

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

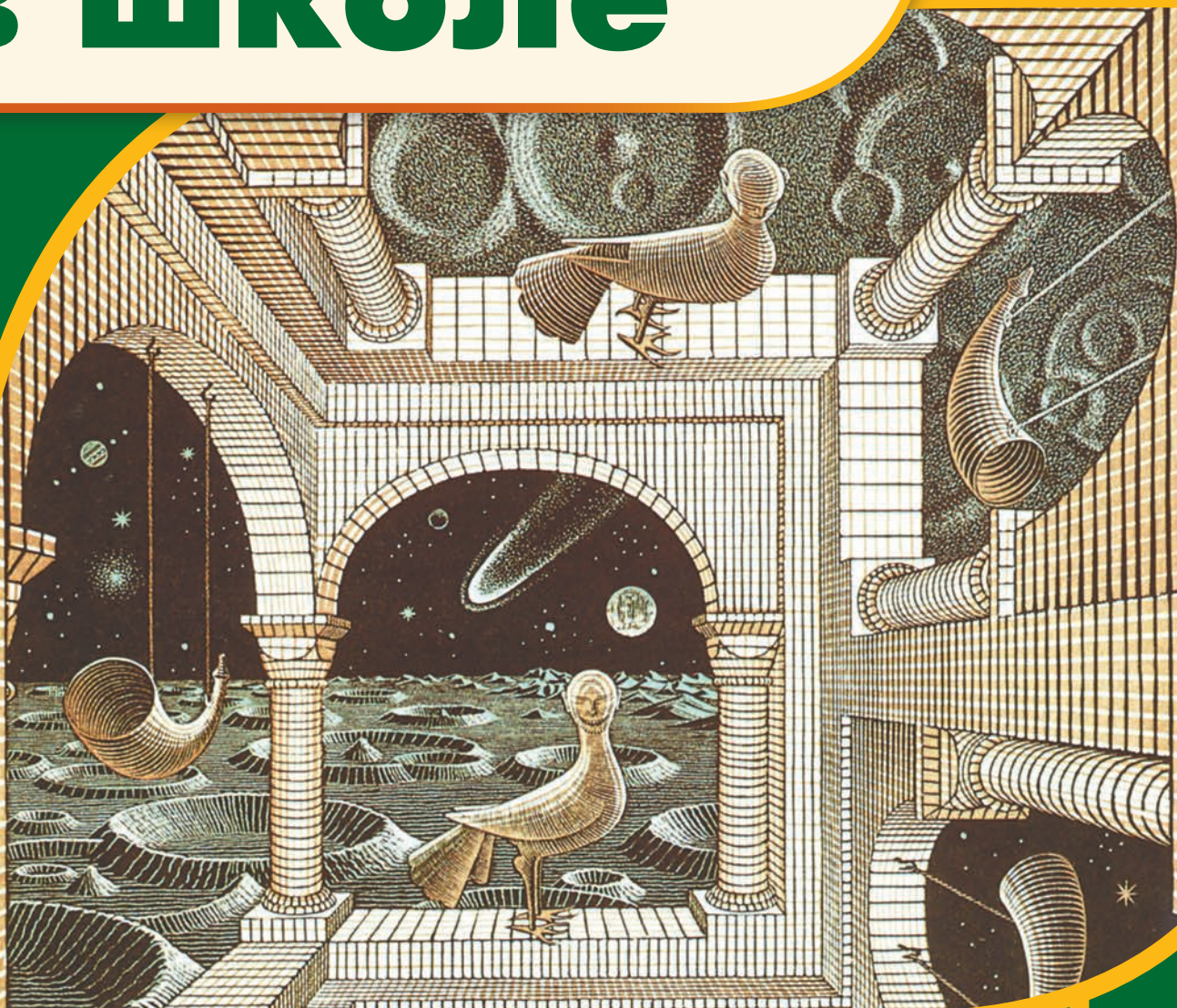


научно-теоретический и методический журнал

5 2022

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



О фабулах практико-ориентированных задач

**Индивидуализированная организация проверки знаний
учащихся старшей школы по геометрии**

р – Выпуклые функции и уравнения

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



Сложение, вычитание и объём гиппокампа

Обнаружил на известном научно-популярном интернет-портале *N + 1* статью о том, что «в височной коре нашли нейроны сложения и вычитания». Оказывается, в мозгу

есть нейроны, которые активируются именно во время совершения определённых математических операций. Причём одни из обнаруженных клеток активны исключительно во время операций сложения, а другие — исключительно при совершении операций вычитания.

Кстати, это полезно знать тем, кто полагает, что если в первом варианте контрольной дать задачу со знаком сложения, а во втором варианте (чтоб отличалось) — со знаком вычитания, то это равнозначно и равно по трудности. Кому как!

При этом в статье сообщается, что эти нейроны реагируют одинаково, независимо от того, записана ли инструкция вычислений в виде слова («прибавить» или «отнять») или символа (то есть математических знаков плюс и минус). Там же, среди подробных объяснений исследованного учёными феномена можно найти такое: «объём гиппокампа и его функциональная связь с дорсолатеральной и вентролатеральной префронтальной корой определяют успех в математике у младших школьников. А снижение объёма серого вещества парагиппокампальной извилины отмечается у детей с дискалькулией».

Вы много поняли? Я вот — не очень. Про серое вещество, положим, все мы знаем ещё с отроческих времен, когда зачитывались «Шерлоком Холмсом». Многие слышали и про «дискалькулию», определяющую базовые трудности в обучении или понимании простейшей (на наш взгляд) арифметики. А вот «про функциональную связь гиппокампа с дорсолатеральной и вентролатеральной префронтальной корой», которая, как

выясняется, предопределяет успех в математике у младших школьников, едва ли мы слышаны и понимаем, о чём речь. И даже если захотим разобраться, придётся немало потрудиться, погрузиться в чтение непростых книг по биологии, по высшей нервной деятельности, по работе мозга и т.д. И не уверен, что в результате удастся во всём разобраться. Хотя, учёному-биологу, наверное, всё это понятно изначально.

Так, может, и нам, преподавателям математики, для которых язык математики — родной, стоит меньше раздражаться (а иногда и срываться) на тех наших учеников, у которых от рождения не всё в порядке с теми нейронами в височной коре, которые отвечают за сложение и вычитание.

Для них то, что кажется нам очевидным — это сложный малопонятный мир, если хотите, «гиппокамп с дорсолатеральной и вентролатеральной префронтальной корой», или, как принято говорить, — «китайская грамота». Отметим, кстати, что, в отличие от нас, для полутора миллиардов китайцев китайская грамота, видимо, не представляет непреодолимых проблем... Так что у всех свои проблемы и трудности восприятия.

А ведь что-то ещё в мозгу, какие-то там нейроны, наверное, отвечают за умножение-деление, за возведение в степень и извлечение корня, не говоря уж о геометрических образах и вероятностно-статистических закономерностях, до которых исследователи головного мозга, похоже, ещё не добрались. И там, можно предположить, тоже не у всех детей всё благополучно. Да и у взрослых.

Вывод? Наверное, педагогический талант, профессиональное мастерство и человечность учителя в том и состоят, чтобы уметь работать со всеми, «без гнева и пристрастия». Интересно, какие нейроны в нашем учительском мозгу за всё это отвечают?

