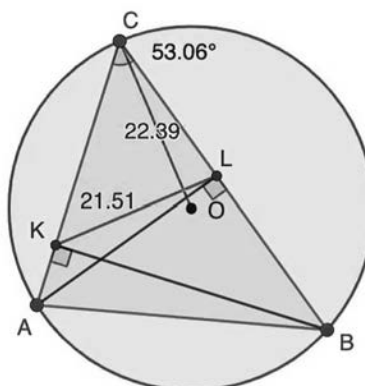


Рис. 5

6. Подсказка к решению

Точный чертёж иногда помогает заметить вспомогательный факт, который не даёт ответ прямо, но позволяет решить задачу.

Пример: §6 задача 38. *Хорда AB разбивает круг на два сегмента. В один из них вписали произвольную окружность. Докажите, что длина касательной к этой окружности, проведённой из середины дуги другого сегмента, не зависит от выбора вписанной в сегмент окружности.*

Ученик варьирует вписанную окружность и замечает, что точки M, C, D всегда остаются на одной прямой². Это ключ к решению задачи. Теперь (рис. 6) можно понять, что по теореме о квадрате касательной $MK^2 = MC \cdot MD$, а в силу подобия прямоугольных треугольников MCG и MFD верно равенство $MC \cdot MD = MG \cdot MF = \text{const}$ – не зависит от вписанной окружности (рис. 7).

Ещё пример: §7 модель «Ищем точку в треугольнике». *В произвольном треугольнике ABC постройте такую точку D, что сумма векторов $DA + DB + DC$ равна 0.*

² Это лемма Архимеда, её можно доказать через подобие треугольников DMO и DCO_1 , где O – центр большой окружности, O_1 – центр малой.

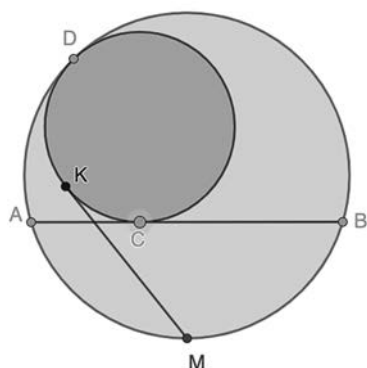


Рис. 6

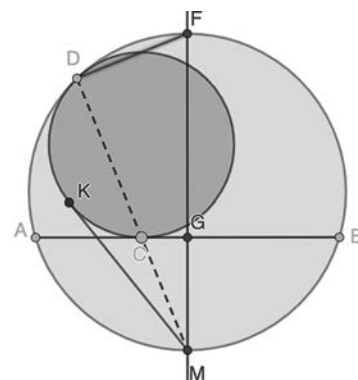
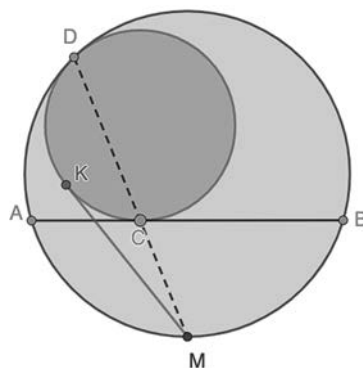


Рис. 7

Сначала складываем два вектора DB и DC по правилу параллелограмма (это важно для решения) и замечаем, при «шевелевании» точки D середина отрезка DF остаётся неподвижной (так как она совпадает с точкой M — серединой отрезка BC , рис. 8).

Далее складываются векторы DA и DF и нам надо движением точки D добиться превращения их суммы в 0. Нетрудно понять, что это происходит, когда D лежит на медиане AM . А кто сразу не понял, может подвигать, увидеть, а потом доказать (рис. 9).

Эта же идея группировки векторов и поиска неподвижных точек развивается в следующей модели (§7 задача 34, которую без модели, «на бумаге», школьники решают с большим трудом).

7. Проверяем/открываем/опознаём теорему

Учителя знают, что перед тем, как формулировать и доказывать новую тео-

рему, полезно актуализировать контекст: например, вспомнить частный случай, который будет обобщён этой теоремой (как теорема косинусов обобщает теорему Пифагора, см. §3 модель «Готовимся к теореме косинусов») и попросить угадать формулировку для общего случая. Или же высказать естественное, но неверное предположение и попросить опровергнуть его, приведя контрпример (например, перед формулировкой теоремы синусов предположить, что стороны треугольника пропорциональны его углам), и т.д. Такой разговор готовит почву для лучшего запоминания и осознания теоремы, и жалеть на это времени не стоит. Интерактивные математические среды позволяют пойти ещё дальше и сделать так, что подготовленный ученик самостоятельно с помощью модели откроет и сформулирует новую, даже непростую, теорему.

Пример: §2 модель «Проверяем теорему синусов для треугольников». *Пропор-*

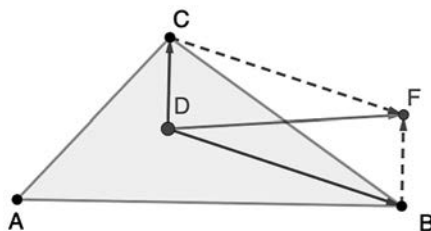


Рис. 8

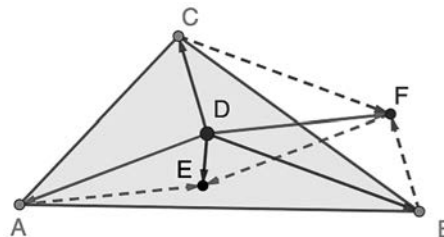


Рис. 9

циональны ли стороны треугольника его противолежащим углам? Пропорциональны ли они синусам противолежащих углов? Подберите нужный коэффициент k , двигая ползунок. Измените треугольник и подберите коэффициент ещё раз.

Предлагаются две конкурирующие гипотезы (рис. 10). Для произвольного неравностороннего треугольника проверяем, что можно подобрать значение параметра k , такое что

$$a = k \sin \alpha, b = k \sin \beta, c = k \sin \gamma$$

(уравняв три пары отрезков), а с углами такого проделать не удаётся.

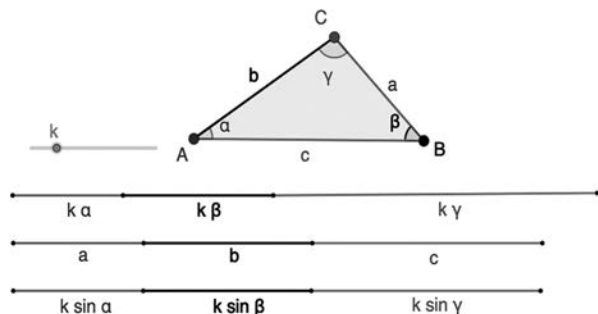


Рис. 10

Пример: §2 модель «Открываем теорему синусов для хорд».

Первый шаг. Окружность переменного радиуса проходит через две фиксированные точки B и C . На экран выведены следующие величины: радиус окружности R , угол $\angle BAC = \alpha$, $\sin \alpha$, $2R \sin \alpha$. Ученики замечают, что все они изменяются, кроме последней. В следующих шагах будем разбираться, почему $R \sin \alpha$ неизменно.

Второй шаг. Окружность зафиксирована, точка A «бегает» по ней. Надо объяснить, почему $2R \sin \alpha$ постоянно в этом случае. Это легко: R постоянно, α в силу теоремы о вписанном угле постоянно на каждой из двух дуг BC , а синусы углов, дополняющих друг друга до 180° , равны.

Третий шаг (подсказка). Поскольку $2R \sin \alpha$ не зависит от положения точки A

на окружности, выберем удобное расположение точки A : пусть BA будет диаметром. Тогда угол BCA прямой как опирающийся на диаметр, и верно равенство

$$BC = AB \cdot \sin \alpha = 2R \sin \alpha.$$

Теперь всё ясно: при движении окружности на первом шаге точки B и C не двигались, поэтому $BC = \text{const}$ и величина $2R \sin \alpha$ не изменялась.

Замечание. Пришлось придумать специальную конструкцию, которая визуализирует теорему синусов для хорд. Это позволяет «придать интригу» этому факту. Однако есть риск, что школьники в результате запомнят не саму теорему, а процесс поиска, подвижную окружность и прочий необязательный антураж. Может быть, лучше давать эту модель (как и две следующие) **после** формулировки и доказательства самой теоремы, как пример её нестандартного применения.

Другие примеры: §5 модели «Открываем новую теорему вместе» (теорема Менелая), «Опознайте теорему» (теорема Чевы).

8. Новая задача

Динамические чертежи позволяют вводить в оборот новые неожиданные задачи с запоминающимся результатом, которые без динамики выглядели бы скучно и искусственно.

Пример: §6 модель «Ищем ГМТ». Рассмотрим все окружности с данной хордой BC и касательные к ним, проходящие через данную точку A (K – точка касания). На какой линии лежат все точки K ?

Сначала точка K пробегает по экрану без следа, и школьники могут высказать свои догадки. Затем кнопкой включаем след точки (рис. 11), траектория становится наглядной и гипотезу можно уточнить: все точки K лежат на окружности с центром в точке A . Достаточно доказать,

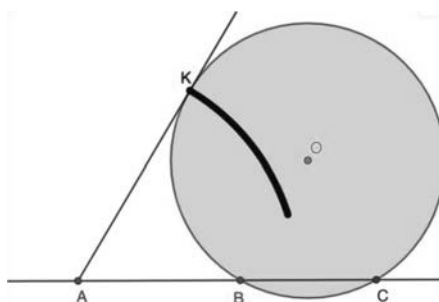


Рис. 11

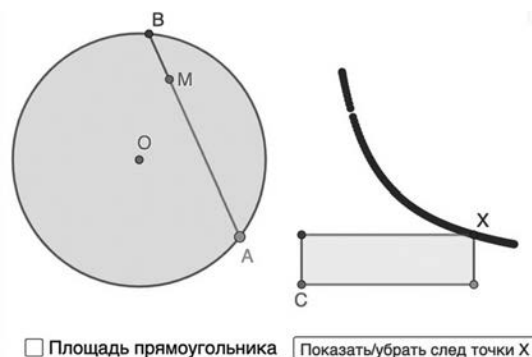


Рис. 12

что AK постоянно. Однако $AK^2 = AB \cdot AC$ в силу теоремы о квадрате касательной, а AB и AC постоянны.

Пример: §6 модель «Демонстрация хорд». Рассматривают все хорды AB , проходящие через данную точку M данной окружности. От данной точки C строят прямоугольники, стороны которых равны AM и BM .

а) Как меняется площадь прямоугольника?

б) На какой линии лежит противоположная от точки C вершина прямоугольника X ?

Площадь прямоугольника (рис. 12) оказывается постоянна. Траекторию точки X , как и в предыдущей задаче, полезно сначала угадать (ученики предлагают и прямую, и параболу), а затем построить кнопкой. Это будет гипербола, асимптоты которой лежат на продолжении сторон прямоугольника с вершиной C .

Затем можно вынести точку M за пределы круга и посмотреть, что изменится. В обоих случаях обыгрывается тот факт, что произведение $AM \cdot BM$ не зависит от выбора хорды или секущей. Предложены две визуализации – с площадью прямоугольника и с функциональной зависимостью (обратной пропорциональностью). Особенно впечатляет возникновение гиперболы в простой задаче классической планиметрии.

Замечание. Д.А. Калинин отметил, что те модели, в которых какая-то величина оказывается неизменной, могут показаться нечестными, поскольку все операции произведены заранее. Больше доверия вызывает модель, которая строится прямо на уроке на глазах у школьников. Строить модели «на лету» удобнее не в программе GeoGebra, а в программе Математический Конструктор [4].

Техника

- Для коллективного обсуждения модели можно показывать на проекторе или панели в аудитории, а также делать демонстрацию экрана на дистанционном уроке.
- Ссылку на каждую модель можно выдавать ученикам для самостоятельного изучения с последующим устным обсуждением или фиксацией результатов в тетради.
- Кнопка «Create lesson» в правом верхнем углу экрана позволяет каждую модель превратить в классное или домашнее задание для учеников. GeoGebra-Class показывает учителю в режиме реального времени, какие манипуляции с моделью проделывает каждый ученик на своём экране, а также собирает текстовые ответы.
- Интеграция с системой Google Класс

позволяет выдавать и проверять прямо в этой системе *домашние задания*, сделанные в GeoGebra.

Модели можно свободно копировать, дорабатывать, редактировать, что позволяет учителю доработать эти заготовки под свои нужды.

Для поддержки альбома имеется группа в телеграмме [5]. Подробнее об общих принципах динамической геометрии можно прочитать в книге [6], там же есть сценарии восьми готовых занятий для учеников 6–10 классов.

Автор благодарен М.А. Волчкевичу, В.Н. Дубровскому, Г.А. Мерзону, Н.М. Нетрусовой, А.В. Шкловеру, участникам группы [5].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-29-14217.

Список источников

1. GeoGebra <http://geogebra.org/classic/geometry>
2. Волчкевич М.А. Геометрия 9 кл. М., Просвещение, 2021.
3. Сгибнев А.И. Альбом подвижных чертежей для обучения геометрии, Математика, 2020, № 8. С. 9–11, 22.
4. Математический Конструктор <https://urok.1c.ru/constructor/mathkit/1c/>
5. Группа «Динамическая геометрия» https://t.me/joinchat/R9GfuudXr_DA6NLw
6. Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах, М., МЦНМО, 2019.

Читайте в третьем номере журнала «Математика для школьников» следующие публикации:

ИДУ НА ЭКЗАМЕН

Золотухин Ю.П. (г. Гродно, Беларусь)

Основные методы решения текстовых задач

Предлагается авторский материал для организации систематизированного обобщающего повторения школьниками темы «Решение текстовых задач». Уточняются основные понятия, рассматриваются два основных метода решения таких задач — аналитико-синтетический и математического моделирования. Изложение материала сопровождается примерами с подробными решениями текстовых задач.

КЛУБ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Карпушина Н.М. (г. Москва)

О чём умолчал премьер

1 сентября 2021 года СМИ облетела история о том, как премьер-министр России Михаил Мишустин посетил в День знаний «Физтех-лицей» имени П.Л. Капицы в Долгопрудном и задал ученикам 11 класса задачу на построение перпендикуляра с помощью одной линейки. Весь урок ребята вместе с учителем искали решение, но так и не нашли. В итоге его пришлось показывать самому премьеру. Задачу тут же окрестили «физтеховской», или «задачей Мишустина».

МАТЕМАТИКА — ЭТО ИНТЕРЕСНО

Совертков П.И. (г. Санкт-Петербург)

Математика для оформления садово-паркового пространства

В статье рассматривается математическое моделирование расположения подобных фигур в квадрате и арбелосе. Предлагается разработать проект для оформления садово-паркового пространства.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Маматкулов А. (Узбекистан)

Ещё раз о курьёзных тождествах

В статье доказаны удивительные свойства n -значных перевёртышей, то есть пар таких n -значных чисел, когда второе число в паре получается из первого в результате записи всех его цифр в обратном порядке.