Евгений Бунимович

ЭКЗАМЕНЫ

- 3 *Борисова А.М.*
О фабулах практико-ориентированных задач

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 13 *Харбих Т.С.*
Индивидуализированная организация проверки знаний учащихся старшей школы по геометрии

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 26 *Калинин С.И.*
 p – Выпуклые функции и уравнения

ТОЧКА ЗРЕНИЯ

- 33 *Пименов Р.Р.*
Угол, фрактал и звёздчатые иллюзии в компьютерной лаборатории

ОТКРЫТЫЙ УРОК

- 40 *Смирнов В.А., Смирнова И.М.*
Экстремальные задачи по геометрии. 10 класс

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 50 *Ану Туоминен, Елена Ветошкина, Сергей Хэкало*
Технологии формирования функциональной математической грамотности учащихся на основе проектной деятельности: российско-финский опыт

- 58 Варанкина В.И., Вечтомов Е.М.
Научно-методическая школа профессора Ф.Ф. Нагибина «Теория и методика обучения решению математических задач»

ХРОНИКИ

- 68 III Международная научная конференция «Задачи в обучении математике, информатике и физике в условиях цифровой трансформации», посвящённая 130-летию чл.-корр. АПН П.А. Ларичева

ЗАДАЧИ

- 74 Иванова Е.Ю.
Алгоритмы в решениях задач



Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, М.И. Башмаков, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3667. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2022, № 5 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

О ФАБУЛАХ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ

А.М. Борисова, к.пед.н., доцент,
НГПУ, г. Новосибирск,
bam1208@yandex.ru

A.M. Borisova, PhD (Pedagogy), Assoc. Prof.,
NSPU (Novosibirsk),
e-mail: bam1208@yandex.ru

Ключевые слова: практико-ориентированные задачи, фабулы задач, классификация задач, итоговая аттестация, типы практических задач, математические задачи

Keywords: practice-oriented tasks, task plots, classification of tasks, final certification, types of practical tasks, mathematical problems

Аннотация: статья посвящена проблеме содержания практико-ориентированных задач, рассмотрены некоторые виды таких задач, предлагаемых выпускникам в рамках итоговой аттестации, указаны их недостатки, приведены результаты опроса учеников по изучению их мнения о содержании практических задач и примеры задач, которые заняли в рейтинге учащихся начальные и последние позиции (по фабуле), также в статье содержатся примеры задач, составленных учениками и демонстрирующих их сферы интересов

Abstract: the article is devoted to the problem of the content of practice-oriented tasks, some types of such tasks offered to graduates as part of the final certification are considered, their disadvantages are indicated, the results of a survey of students to study their opinions on the content of practical tasks and examples of tasks that took the initial and last positions in the rating of students (according to the plot) are given, the article also contains examples of tasks compiled by students and demonstrating their areas of interest

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_3

В последнее время снова начали настойчиво обращать внимание учителей на использование прикладных задач в обучении. Особенно актуальным это стало в связи с участием России в очередных исследованиях PISA, которые направлены на проверку умений применять предметные знания в жизненных ситуациях. По результатам этих исследований в 2018 году Россия по математической грамотности занимала 30 место из 79 возможных [1]. Это весьма скромный результат для нашей страны. Однако практико-ориентированные задания, которые входят в содержание контрольно-измерительных

материалов ЕГЭ, правильно выполняют порядка 87–90% обучающихся. Так почему же школьники одной и той же страны показывают разные результаты при проверке, казалось бы, одного и того же умения?

Первое – конечно же, различная сложность задач. Когда от ребёнка требуется вычислить сумму денег на поездку со скидкой или определить дозу лекарства, необходимую для приёма больному, большинство учеников справляется без проблем. Это те задачи, с которыми им действительно приходится сталкиваться если не ежедневно, то достаточно часто.

Такие задачи встречаются и в школьных учебниках. В этом году детям на экзамене за курс основной школы (по крайней мере, в Новосибирской области) досталась задача, связанная с маркировкой шин. И многие участники экзамена задавали вопрос: зачем пятнадцатилетнему подростку знать, что означает каждая цифра на этой маркировке и процент изменения пробега автомобиля при замене колёс, установленных на заводе, колёсами другой маркировки? Однозначного ответа на этот вопрос нет. Одни (чаще всего, водители автомобилей) считают такие задачи полезными, так как с их помощью дети знакомятся с некоторыми особенностями вождения. Другие (обычно, женская часть населения) полагают, что информация, изложенная в задаче, им никогда в жизни не понадобится.

Вообще вопрос о том, какую задачу можно считать практической, достаточно сложный. В методической литературе нет единого названия для задач с практическим содержанием. Одни авторы называют их сюжетными, другие – ситуационными, третьи – прикладными, четвёртые – практико-ориентированными, существует название «контекстная» задача. Все эти виды задач объединяет наличие в основе их фабулы жизненной ситуации, решение которой основано на применении изученного материала. М.В. Егупова к практико-ориентированным относит задачи, часто возникающие в практической деятельности человека. Однако при решении таких задач, считает она, ученики должны не только усвоить ряд фактов и способов действий, но и обрести способность объяснять с помощью этих фактов различные явления действительности, устанавливать взаимосвязи между объектами реального мира. По мнению М.В. Егуповой, практико-ориентирован-

ная направленность обучения математике в школе состоит в способности математизировать информацию об окружающем мире и получать на основе этого новую информацию [2].

Анализируя практические задачи из открытого банка ОГЭ [3], можно сказать, что отношение к их фабулам неоднозначное. С одной стороны, они действительно взяты из практической жизни, содержат полезную информацию (например, про различные виды бумаги или маркировку шин). С другой стороны, необходимость владения подобной информацией сомнительна, и ситуация, описанная в задаче, нередко кажется искусственно созданной. Например, задачи связанные с выбором магазина, покупка продуктов в котором окажется наименее затратной. Почему-то при этом учитываются только различия в ценах на продукты, а время на дорогу до магазина и здравый смысл во внимание не берутся (стоит ли идти пешком в соседнее село из-за трёх батонов хлеба, двух килограммов говядины и трёх килограммов картофеля для того, чтобы экономия составила от 2 до 100 рублей). Не говоря уже о том, что вряд ли житель одного села пойдёт пешком в другое, чтобы купить 3 кг картофеля [4].

Чтобы ответить на вопрос, какие задачи интересно решать детям, в МАОУ Гимназия № 10 города Новосибирска был проведён небольшой эксперимент. Ученикам десятого класса было предложено 16 практико-ориентированных задач, которые они должны были дифференцировать по фабуле (на первое место поставить самые интересные, далее по убыванию, на последнем месте – задача с самым непривлекательным сюжетом). Первые четыре задачи из списка были взяты из открытого банка заданий ОГЭ [3], [4], три задачи были позаимствованы из американского

учебника по аналитической тригонометрии [6, перевод автора], остальные – авторские.

Результаты оказались неожиданными. Фаворитом оказалась задача за 6-й класс, направленная на проверку умений школьников пользоваться масштабом (её на первое место поставили 62,5% опрошенных учеников). В задаче представлена картинка из детской книжки Г. Остера «Ненаглядное пособие», на которой художник С. Богачев изобразил слонёнка, мартышку и удава. Ученикам надо было ответить на вопрос: можно ли сказать, что размеры персонажей пропорциональны? И поскольку это не так, надо было объяснить, почему, по их мнению, художники не всегда соблюдают точные пропорции при изображении объектов. К задаче прилагалась справка о средних длинах тел мартышки, слона и удава. Пример аналогичной задачи был опубликован в статье [5].

Один из учеников при объяснении, почему на первое место поставил эту задачу, написал: «Эта задача интересна тем, что нужно догадаться и найти способ сравнить объекты, сравнить полученные результаты с действительностью. Такая задача хороша и тем, что, допуская ошибку в расчётах, ты можешь прикинуть результат заранее и сравнить полученное с ожидаемым, что может спасти от провала на экзамене». Другая девочка добавила: «Думаю, если бы на экзамене я увидела такую добрую детскую картинку, у меня бы поднялось настроение и появилось больше уверенности». Ребята отмечали необычность формулировки и отсутствие перегруженности лишней информацией.

К задачам-аутсайдерам, по мнению большинства ребят (так ответили 87,5% опрошенных десятиклассников), были отнесены следующие две американские задачи 1 и 2, которые взяты из пособия [6].

Задача 1. Цепь на велосипеде огибает звёздочку педали и звёздочку заднего колеса (рис. 1). Радиус звёздочки педали составляет 11,0 см, радиус задней звёздочки 4,00 см, а заднего колеса 70,0 см. Если звёздочка педали повернута на угол 18π радиан, на сколько радиан поворачивается заднее колесо? [6, с. 320].

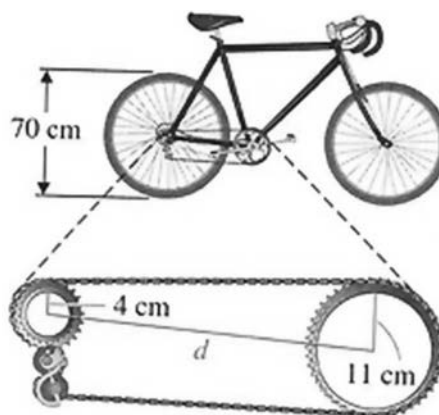


Рис. 1

Задача 2. Найдите размеры β и c для крыла с обратной стреловидностью сверхзвуковой струи, используя информацию на рисунке 2. [6, с. 335].