ПРИМЕНЕНИЕ ОЦЕНОК ДЛЯ СРЕДНЕГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

APPLYING ESTIMATES FOR THE LOGARITHMIC MEAN IN PROBLEM SOLVING

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_46

Л.В. Панкратова,Вятский государственный университет (Киров);
pankratovalaris19@rambler.ru**L.V. Pankratova,**Vyatka State University (Kirov);
pankratovalaris19@rambler.ru

Аннотация: статья посвящена обсуждению способов применения известных оценок для среднего логарифмического двух положительных величин в решении задач: при сравнении чисел, доказательстве неравенств, решении уравнений и их систем. Весь задачный материал заимствован из авторитетных источников. Приведённые примеры демонстрируют эффективность предложенного метода

Abstract: the article is devoted to a discussion of methods for applying known estimates for the logarithmic mean of two positive values in solving problems: when comparing numbers, proving inequalities, solving equations and their systems. All problem material is borrowed from authoritative sources. The given examples demonstrate the effectiveness of the proposed method

Ключевые слова: неравенство, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее логарифмическое

Keywords: inequality, arithmetic mean, geometric mean, logarithmic mean

Средним логарифмическим двух положительных чисел a и b называется величина (см., напр., [7])

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{a - b}{\ln a - \ln b}, & a \neq b, \\ a, & a = b. \end{cases} \quad (1)$$

Известно, что для данных чисел a и b их среднее логарифмическое (1), среднее геометрическое $G = \sqrt{ab}$ и среднее арифметическое $A = \frac{a + b}{2}$ связаны неравенствами

$$G \leq L \leq A, \quad (2)$$

причём равенства в (2) достигаются лишь при условии $a = b$.

Доказать (2) можно разными способа-

ми: средствами определённого интеграла Римана (см., напр., [7]), обращением к дифференциальному исчислению функций одной действительной переменной [9], исходя из монотонности средних Тибора Радо [10] и другими подходами. Мы покажем, как неравенства (2) можно эффективно использовать для решения различных задач, традиционно предполагающих иные методы достижения результата.

Доказательство неравенств

Задача 1. Докажите неравенство

$$e^x > 1 + x, \quad (x \neq 0).$$

Решение. Это известная задача (см., например, [2, с. 92, № 1199]). Её решение

чаще всего сводится к обоснованию того факта, что функция $f(x) = e^x - x - 1$ в точке $x = 0$ имеет равный нулю минимум. Не умаляя достоинств данного способа решения, обратимся к неравенствам (2).

Заметим, среднее логарифмическое величин e^x и 1 есть $L = \frac{e^x - 1}{x}$, их среднее геометрическое – $G = e^{x/2}$, а среднее арифметическое – $A = \frac{e^x + 1}{2}$.

Пусть сначала $x > 0$. Тогда из неравенства $L > G$ имеем $\frac{e^x - 1}{x} > e^{x/2} > 1$, что влечёт неравенство, данное в задаче. Теперь положим $x < 0$. В таком случае оценка $L < A$ приводит к соотношениям $\frac{e^x - 1}{x} < \frac{e^x + 1}{2} < 1$, то есть снова $e^x > 1 + x$. Итак, для любых значений $x \neq 0$ требуемое установлено.

Задача 2 [2, с. 92, № 1198]. Докажите неравенство $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ для $x > 1$.

Решение. Перепишем данное неравенство в равносильном виде: $\frac{x-1}{\ln x} < \frac{x+1}{2}$.

Осталось заметить, что это есть неравенство $L < A$ для величин x и 1.

Видим, что в данной задаче применение неравенства между средним логарифмическим и средним арифметическим имеет несомненные преимущества, поскольку позволяет получить результат гораздо быстрее по сравнению с методами дифференциального исчисления функций одной переменной.

Задача 3 [3, с. 127, № 108a]. Докажите неравенство $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

Решение. Установим лишь неравен-

ство $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$, поскольку при $x > 0$

неравенство $\ln(1+x) < x$ равносильно неравенству $e^x > 1+x$, рассмотренному выше.

Запишем неравенство $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ в эквивалентной форме: $\frac{\ln(1+x)}{x} > \frac{2-x}{2}$.

Заметим, что для $x \geq 2$ последнее неравенство очевидно. При $0 < x < 2$ из соотношения $L < A$ между средним логарифмическим и средним арифметическим для величин $1+x$ и 1 будем иметь $\frac{x}{\ln(1+x)} < \frac{2+x}{2}$.

В свою очередь, $\frac{2+x}{2} < \frac{2}{2-x}$, поскольку $4 - x^2 < 4$. Требуемое установлено.

Задача 4 [6, с. 60, № 14ж]. Докажите неравенство $1 + 2\ln x \leq x^2$ при $x > 0$.

Решение. Среднее логарифмическое для величин x^2 и 1 ($x \neq 1$) есть $L = \frac{x^2 - 1}{2\ln x}$.

При $x > 1$ из неравенства $L > G$ получаем $\frac{x^2 - 1}{2\ln x} > x > 1$, откуда следует требуемое.

Если же $0 < x < 1$, то из неравенства $L < A$ будем иметь $\frac{x^2 - 1}{2\ln x} < \frac{x^2 + 1}{2} < 1$, что вновь влечёт неравенство $1 + 2\ln x \leq x^2$. Равенство, очевидно, достигается только при $x = 1$.

Задача 5 [3, с. 128, № 108г]. Докажите неравенство $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2$.

Решение. Нетрудно видеть, что при $x = 0$ данное неравенство обращается в равенство. Поэтому будем доказывать неравенство $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2$ при $x \neq 0$. Перепишем его в эквивалентной форме

$\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 > x^2$. Из неравенства $L > G$

между средним логарифмическим и средним геометрическим для величин $e^{\frac{x}{2}}$ и $e^{-\frac{x}{2}}$ получим $\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{x} > 1$, откуда немедленно следует требуемое.

Замечание 1. В несколько иной формулировке, предполагающей доказательство неравенства $chx > 1 + \frac{x^2}{2}$ ($x \neq 0$), эта задача приведена в [2, с. 92, № 1207].

Задача 6 [5, с. 125, № 1291]. Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Решение. Будем устанавливать неравенство $x \ln \frac{x+1}{x} < 1 < (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$, равносильное данному. В условиях задачи рассмотрим среднее логарифмическое $L = \frac{1}{\ln \frac{x+1}{x}}$ величин x и $x+1$. Тогда на основании неравенства $L > G$ можем записать соотношение

$$\frac{1}{\ln \frac{x+1}{x}} > \sqrt{x(x+1)} > x,$$

откуда непосредственно следует, что $x \ln \frac{x+1}{x} < 1$. Из неравенства же $L < A$ получаем:

$$\frac{1}{\ln \frac{x+1}{x}} < x + \frac{1}{2} < x+1,$$

значит, $(x+1) \ln \frac{x+1}{x} > 1$. Неравенство доказано.

Задача 7 [1, с. 38]. Проверьте справедливость неравенства $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$, где $0 < a < b$.

Решение. Для решения достаточно применить неравенство $L > G$ между средним логарифмическим и средним геометрическим величин a^2 и b^2 .

Сравнение чисел

Задача 8 [4, с. 22, № 2.276]. Докажите, что $\ln 2 < 0,72$.

Решение. Установим неравенство $\frac{1}{\ln 2} > \frac{25}{18}$, равносильное данному. Запишем неравенство $L > G$ для чисел 2 и 1. Будем иметь: $\frac{2-1}{\ln 2} > \sqrt{2}$. В свою очередь $\sqrt{2} > \frac{25}{18}$, поскольку $2 \cdot 18^2 > 25^2$.

Замечание 2. Применение неравенства $L > G$ для чисел 2 и 1 позволяет уточнить предложенное в задаче неравенство, показав справедливость соотношения $\ln 2 < 0,71$.

Задача 9 [6, с. 60, № 19; 4, с. 24, № 2.31].

Какое из чисел больше: $\frac{2}{201}$ или $\ln \frac{101}{100}$?

Решение. Поскольку из неравенства $L < A$ между средним логарифмическим и средним арифметическим для чисел 101 и 100 следует соотношение

$$\frac{101-100}{\ln \frac{101}{100}} < \frac{101+100}{2}, \text{ то } \ln \frac{101}{100} > \frac{2}{201}.$$

Замечание 3. В [6, с. 150] приведено решение данной задачи, основанное на строгом возрастании функции

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$$

в промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f\left(\frac{1}{100}\right) = \ln\left(\frac{101}{100}\right) - \frac{2}{201} > 0$. В свою очередь, автор [4] устанавливает данное неравенство средствами определённого интеграла Римана и по окончании доказа-

тельства делает следующую ремарку: «Любопытно, что далеко не всякий калькулятор “почувствует разницу” между числами $\frac{2}{201}$ и $\ln \frac{101}{100}$!» [4, с. 24].

Задача 10 [6, с. 60, № 17a]. Что больше: e^π или π^e ?

Решение. Прологарифмировав данные числа, получим для сравнения пару $\pi \ln e = \pi$ и $e \ln \pi$. Из неравенства $L > G$ для чисел π и e следует соотношение

$$\frac{\pi - e}{\ln \pi - \ln e} > \sqrt{\pi e} > e,$$

значит, $\pi - e > e \ln \pi - e$, следовательно, $\ln e^\pi > \ln \pi^e$ и $e^\pi > \pi^e$.

Замечание 4. Авторы [6] приводят решение данной задачи, предполагающее исследование функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ на монотонность (см. [6, с. 149]).

Замечание 5. Запишем неравенство $L < A$ для чисел π и e :

$$\frac{\pi - e}{\ln \pi - \ln e} < \frac{\pi + e}{2} < \pi.$$

Тогда $\pi - e < \pi \ln \pi - \pi \Leftrightarrow 2\pi < e + \pi \ln \pi \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^{2\pi} < e^e \cdot \pi^\pi$. Мы решили вопрос о сравнении чисел $e^{2\pi}$ и $e^e \cdot \pi^\pi$, сформулированный в виде задачи в [4, с. 27, № 2.37].

Замечание 6. Можно обобщить задачу 10, поставив вопрос сравнения e^x и x^e для положительных значений x . Запишем логарифмы данных величин: $x \ln e = x$ и $e \ln x$. Найдём, далее, среднее логарифмическое, геометрическое и арифметическое e и x :

$$L = \frac{e - x}{1 - \ln x}, \quad G = \sqrt{ex}, \quad A = \frac{e + x}{2}.$$

Пусть сначала $x > e$. Тогда из неравенства $L > G$ имеем: $\frac{e - x}{1 - \ln x} > \sqrt{ex} > e$, значит, $e - x < e - e \ln x$, то есть $x \ln e > e \ln x$ и $e^x > x^e$. Если же $x < e$, то неравенство $L < A$ влечёт $\frac{e - x}{1 - \ln x} < \frac{e + x}{2} < e$, откуда

вновь следует, что $x \ln e > e \ln x$. Итак, для любых положительных значений x выполняется неравенство $e^x \geq x^e$ (или $e^{\frac{x}{e}} \geq x$, к которому вернёмся ниже), причём равенство в нём достигается лишь при условии $x = e$.

Другие задачи

Задача 11 [6, с. 61, № 21]. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + e^x = y + e^y, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Решение. Предположим, что $x \neq y$. Запишем первое уравнение системы в эквивалентном виде: $\frac{e^x - e^y}{x - y} = -1$. Но тогда его левая часть есть среднее логарифмическое величин e^x и e^y . Поскольку среднее логарифмическое двух положительных величин всегда положительно, получаем противоречие. Значит, наше предположение было неверным, и $x = y$. В таком случае из второго уравнения системы немедленно находим её решения: это пары чисел (2; 2) и (-2; -2).

Задача 12 [8, 11 класс, 2 день, задача № 2]. Найти такое $a > 1$, при котором уравнение $a^x = \log_a x$ имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим уравнение $a^x - x = \log_a x - x$, равносильное данному. Из условия задачи ясно, что $x > 0$. Пусть $a^x \neq x$. Тогда

$$\begin{aligned} L(a^x, x) &= \frac{a^x - x}{x \ln a - \ln x} = \\ &= \frac{a^x - x}{-\ln a(\log_a x - x)} = -\frac{1}{\ln a} < 0. \end{aligned}$$

Это невозможно, так как $a > 1$. Значит, $a^x = x$.

Воспользуемся теперь результатом, установленным в *Замечании 6*. Посколь-

ку $a^x = \left(\frac{x}{e^e} \right)^{e \ln a} \geq x$, равенство возможно

лишь при условии $e \ln a = 1$, или $a = e^{\frac{1}{e}}$. Единственным корнем уравнения для найденного значения a будет, конечно, $x = e$.

Замечание 7. Так как уравнения $a^x = x$ и $\log_a x = x$ равносильны, на основании полученного результата можем заключить:

1) при $a = e^{\frac{1}{e}}$ число e является единственным числом, равным своему логарифму;

2) при $a > e^{\frac{1}{e}}$ не существует действительных чисел, равных своим логарифмам.

Существует немало других задач, которые могут быть решены с использованием свойств среднего логарифмического. Заметим, что рассмотренные в настоящей работе примеры задач в курсе математики общеобразовательной школы считаются нестандартными, имеющими олимпиадный характер. Поскольку обращение к среднему логарифмическому позволяет эффективно решать подобные задачи, его изучение может быть актуальным в рамках профильного обучения школьников, а также при проектировании элективных курсов по математике. Более глубокое изучение свойств среднего логарифмического, самостоятельное решение задач с их применением и конструирование собственных упражнений могут выразиться в содержательных научно-исследовательских работах учащихся.

Список источников

1. Балк М., Ломакин Ю. Доказательство

неравенств с помощью производной // Квант, 1979. № 10. С. 36–38.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. 22-е изд., перераб. СПб., Изд-во «Профессия», 2001. 432 с.

3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: пособие для университетов, пед. вузов: В 2 ч. / Под ред. В.А. Садовничего. 3-е изд., испр. М.: Дрофа, 2001. Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. 725 с.

4. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10–11 кл.: учебное пособие / С.А. Гомонов. 2-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2006. 254 с.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие / Б.П. Демидович. М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2002. 558 с.

6. Калинин С.И., Канин Е.С., Маянская Г.М., Ончукова Л.В., Подгорная И.И., Фалелеева С.А. Задачи и упражнения по началам математического анализа: Пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внекл. занятий математикой. 2-е издание. М.: Московский Лицей, 2002. 208 с.

7. Недосекина И.С., Троицкая С.Д. О среднем логарифмическом двух величин // Математика в школе. 2017. № 5. С. 58–64.

8. LXXVI Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. [Электронный ресурс] <http://olympiads.mccme.ru/mmo/2013/76mmo.pdf>.

9. Bhatia, R. (2008). The logarithmic mean. Resonance. 13(6): 583–594.

10. Rado, T. On convex functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1935. Vol. 37. P. 266–285.

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК ИНСТРУМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

LABORATORY WORK IN MATHEMATICS AS A TOOL FOR THE FORMATION OF EXPERIMENTAL THINKING OF STUDENTS

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_6_51

А.В. Закирова,
alya.zakirova.9900@mail.ru;
Э.О. Ладэ,
licey12@eduekb.ru;
В.А. Леконтсева,
vicka.leckontseva@yandex.ru;
В.Ю. Бодряков,
Bodryakov_VYu@e1.ru;
УГПУ (Екатеринбург)

A.V. Zakirova,
alya.zakirova.9900@mail.ru;
E.O. Lade,
licey12@eduekb.ru;
V.A. Lekontseva,
vicka.leckontseva@yandex.ru;
V.Yu. Bodryakov,
Bodryakov_VYu@e1.ru;
USPU (Ekaterinburg)

Ключевые слова: лабораторные работы по математике, экспериментальный подход к обучению математике, экспериментальное мышление

Keywords: experimental approach to teaching mathematics, experimental thinking, laboratory work in mathematics

Аннотация: на примере лабораторной работы «Опыт Бюффона. Статистическое определение числа π », проведённой в нескольких уральских школах, описаны особенности и проблемы, связанные с реализацией экспериментально-лабораторного подхода к обучению математике в современных условиях; показано, что этот подход способствует формированию функциональной математической грамотности обучающихся

Abstract: on the example of laboratory work «Buffon's experience. Statistical determination of the number π », conducted in several Ural schools, describes the features and problems associated with the implementation of an experimental laboratory approach to teaching mathematics in modern conditions; it is shown that this approach contributes to the formation of functional mathematical literacy of students

В современных условиях быстрой цифровой трансформации практически всех сторон общественного уклада конкретные предметные знания и умения (hard skills) по многим позициям устаревают очень быстро. В этих условиях вперёд выдвигаются личностные надпредметные знания и умения (soft skills). **Всё более остро звучат суждения о необходимости обновления предметного содержания и методики**

обучения ряда традиционных школьных предметов. В случае математики область дискуссий расширяется на все уровни и аспекты обучения, охватывая проблематику содержания, методики обучения и качества математического образования будущих учителей, инженеров, исследователей. В последние годы одним из важных направлений развития России признано развитие технологий искусственного ин-

теллекта (ИИ). Есть понимание того, что развитие технологий ИИ невозможно без соответствующего уровня математической подготовки обучающихся.

Так, на онлайн-конференции по искусственному интеллекту AI Journey в декабре 2020 года Президент РФ В.В. Путин отметил: «...скорость технологий, технологического развития растёт, растёт по экспоненте, потому и всей нашей системе образования... сохраняя лучшие традиции отечественного образования, нужно наращивать темпы перемен, необходимые перемены нужно обязательно осуществлять. Прежде всего настоящими флагманами, источниками самых передовых знаний и открытий призваны стать наши университеты, профильные вузы и факультеты, где студенты изучают математику, компьютерные науки, технологии больших данных и информационную безопасность. Содержание и методы преподавания этих важнейших для создания алгоритмов искусственного интеллекта дисциплин нужно существенно обновить... И конечно, мы должны думать о подрастающем поколении, о наших самых маленьких гражданах. Без прочных знаний математики сегодняшним школьникам точно не обойтись. Она действительно является “настоящей царицей наук”, как в XVIII–XIX веке сказал один из замечательных немецких учёных. Её язык, законы универсальны. И в условиях стремительного развития технологий они понадобятся буквально каждому человеку для решения самых разнообразных задач»¹.

Проблема поиска новых эффективных форм обучения математике актуальна не только для отечественной, но и для зарубежных систем образования. Так, в работе

А.Р. Lopes и др. [4] европейские авторы говорят о необходимости разработки новой стратегии в области математического образования, подчеркивая при этом, что математика – фундаментальная часть всех образовательных систем. По мнению авторов, нужно:

1. Обновить методику обучения математике.
2. Представлять содержание преподавания математики в более привлекательной форме с использованием ИКТ.
3. Содействовать мобильности студентов и обучению на протяжении всей жизни.

Говоря о проблемах современного европейского математического образования в связи с распространением современных цифровых технологий, Р. Drijvers в коллективной монографии [3] отмечает, что в целом проблема для учителей, преподавателей, разработчиков и исследователей заключается в создании цифровых инструментов, которые являются гибкими и настраиваемыми, предоставляют обучающимся пространство для изучения и которые педагоги могут легко адаптировать к своим конкретным дидактическим целям. Вместе с тем при обучении с использованием цифровых технологий не следует отказываться от традиционных методов из-за возрастающей сложности учебной среды, также необходимо уделять внимание представлению явлений естественным и осмысленным для человека образом.

Это не так просто в условиях, когда цифровые технологии быстро прогрессируют, и необходимы совместные усилия, чтобы сделать интеграцию цифровых инструментов в математическом образовании повсеместно успешной. Ряд авторов монографии [3] обсуждает различные аспекты проблемы освоения студентами и педагогами инструментов реального

¹ См. <http://www.kremlin.ru/events/president/news/64545> (дата обращения: 04.10.2021).

математического образования (**Real Mathematical Education**), а также формирование функционального математического мышления обучающихся как способности строить и применять математические модели, соответствующие задачам из профессиональной и бытовой сфер.

Экспериментальное математическое мышление (ЭММ) в значительной степени синонимично понятию функционального математического мышления. Под ЭММ вслед за В.В. Майером и Ю.А. Сауровым [1] мы понимаем готовность и умения обучающегося по согласованию идеального (математическая модель) и реального (в натурном или оцифрованном виде) воплощений действительности. Ориентировочная учебная деятельность здесь подчиняется схеме: *условия* (знания, мотивы, цели, средства, объекты) → *процессы* (методы, действия, измерения и др.) → *результаты* (новый продукт, рефлексия, интерпретации и др.). Более детально ЭММ – это:

- умственная деятельность для обеспечения познавательной-конструктивной деятельности с натурными или модельными объектами и явлениями;

- теоретическое понимание реальности через её идеально-реальное и таким образом критическое изменение, понимание реальности через создание (проектирование, изобретение) новой реальности;

- эксперимент с идеями (и их носителями) в форме внешних предметных, материальных и знаковых действий;

- мысленный эксперимент как особое знаковое, понятийное мышление по согласованию реального (натурного или цифрового) и идеального (модельного) миров.

Мы полагаем, что лабораторные работы по математике (ЛРМ) можно рассматривать как практическое воплощение

экспериментально-лабораторного подхода к обучению математике и как один из наиболее действенных инструментов формирования и развития экспериментального мышления школьников и студентов при обучении их математике на разных уровнях системы образования.

На примере ЛРМ «Опыт Бюффона. Статистическое определение числа π », проведённой в нескольких уральских школах, рассмотрим особенности и проблемы, связанные с реализацией экспериментально-лабораторного подхода к обучению математике в современных условиях.

Французский естествоиспытатель Жорж Бюффон (1707–1788) в 1777 году описал оригинальный способ приближённого вычисления числа π , известный в литературе под названием «задача Бюффона». Суть этого способа кратко можно изложить так [2]. Лист бумаги (модель плоскости) разграфлён параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На него бросают наудачу иглу длиной $2l$ ($l < a$). Требуется найти вероятность пересечения иглы с какой-либо из этих прямых (событие A).

Обозначим расстояние от центра иглы до ближайшей параллели буквой x , а угол, составленный иглой с этой параллелью, – буквой φ . Таким образом, для описания результата опыта необходимо указать две непрерывные случайные величины. Все возможные положения иглы (x ; φ) определяются точками прямоугольника со сторонами a и π . Из рисунка 1а видно, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы $x \leq l \sin \varphi$. Искомая вероятность равна отношению площади области, ограниченной на отрезке $[0; \pi]$ синусоидой, к площади прямоугольника со сторонами a и π (рис. 1б). Следовательно, геометрическая вероятность события A равна

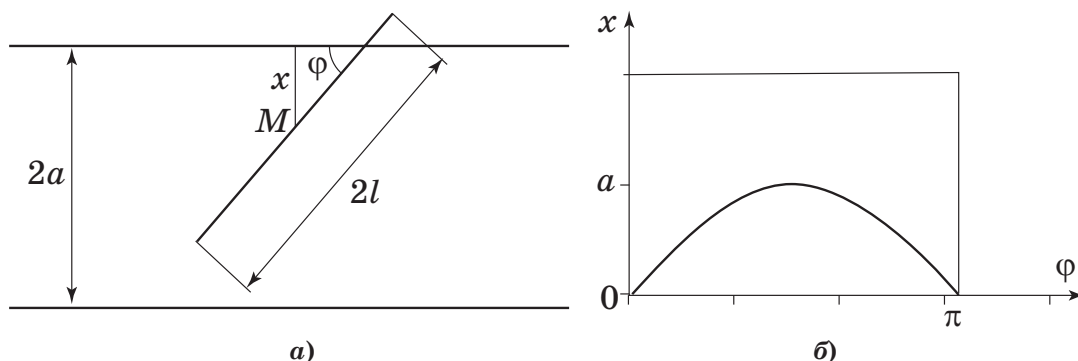


Рис. 1

$$P(A) = \frac{1}{a\pi} \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Опыт Бюффона можно осуществить в натурном виде и получить статистическую оценку числа π :

$$P(A) \approx \frac{m}{n},$$

где n – фактическое число бросаний иглы (или иного аналогичного объекта, например зубочистки или счётной палочки) на разлинованное поле, m – число опытов, в которых наблюдалось событие A . При достаточно большом (обычно несколько тысяч) числе опытов можно получить вполне надёжную оценку числа π :

$$\pi \approx \frac{2l}{a} \cdot \frac{n}{m}.$$

В дальнейшем этот способ проверялся на практике многими лицами. Так, итальянский математик Марио Лаццарини в 1901 году бросал иглу 3408 раз и получил значение $\pi \approx 3,1415929$.

Лабораторная работа «Опыт Бюффона. Статистическое определение числа π » проводилась в 9 и 11 классах двух екатеринбургских школ. Краткая характеристика групп обучающихся, принявших участие в эксперименте, приведена в таблице 1.

Перед экспериментом проводились уроки с целью предварительной теоретической подготовки обучающихся. На уро-

ках была обозначена роль эксперимента в научном познании, представлены задача Бюффона о бросании иглы и её решение, поставлены цели и задачи эксперимента, проведены собеседования с участниками.

Натурный эксперимент представлял собой бросание счётных палочек на ватман формата A1. Вначале каждая группа подготавливала поле для бросания, бросала счётные палочки определённое число раз и фиксировала данные. Затем проводилась компьютерная обработка экспериментальных данных² (таблица 2).

Задача Бюффона представляет собой интересный объект и для компьютерных экспериментов. Исходя из этого, обучающимся было предложено составить компьютерную программу на любом из языков программирования. Для её написания был выбран язык C++, поскольку он является одним из самых популярных языков программирования.

Входными параметрами программы определялись: x – координата центра иглы, φ – угол между линией на поле и иглой, l – длина иглы, a – расстояние между параллелями, n – количество испытаний. Результатом написания программы является код, представленный в виде QR-кода

² В таблицах 1, 3 при вычислении $\langle \pi_{\text{exp}} \rangle$ использовались данные для $n \geq 100$.

Таблица 1

Группа	1	2	3
Школа	МАОУ лицей № 12	МАОУ лицей № 12	МАОУ СОШ № 66
Класс	11Е	11Ж	9Б
Профиль класса	без профиля	математический	без профиля
Возраст обуч-ся	17–18 лет	17–18 лет	15–16 лет
Мальчиков/ девочек	11/14	14/8	16/12
Успеваемость, чел.	«отлично» – 5, «хорошо» – 15, «удовлетв.» – 5	«отлично» – 2, «хорошо» – 18, «удовлетв.» – 2	«отлично» – 4, «хорошо» – 17, «удовлетв.» – 7

Таблица 2

Протокол испытаний (натурный эксперимент)

№ серии опытов	Количество бросаний	Значение π_{exp}
1	51	3,86625048
2	100	2,94181268
3	100	3,51966874
4	150	3,32193455
5	200	3,17905563
6	300	3,17905563
7	300	3,34070253
8	500	3,59674178
9	250	3,02302836
	$\langle \pi_{\text{exp}} \rangle \pm \text{СКО}$	$3,26 \pm 0,23$

из компилятора C++ (рис. 2), под ним приведён скриншот результата запуска программы.

Результаты компьютерных экспериментов представлены в таблице 3.

После проведённых компьютерных и натурных испытаний группы обучающихся выделили достоинства и недостатки каждого из способов вычисления числа π методом Бюффона (таблица 4).

В ходе подготовки к ЛРМ выяснилось, что девятиклассники не обладают достаточными навыками для написания

и отладки компьютерной программы на каком-либо языке. Поэтому им была предоставлена готовая программа. Самостоятельно ребята проводили лишь натурный эксперимент, а затем имели возможность сравнить его результаты с результатами компьютерного эксперимента.

Проведение эксперимента по задаче Бюффона в 9 и 11 классах было оценено как успешное, после чего решили расширить круг обучающихся, работающих над ним. Для этого привлекались восьмиклассники из двух школ Екатеринбурга

Таблица 3

Протокол испытаний (компьютерный эксперимент)

№ серии опытов	Количество бросаний	Значение π
1	100	2,57143
2	1000	2,96053
3	5000	3,2491
4	10000	3,16344
5	50000	3,14817
6	100000	3,12685
7	1000000	3,11701
8	10000000	3,12634
	$\langle \pi_{\text{exp}} \rangle \pm \text{СКО}$	$3,127 \pm 0,086$

Таблица 4

Компьютерный эксперимент	Натурный эксперимент
<i>Достоинства:</i> – неограниченное количество бросаний; – минимальные затраты ресурсов (времени, энергии и др.). <i>Недостатки:</i> – зависимость от имеющегося оборудования; – недостаточность навыков программирования для написания и отладки кода программы.	<i>Достоинства:</i> - возможность проведения эксперимента независимо от возраста обучающихся, места проведения испытаний и имеющегося оборудования. <i>Недостатки:</i> – ограниченное количества бросаний; – большие затраты времени; – большая статистическая погрешность.

Таблица 5

Группа	1	2	3
Школа	МАОУ СОШ № 66	МАОУ СОШ № 66	МОУ СОШ № 2
Класс	8А	8Б	8А
Профиль класса	без профиля	без профиля	без профиля
Возраст обучающихся	13–14 лет	13–14 лет	13–14 лет
Мальчиков/ девочек	13/15	11/13	10/13
Успеваемость, чел.	«отлично» – 4, «хорошо» – 18, «удовлетв.» – 6	«отлично» – 2, «хорошо» – 18, «удовлетв.» – 4	«отлично» – 6, «хорошо» – 15, «удовлетв.» – 2

Таблица 6

Протокол испытаний (натурный эксперимент)

№ серии опытов	Количество бросаний	Значение π_{exp}
1	10	3,6
2	50	2,5
3	100	2,53521126
4	150	3,74534679
5	200	3,17907982
6	250	3,02469916
7	300	3,16343979
8	300	3,24679462
9	500	3,13467914
10	500	3,14769764
	$\langle \pi_{\text{exp}} \rangle \pm \text{СКО}$	$3,26 \pm 0,23$

и Свердловской области. Краткая характеристика групп обучающихся, принявших участие в эксперименте, приведена в таблице 5.