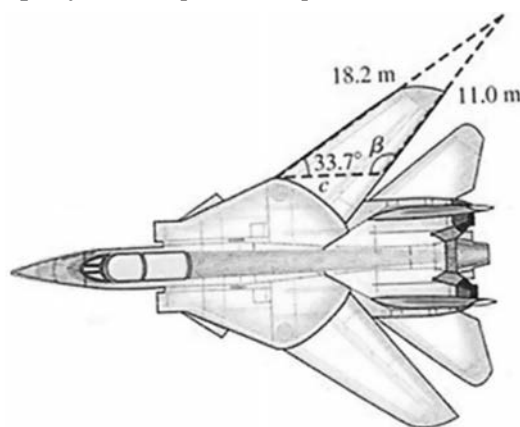


Рис. 2

Ребятам не понравилось, что эти задачи «нацелены только на расчёты. Геометрия в них довольно простая, а для решения не нужно применять логику». «В задаче не

самый интересный вариант оформления условия, все данные на рисунке, хотя для решения это удобно». «Задача про самолёт решается без конкретных значений, скучно».

Что же касается задачи про покрышки, то, как уже отмечалось выше, мнения детей разделились. Один ученик написал, что эта задача показалась ему одной из наиболее практико-ориентированных по сравнению с остальными. Он отметил, что многие не знают значений указанных индексов. С его мнением согласились не все одноклассники. Один из них посетовал: «Про колёса, мне как-то кажется скучной задачей». С ним была солидарна другая ученица: «В задаче про покрышки самая неинтересная фабула из всех существующих задач ОГЭ, очень нудная тема».

При рассмотрении сюжетов остальных задач явных фаворитов не выявилось. Ребята отмечали задачу про «выигранный миллион»: «Определённо одна из самых простых, смешных, но «жизненных» задачек. Видел иногда и сам такие «возможности стать миллионером» то ли в газетах, то ли в журналах, когда был маленьким».

Пример подобной задачи был опубликован в статье [7, с. 38].

Актуальной ребята назвали задачу про коронавирус, один ребёнок написал: «Очень актуальная задача на аналитику, проверку информации, которую предоставляет СМИ». Другой поддержал: «Задача про корону: актуально и со вкусом. Интересная задачка, в принципе, решить тоже не сложно, но интересно».

Задача 3. Журналист изучил данные по заболеванию коронавирусом в разных городах и субъектах РФ. В таблице 1 приведены показатели по 15 регионам, которые сделаны в виде рейтинга. После рассмотрения этих данных журналист сделал следующий вывод: «Больше всего заболевших в Москве. Санкт-Петербург удерживает третье место после Москвы и Московской области. Меньше всего заболевших в Ненецком автономном округе».

Согласны ли вы с выводом журналиста? Поясните свой ответ. Если вы не согласны с мнением журналиста, составьте свой рейтинг распространения болезни по приведённым субъектам РФ.

Таблица 1

№	Города и субъекты РФ	Заболели	Умерли	Выздоровели	На 1000
1	Москва	263059	4832	215383	20,7
2	Московская область	68379	1193	51732	8,9
3	Санкт-Петербург	36852	2440	25875	6,8
4	Нижегородская область	27820	477	24811	8,7
5	Свердловская область	25432	454	20022	5,9
6	Ханты-Мансийский автономный округ	19676	167	18491	11,8
7	Ямало-Ненецкий автономный округ	13457	90	13003	24,7
8	Мурманская область	12892	162	10454	17,4
9	Саратовская область	12438	76	8038	5,1
10	Ульяновская область	12164	101	9832	9,9
11	Новосибирская область	11456	361	10166	4,1
12	Краснодарский край	11294	185	9313	2,0
13	Кемеровская область	6527	45	4506	2,5
14	Республика Крым	2453	31	1698	1,3
15	Ненецкий автономный округ	314	0	114	7,1

Справочная таблица содержит статистику заболевших коронавирусом по городам и субъектам РФ, актуальную на 14 августа 2020 года, а также количество умерших от коронавируса, и тех, кто выздоровел. Колонка «На 1000» – это количество заболевших на 1000 человек населения субъекта РФ (данные по населению субъектов РФ на 1 января 2020 года). Информация взята с сайта [8].

При решении этой задачи ребята долго спорили, на какие показатели надо ориентироваться при сравнении величин. Но всё-таки пришли к выводу, что сопоставлять величины надо по одному основанию. Нельзя сравнивать данные Москвы и республики Саха по количеству заболевших в регионе, так как число жителей и размер их территорий различны. Единственным объективным показателем может служить только количество заболевших на 1000 человек, а тогда рейтинг субъектов РФ будет другим.

Ребят привлекают задачи на расчёт и поиск маршрутов, работу с реальными графиками. Они полагают, что такие задачи очень часто используются в различных сферах деятельности. Так, ученики отметили задачу об обсуждении уровня жизни в стране (пример такой задачи был опубликован в статье [9, с. 67]). По их мнению, эта задача интересна тем, что подключает не только математические знания, но и умение сопоставить их с действительностью, обрабатывать данные.

Отметили они и задачу 4, указав банальность фабулы и приближенность к реальной ситуации.

Задача 4. Курьер должен доставить заказы по разным адресам города Новосибирск: площадь Ленина, площадь К. Маркса, ул. Челюскинцев, ул. Вокзальная магистраль, станция метро «Студен-

ческая». Курьеру надо составить оптимальный маршрут для быстрой доставки заказов клиентам, учитывая, что пункт доставки заказов площадь К. Маркса и станция метро «Студенческая» находятся на левом берегу, а площадь Ленина, ул. Челюскинцев и Вокзальная магистраль – на правом, и в дневное время автомобильное движение по мосту с левого берега на правый затруднено. Курьер может воспользоваться автобусом или проехать на метро. На рисунках, представленных ниже, изображены схемы движения автобуса и проезда на метро. Изучив карту города и схемы движения транспорта, составьте оптимальный маршрут для курьера. Объясните выбор своего маршрута.

Особенность этой задачи состоит в её региональной составляющей. Многим детям приходится ездить каждый день в гимназию на общественном транспорте, и о проблеме загруженности дорог ребята знают по собственному опыту. Кроме того, в городе всего три моста, соединяющих левый и правый берега, которых катастрофически не хватает, и движение по ним бывает затруднено даже в ночное время. Суть задачи заключается в выборе путей: путь на метро длиннее, но он не зависит от дорожных пробок. Кроме того, остановка «Площадь Ленина» находится по пути следования. Однако до ул. Вокзальная магистраль и ул. Челюскинцев надо будет добираться либо пешком, либо на каком-то общественном транспорте. Путь на автобусе немного короче, но он оставляет в стороне станцию метро «Студенческая» и «Площадь Ленина». До них нужно добираться отдельно. Ребятам предстоит взвесить все плюсы и минусы каждого варианта и объяснить свой выбор.

В список задач, фабулы которых показали интересными ученикам, попала задача про вклады.



Схема проезда на автобусе



Схема проезда на метро

Задача 5. Лев Валерианович решил разместить в банке вклад на сумму 60 000 рублей. В таблице 2 представлены виды вкладов, которые можно открыть в этом банке. Какой вид вклада наиболее выгоден Льву Валериановичу, если он хочет открыть счёт 25 сентября текущего года и закрыть его 27 декабря следующего года (на любом виде вклада деньги можно снять до окончания срока)? Проценты начисляются по окончании срока вклада (один раз). Сколько рублей составит прибыль? Результат округлите до целых.

Один ученик пояснил, чем его привлёк текст задачи: «Хоть сейчас и есть кон-

сультанты, калькуляторы специальные, всё равно полезнее и проще уметь разбираться в этом самом. Ещё в детстве, когда накопил с подарков приличную (для меня) сумму денег, услышал про вклады и заинтересовался этой темой, и уже тогда смотрел разные предложения и высчитывал возможную прибыль (условно, какая сумма у меня будет к концу школы, если я сейчас положу туда-то или туда-то)».

Выделили ребята и задачу про выбора для кота: «Все мы любим котов». Но в качестве недостатка этой задачи они отметили, что её формулировка перегружена лишней информацией.