Предварительно в этих классах проводились ознакомительные уроки, на которых школьникам было рассказано о Ж. Бюффоне, рассмотрено решение задачи Бюффона, поставлены цели и задачи предстоящей лабораторной работы. Заранее осмыслился тематический план по информатике для 8 класса. Согласно ему основы программирования (на языке Python) изучаются во втором полугодии, поэтому код компьютерной программы был предоставлен учащимся в готовом виде. QR-код программы на Python и скриншот результата запуска программы показаны на рисунке 3.

Само задание лабораторной работы не претерпело изменений. По результатам натурального эксперимента обучающиеся заполнили таблицу значений π_{exp} для каждой серии бросков. Протокол проведения эксперимента восьмиклассниками приведён в таблице 6.

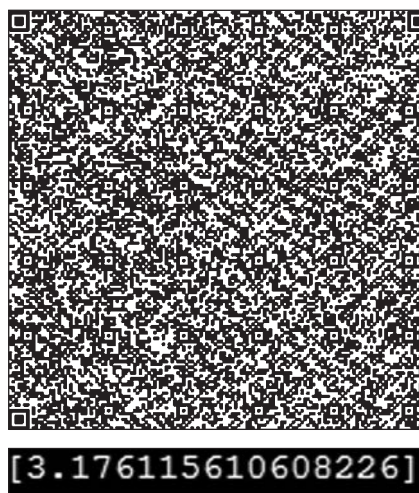


Рис. 3

В ходе работы школьники столкнулись с двумя трудностями: выводением рабочей формулы для вычисления числа π и чтением программы на языке Python. Сама экспериментальная часть ЛРМ трудностей не вызвала, напротив, она с удовольствием выполнялась.

Лабораторная работа «Опыт Бюффона. Статистическое определение числа π », как и другие аналогичные лабораторные

работы по математике, включает математические рассуждения, предполагает использование различных понятий, процедур, фактов и инструментов, необходимых для того, чтобы описать, объяснить и предсказать явления и закономерности, помогает обучающимся понять роль математики в мире. Тем самым ЛРМ способствуют формированию функциональной математической грамотности учащихся.

Несомненно и то, что они способствуют формированию экспериментального мышления школьников (им необходимо подготовить экспериментальное поле, правильно провести испытания и зафиксировать результаты, выполнить статистическую обработку полученных данных, оценить погрешность и др.).

Наконец, современные ЛРМ подразумевают целесообразное использование цифровых средств при планировании эксперимента, фиксировании и обработке результатов, подготовке и презентации отчёта о проделанной работе. Тем самым лабораторные работы по математике могут служить отличным расшире-

нием педагогической палитры учителя-предметника.

Список источников

1. Майер В.В., Сауров Ю.А. Экспериментальное мышление: смыслы-ценности, черты, технология формирования // Учебная физика. – 2018. – № 4. – С. 46–65.
2. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова и др. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с.
3. *Drijvers P.* Digital tools in Dutch mathematics education: A dialectic relationship / In monograph: National reflections on the Netherlands didactics of mathematics teaching and learning in the context of realistic mathematics education. – Hamburg: Springer Open. – 2016. – P. 177–195.
4. *Lopes A.P.* Innovating mathematics in the European higher education / In Proceedings of INTED-2011 – 5th International Technology, Education and Development Conf. (7–9 March, 2011). – Valencia (Spain), 2011. – P. 1215–1222.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

В Древнем Китае пользовались счётными палочками задолго до изобретения абака. Обычно их делали из дерева или костей животных. Любую цифру можно было представить при помощи пяти и менее палочек. При расчётах их выкладывали на столике, расчерченном на квадраты. Те, кому приходилось иметь дело с положительными и отрицательными числами, просто раскрашивали палочки: красные обозначали положительные числа, а чёрные – отрицательные. Когда Лука Пачоли опубликовал около 1500 года свою систему двойной записи в бухгалтерии и европейцы начали работать с отрицательными числами, то выбрали противоположные обозначения: красным записывались отрицательные числа, а чёрным – положительные. Эти обозначения используются до сих пор.

По книге: Болл Дж. Математика на ладони. Чудеса с числами – просто и ясно.

ВЯЧЕСЛАВ ИОСИФОВИЧ КРУПИЧ (к 100-летию со дня рождения)

Р.А. Мельников,
roman_elets_08@mail.ru,
О.А. Саввина,
oas5@mail.ru,
Н.В. Черноусова,
chernousovi@mail.ru;
ЕГУ им. И.А. Бунина (Елец)

R.A. Melnikov,
roman_elets_08@mail.ru,
O.A. Savvina,
oas5@mail.ru,
N.V. Chernousova,
chernousovi@mail.ru;
Bunin Yelets State University (Yelets)

Ключевые слова: В.И. Крупич, системный подход в методике преподавания математики, текстовая задача

Keywords: V.I. Krupich, a systematic approach in the methodology of teaching mathematics, a text problem

Аннотация: в 2022 году исполняется 100 лет со дня рождения математика-педагога, доктора педагогических наук, профессора Вячеслава Иосифовича Крупича (1922–2000), известного специалиста в области теории и методики обучения математике. Ему удалось создать научную школу, в рамках которой выявлены и разработаны методические аспекты системного анализа обучения решению математических задач. В статье кратко описываются биография и научный путь учёного; раскрываются достоинства созданной им учебно-методической литературы; выявляется круг его учеников и приводятся обзор выполненных ими исследований

Abstract: 2022 marks the 100th anniversary of the birth of mathematician-teacher, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor Vyacheslav Iosifovich Krupich (1922–2000), a well-known specialist in the field of theory and methods of teaching mathematics. He managed to create a scientific school, within the framework of which methodological aspects of the system analysis of learning to solve mathematical problems were identified and developed. The article briefly describes the biography and scientific path of the scientist; reveals the advantages of the educational and methodological literature created by him



Вячеслав Иосифович Крупич родился 9 декабря 1922 г. в небольшом городке Осташкове Тверской области, расположенном на южном берегу озера Селигер – одном из живописнейших мест России. Отец будущего учёного – Иосиф Михайлович (1896 г.р.) был родом из белорусского местечка Любча, расположенного неподалеку от города Новогрудок. До Великой Отечественной войны отец работал в лесной промышленности, в июне 1942 г. пропал без вести. Мать – Татьяна Михайловна (1905 г.р.) была домохозяйкой. Вячеслав Иосифович был вторым ребёнком в семье; старший брат Михаил погиб в ноябре 1943 г. на территории Украины; младший брат Александр стал впоследствии учителем физики, жил и работал в г. Горячий Ключ Краснодарского

края; младшая сестра Анастасия также пошла по педагогической стезе, преподавала химию и биологию в школах Запорожья (Украина).

Будущий профессор окончил в 1937 г. семилетнюю школу в Осташкове. В том же году, в связи с переводом отца на новое место работы, семья переехала в станицу Крымская Краснодарского края, где Вячеслав Иосифович в 1940 г. окончил с золотой медалью среднюю школу № 5. Затем поступил в морское авиационное училище, в 1941 году был призван в ряды вооруженных сил СССР. В годы Великой Отечественной войны служил механиком на аэродроме, готовил морскую авиацию к полётам, демобилизовался в ноябре 1948 года. До мая 1949 г. проживал в местечке Любча Барановичской области (на малой родине отца) и работал заведующим культпросветотделом местного Райисполкома.

Летом 1949 г. поступил на физико-математический факультет Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина, где учился блестяще. Окончил институт в 1953 г., получив диплом с отличием. Далее в течение года работал учителем математики в школе № 20 Табаксовхоза Горяче-Ключевского района Краснодарского края.

В 1954 г. он поступил в аспирантуру при кафедре методики преподавания математики МГПИ им. В.И. Ленина, где под руководством Елизаветы Савельевны Березанской (1891–1969) начал совершать первые шаги в методической науке.

В 1958 г. Вячеслав Иосифович женился, его супругой стала Роза Павловна (1928 г.р.) – выпускница факультета иностранных языков Московского областного педагогического института им. Н.К. Крупской. Она много лет работала учителем английского языка в школе, на

протяжении 17 лет была директором специализированной школы для спортсменов, в которой иностранные языки изучались более углублённо, нежели это подразумевалось в стандартной школьной программе. В семье Крупичей родились двое детей: сын Владислав (стал военнослужащим) и дочь Ольга (стала учителем английского языка).

Как известно, с конца 1950 гг. в СССР начала зреть бурбакистская реформа математического образования, широко известная под названием колмогоровской. В это время велись активные исследования в области методики обучения математике в средней школе, создавались экспериментальные учебники. Вячеслав Иосифович, несомненно, следил за тенденциями, происходившими в отечественном школьном математическом образовании, и сосредоточился на выявлении роли различных аспектов программированного обучения математике. Ведущей идеей в этом исследовании стал анализ содержания и логического устройства математических задач.

Путь к получению степени кандидата педагогических наук у В.И. Крупича составил долгих пятнадцать лет. Защита диссертации «Опыт изучения эффективности программированного обучения в школе (На материале математики)» состоялась 23 июня 1969 г. в стенах его *alma mater*.

Присвоения учёного звания доцента он удостоился 15 марта 1972 г., в том же году его назначили на должность декана математического факультета МГПИ им. В.И. Ленина.

В 1975–1978 гг. В.И. Крупич был командирован за границу, преподавал педагогику и методику преподавания математики в колледже при университете г. Аден – столице НДР Йемен, небольшого госу-

дарства, расположенного в юго-западной части Аравийского полуострова.

После окончания командировки вновь вернулся на кафедру методики преподавания математики МПГИ им. В.И. Ленина. Много сил и энергии он отдавал работе на курсах повышения квалификации педагогов и не понаслышке знал трудности, с которыми сталкиваются школьники при изучении математики. Именно в это время В.И. Крупич получил наиболее значимые результаты в области обучения школьников решению математических задач. Венцом плодотворной работы стал выход в свет учебно-методического пособия «Структура и логика процесса обучения математике в средней школе (методические разработки по спецкурсу для слушателей ФПК)» [2].

Результатом совместной работы В.И. Крупича с его аспиранткой О.Б. Епишевой (1935–2014) стал выход в свет в 1990 г. ещё одного значимого труда – книги для учителя «Учить школьников учиться с математике: Формирование приёмов

учебной деятельности» [1]. В ней авторы раскрыли суть деятельностного подхода в обучении математике. В первой главе ими систематизированы сведения об основных положениях и приёмах учебной деятельности, дана классификация приёмов учебной деятельности в школьном курсе математики, а также описаны методические требования к обучению школьников приёмам учебной деятельности. Вторая и третья главы книги посвящены вопросам формирования общих и специальных приёмов учебной деятельности учащихся в обучении математике.

27 сентября 1990 г. Вячеславу Иосифовичу было присвоено учёное звание профессора, и он всецело сконцентрировался на завершении своей докторской диссертации, посвящённой поиску теоретических основ методики преподавания математики.

Решение этой исследовательской проблемы учёный видел в многоаспектном рассмотрении педагогических объектов или процессов, представлении их в виде сложных динамических систем. «Системный анализ процесса обучения позволил В.И. Крупичу выделить его структурную единицу (простейшую клеточку), названную им *учебной проблемой*, которая, как система, определяется тремя взаимосвязанными компонентами: *предметной задачей, познавательным действием учащегося и дидактическим приёмом учителя*» [5]. Именно вокруг этой триады, предложенной им, Вячеслав Иосифович построил содержание своей докторской диссертации «Теоретические основы обучения решению школьных математических задач», которую он успешно защитил 20 апреля 1992 года в МПГУ. Оponentами на защите выступили доктор физико-математических наук, профессор И.И. Баврин (1932–2017), доктор педа-



гогических наук, профессор А.А. Столяр (1919–1993) и доктор педагогических наук, профессор Г.И. Саранцев (1938–2019).

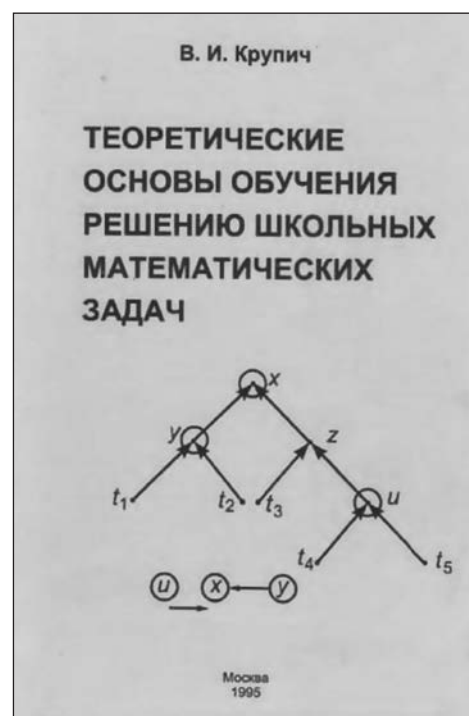
В докторской диссертации В.И. Крупич решил ряд важных теоретических проблем: построил модель систематизации структур школьных математических задач, упорядоченных по сложности, свойства которых изменяются периодически; установил объективную закономерность, состоящую в том, что способы решения задач есть периодическая функция их структуры; выявил основную структуру школьных математических задач, позволяющую строить системы задач, обладающие свойством структурной полноты; выявил внутреннюю структуру школьной математической задачи, позволяющую определять её сложность и стратегию поиска решения задачи; ввёл определение критерия сложности задачи; разработал механизмы аналитико-синтетического поиска решения задач, выявления основного отношения (выполняющего роль системообразующего фактора), реализованного на предметной области задачи, выявления внутренней структуры задачи и др.

Особо подчеркнём, что на момент защиты докторской диссертации под руководством В.И. Крупича уже было выполнено 16 утвержденных ВАК кандидатских диссертаций.

Вячеслав Иосифович имел широкий круг общения в научно-педагогической среде, но наиболее близок он был с чл.-кор. РАО Г.Л. Луканкиным (1937–2006), чл.-кор. РАО В.М. Монаховым и чл.-кор. РАО Г.И. Саранцевым.

Ещё в годы Великой Отечественной войны Вячеслав Иосифович обморозил ноги, а напряжённая научная и педагогическая работа способствовала прогрессу болезни сердца, и в 1990 г. случился инфаркт миокарда. Однако после перене-

сенного недуга учёный нашёл в себе силы вернуться к научной работе, продолжал консультировать своих учеников.



Одной из последних работ В.И. Крупича, но при этом наиболее значимой, стала монография «Теоретические основы обучения решению школьных математических задач» [3], опубликованная в 1995 г. и вобравшая в себя колоссальный опыт автора, а также отдельные наработки его учеников, ставших впоследствии кандидатами и докторами педагогических наук.

На последних страницах книги сделан важный вывод: «...подготовка учителя математики в педагогических вузах страны на уровне базового педагогического образования требует повышения уровня его методической квалификации. Дисциплины психолого-педагогического цикла, являясь важной составной частью подготовки учителя математики, не позволяют выйти на собственные теоретические основы методики, так как она имеет свои

специфические проблемы, связанные, например, с обучением решению задач (в широком смысле)» [3, с. 202].

Вячеслава Иосифовича Крупича не стало 23 мая 2000 года, он похоронен на одном из кладбищ столицы, но его научная школа продолжает «сеять разумное, доброе, вечное». Под руководством В.И. Крупича было выполнено более 40 диссертаций. Представители его научной школы работают в различных уголках нашей необъятной Родины и неустанно обучают молодую учительскую поросль, не давая прерваться ниточке, связывающей разные поколения педагогов.

Список источников

1. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приёмов учебной деятельности. М.: Просвещение, 1990. 127 с.

2. Крупич В.И. Структура и логика процесса

обучения математике в средней школе (методические разработки по спецкурсу для слушателей ФПК). М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1985. 118 с.

3. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Монография. М.: Прометей, 1995. 210 с.

4. Научная школа профессора Вячеслава Иосифовича Крупича: Сборник трудов по материалам III Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 85-летию со дня рождения В.И. Крупича), 17–21 апреля 2007 г., Россия, г. Тольятти / сост., науч. ред. и науч. рук. конф., проф. Р.А. Утеева. Тольятти: ТГУ, 2007. Ч. 2. 100 с.

5. Утеева Р.А., Воробьёва Н.Г., Шило Н.Г. 95 лет со дня рождения Вячеслава Иосифовича Крупича // Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: межвузовский сборник научных трудов. Выпуск 26. Под ред. М.В. Егуповой, Л.И. Боженковой. МПГУ: Изд-во АКФ «Политоп», 2017. С. 260–263.

К СВЕДЕНИЮ

Дополнительный курс к математике и информатике вводят в российских школах

Бесплатные двухлетние курсы по современным языкам программирования смогут пройти ученики 8–11 классов по всей России. Премьер-министр РФ Михаил Мишустин подписал постановление с правилами предоставления субсидий на ввод новой программы.

Программа будет состоять из четырёх модулей по 36 академических часов. Этот курс станет дополнением к базовой школьной программе по математике и информатике, что позволит ребятам ещё в школе освоить первую IT-профессию, что, в свою очередь, должно стать для них стимулом связать свою дальнейшую профессиональную деятельность с IT-сферой.

Отмечается, что школьники смогут пройти курсы как онлайн, так и офлайн. На первом этапе программу освоят не менее 100 тысяч учеников, в последующем – 240 тысяч. На эти цели в федеральном бюджете заложили 6,8 млрд рублей.

Источник: astv.ru

ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР «ПЕРЕДОВЫЕ ИДЕИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ И ЗА РУБЕЖОМ» В 2021/2022 УЧЕБНОМ ГОДУ

В прошедшем 2021/2022 учебном году семинар продолжил свою работу под руководством академика МАНПО, доктора педагогических наук, профессора МГУ имени М.В. Ломоносова Т.И. Кузнецовой и члена-корреспондента МАНПО, кандидата педагогических наук, зав. кафедрой математического анализа и геометрии МГОУ Г.В. Кондратьевой. Секретарь семинара – В.И. Парёнкина (МГОУ). Заседания проходили дистанционно. Некоторые заседания имели и очный формат с онлайн-трансляцией.

16 сентября 2021 года. Заседание началось с приветственного слова *Кузнецовой Т.И.*

С докладом на тему «П.Л. Чебышёв и образовательные реформы середины XIX века (по материалам сборника документов)» выступил *Бусев Василий Михайлович* (г. Москва), создатель знаменитой электронной библиотеки «Математическое образование». Доклад посвящён вкладу математика П.Л. Чебышёва в развитие российского образования. Сохранившиеся документы о деятельности П.Л. Чебышёва в Учёном комитете Министерства народного просвещения были летом текущего года опубликованы автором доклада в виде книги. В докладе рассказано о том, какие документы в неё вошли, какие выводы можно сделать из их анализа. С фрагментами сборника можно озна-

комиться на сайте издательства: <https://biblio.mccme.ru/node/102641>.

14 октября. Заседание началось с сообщения *Кузнецовой Т.И.* «2023-й год объявлен годом К.Д. Ушинского – основоположника научной педагогики в России. Начинаем готовиться».

Доклад «Синергия математического образования и технология самоорганизации обучающихся в процессе освоения сложного знания» представил *Смирнов Евгений Иванович* (г. Ярославль), доктор педагогических наук, профессор, академик РАЕН. Евгений Иванович рассказал о том, что в последние десятилетия усилиями учёных методологически выявлена и обоснована постнеклассическая парадигма развития научной картины мира, что должно найти своё отражение в школьном курсе математики. Он осветил основные проблемные зоны математического образования и обосновал возможность включения сложного знания в процесс математической подготовки школьников 10–11 классов.

Особый интерес у слушателей вызвала практическая реализация выдвинутых профессором Е.И. Смирновым идей.

11 ноября. *Кузнецова Т.И.* начала заседание с сообщения «25 лет нет с нами С.И. Шварцбурда (11.11.1918–21.05.1996)».

Доклад «Межпредметные связи математики и программирования: задача

одна, подходы разные» представил коллектив разработчиков: *Пантелеймонова Анна Валентиновна* (г. Балашиха), доцент, кандидат педагогических наук, доцент МГОУ; *Бычкова Дарья Дмитриевна* (г. Москва), доцент, кандидат педагогических наук, доцент МГОУ; *Белова Марина Александровна* (г. Москва), старший преподаватель МГОУ. В докладе были наглядно представлены различные подходы к решению задач схожей тематики в математике и программировании, а также рассмотрены подходы к решению задач, начиная с базового курса информатики и заканчивая задачами ЕГЭ. Особое внимание докладчики уделили приложению изученных в математике методов и подходов к решению задач на алгоритмы в информатике.

В ходе обсуждения доклада возникла дискуссия, в которой, в частности, были затронуты вопросы: 1) Чем отличается суть понятия алгоритма в информатике и в математике? 2) Какова современная стратегия развития линии алгоритмов в школьном курсе?

Дискуссия участников семинара показала важность поставленной темы.

9 декабря. Заседание было посвящено памяти профессора Геннадия Лавровича Луканкина. Проректор Московского регионального социально-экономического института, кандидат физико-математических наук, доцент *Луканкин Александр Геннадьевич* (г. Москва) рассказал о малоизвестных фактах из жизни своего отца. Коллеги и ученики Геннадия Лавровича, близкие, хорошо знавшие его поделились своими воспоминаниями.

С докладом на тему «Современные инструменты и специфика работы онлайн-репетитора» выступил аспирант МГОУ *Казаков Никита Александрович* (г. Вал-

дай). Он эмоционально рассказал о положительных сторонах репетиторской деятельности, поделился советами о внедрении современных технологий и онлайн-сервисов в образовательный процесс. Студенты, участвовавшие в семинаре, активно задавали докладчику вопросы об онлайн образовании.

10 февраля 2022 года. *Кузнецова Т.И.* сообщила участникам семинара о выходе в свет статьи о И.Х. Сивашинском (журнал «Математическое образование», 2021, № 3).

С докладом выступила *Полякова Татьяна Сергеевна* (г. Ростов-на-Дону), доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики математического образования Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета. Т.С. Полякова – сегодня один из ведущих специалистов в области истории, теории и методики математического образования. Создатель и руководитель научной школы по проблемам истории отечественного математического образования и историко-профессиональной подготовки учителя математики. Татьяна Сергеевна рассказала о том, как пришла к изучению проблем истории математического образования, подчеркнув здесь роль педагогов МОПИ им. Н.К. Крупской. Подробно остановилась на своих монографиях по истории развития математического образования в России. Татьяна Сергеевна также познакомила слушателей семинара и со своими творческими планами.

10 марта. *Кузнецова Т.И.* сообщила о скоростижном уходе из жизни постоянного участника семинара доцента, кандидата педагогических наук Т.Н. Зюзиной – автора программ для работы с

одарёнными детьми дошкольного возраста (20.03.1958–26.08.2021)».

С докладом «Что не так с программой по математике 2021 года?» выступил *Шевкин Александр Владимирович* (г. Москва), кандидат педагогических наук, автор учебников и учебных пособий по математике, видный отечественный методист-математик, создатель персонального сайта, хорошо известного в среде российского учительства. В докладе была выделена проблема, существующая в современном преподавании математики, а именно – наличие многократного неоправданного повторения. «Метод вишнегрета», по которому, как считает Александр Владимирович, ведётся обучение, затрудняет создание учебников, снижает качество подготовки учащихся и негативно влияет на эффективность работы учителя. Докладчик остановился на возможных путях преодоления данной проблемы. Состоявшаяся дискуссия показала важность обсуждаемой темы. Александр Владимирович ответил на вопросы участников семинара.

14 апреля. С сообщением «85 лет И.Н. Антипову, волей судьбы ставшем одним из первых профессиональных специалистов по преподаванию информатики в школе (04.04.1937–10.09.2011)» выступили *Кузнецова Т.И. и Кондратьева Г.В.* Трогательными воспоминаниями об Игоре Николаевиче поделилась доцент *Пантелеймонова А.В.*

С докладом «Традиции и пережитки в школьном курсе математики (несколько штрихов из повседневной жизни учителя математики)» выступил известный отечественный педагог-математик *Дворянинов Сергей Владимирович* (г. Москва), кандидат физико-математических наук, автор многочисленных статей в известных мате-

матических и методико-математических журналах «Квант», «Математическое образование», «Математика в школе», «Математика для школьников» и др. В докладе была поставлена проблема, имеющая место в современном преподавании математики, заключающаяся в некорректности формулировок определений, теорем, задач. Стилистические ошибки снижают качество подготовки учащихся. Состоявшаяся дискуссия, в которой приняли активное участие как преподаватели, так и студенты, показала острую актуальность обсуждаемой темы. Сергей Владимирович ответил на вопросы участников семинара.

12 мая. Заседание началось с сообщения *Кузнецовой Т.И.* «85 лет В.В. Цукерману – математику, педагогу, философу (27.04.1927–09.10.2014)».

С докладом «Неизвестные (или малоизвестные) страницы реформ математического образования России в XX веке» выступил *Костенко Игорь Петрович* (г. Краснодар), кандидат физико-математических наук, доцент. В докладе проведено историко-методическое исследование четырёх школьных «реформ»: 1918–1930, 1931–1937, 1970–1978, 1990–2018, а именно: выделены и проанализированы идеи, направлявшие реформы, выявлены их цели и методология, конкретизированы персоналии, при этом были охарактеризованы результаты реформ, их влияние на качество знаний учащихся.

Участники семинара могут предварительно ознакомиться с малой монографией И.П. Костенко «Реформы образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты)». Сайт издательства РХД (интернет-магазин): <http://shop.rcd.ru.2>).

Заседание семинара завершилось сооб-

щением *Кузнецовой Т.И и Кондратьевой Г.В.* «Отчёт о работе семинара в 2021/2022 учебном году».

Таким образом, в течение 2021/2022 учебного года было проведено 8 заседаний семинара, заслушано 10 докладов и 8 сообщений, представленных 14 авторами – от академиков РАЕН и МАНПО до старшего преподавателя и аспиранта – из Москвы, Ярославля Ростова-на-Дону, Краснодар, Валдая. Зарегистрировав-

шимся участникам заседаний были разосланы электронные сертификаты.

Семинар проводит заседания во второй четверг каждого месяца (кроме летних и января), e-mail (для справок): kuzti45@gmail.com, kondratevagv@mail.ru .

Т.И. Кузнецова, Г.В. Кондратьева,
руководители Всероссийского
научно-методического семинара
«Передовые идеи в преподавании
математики в России и за рубежом»

К СВЕДЕНИЮ

Новости из мира математики

Объявлены лауреаты математической Филдсовской премии 2022 года

Награды получили украинка Марина Вязовская, британец Джеймс Мейнард, француз Уго Дюминиль-Копен и выпускник Сеульского университета Джун Ха.

На международном математическом конгрессе объявили имя обладателя медали Абакуса

Медаль Абакуса за выдающиеся достижения в области информатики или вычислительной математики в 2022 году получил Марк Браверман.

Объявлен лауреат премии Гаусса

Премии Гаусса за выдающиеся достижения в прикладной математике в 2022 году получил Эллиотт Либ.

На Международном математическом конгрессе объявили лауреата медали Черны

Медаль Черны за выдающиеся достижения в области математики в 2022 году получил Барри Мазур.

Российский ученый Николай Андреев получил премию Лилавати за популяризацию математики

Церемонии объявления лауреата состоялась в финском университете Аалто в рамках Международного математического конгресса 2022.

Источник: mathcenter.kpfu.ru

ИЗ ЖИЗНИ ТУРИСТОВ

На безрыбье и рак рыба

Перед вами задача известного московского математика и педагога Инессы Владимировны Раскиной, предложенная в 2017 году на XXVII математическом празднике¹:

Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

Авторское решение изящно и лаконично. Разделим сначала две пачки печенья. Осталось одно лишнее. Разделим третью пачку. В ней $13 - 1 = 12$ лишних печений. Но тогда в двух пачках должно быть $12 \cdot 2 = 24$ лишних печенья. Почему же на самом деле одно? Потому что $24 - 1 = 23$ печенья туристы смогли разделить поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

В комментарии к решению также отмечалось, что количество печений в пачке из условия узнать нельзя. Их могло быть 12, 35, 58 и т.д.²

Красивая задача? Несомненно. Ишь, как удачно подобраны числовые значе-

ния – ответ получился единственный, что всегда придаёт особую прелесть. Но как удалось их найти? И можно ли достичь успеха при каких-либо иных исходных данных?

Сначала переформулируем условие в максимально общем виде:

Обобщённая задача. Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну m одинаковых пачек, останется p лишних печений. А если разделят поровну n таких же пачек ($n > m$), останется q лишних печений. Сколько туристов в группе?

Понятное дело, мы здесь приняли $n > m$ (для натуральных m и n) исключительно для определённости, не ограничивая общности. Что же касается пары чисел p и q , то для них ничего подобного утверждать нельзя. Более того, какое-то из них может быть и нулевым (если вдруг печенье для соответствующего количества пачек поделится между туристами нацело).