Таблица 2

Вклад	Минимальная сумма вклада (в рублях)	Годовая процентная ставка	Срок начисления процентов (в днях)
Электроник	30 000	91 день = 8%; 181 день = 8,5%; 367 дней = 9% годовых;	91, 181, 367
Копилка	5 000	180 дней = 8%; 270 дней = 8,5%, 360 дней = 9% годовых	180, 270 и 360
Семейный	30 000	9%	730
Капитал	30 000	90 дней = 9,5%; от 90 до 180 дней = 9%; от 181 до 270 дней = 8%; от 271 до 360 дней = 7%; от 361 до 450 дней = 6%; от 451 дня = 5% годовых	540

Задача 6. Специальные двери для кошек используют не только для выхода питомца из дома на даче или за городом, когда хозяина нет рядом. Такую дверцу можно установить и в межкомнатную дверь или вмонтировать в дверное полотно ванной комнаты, где часто находится кошачий туалет, а постоянное открывание/закрывание основной двери нежелательно. Если кошка хочет попасть в какое-либо место, а путь преграждает дверь, то в ход идут когти и звуковое сопровождение, что нередко заставляет подниматься хозяев с теплой кровати. Чтобы таких ситуаций не возникало, в двери устанавливают специальную конструкцию, которую принято называть «дверца для кошек».



Папа решил сделать лаз в двери туалета для кота. В магазине был представлен широкий выбор различных дверок для лаза (таблица 3). В описании приведены различные параметры лаза, однако в отзывах на товар, было отмечено, что крупный кот мог застрять в некоторых разновидностях дверок (фото из открытой сети интернет). Какой лаз для кота надо выбрать, если он крупный, его масса больше 4 кг, размах плеч составляет 180 мм, а обхват живота животного 60 см?

Конечно, эта задача перегружена лишними данными, которые надо отбросить. Необходимо прикинуть размер дверцы. Если длина окружности живота кота 60 см, то ширина и высота проёма должны быть не менее 20 см. При анализе представленных моделей внимание надо обращать на внутренний, а не на внешний размер лаза. По этим параметрам подходят только модели 3 и 6. Но в условии сказано, что лаз предполагается делать в двери туалета, а модель 3 предназначена для дверей-сеток. Вряд ли дверь в туалете сетчатая, значит, остаётся модель 6.

Помимо составления рейтинга задач,

Таблица 3

№ модели	Описание
Модель 1	Дверца для кошек сделана из экологически чистого и очень качественного материала, не имеющего запаха и не меняющего цвет в процессе эксплуатации, даже в самых суровых условиях. Рекомендована для использования при температурах от +40 до –5°C: • тонированная створка; • бесшумно открывается и закрывается с блокировкой; • глубина 36–40 мм; • внешний размер 21 × 21 см; • размер люка 145 × 145 мм; • створка открывается в обе стороны; • встроенный тоннель
Модель 2	Дверь имеет два варианта использования – открыто или закрыто. Закрывание производится с помощью специальной панели, которая входит в комплект. Дверь оборудована специальным нащельником для предотвращения продувания. Материал – высокопрочный пластик. Внешний размер – 236 × 198 × 32 мм. Размер шторки – 175 × 152 мм. Размер выреза для установки – 185 × 158 мм. Максимальная ширина плеч животного – 147 мм
Модель 3	Тип: вклеиваемая, для дверей-сеток. Особенности: имеет две закладки, которые нужно откусить и вставлять в раму дверцы для ограничения открывания в одну или обе стороны. Замок: есть, магнитный и 2 закладки. Материал: пластик. Размер 36,5 × 28,5 × 2 см
Модель 4	Материал двери: АБС пластик. Материал рамы: акрил (гладкая поверхность, очень прочный). Цвет: белый. Размер внешней части рамки: длина 22,5 см, ширина 20 см, толщина 3 см. Размер внутренней дверцы: 15 × 15,5 см. В комплекте идут необходимые крепления для установки. Вес: 0,32 кг. Подходит для собак и кошек менее 16 кг, размер грудной клетки менее 60 см
Модель 5	Пластиковая дверь для кошек и собак с белой рамкой и прозрачной тонированной дверцей. Шарнир дверцы позволяет ей свободно открываться в обе стороны, но предусмотрена возможность блокирования открытия в одну или обе стороны. Дверца предназначена для животных массой не более 4 кг с обхватом талии до 20 см. Дверь изготовлена из высококачественного пластика и легко моется. • Внешний размер: 20 × 19 × 2,5 см. • Внутренний размер: 16 × 15,7 см. • Рекомендованные размеры питомцев: вес менее 4 кг, обхват талии менее 20 см
Модель 6	Основные характеристики: • прозрачная створка бесшумно открывается и закрывается; • расширительный тоннель 25 мм в комплекте с уплотнителем из ТПР и магнитной защёлкой; • глубина 20–25 мм; • внешний размер 26 × 30 см; • внутренний размер 21,7 × 23,7 см; • размер створки: 20 × 22 см

ученикам было предложено придумать свою задачу. Примеры некоторых из них приведены ниже.

Задача 7. Планируется собрать ПК для домашнего использования. Связка процессор + видеокарта потребляет 140 Вт мощности. Ниже, в таблице 4, приведены показатели энергопотребления другими комплектующими.

Таблица 4

Оперативная память	4 Вт
SSD	15 Вт
HDD	20 Вт
Вентилятор охлаждения	5 Вт
Звуковая карта с ЦАП усилителем	17 Вт

Предполагается использование компьютера в условиях больших нагрузок, поэтому видеокарта и процессор будут находиться в разгоне (+10% от их энергопотребления). В системе также будут использованы 4 модуля оперативной памяти, SSD накопитель, 2 HDD накопителя, 2 вентилятора и звуковая карта.

Требуется рассчитать минимальную мощность блока питания системы, если для корректной и продолжительной работы его загруженность не должна превышать 70%.

Изучая тесты задач, предложенные детьми, сразу понимаешь их пристрастия и интересы. Иногда проявляются гендерные различия. Так одна хозяйственная девочка предложила задачу про приготовление сырников.

Задача 8. Вы пришли в магазин для того, чтобы купить творог для приготовления сырников. В магазине предлагаются различные акции, по которым можно купить творог дешевле (таблица 5). На творог «Коровка из Кореновки 5%» действует акция с вызывающим названием

«1 + 1 = 3», что значит, что третий товар идёт в подарок.

Предположим, нужно купить не менее 700 г творога (гости придут поесть сырники). Пачки какой марки наиболее выгодны для покупки?

Таблица 5

Название производителя	Масса упаковки (г)	Стоимость 1 упаковки (руб.)
Простоквашино 5%	200 г	74,00
Вкуснотеево 9%	750 г	270,00
Коровка из Кореновки 5%	180 г	97,00

Не остались в стороне и спортсмены, они тоже предложили свои задачи.

Задача 9. На расходы баскетбольной команды из 10 человек на сборах в другом городе администрацией выделено 7500 руб. Цена билета на поездку от места сборов до города составляет 75 рублей. Автобус отправляется в 12:00, 15:30, 20:00. По приезду в город ребята потратили на еду 2500 руб., на магазины ушло 3180 руб. К моменту окончания их прогулки на часах было 19:15. К вечеру цена на билет дороже на 10%. Рассчитайте, хватит ли денег команде, чтобы добраться обратно на место сборов.

Задача 10. Мама Ангелины решила сшить чехол для обруча девочки. Для этого был куплен отрез ткани площадью 100 дм². Сколько ткани останется в запасе, если диаметр обруча равен 9 дм, и нужно добавить 10% ткани от площади обруча на швы?

Задача 11. Влад начал ходить в тренажёрный зал. Тренер посоветовал Владу употреблять в день количество белка, равное 1/500 от его веса. Влад не любит молочную продукцию и куриные яйца,

поэтому решил есть жареную говядину или курицу. В 100 г жареной говядины содержится 20 г белка, а в курице – 18 г. Сколько граммов жареной говядины Влад должен съесть в сутки, если он весит 50 кг? А жареной курицы?

Задача 12. Чтобы купить подарок другу, Гоше нужно 2000 рублей. В неделю ему дают 800 рублей. Каждую неделю 500 рублей уходит на еду. Первого числа каждого месяца 200 рублей он кладёт на транспортную карту. Через какое время Гоша накопит на подарок?

Задачи ребят не отличаются повышенной сложностью и интригующим сюжетом, зато показывают сферу их интересов и предпочтений. Возможно, идеи ребят стоит учитывать при подборе практико-ориентированных заданий для различного вида контрольных работ, домашних упражнений, а также использовать такие задачи на уроках.

Литература

1. <https://fioco.ru/pisa>.
2. Егупова М.В. Практико-ориентированное обучение математике в школе. Учебное посо-

бие для студентов педвузов. – М.: МПГУ, 2014. – 208 с.

3. http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?theme_guid=7C62C5208B90887344A5322D95E7427D&proj_guid=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0.

4. http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj_guid=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0&theme_guid=7C62C5208B90887344A5322D95E7427D&md=qprint&groupno=2.

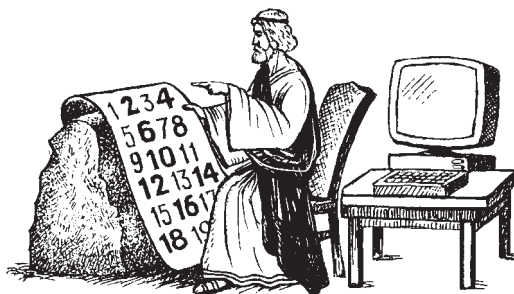
5. Борисова А.М. Использование заданий, содержащих ошибку, для формирования самоконтроля и адекватной самооценки // Математика в школе. Электронное приложение. – 2017. – № 1.

6. Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, Karl E. Byleen. *Analytic trigonometry with Applications*, eighth edition. – John Wiley & Sons, Inc, 2003, p. 537.

7. Борисова А.М. О заданиях на формирование математической грамотности // Математика в школе. – 2015. – № 9. – С. 35–40.

8. <https://infotables.ru/meditsina/1198-koronavirus-v-rossii>

9. Борисова А.М. Задания на формирование читательской грамотности на уроках математики // Математика в школе. – 2020. – № 1. – С. 61–70.



ИНДИВИДУАЛИЗИРОВАННАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Т.С. Харбих, учитель математики МОУ
«Оболенская СОШ»,
stratat@yandex.ru

T.S. Harbih, math teacher of the Moscow regional
institution «Obolenskaya secondary school»,
stratat@yandex.ru

Ключевые слова: обучающий тематический контроль, самопроверка, индивидуальные числовые данные, таблицы ответов, деятельностный подход, мотивация к обучению, успеваемость, качество знаний, школьная тревожность, учебные притязания, геометрия, старшая школа, оптимизация обучения

Keywords: educational thematic control, self-checking, individual numerical data, answer sheets, activity approach, learning motivation, academic performance, quality of knowledge, school anxiety, educational aspirations, geometry, senior school, teaching optimization

Аннотация: в статье описана технология обучающего тематического контроля по геометрии в 10–11-х классах. Отличительной особенностью данной технологии является наличие большого числа вариантов, таблиц ответов и возможности воспользоваться помощью учителя и (или) одноклассников

Abstract: the article describes the teaching thematic control approach in geometry in 10–11 grades. A distinctive feature of this technology consists in a large number of variants, answer sheets and the opportunity of a pupil to fall back upon help of a teacher and (or) his/ her classmates

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_13

Традиционно преподавание геометрии в старших классах сопряжено с определёнными трудностями. Учащиеся с плохим пространственным воображением не только не могут решить задачу, но зачастую затрудняются изобразить её условие в виде схематического чертежа.

Стоит ли удивляться, что тематический контроль для таких учащихся – стрессовая ситуация, из которой есть два выхода: либо не приходить на урок контрольной работы, либо формально и бездумно списать решение контрольных задач (благо возможностей для этого в Интернете предостаточно).

Для того чтобы избежать подобных ситуаций и устранить страх учащихся перед тематическими контрольными работами, нами была разработана система тематического контроля, опирающаяся на деятельностный подход и формирующая у обучающихся умение самостоятельно находить ошибку, прибегая в случае затруднений к помощи одноклассников и учителя, а главное, – самостоятельно выстраивать систему учебных притязаний.

Чтобы избежать формального списывания, мы предлагаем максимально индивидуализированную организацию проверки знаний учащихся: 30 вариантов индивиду-

альных числовых данных и два различных прототипа задач. Это значит, что сверить с одноклассниками можно только чертёж или общую схему решения, тогда как промежуточные и конечные ответы у каждого будут индивидуальные. При этом для перехода к следующей задаче необходимо соотнести найденные ответы с ответами, приведёнными в таблицах промежуточных и конечных ответов, которые выкладываются на свободных партах в кабинете математики. Учащиеся имеют возможность передвигаться по классу на протяжении всего урока контрольной работы и обращаются к ним для самопроверки полученных ответов, а в случае необходимости – для поиска мест возникновения ошибок в решении.

Помощь учителя в рамках предлагаемой организации работы – скорее исключение, чем правило, так как в таблицах ответов достаточно информации для самостоятельного обнаружения и устранения возникшей ошибки.

Опишем основные особенности индивидуализированной контрольной работы и этапы её проведения.

Таблица 1

Распределение текста задач по прототипам

Прототип 1	Прототип 2
1. а) Постройте отрезок, длина которого равна расстоянию от точки M до плоскости квадрата $ABCD$ с центром O , если известно, что точка M равноудалена от всех вершин данного квадрата б) Найдите длину построенного отрезка, если известно, что сторона квадрата равна a см, а величина угла между прямой AM и плоскостью квадрата составляет α°	
диагональ квадрата равна d см, а величина угла между плоскостью ABM и плоскостью квадрата составляет φ°	
2. а) Постройте отрезок, длина которого равна расстоянию от точки M до плоскости правильного треугольника ABC со стороной a см и центром O , если известно, что точка M равноудалена от сторон данного треугольника б) Найдите длину построенного отрезка, если угол между плоскостью ABM и плоскостью правильного треугольника равен φ°	
угол между прямой AM и плоскостью правильного треугольника равен α°	
3. а) Постройте отрезок, длина которого равна расстоянию $AM = d$ от точки M до плоскости прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C б) Докажите, что прямая CM перпендикулярна прямой BC , прямая BC – перпендикулярна плоскости ACM , а плоскость ACM – перпендикулярна плоскости BCM в) Найдите расстояние от точки M до прямой BC , если известны следующие элементы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C : $AB = c$, $\angle A = \alpha^\circ$	
$AB = a$, $\angle B = \beta^\circ$	

Таблица 2

Распределение числовых данных по вариантам

Вариант	1 задача		2 задача		3 задача		
	d a	φ° α°	a φ°	α°	d c	a α°	β°
3.1.1	$3\sqrt{2}$	30°	$18\sqrt{2}$	60°	$\frac{1}{\sqrt{31}}$	$\frac{2}{15\sqrt{3}}$	30°
3.1.2	$6\sqrt{2}$	30°	3	60°	$\sqrt{31}$	$15\sqrt{3}$	30°
3.2.1	$\sqrt{2}$	60°	54	30°	$\sqrt{5}$	4	60°
3.2.2	$2\sqrt{2}$	60°	9	30°	14	14	60°
3.3.1	$6\sqrt{2}$	30°	18	60°	3	6	30°
3.3.2	$12\sqrt{2}$	30°	$3\sqrt{2}$	60°	$3\sqrt{3}$	$13\sqrt{3}$	30°
3.4.1	$2\sqrt{2}$	60°	$36\sqrt{3}$	30°	3	8	60°
3.4.2	$4\sqrt{2}$	60°	$9\sqrt{2}$	30°	12	12	60°
3.5.1	$9\sqrt{2}$	30°	$12\sqrt{3}$	60°	$\frac{5}{\sqrt{23}}$	$\frac{10}{11\sqrt{3}}$	30°
3.5.2	$18\sqrt{2}$	30°	$3\sqrt{3}$	60°	$\sqrt{23}$	$11\sqrt{3}$	30°
3.6.1	$3\sqrt{2}$	60°	$36\sqrt{2}$	30°	$\sqrt{13}$	12	60°
3.6.2	$6\sqrt{2}$	60°	$9\sqrt{3}$	30°	10	10	60°
3.7.1	$12\sqrt{2}$	30°	$12\sqrt{2}$	60°	$\frac{7}{\sqrt{19}}$	$\frac{14}{9\sqrt{3}}$	30°
3.7.2	$24\sqrt{2}$	30°	6	60°	$\sqrt{19}$	$9\sqrt{3}$	30°
3.8.1	$4\sqrt{2}$	60°	36	30°	$\sqrt{17}$	16	60°
3.8.2	$8\sqrt{2}$	60°	18	30°	8	8	60°
3.9.1	$15\sqrt{2}$	30°	12	60°	$\frac{9}{\sqrt{15}}$	$\frac{18}{7\sqrt{3}}$	30°
3.9.2	$30\sqrt{2}$	30°	$6\sqrt{2}$	60°	$\sqrt{15}$	$7\sqrt{3}$	30°
3.10.1	$5\sqrt{2}$	60°	$18\sqrt{3}$	30°	$\sqrt{21}$	20	60°
3.10.2	$10\sqrt{2}$	60°	$18\sqrt{2}$	30°	6	6	60°
...	...	...	...	...	...	...	...