Обозначив число туристов через T , а количество печений в пачке через P , зададимся вопросом: для каких **четвёрок чисел (m, n, p, q) имеется единственное значение T , удовлетворяющее условию задачи?** Насчёт единственности P даже надеяться не приходится: понятно, что если изменить число печений в каждой пачке на любую величину, кратную T , то остатки при всех дележах сохранятся (просто каждому туристу достанется на сколько-то печений больше или меньше).

¹ К задачам И. Раскиной мы обращаемся не впервые – уж очень они привлекательны, сами просятся в руки. Другая её задача (созданная совместно с А. Блинковым) была препарирована в статье «Из жизни грызунов» (журнал «Математика для школьников» № 1 за 2020 г.).

² То есть любой член арифметической прогрессии с разностью 23, начинающейся с числа 12.

Начнём решать *обобщённую задачу*. Сначала сделаем первичные выводы – самые легкодостижимые.

Во-первых, T должно быть *строго больше* наибольшего из чисел p и q , что можно записать так: $T > \max(p, q)$. Оно и понятно: при делении нацело остаток всегда *меньше* делителя. Будем называть этот вывод «В1».

Во-вторых, если в пачке Π печений, то в m пачках $m\Pi$ печений. Так как при дележе m пачек поровну между T туристами остаётся p печений, то $m\Pi - p$ делится на T . Поэтому $n \cdot (m\Pi - p) = mn\Pi - np$ тоже делится на T . Аналогично $n\Pi - q$ делится на T , и потому $m \cdot (n\Pi - q) = mn\Pi - mq$ делится на T . Итак, имеем два числа, делящихся на T : $mn\Pi - np$ и $mn\Pi - mq$. Значит, и разность между ними делится на T . А эта разность (по абсолютной величине) равна $|np - mq|$. Значит, T есть делитель числа $|np - mq|$. Этот вывод назовем «В2».

Рассмотрим сначала «вырожденный» случай, когда выражение под знаком абсолютной величины равно 0, или $np = mq$. Убедимся в наличии *бесконечного* числа подходящих значений T (что нас, разумеется, не устраивает, ведь мы мечтаем о единственном T). Поскольку $np = mq$, то

$q = \frac{np}{m}$. Так как q – целое число, то про-

изведение np делится на m . В «формульном» виде это можно записать так: $m = ab$, причём n делится на a , p делится на b , и потому $n = ar$, $p = bs$, где a , b и r – натуральные, а s – целое неотрицательное (напомним, мы не исключаем возможности $p = 0$). Тогда $q = \frac{np}{m} = \frac{(ar) \cdot (bs)}{ab} = rs$. Далее избавим читателя от описания трудностей подбора подходящих значений и сразу сообщим, что для *любого* Π , не меньшего $(b + 1)(r + 1)s + 1$, при $T = a\Pi - s$ условие

задачи выполняется! Это и свидетельствует о бесконечности возможных значений T .

Что ж, пусть $\Pi \geq (b + 1)(r + 1)s + 1$. Тогда в m пачках $m\Pi = ab\Pi$ печений. Но $ab\Pi = ab\Pi - bs + bs = b(a\Pi - s) + bs = bT + p$. Таким образом, при дележе m пачек каждому из T туристов достанется по p печений, и ещё останется p печений. Осталось убедиться, что $T > p$, то есть на этом делёж и прекратится. Это следует из такой цепочки неравенств (учитывающих, что a , b и r – натуральные, а s – целое неотрицательное):

$$\begin{aligned} T &= a\Pi - s = a(b + 1)(r + 1)s + a - s = \\ &= [a(b + 1)(r + 1) - 1]s + a > \\ &> [a(b + 1)(r + 1) - 1]s \geq \\ &\geq [1 \cdot (b + 1) \cdot (1 + 1) - 1]s = (2b + 1)s \geq bs = p. \end{aligned}$$

Аналогично выполняем проверку и для n пачек. В n пачках $n\Pi = ar\Pi$ печений. Но $ar\Pi = ar\Pi - rs + rs = r(a\Pi - s) + rs = rT + q$. Значит, при дележе n пачек каждому из T туристов достанется по r печений, и ещё останется q печений. Осталось проверить, что $T > q$. Выписываем аналогичную цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} T &= a\Pi - s = a(b + 1)(r + 1)s + a - s = \\ &= [a(b + 1)(r + 1) - 1]s + a > \\ &> [a(b + 1)(r + 1) - 1]s \geq \\ &\geq [1 \cdot (1 + 1)(r + 1) - 1]s = (2r + 1)s \geq rs = q \end{aligned}$$

Итак, вариант $|np - mq| = 0$ рассмотрен и забыт. Брак, что о нём говорить!

Пусть теперь $|np - mq| > 0$. Так как, согласно В2, T есть делитель числа $|np - mq|$, то T не больше $|np - mq|$. Одновременно В1 требует, чтобы было $T > \max(p, q)$. Следовательно, непременно должно выполняться двойное неравенство: $|np - mq| \geq T > \max(p, q)$ – в противном случае задача вообще не имеет решений. Например, если при дележе четырёх пачек осталось 5 печений, а при дележе семи пачек – 9 печений, то сразу находим: $|np - mq| = |7 \cdot 5 - 4 \cdot 9| = 1$, что

меньше 5 (и, тем более, 9). Значит, решение можно и не искать!

А вообще, В1 и В2 – очень существенные шаги для поиска решений. Например, исходная задача И. Раскиной с их помощью решается мгновенно: здесь $m = 2$, $n = 3$, $p = 1$ и $q = 13$. Поэтому T – делитель числа $|3 \cdot 1 - 2 \cdot 13| = 23$, больший 13. Отсюда однозначно $T = 23$ (кстати, на простоту числа 23 можно даже и не ссылаться).

Что ж, В1 и В2 позволяют получить перечень *перспективных* значений T , которые *могли бы* быть ответами – это все делители $|np - mq|$, превышающие $\max(p, q)$. К сожалению, это еще не всё. Следует непременно убедиться, что условие *непротиворечиво*, то есть существует хотя бы одно значение Π такое, что и $m\Pi - p$ и $n\Pi - q$ делятся на T . Ведь из того, что разность двух чисел делится на третье, вовсе не следует такая делимость для каждого из них! (И, кстати, к приведённому только что «молниеносному» решению задачи И. Раскиной это тоже относится – необходимо дополнительно указать хоть какое-нибудь «удовлетворительное» Π).

Итак, возьмём произвольное T , являющееся делителем $|np - mq|$, превышающим $\max(p, q)$. Эту делимость можно сформулировать так: $|np - mq| = kT$, где k – натуральное. Попытаемся выяснить, удовлетворяет ли условию это значение T (и соответствующее ему k).

То, что $m\Pi - p$ и $n\Pi - q$ делятся на T , можно записать в виде двух уравнений:

$$m\Pi - p = xT, \quad n\Pi - q = yT,$$

где x и y – некоторые натуральные числа. Выразив из каждого уравнения Π и приравняв эти выражения между собой, имеем:

$$\Pi = \frac{xT + p}{m} = \frac{yT + q}{n}.$$

Преобразовывая далее правое равенство, имеем:

$$nxT + np = myT + mq,$$

или

$$(nx - my)T + (np - mq) = 0.$$

Вспомним, что $|np - mq| = kT$, и потому $T = \frac{|np - mq|}{k}$. Отдельно рассмотрим варианты $np - mq > 0$ и $np - mq < 0$.

В первом случае $|np - mq| = np - mq$, что даёт уравнение:

$$(nx - my) \times \frac{np - mq}{k} + (np - mq) = 0.$$

Откуда (с учётом того, что $np - mq \neq 0$):

$$nx - my + k = 0.$$

Тогда

$$my - nx = k.$$

Сразу становится ясно, что если k не делится на НОД(m, n) – наибольший общий делитель чисел m и n , – то уравнение решений не имеет (кстати сказать – при *любых* p и q), потому что в левой части присутствует множитель, на который не делится правая часть. Иное дело, если k всё-таки делится на НОД(m, n). Оказывается, в этом случае такие x и y *непременно* существуют!

Для доказательства поделим сначала обе части на пресловутый НОД(m, n). Поскольку, очевидно, m и n делятся на НОД(m, n), то можно записать: $m = \text{НОД}(m, n) \cdot m'$, $n = \text{НОД}(m, n) \cdot n'$, где m' и n' – *взаимно простые* натуральные числа. Ну, и $k = \text{НОД}(m, n) \cdot k'$, где k' – натуральное, ибо k делится на НОД(m, n). Сократив обе части на НОД(m, n), приходим к уравнению:

$$m'y - n'x = k'.$$

Перепишем его в виде:

$$m'y = n'x + k'.$$

Предварительно докажем, что при изменении x от 1 до m' остаток от деления правой части на m' принимает всевозможные различные значения от 0 до $m' - 1$

(их как раз m' штук). Проще всего сделать это «от противного». Допустим, что это не так, то есть некоторые два числа $n'x_1 + k'$ и $n'x_2 + k'$ (где $1 \leq x_1 < x_2 \leq m'$) дают одинаковые остатки при делении на m' . Но тогда разность между ними, равная $n'(x_2 - x_1)$, должна делиться на m' . Однако m' и n' взаимно просты, вследствие чего $x_2 - x_1$ делится на m' . Но так как $1 \leq x_1 < x_2 \leq m'$, то эта разность заведомо меньше m' , и такая делимость невозможна. Противоречие.

Таким образом, при некотором $x = x_0$ (где $1 \leq x_0 \leq m'$) остаток от деления $n'x_0 + k'$ на m' равен нулю, то есть $n'x_0 + k'$ делится на m' . А так как $m'y = n'x + k'$, то $y = y_0 = \frac{n'x_0 + k'}{m'}$ – тоже натуральное число (как и x_0). Решение есть! Более того, сразу видно, что кроме пары (x_0, y_0) решением является также любая пара $(x_0 + im', y_0 + in')$ при произвольном натуральном i .

Случай $np - mq < 0$ рассматривается аналогично – с тем же результатом (только теперь приходится решать уравнение $n'x - m'y = k'$).

Что же мы имеем? Для каждого T , являющегося делителем $|np - mq|$, превышающим $\max(p, q)$, непременно существуют такие натуральные x_0 и y_0 , что для любого натурального i выполняется равенство:

$$\Pi = \frac{(x_0 + im') \cdot T + p}{m} = \frac{(y_0 + in') \cdot T + q}{n},$$

$$\text{где } m' = \frac{m}{\text{НОД}(m, n)}; \quad n' = \frac{n}{\text{НОД}(m, n)}.$$

Но будет ли число Π целым при каком-то i ? Похоже, здесь без прямой проверки не обойтись. Но какие значения i следует проверять? Не все же натуральные – это невозможно!

Конечно невозможно, да и не нужно. Посмотрим, что произойдёт, если i из-

менить на любую величину, кратную $\text{НОД}(m, n)$. Подставим вместо i в нашу формулу значение $i + j \cdot \text{НОД}(m, n)$, где j – целое число. Учитывая, что $\text{НОД}(m, n) m' = m$, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{(x_0 + (i + j \cdot \text{НОД}(m, n)) \cdot m') \cdot T + p}{m} = \\ &= \frac{(x_0 + (im' + j \cdot m)) \cdot T + p}{m} = \\ &= \frac{(x_0 + im') \cdot T + p}{m} + jT. \end{aligned}$$

Как видно, изменение i на такую величину не влияет на «целостность» числа T . Поэтому достаточно проверить ровно $\text{НОД}(m, n)$ значений i подряд – например, от 0 до $\text{НОД}(m, n) - 1$. Если хотя бы для одного из них получится целое T – решение есть. Иначе – увы!

В завершение – одно существенное упрощение. Рассмотрим *наибольшее* возможное $T = |np - mq|$, соответствующее $k = 1$, если при этом $\text{НОД}(m, n) = 1$ (надо сказать, нередкий случай). Оказывается, для него нет необходимости проверять, является ли Π целым – оно будет таковым *автоматически* для найденных x_0 и y_0 . Чтобы в этом убедиться, сначала заметим, что при $\text{НОД}(m, n) = 1$ имеют место равенства: $m' = m$, $n' = n$, $k' = k = 1$.

А теперь опять же рассмотрим два варианта: $np - mq > 0$ и $np - mq < 0$.

В первом случае $|np - mq| = np - mq$, и тогда

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{x_0 T + p}{m} = \frac{x_0 (np - mq) + p}{m} = \\ &= \frac{(nx_0 + 1)p}{m} - x_0 q = \frac{n'x_0 + k'}{m'} p - x_0 q. \end{aligned}$$

Так как $\frac{n'x_0 + k'}{m'}$ – целое, то и Π целое.

Второй случай разбирается аналогично.

А теперь аккуратно осмыслим, чего же мы добились нашими рассуждениями. Да, нам не удалось открыть волшебную

формулу, позволяющую выдавать на-гора готовые четвёрки чисел (m, n, p, q) , порождающие единственное удовлетворяющее им значение T . Но зато мы теперь можем сформулировать рецепт проверки любой четвёрки этих чисел на её пригодность (исходя из той же единственности значения T). Что поделаешь – как говорится, на безрыбье... и т.д.

Указанный рецепт можно сформулировать алгоритмически – как последовательность четко указанных шагов:

1) Вычисляем $A = |np - mq|$. Если окажется, что $A = 0$, то нам на этом можно остановиться – подходящих значений T существует бесконечное количество. Если же $A \neq 0$, то следует продолжить.

2) Находим $B = \text{НОД}(m, n)$.

3) Находим $C = \max(p, q)$.

4) Определяем все делители числа A , которые *больше* C . Если таковых нет, задача вообще решений не имеет. Если же имеются, расположим их в порядке убывания: $T_1, T_2, T_3, \dots$. Здесь, очевидно, $T_1 = A$ (остальные – меньше).

Дальнейшие действия следует производить для *каждого* T_i ($i = 1, 2, 3, \dots$).

5) Находим $k = \frac{A}{T_i}$ (это, конечно, целое число, т.к. T_i – делитель A).

6) Если k не делится на B , то дальнейшую проверку данного T_i выполнять не следует – оно не удовлетворяет условию. Если же делится, продолжим.

7) Для $T_1 = A$ дальше проверять не надо – оно заведомо подходит. Для остальных T_i придётся продолжить.

8) Находим $m' = \frac{m}{B}$, $n' = \frac{n}{B}$, $k' = \frac{k}{B}$ (всё это, разумеется, целые числа).

9) А на этом этапе придётся решать диофантово уравнение. Какое? Зависит от того, что больше: np или mq (равными они быть не могут):

– если $np > mq$, то следует решить уравнение $m'y - n'x = k'$;

– если $np < mq$, то следует решить уравнение $n'x - m'y = k'$.

Этот пункт алгоритма представляется самым трудоёмким, хотя он значительно облегчается тем, что решение *непрерывно* существует, и притом $1 \leq x_0 \leq m'$, $1 \leq y_0 \leq n'$ (то есть при небольших m' и n' можно обойтись простым подбором).