1. Перед каждой контрольной работой проводится урок обобщения и систематизации знаний учащихся по пройденной теме. На этом уроке рассматривается решение одной-двух задач из будущей контрольной работы, причём числовые данные для задач предлагаются учащимися, поскольку в задачах все величины заданы параметри-

ческим способом. В качестве раздаточных материалов используются листы формата А-4 с текстом задач и критериями их оценивания, которые впоследствии размещаются на Школьном портале для того, чтобы учащиеся решили оставшиеся задачи самостоятельно. Проверить правильность полученных ответов можно на индивидуальной консультации или дистанционно, отправив учителю фото своего решения.

В таблицах 1–2 приведены тексты задач в виде двух прототипов и запрограммированные значения параметров индивидуальных числовых данных для контрольной работы № 3 в 10-м классе по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей».

Если номер варианта заканчивается цифрой «1», – учащийся решает задания 1-го прототипа; если – цифрой «2», – задания 2-го прототипа.

2. Непосредственно на уроке контрольной работы используются следующие дидактические материалы: тексты задач с критериями оценивания (один на каждую парту), парная индивидуальная карточка с числовыми данными (одна на каждую парту), таблицы промежуточных и конечных ответов (по количеству задач или подзадач в данной контрольной работе). Учащийся, сидящий за партой слева, решает задачи прототипа (1), заменяя параметры в тексте задач числовыми данными из варианта, оканчивающегося на цифру (1). Соответственно, тот учащийся, который сидит за партой справа, решает задачи прототипа (2), выбирая номер варианта, который оканчивается на цифру (2).

Образец парной карточки с индивидуальными числовыми данными для вариантов 10-3.1.1 и 10-3.1.2 и таблица ответов к задаче № 1 из контрольной работы № 3 в 10 классе по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» приведены в таблицах 3, 4.

3. Ко всем задачам индивидуализированной контрольной работы имеются решения (таблица 5), выполненные в параметрическом виде. Они демонстрируются учащимся после урока контрольной работы и могут быть использованы для организации индивидуальных консультаций.

Таблица 3

**Образец парной карточки с индивидуальными числовыми данными
для контрольной работы**

№ задачи	№ варианта	
	10-3.1.1	10-3.1.2
1	$a = 3\sqrt{2}$ $\alpha^\circ = 30^\circ$	$d = 6\sqrt{2}$ $\varphi^\circ = 30^\circ$
2	$a = 18\sqrt{2}$ $\varphi^\circ = 60^\circ$	$a = 3$ $\alpha^\circ = 60^\circ$
3	$d = 1$ $c = 2$ $\alpha^\circ = 30^\circ$	$d = \sqrt{31}$ $a = 15\sqrt{3}$ $\beta^\circ = 30^\circ$

Таблица 4

Таблица ответов к задаче № 1 контрольной работы

Вариант	Задача 1				
	d a	φ° α°	a d	KO AO	MO
3.1.1	$3\sqrt{2}$	30°	6	3	$\sqrt{3}$
3.1.2	$6\sqrt{2}$	30°	6	3	$\sqrt{3}$
3.2.1	$\sqrt{2}$	60°	2	1	$\sqrt{3}$
3.2.2	$2\sqrt{2}$	60°	2	1	$\sqrt{3}$
3.3.1	$6\sqrt{2}$	30°	12	6	$2\sqrt{3}$
3.3.2	$12\sqrt{2}$	30°	12	6	$2\sqrt{3}$
3.4.1	$2\sqrt{2}$	60°	4	2	$2\sqrt{3}$
3.4.2	$4\sqrt{2}$	60°	4	2	$2\sqrt{3}$
3.5.1	$9\sqrt{2}$	30°	18	9	$3\sqrt{3}$
3.5.2	$18\sqrt{2}$	30°	18	9	$3\sqrt{3}$
3.6.1	$3\sqrt{2}$	60°	8	4	$3\sqrt{3}$
3.6.2	$6\sqrt{2}$	60°	8	4	$3\sqrt{3}$
3.7.1	$12\sqrt{2}$	30°	24	12	$4\sqrt{3}$
3.7.2	$24\sqrt{2}$	30°	24	12	$4\sqrt{3}$
3.8.1	$4\sqrt{2}$	60°	10	5	$4\sqrt{3}$
3.8.2	$8\sqrt{2}$	60°	10	5	$4\sqrt{3}$
3.9.1	$15\sqrt{2}$	30°	30	15	$5\sqrt{3}$
3.9.2	$30\sqrt{2}$	30°	30	15	$5\sqrt{3}$
3.10.1	$5\sqrt{2}$	60°	14	7	$5\sqrt{3}$
3.10.2	$10\sqrt{2}$	60°	14	7	$5\sqrt{3}$
...	...	...	...	...	...

**Решение задачи № 1 из контрольной работы № 3 в 10 классе
по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»**

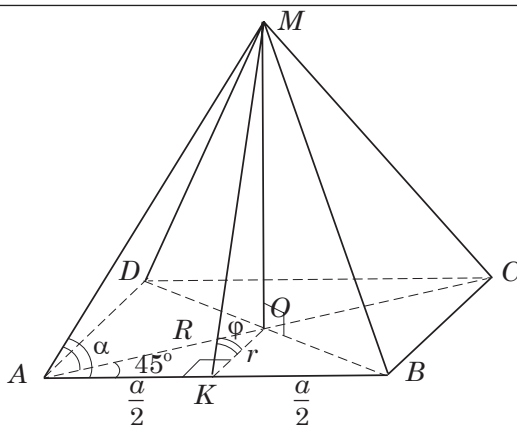


Рис. 1

Прототип (1)

1) Пусть задан квадрат $ABCD$ с центром O и стороной a см, а точка M равноудалена от всех вершин квадрата, то есть $AM = BM = CM = DM$, причём угол между прямой AM и плоскостью квадрата составляет α° (рис. 1), тогда расстояние от точки M до плоскости квадрата равно длине отрезка MO , где $MO \perp ABC$.

2) Обозначим радиус окружности, описанной около квадрата, через R , тогда из прямоугольного треугольника AOK , $\angle K = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AO = R$, $AK = \frac{a}{2}$ получим:

$$\cos 45^\circ = \frac{AK}{AO},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R}, \quad R = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$AO = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ – радиус описанной около квадрата окружности.

3) Из прямоугольного треугольника MAO , $\angle O = 90^\circ$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$\angle(AM; ABC) = \angle(AM; AO) = \angle MAO = \alpha^\circ$, т.к. AO – проекция AM на ABC ($MO \perp ABC$), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha^\circ = \frac{MO}{AO},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha^\circ}{1} = \frac{MO}{\frac{a\sqrt{2}}{2}},$$

$MO = \frac{\sqrt{2}}{2} a \operatorname{tg} \alpha^\circ$ – расстояние от точки M до плоскости квадрата.

Прототип (2)

- 1) Пусть задан квадрат $ABCD$ с центром O и диагональю $AC = d$ см, а точка M равноудалена от всех вершин квадрата, то есть $AM = BM = CM = DM$, причём угол между плоскостью ABM и плоскостью квадрата составляет φ° (рис. 1), тогда расстояние от точки M до плоскости квадрата равно длине отрезка MO , где $MO \perp ABC$.
- 2) Обозначим радиус окружности, вписанной в квадрат, через r , радиус окружности, описанной около квадрата, – через R , тогда из прямоугольного треугольника AOK , $\angle K = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $OK = r$, $AO = R = \frac{1}{2}AC = \frac{d}{2}$ получим:

$$\sin 45^\circ = \frac{OK}{AO},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{R}, \quad r = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{4},$$

$r = \frac{d\sqrt{2}}{4}$ – радиус вписанной в квадрат окружности.

- 3) $\angle(ABM; ABC) = \angle MKO = \varphi^\circ$, т.к. $MK \perp AB$ ((как медиана равнобедренного треугольника ABM , $AM = BM$), а $OK \perp AB$ (как радиус окружности, вписанной в квадрат)).

- 4) Из прямоугольного треугольника MKO , $\angle O = 90^\circ$, $OK = \frac{d\sqrt{2}}{4}$, $\angle MKO = \varphi^\circ$ получим:

$$\operatorname{tg} \varphi^\circ = \frac{MO}{OK},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi^\circ}{1} = \frac{MO}{\frac{d\sqrt{2}}{4}},$$

$MO = d \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{tg} \varphi^\circ$ – расстояние от точки M до плоскости квадрата

4. После контрольной работы значительно облегчается процесс проверки тетрадей учащихся. Учитель обращает внимание только на правильность записей и обоснованность шагов решения задачи, зная, что ответы были сверены и, в случае необходимости, исправлены учащимися самостоятельно.