10) Последний штрих: для значений $x = x_0 + jm'$ (где $j = 0, 1, \dots, B - 1$) вычисляем $\Pi = \frac{xT_i + p}{m}$. Если хотя бы для одного x число Π оказалось целым – всё в порядке, значение T_i удовлетворяет условию.

Впрочем, «в порядке» ли? Нам ведь требуется *единственное* подходящее значение T . Поэтому вот последнее требование: если в ходе наших проверок мы обнаружили хотя бы два удовлетворяющих условию значения T_i , то нас это тоже не устраивает, и дальше можно не проверять.

Конечно, описанная последовательность действий сама «просится» оформить её в виде компьютерной программы. Но и «вручную» всё не столь устрашающе, как кажется на первый взгляд. И чтобы в этом убедиться, давайте «обкатаем» алгоритм на конкретных примерах. Правда, брать в качестве таковой исходную задачу И. Раскиной особого смысла нет – мы ведь уже частично решали её похожим образом. Давайте лучше «удвоим» условие и посмотрим, что получится. Итак, пусть **при дележе четырех одинаковых пачек останется два лишних печенья, а если туристы разделят поровну шесть таких же пачек, останется 26 лишних печений.**

Здесь, как видим, $m = 4$, $n = 6$, $p = 2$, $q = 26$. Поехали:

$$1) A = |6 \cdot 2 - 4 \cdot 26| = 92.$$

$$2) B = \text{НОД}(4, 6) = 2.$$

$$3) C = \max(2, 26) = 26.$$

4) Вот делители числа 92, превышающие 26 (в порядке убывания): 92 и 46 (всего два). Все дальнейшие действия совершаем для каждого из них.

Для $T_1 = 92$ имеем:

$$5) k = \frac{92}{92} = 1.$$

6) Но $k = 1$ не делится на $B = 2$, поэтому $T_1 = 92$ не подходит, и для него проверку прекращаем.

Для $T_2 = 46$ имеем:

$$5) k = \frac{92}{46} = 2.$$

6) Здесь $k = 2$ делится на $B = 2$, и проверка продолжается.

7) Этот пункт пропускаем – он предназначен только для T_1 .

$$8) m' = \frac{4}{2} = 2, n' = \frac{6}{2} = 3, k' = \frac{2}{2} = 1.$$

9) Так как $6 \cdot 2 < 4 \cdot 26$, то далее ищем решение уравнения $3x - 2y = 1$, где $1 \leq x_0 \leq 2$, $1 \leq y_0 \leq 3$. Подбирается оно элементарно: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ (опять же, нам достаточно одного решения, другие ни к чему, даже если имеются).

10) Для значений $x = 1 + 2j$ (где j принимает два значения – 0 и 1) вычисляем

$$P = \frac{46x + 2}{4}. \text{ Уже при } j = 0 \text{ это значение оказывается целым: } P = \frac{46 \cdot 1 + 2}{4} = 12. \text{ Та-}$$

ким образом, число туристов, равное $T_2 = 46$, удовлетворяет условию, и оно, как мы видим, единственное.

Впрочем, такая проверка каких-то «открытий чудных» не принесла. Наоборот, всё скучно и уныло, как и ожидалось: число пачек и оставшихся печений удвоилось – в итоге и потребное количество туристов удвоилось. Будем считать это разминкой (хотя и не без пользы: мы убедились в су-

щественном влиянии на результат общего делителя чисел m и n).

Что ж, опробуем алгоритм в более суровых условиях. Давайте-ка используем в качестве своеобразного «генератора случайных чисел» начало великого числа $\pi = 3,141592653\dots$ и, беря его цифры от начала по две, образуем вполне случайный (никак не «подтасованный»!) набор исходных данных: $m = 31$, $n = 41$, $p = 59$, $q = 26$. Теперь вычисляем:

$$1) A = |41 \cdot 59 - 31 \cdot 26| = 1613.$$

$$2) B = \text{НОД}(31, 41) = 1.$$

$$3) C = \max(59, 26) = 59.$$

4) Определяем все делители числа 1613, которые больше 59. Но таковых всего одно: $T_1 = 1613$ (поскольку это число волею судеб оказалось *простым*).

$$5, 6, 7 - \text{все сразу} \quad k = \frac{1613}{1613} = 1, \text{ что де-}$$

лится на $B = 1$, и для $T_1 = A = 1613$ дальнейшие проверки не требуются. Для принятых исходных данных решение есть, и оно единственно!

Как видим, эффективность предложенного метода в данном случае просто зашкаливает. Есть чем гордиться. А главное – теперь мы можем слегка подправить сюжет (заменяв туристов и печенье чем-нибудь другим), подобрать «красивые» исходные данные и выдать задачу за свою (предел мечтаний задачного композитора).

Впрочем, как отмечалось, для очистки совести следовало бы указать, сколько печений P могло быть в пачке (мы, конечно, знаем, что такое подходящее значение P существует, но мы же не одни на свете!). Для этого, так уж и быть, выполним заключительные пункты алгоритма: 8, 9 и 10. Итак:

8 и 9) Так как $B = 1$, то $m' = m = 31$, $n' = n = 41$, $k' = k = 1$. Так как здесь $np > mq$, то надо найти решение (x_0, y_0) диофантова

уравнения $31y - 41x = 1$, где $1 \leq x_0 \leq 31$, $1 \leq y_0 \leq 41$. Конечно, это не столь просто, как раньше, но подобрать ответ можно (например, используя стандартный пакет Excel из MS Office). Искомые значения получаются совсем небольшими: $x_0 = 3$, $y_0 = 4$.

10) Определяем возможное (конечно, лишь одно из многих) число печений в пачке $\Pi = \frac{3 \cdot 1613 + 59}{31} = 158$ (проверку того, что это значение подходит, оставляем читателю).

Примечание. Если задаться конкретными значениями m и n , то иногда удастся указать «открытым текстом» все пары (p, q) , для которых задача имеет единственное решение. Например, если взять, как в задаче И. Раскиной, $m = 2$ и $n = 3$, то (не вдаваясь в нудные и утомительные

подробности) можно убедиться, что единственное решение задачи имеет для трёх «серий» пар (p, q) , а именно:

1) p – произвольное целое неотрицательное число, а q – любое натуральное, не меньшее $3p + 1$;

2) p – произвольное *нечётное* натуральное число, не меньшее 3, а q – любое целое неотрицательное число, меньшее p ;

3) p – произвольное *чётное* натуральное число, а q – любое целое неотрицательное число, меньшее p , но не меньшее $\frac{p}{2}$.

В частности, в исходной задаче $p = 1$, $q = 13$, то есть пара (p, q) принадлежит первой из этих серий. А могла бы и любой другой – выбор, как видите, огромен!

И.Ф. Акулич,
(Беларусь, Минск)

Рособрнадзор опубликовал предварительные итоги ЕГЭ-2022 по математике

Рособрнадзор подвёл предварительные итоги ЕГЭ-2022 по математике. Около 20% будущих абитуриентов не смогли решить половину задач. Результаты экзаменов направили в регионы, сообщает пресс-служба ведомства.

ЕГЭ по математике базового уровня сдали свыше 343 тысячи человек. Около 80% успешно выполнили более половины заданий. Профильный уровень прошли 302 тысячи выпускников, 240 тысяч из них получили баллы, достаточные для поступления в вузы. Стобалльников – 579. Средний балл составил 56,86.

«Участники ЕГЭ по математике профильного уровня продемонстрировали уверенные навыки выполнения вычислений, решения уравнений и неравенств, работы с функциями. Большинство выпускников успешно справилось с заданиями по теории вероятностей и статистике, в том числе с новым заданием, включённым в экзамен в 2022 году», – сообщило ведомство.

Эксперты подчёркивают, что в этом году выпускники более качественно выполнили задания по геометрии, а стереометрическую задачу правильно решили в полтора раза больше участников, чем в 2021 году.

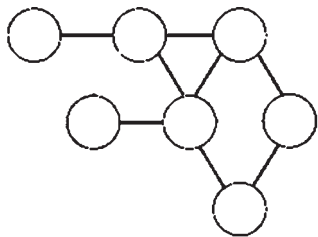
Выпускники, не преодолевшие минимальный порог для получения аттестата по одному из двух основных предметов, могут пересдать ЕГЭ в резервные дни. Те, кто не сдал экзамены и по русскому языку, и по математике – в дополнительный период в сентябре.

Источник: astv.ru

ГРАФЫ В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

Представляемая вниманию читателя подборка задач в этот раз посвящена *графам*. Мы ограничимся более простым определением графа, нежели в вузовских курсах. А именно: будем считать, что графом называется конечный набор точек на плоскости или в пространстве, некоторые из которых соединены линиями, называемыми *рёбрами* графа. Тогда количество рёбер, выходящих из вершины, называется *степенью* этой вершины. Графы полезны в тех случаях, когда переформулировка задачи на языке графов делает её более наглядной. Иногда сама формулировка условия предлагается в виде рисунка графа с некоторыми свойствами, и для решения задачи нужно просто внимательно изучить рисунок. Разберём для примера несколько задач.

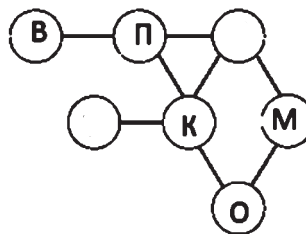
Задача 0. Дима нарисовал схему, на которой соединил друзей линиями, а имена подписать забыл (см. рис.). Вася дружит только с Петей. У Коли больше всех друзей. У Толи нет общих друзей с Васей, а у Даши – есть. По сколько друзей у Даши и Толи, если у Олега и у Маши по два друга?



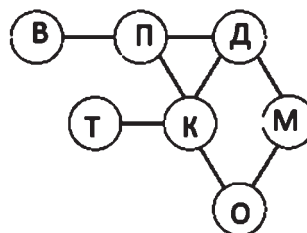
Решение. В данном случае сама задача уже представляет собой граф, изображённый на рисунке. Нам осталось только определить, какие имена скрываются за кружками. Поскольку у Коли больше всех друзей, то круг в центре обозначим буквой К. Кроме того, есть всего два человека, у которых ровно два друга. Значит, это Олег и Маша. Обозначим их на рисунке буквами О и М. Заметим, что они могут быть расположены и наоборот. Нам это

неважно. Важно только, что этими людьми не могут быть другие участники.

Из утверждения «Вася дружит только с Петей» можно сразу получить знание, где именно Вася, а где – Петя. Оставшиеся два пустых кружка – это Даша и Толя, про которых и стоит вопрос задачи.

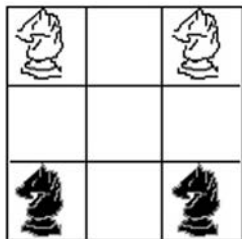


Заметим, что тот, кто дружит с Петей, имеет общего друга (Петю) с Васей. Значит, Толя дружит только с Толей, а Даша – с Колей, Петей и Машей.

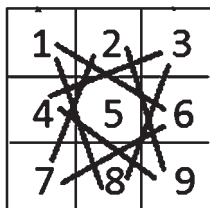


Ответ: У Толи 1 друг, а у Даши – 3 друга.

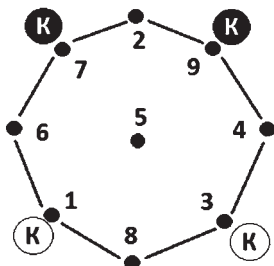
Задача 00. На шахматной доске 3×3 стоят два чёрных и два белых коня (см. рис.) Как поменять чёрных и белых коней местами за наименьшее число ходов? (Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. «Ленинградские математические кружки» 1994 г.)



Решение. Для удобства занумеруем клетки нашей шахматной доски числами от 1 до 9. И проведём линии между клетками, соединёнными ходом коня. Конечно, на таком рисунке тяжело что-то разобрать. Поэтому «распутаем» граф. То есть нарисуем его на плоскости по-другому, сохранив связи между клетками. (Такие графы называются *изоморфными* друг другу).



Заметим, что в новой интерпретации наши кони расположены по кругу и каждый ход – перемещение коня на один шаг по часовой стрелке или против часовой. Отсюда сразу же получается необходимое количество ходов и обоснование минимальности.



А именно: каждому коню требуется 4 хода, чтобы переместиться на новое место, поскольку они не имеют возможности перепрыгивать друг через друга.

О т в е т: 16 ходов.

Задача 000. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (С.И.Токарев, Турнир Городов 1993 года, весенний вариант, 8–9 класс.)

Решение. Заметим, что у 25 одноклассников могут быть либо все варианты количества друзей от 0 до 24, либо от 1 до 25. Можно представить себе, что школьники стоят на полянке и держат концы одной верёвочки, если они дружат.

Разберём случай 1): Есть человек, который ни с кем не дружит, и есть человек с 24 друзьями. Тогда второй (назовём его Васей) дружит со всеми, кроме первого, в том числе и с Петей. Попросим этих двоих «пойти погулять», уйдя с полянки, и тогда у Пети одной верёвочкой станет меньше. Теперь на полянке снова стоят Петины одноклассники и их уже 23, а друзей у них от 0 (это был тот, кто дружил только с Васей) до 23 (это тот, кто дружит со всеми на полянке, кроме одного, в том числе и с Васей). Снова отправим эту пару «погулять». И так далее. Мы сможем так сделать 12 раз. И тогда на полянке останутся только Петя и ещё один его одноклассник, который с ним не дружит. В этом случае у Пети 12 друзей.

Разберём случай 2): Каждый с кем-то дружит. Будем применять аналогичную операцию, что и в первом случае. Но тут мы будем отправлять «погулять» человека с одним другом среди присутствующих на полянке и человека, который дружит со всеми на полянке, в том числе и с Петей. И снова мы сможем так сделать ровно 12 раз, и на полянке останутся Петя и одноклассник, который с ним дружит. В этом

случае у Пети будет 13 друзей.

О т в е т: 12 или 13 друзей.

Задачи

для самостоятельного решения

Задача 37. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса? (*Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. «Ленинградские математические кружки» 1994 г.*)

Задача 38. Десять кандидатов готовят-ся к двум космическим экспедициям на Марс. Путём тестирования были установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной и той же экспедиции было бы не желательно. Результаты тестирования отражены в таблице (если на пересечении i -ой строки и j -ого столбца стоит знак «+», то участие i -ого и j -ого кандидатов в одной группе **не** желательно). Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедиции. (*Мельников О.И. «Занимательные задачи по теории графов» 2001 г.*)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+						
2	+				+					
3	+						+			
4	+					+				
5		+						+		
6				+						+
7			+					+		+
8					+		+		+	
9								+		+
10						+	+		+	

Задача 39. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один и тот же день несколько коротышек простудились и заболели,

и, хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки, навещая своих больных друзей, заболели на следующий день после посещения. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно 1 день, причём после этого у него, по крайней мере, ещё один день есть иммунитет, то есть он здоров и заразиться в этот день не может (число дней иммунитета у каждого коротышки может быть своё). Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делали их. Докажите, что: а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго; б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно закончится. (*Фольклор.*)

Задача 40. В стране Леонардии все дороги – с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго. (*I Олимпиада им. Эйлера 2009 г.*)

Задача 41. Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть «двойник» в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а каждые два несоединённых в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка

Алиса не может проехать из города A в город B , сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок. (Московская математическая олимпиада 8 класса, 1975 г.)