5. Учащимся заранее известны критерии оценивания контрольной работы (таблица 6) и правила оценивания, а именно: за каждую подзадачу ставится либо «+», либо «±», либо «–» в зависимости от корректности всех вычислений и обоснований, причём два «±» дают один «+», поэтому учащийся имеет возможность выбрать то количество задач, которое соответствует уровню его учебных притязаний.

Таблица 6

**Критерии оценивания контрольной работы № 3 в 10 классе по теме
«Перпендикулярность прямых и плоскостей»**

Количество «+»	Оценка
7	5
5–6	4
2–4	3
менее 2	2

6. Возможна дистанционная форма проведения разработанных нами контрольных работ. В этом случае на Школьном портале размещаются не только тексты задач и критерии оценивания, но и распределение вариантов контрольной работы между учащимися, карточки с числовыми данными и таблицы промежуточных и конечных ответов ко всем задачам.

7. Числовые данные для контрольных работ подбираются таким образом, чтобы учащиеся тренировали вычислительные умения и навыки со всеми видами действительных чисел, а именно: целыми числами, десятичными дробями, обыкновенными дробями и особенно с квадратными корнями.

8. Количество контрольных работ значительно превышает предлагаемое в авторской программе [1], а именно: в 10 классе – 7 контрольных работ вместо 4, в 11 классе – 8 контрольных работ вместо 4.

В таблицах 7, 8 приведены поурочные тематические планирования учебных курсов по геометрии для 10-х и 11-х общеобразовательных классов, рассчитанные на 2 часа в неделю и адаптированные под систему описанного выше обучающего тематического контроля (базовый уровень).

Таблица 7

**Поурочное тематическое планирование курса геометрии 10 класса,
учебник Атанасяна Л.С.**

№ урока	Содержание (разделы, темы)	Кол-во часов
Введение (5 ч.)		
1	Предмет стереометрии	1
2–3	Аксиомы стереометрии	2
4–5	Некоторые следствия из аксиом	2
Параллельность прямых и плоскостей (17 ч.)		
6	Параллельные прямые в пространстве	1
7	Параллельность трёх прямых	1
8	Параллельность прямой и плоскости	1
9	Скрещивающиеся прямые	1
10	Углы с сонаправленными сторонами	1
11	Угол между прямыми	1

12	<i>Теоретический зачёт № 1 по теме: «Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве»</i>	1
13	<i>Контрольная работа № 1 по теме: «Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве»</i>	1
14	Параллельные плоскости	1
15–16	Свойства параллельных плоскостей	2
17	Тетраэдр	1
18	Параллелепипед	1
19–20	Задачи на построение сечений	2
21	<i>Теоретический зачёт № 2 по теме: «Параллельность прямых и плоскостей»</i>	1
22	<i>Контрольная работа № 2 по теме: «Параллельность прямых и плоскостей»</i>	1
Перпендикулярность прямых и плоскостей (16 ч.)		
23	Перпендикулярные прямые в пространстве	1
24	Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости	1
25–26	Признак перпендикулярности прямой и плоскости	2
27	Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости	1
28	Расстояние от точки до плоскости	1
29–30	Теорема о трёх перпендикулярах	2
31–32	Угол между прямой и плоскостью	2
33	Двугранный угол	1
34–35	Признак перпендикулярности двух плоскостей	2
36	Прямоугольный параллелепипед	1
37	<i>Теоретический зачёт № 3 по теме: «Перпендикулярность прямых и плоскостей»</i>	1
38	<i>Контрольная работа № 3 по теме: «Перпендикулярность прямых и плоскостей»</i>	1
Многогранники (17 ч.)		
39	Понятие многогранника	1
40–42	Призма	3
43	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Призма»	1
44	<i>Контрольная работа № 4 по теме: «Призма»</i>	1
45	Пирамида	1
46–47	Правильная пирамида	2
48	Усечённая пирамида	1

49	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Пирамида»	1
50	<i>Контрольная работа № 5 по теме: «Пирамида»</i>	1
51	Симметрия в пространстве	1
52	Понятие правильного многогранника	1
53	Элементы симметрии правильных многогранников	1
54	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме «Многогранники»	1
55	<i>Контрольная работа № 6 по теме: «Многогранники»</i>	1
Векторы и их координаты в пространстве (10 ч.)		
56	Понятие вектора; равенство векторов	1
57	Сложение и вычитание векторов; сумма нескольких векторов	1
58	Умножение вектора на число	1
59	Компланарные векторы; правило параллелепипеда	1
60	Разложение вектора по трём некопланарным векторам; прямоугольная система координат в пространстве; координаты вектора	1
61	Связь между координатами векторов и координатами точек	1
62–63	Простейшие задачи в координатах	2
64	<i>Теоретический зачёт № 4 по теме: «Векторы и их координаты в пространстве»</i>	1
65	<i>Контрольная работа № 7 по теме: «Векторы и их координаты в пространстве»</i>	1
Повторение курса геометрии 10 класса (5 ч.)		
66	Повторение: взаимное расположение двух прямых в пространстве	1
67	Повторение: взаимное расположение прямой и плоскости	1
68	Повторение: взаимное расположение двух плоскостей	1
69	Повторение: углы и расстояния в пространстве	1
70	Заключительный урок по курсу геометрии 10 класса	1
	ИТОГО:	70 часов

Таблица 8

**Поурочное тематическое планирование курса геометрии 11 класса,
учебник Атанасяна Л.С.**

№ урока	Содержание (разделы, темы)	Кол-во часов
Повторение, метод координат в пространстве; движения (15 ч.)		

1	Повторение: связь между координатами векторов и координатами точек	1
2	Повторение: простейшие задачи в координатах	1
3–4	Угол между векторами	2
5	Скалярное произведение векторов	1
6–7	Вычисление углов между прямыми и плоскостями	2
8	<i>Теоретический зачёт № 5 по теме: «Метод координат в пространстве»</i>	1
9	<i>Контрольная работа № 8 по теме: «Метод координат в пространстве»</i>	1
10	Центральная симметрия	1
11–12	Осевая симметрия	2
13	Зеркальная симметрия	1
14	Параллельный перенос	1
15	<i>Контрольная работа № 9 по теме: «Движения в пространстве»</i>	1
Цилиндр, конус, шар (16 ч.)		
16	Понятие цилиндра	1
17	Площадь поверхности цилиндра	1
18	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Цилиндр»	1
19	<i>Контрольная работа № 10 по теме: «Цилиндр»</i>	1
20	Понятие конуса	1
21–22	Площадь поверхности конуса	2
23	Усечённый конус	1
24	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Конус»	1
25	<i>Контрольная работа № 11 по теме: «Конус»</i>	1
26	Сфера и шар. Уравнение сферы	1
27	Взаимное расположение сферы и плоскости	1
28	Касательная плоскость к сфере	1
29	Площадь сферы	1
30	<i>Теоретический зачёт № 6 по теме: «Площадь поверхности геометрического тела»</i>	1
31	<i>Контрольная работа № 12 по теме: «Сфера»</i>	1
Объёмы тел (26 ч.)		
32	Понятие объёма	1
33	Вычисление объёмов с помощью интеграла	1

34	Объём прямоугольного параллелепипеда	1
35–36	Объём прямой призмы	2
37	Объём наклонной призмы	1
38–40	Объём пирамиды	3
41	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Объём многогранника»	1
42	<i>Контрольная работа № 13 по теме: «Объём многогранника»</i>	1
43–44	Объём цилиндра	2
45–46	Объём конуса	2
47–48	Объём шара	2
49	Объём шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора	1
50	Обобщение и систематизация знаний учащихся по теме: «Объём тела вращения»	1
51	<i>Контрольная работа № 14 по теме: «Объём тела вращения»</i>	1
52	Сфера, вписанная в многогранник	1
53	Сфера, описанная около многогранника	1
54	Сфера, вписанная в тело вращения	1
55	Сфера, описанная около тела вращения	1
56	<i>Теоретический зачёт № 7 по теме: «Объём геометрического тела»</i>	1
57	<i>Контрольная работа № 15 по теме: «Объём геометрического тела»</i>	1
Обобщающее повторение (11 ч.)		
58	Повторение: параллельность прямых в пространстве	1
59	Повторение: параллельность прямых и плоскостей	1
60	Повторение: параллельность плоскостей	1
61	Повторение: перпендикулярность двух прямых в пространстве	1
62	Повторение: перпендикулярность прямых и плоскостей	1
63	Повторение: перпендикулярность двух плоскостей	1
64	Повторение: углы и расстояния в пространстве	1
65–67	Задание № 14 из второй части ЕГЭ	3
68	Заключительный урок по курсу геометрии 10–11 классов	1
	ИТОГО:	68 часов

В заключение отметим, что рассмотренная форма работы с учащимися приводит к стабильным положительным результатам: росту качества знаний, успеваемости; формированию коммуникативных универсальных учебных действий; снижению школьной тревожности; формированию положительной учебной мотивации; росту уровня учебных

притязаний. Учитель на подобных уроках выступает в роли фасилитатора – человека, способного организовать и обеспечить успешную групповую коммуникацию.