Задача 42. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе. (А.В. Шаповалов, Математический праздник 2017 г.)

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Ивановой Елене Юрьевне по адресу distant@mathbaby.ru к 01.10.22 в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать:

для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт);

для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь.

Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

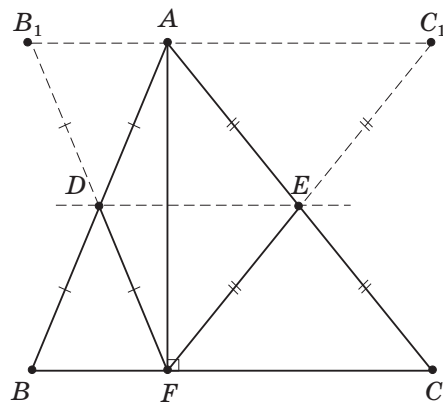
Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Решения задач из журнала «Математика в школе» № 3/2022

Задача 19. Ярослав вырезал из картона треугольник – красный с одной стороны и синий с другой. Покажите, как можно его разрезать на части, из которых можно снова сложить синий треугольник, симметричный исходному синему относительно некоторой прямой. (Фольклор.)

Решение. Если исходный треугольник остроугольный, то все три его высоты лежат внутри него. Если же он прямоугольный или тупоугольный, то внутри него лежит высота, проведённая из наи-

большого угла. Обозначим треугольник ABC так, чтобы высота AF лежала внутри треугольника ABC и отметим точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно. Тогда медиана в прямоугольных треугольниках AFB и AFC разбивает их на равнобедренные треугольники, поскольку $BD = FD = AD$ и $CE = FE = AE$. Отразим F относительно D и получим B_1 , отразим F относительно E и получим C_1 . Несложно видеть, что равны треугольники BDF и ADB_1 , а также равны треугольники FEC и AEC_1 . Эти пары равнобедренных треугольников равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому можно от исходного треугольника ABC отрезать части BDF и CEF и, переложив их, не переворачивая, составить треугольник B_1FC_1 . И этот треугольник будет симметричен исходному относительно прямой DE .



Осталось доказать, что это действительно треугольник B_1FC_1 , а не четырёхугольник AB_1FC_1 . То есть, что точки B_1 , A и C_1 лежат на одной прямой. Но это так, поскольку

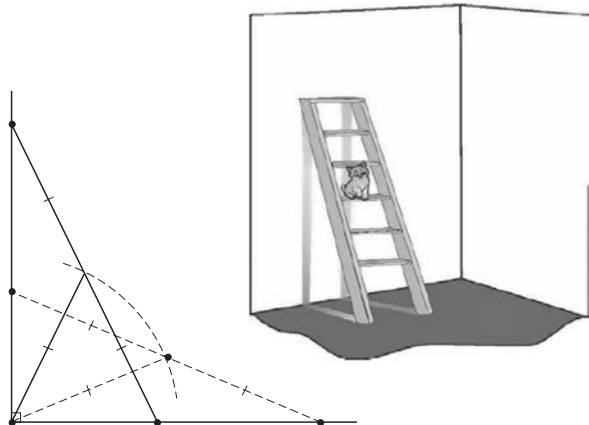
$$\begin{aligned}\angle FAC_1 &= \angle FAE + \angle EAC_1 = \\ &= \angle AFE + \angle EFC = 90^\circ.\end{aligned}$$

Аналогично для угла FAB_1 .

Задача 20. Лестница, которая нижним концом опирается на горизонтальный пол, а верхним концом прислонена к вертикальной стене, под влиянием соб-

ственного веса опускается вниз до самого пола. По какой траектории движется при этом котёнок, сидящий точно на середине лестницы? (Фольклор.)

О т в е т: По четверти окружности с центром в углу комнаты и радиусом, равным половине длины лестницы.



Решение. Заметим, что лестница вместе со стеной образует прямоугольный треугольник. Поэтому отрезок, соединяющий угол комнаты с котёнком, всегда будет являться медианой прямоугольного треугольника. Середина лестницы всегда будет удалена от угла между стенами на расстояние, равное половине длины лестницы, то есть траектория котёнка будет дугой окружности с центром в углу между стенами.

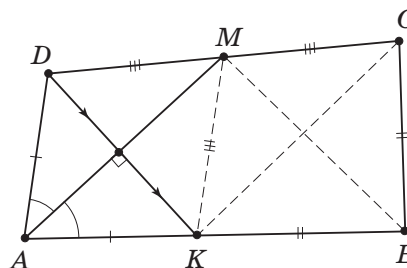
Задача 21. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AB = AD + BC$. Известно, что биссектриса угла A проходит через середину M стороны CD .

а) Докажите, что биссектриса угла B также проходит через точку M .

б) Пусть точка K – точка на отрезке AB такая, что $AK = AD$. Докажите, что треугольник CKD прямоугольный. (По мотивам известной задачи Вадим Сидоров.)

Решение. Нам в помощь в условии задачи уже выбрана точка K на стороне AB такая, что $AK = AD$, а $BK = BC$. Если

бы такая точка не была отмечена, мы бы отметили её сами. Это возможно, поскольку $AB = AD + BC$.



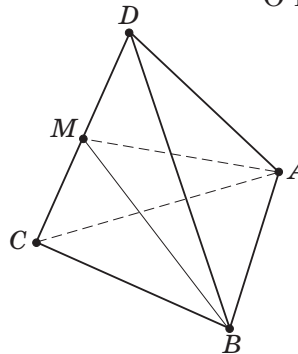
Полученные треугольники KAD и KCB равнобедренные. Тогда биссектриса угла A является одновременно высотой и медианой в треугольнике AKD . Но тогда AM является высотой и медианой в треугольнике KMD . Значит, этот треугольник также равнобедренный и $DM = MK$. Кроме того, $MK = MC$, т.к. M по условию середина DC .

Тогда треугольники KBM и CBM равны по трём сторонам. Отсюда следует утверждение а) задачи: $\angle KBM = \angle CBM$, следовательно, BM – биссектриса угла B .

Получим утверждение б). Поскольку в треугольнике DKC медиана MK равна половине стороны, к которой проведена, то угол DKC – прямой.

Задача 22. Существует ли тетраэдр, все грани которого – равные прямоугольные треугольники? (А.Д. Блинков.)

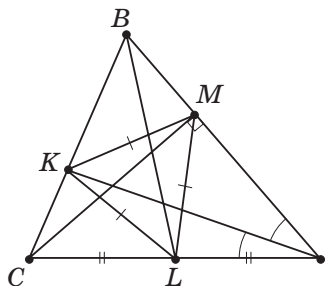
О т в е т: Нет.



Решение. Предположим, что такой тетраэдр $ABCD$ существует (см. рис.).

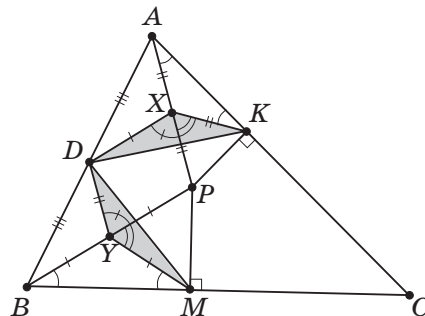
Пусть AB – гипотенуза треугольника ABC . Тогда AB является также и гипотенузой треугольника ABD . Следовательно, CD – гипотенуза треугольников ACD и BCD . Середину ребра CD обозначим через M . Так как треугольники ACD и BCD прямоугольные, $AM = BM = 1/2CD = 1/2AB$, то есть $AB = AM + MB$. Значит, точки A , M и B лежат на одной прямой, а точки A , B , C и D – в одной плоскости. Противоречие.

Задача 23. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK , медиана BL и высота CM . Оказалось, что треугольник KLM – равносторонний. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний. (Московская математическая олимпиада 2001 год, 8 класс.)



Решение. Поскольку ML – медиана прямого угла прямоугольного треугольника AMC , то $ML = CL = AL$. Тогда в треугольнике $СКА$ отрезок KL – медиана, и она равна половине стороны, к которой проведена. Значит, угол K – также прямой, то есть биссектриса AK является в треугольнике ABC одновременно и высотой. Следовательно, $AC = AB$. В равнобедренном треугольнике биссектриса AK является также и медианой. То есть K – середина стороны BC . Но тогда в прямоугольном треугольнике BMC отрезок MK является медианой, проведённой к гипотенузе. Значит, $BC = 2KM = AB = AC$, и мы доказали, что исходный треугольник ABC – равносторонний.

Задача 24. Внутри треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D – середина стороны AB . Докажите, что $DK = DM$. (Р.К. Гордин.)



Решение. Отметим середины отрезков BP и AP (см. рисунок). Тогда в треугольнике ABP проведены средние линии DX и DM . Следовательно, $DXPY$ – параллелограмм и $DX = YP$, а $PX = DY$.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник BPM . В нём MY – медиана, проведённая к гипотенузе и, следовательно, её длина равна половине BP . Откуда $YM = YP = DX$. Аналогично $XK = XP = DY$.

В параллелограмме $DXPY$ противоположные углы DXP и DYP равны по свойству параллелограмма. Угол PYM – внешний для равнобедренного треугольника BYM , откуда $\angle PYM = 2\angle PBM$. Аналогично для треугольника $AХК$ внешний угол $\angle KXP = 2\angle PAK$. Но по условию $\angle PBM = \angle PAK$. Следовательно

$$\begin{aligned}\angle DYM &= \angle DYP + \angle PYM = \\ &= \angle DXP + \angle PAK = \angle DXK.\end{aligned}$$

Таким образом треугольники DYM и DXK равны по двум сторонам и углу между ними. Откуда следует, что $DK = DM$.

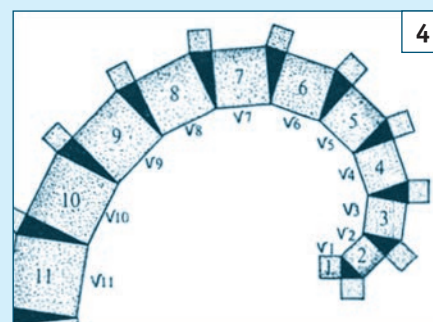
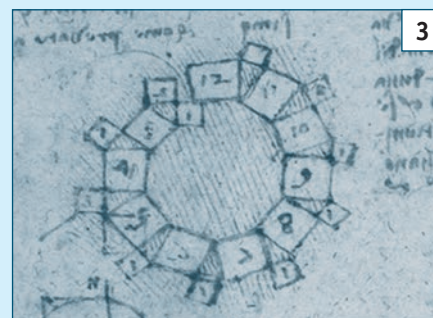
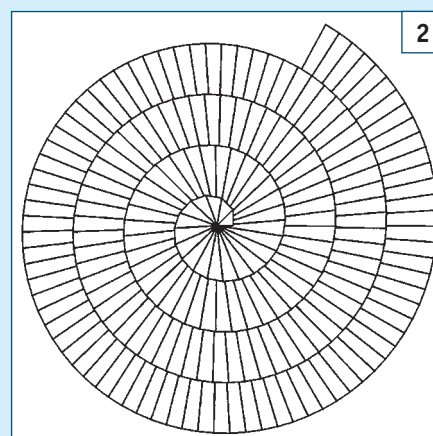
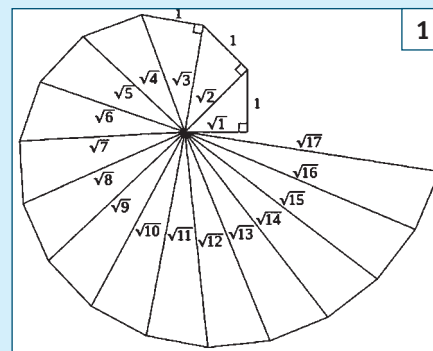
Рубрику ведёт **Иванова Е.Ю.**

Наглядная иррациональность

Согласно Платону, геометр Феодор Киренский (V век до н. э.) показал, что сторона каждого из квадратов с площадями от 3 до 17, за исключением 4, 9 и 16, несоизмерима со стороной единичного квадрата: отношение их нельзя выразить в целых числах. Причём объяснял это на чертежах и перебирал отрезки один за другим. Его ученик Теэтет пошёл дальше и, говоря современным языком, доказал, что квадратные корни из всех натуральных неквадратных чисел иррациональны. Как рассуждал Феодор, неизвестно. А сами отрезки он мог бы последовательно строить, опираясь на теорему Пифагора [1]. Действуя в духе пифагорейцев, открывших ранее несоизмеримость диагонали и стороны квадрата. Они не знали, как разрешить уравнение $x^2 = 2$ «в числах», зато могли дать точное решение «в отрезках», построив диагональ квадрата со стороной 1.

Оригинальная фигура из 16 смежных прямоугольных треугольников [1] ныне известна как спираль Феодора. Её придумал в 1941 году немецкий математик-любитель Якоб Андерхуб, дабы объяснить, почему древнегреческий геометр остановился на числе 17. По удивительному совпадению именно на отрезке длиной $\sqrt{17}$ завершается построение первого витка спирали. Продолжив спираль Феодора, математики позже открыли и другие её свойства. Например, такое: вне зависимости от количества витков никакие две гипотенузы построенных треугольников не лежат на одном луче [2].

Вот ещё одна интересная конструкция для генерирования отрезков длиной $\sqrt{n}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ [3], – из Атлантического кодекса Леонардо да Винчи. Правда, разглядеть в кольце из треугольников и квадратов спираль непросто в отличие от взятых за основу «пифагоровых штанов». Художник рисовал от руки, на глаз, не учитывая размеры фигур, и дошёл только до $n = 12$. Здесь искомые отрезки – стороны достраиваемых на каждом шаге квадратов. А вот как выглядит правильная спираль да Винчи [4]. Её заново открыл в середине XX века голландец Альберт Босман, учитель математики, который, как и Леонардо, искал различные обобщения и приложения знаменитой теоремы. Такая спираль наглядно иллюстрирует не только геометрический способ представления иррациональных чисел, но и принцип построения арифметической прогрессии – в стиле греков с их идеей увязать числа с фигурами: добавление единичного квадрата к квадрату с площадью n , начиная с $n = 1$, естественно приводит к натуральному ряду.



Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2023. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

П1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

Подписной индекс

П1597

ВНИМАНИЕ!

**Комплекты журналов
со скидкой**

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
ДЛЯ
ШКОЛЬНИКОВ»
Подписной
индекс — П1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:

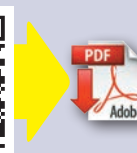
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • БиблиоШкола – biblioclub.ru • Знаниум – znanium.com

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.

Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала (в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2022, № 6, 1–80