Проведение тематического контроля в виде индивидуализированных контрольных работ с возможностью самостоятельной проверки правильности полученного ответа улучшает психологический климат в коллективе, выстраивает доверительные и уважительные отношения между учащимися и педагогом. В итоге подростки перестают бояться уроков контроля, и, как следствие, не пропускают эти уроки без уважительной причины. Мало того, в случае отсутствия на уроке контрольной работы учащиеся зачастую сами просят прислать им карточку с числовыми данными и номер варианта, чтобы выполнить контрольную работу дистанционно.

Литература

1. Геометрия. Сборник рабочих программ. 10–11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [сост. Т.А. Бурмистрова]. – М.: Просвещение, 2015. – С. 72–86.

АНОНС

Читайте в третьем номере журнала «Математика для школьников» статьи следующих авторов

ИДУ НА ЭКЗАМЕН

Золотухин Ю.П. (г. Гродно, Беларусь)

Основные методы решения текстовых задач

Предлагается авторский материал для организации систематизированного обобщающего повторения школьниками темы «Решение текстовых задач. Уточняются основные понятия, рассматриваются два основных метода решения таких задач — аналитико-синтетический и математического моделирования. Изложение материала сопровождается примерами с подробными решениями текстовых задач.

КЛУБ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

Карпушина Н.М. (г. Москва)

О чём умолчал премьер

1 сентября 2021 года СМИ облетела история о том, как премьер-министр России Михаил Мишустин посетил в День знаний «Физтех-лицей» имени П.Л. Капицы в Долгопрудном и задал ученикам 11 класса задачу на построение перпендикуляра с помощью одной линейки. Весь урок ребята вместе с учителем искали решение, но так и не нашли. В итоге его пришлось показывать самому премьеру. Задачу тут же окрестили «физтеховской», или «задачей Мишустина».

МАТЕМАТИКА — ЭТО ИНТЕРЕСНО

Совертков П.И. (г. Санкт-Петербург)

Математика для оформления садово-паркового пространства

В статье рассматривается математическое моделирование расположения подобных фигур в квадрате и арбелосе. Предлагается разработать проект для оформления садово-паркового пространства.

p -ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ

С.И. Калинин,

Вятский государственный университет
(г. Киров), kalinin_gu@mail.ru

S.I. Kalinin,

Vyatka State University (Kirov),
kalinin_gu@mail.ru

Ключевые слова: выпуклая функция, p -выпуклая функция, неравенство, уравнение

Keywords: convex function, p -convex function, inequality, equation

Аннотация: статья знакомит читателя с понятием p -выпуклой функции, которое обобщает хорошо известное классическое понятие выпуклой функции. Рассматривается вопрос о применении p -выпуклых функций при решении уравнений

Abstract: the article introduces the reader to the concept of a p -convex function, which generalizes the well-known classical concept of a convex function. The question of the application of p -convex functions in solving equations is considered

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_26

Понятие p -выпуклой функции

Напомним читателю определение понятия выпуклой функции.

Функция $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ называется *выпуклой* на промежутке l числовой прямой Ox , если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

Если для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (2)$$

то функцию f называют *строго выпуклой* на рассматриваемом промежутке.

Заметим, что строго выпуклая функция является выпуклой.

Аналогично определяют *вогнутая* и *строго вогнутая* функции – для этого в неравенствах (1)–(2) следует использовать знаки $\geq$ и $>$ соответственно.

Введём в рассмотрение понятие p -выпуклой функции, обобщающее понятие выпуклой функции.

Определение 1 [1]. Функцию $f: l \subset (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ назовём p -выпуклой ($p \neq 0$) на промежутке l , если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f([\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p]^{1/p}) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (3)$$

Если в условиях определения 1 для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство $f([\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p]^{1/p}) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$, (4) то функцию f условимся называть *строго p -выпуклой* на промежутке l .

Отметим, что строго p -выпуклая функция является p -выпуклой.

Определение 1 действительно обобщает понятие выпуклой функции: при $p = 1$ имеем классическое определение выпуклой функции.

Изменение знаков неравенств в соотношениях (3)–(4) на противоположные приводит к определениям понятий p -вогнутой и строго p -вогнутой функций.

Приведём пару примеров.

1. Функция $f(x) = x$, $x > 0$, является строго p -выпуклой при $p < 1$ ($p \neq 0$) и строго p -вогнутой при $p > 1$. Данный факт вытекает из свойства строгой монотонности взвешенного среднего степенного (см., напр., [2])

$$\tilde{F}(p) \equiv F_{a,b}^{(\lambda, 1-\lambda)}(p) = \begin{cases} (\lambda a^p + (1-\lambda)b^p)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0, \\ a^\lambda b^{1-\lambda}, & p = 0 \end{cases}$$

положительных чисел a и b ($a \neq b$) с весами λ и $1 - \lambda$, $\lambda \in [0; 1]$: величина $\tilde{F}(p)$ есть возрастающая функция.

2. Предлагаем читателю убедиться в том, что функция $g(x) = x^2 + 2$, $x > 0$, является и 2-выпуклой, и 2-вогнутой. Для этого достаточно показать, что данная функция неравенство (1) реализует со знаком равенства.

Замечание 1. В терминологии статьи [3] p -выпуклая функция есть $(p, 1)$ -выпуклая.

Геометрическая характеристика p -выпуклости

С целью геометрической характеристики p -выпуклости функции введём в рассмотрение понятие p -степенной дуги (p -степенной кривой).

Определение 2. Всякую связную часть графика функции $y = \alpha + \beta x^p$, $x > 0$, где $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, условимся называть p -степенной дугой, или p -степенной кривой.

Покажем, что существует ровно одна p -степенная дуга, соединяющая две точки правой полуплоскости плоскости xOy , не лежащие на одной вертикали.

Действительно, пусть имеются точки $M_1(x_1; y_1)$ ($x_1 > 0$) и $M_2(x_2; y_2)$ ($x_2 > 0$, $x_2 \neq x_1$). Координаты данных точек подставим в общее уравнение $y = \alpha + \beta x^p$ p -степенной дуги, это позволит записать систему линейных уравнений относительно параметров α и β :

$$\begin{cases} y_1 = \alpha + \beta x_1^p, \\ y_2 = \alpha + \beta x_2^p. \end{cases}$$

Решая систему, находим единственное решение

$$\alpha = \frac{y_1 x_2^p - y_2 x_1^p}{x_2^p - x_1^p}, \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2^p - x_1^p}.$$

Таким образом, кривая

$$y = \frac{y_1 x_2^p - y_2 x_1^p}{x_2^p - x_1^p} + \frac{y_2 - y_1}{x_2^p - x_1^p} x^p \quad (5)$$

есть единственная p -степенная дуга, проходящая через точки M_1 и M_2 . Нужно показано.

Из (5) следует, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае $y_1 = y_2$), то их соединяющая p -степенная дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Перейдём к непосредственной геометрической характеристике p -выпуклости функции. Покажем, что если $f(x)$ — p -выпуклая на промежутке I , $I \subset (0; +\infty)$, функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего I , и любого $x \in (a; b)$ выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f будет находиться не выше точки p -степенной дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x . Для этого, отправляясь от (5), составим уравнение данной p -степенной дуги

$$y = \frac{b^p f(a) - a^p f(b)}{b^p - a^p} + \frac{f(b) - f(a)}{b^p - a^p} x^p \quad (6)$$

и $x \in (a; b)$ представим в виде

$$x = \left[\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} a^p + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} b^p \right]^{1/p}. \quad (7)$$

Заметим при этом, что для дробей

$$\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p}, \quad \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p}$$

в представлении (7) выполняются условия:

$$\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} \in (0; 1), \quad \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} \in (0; 1),$$

$$\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} = 1.$$

Используя последнее и условие p -выпуклости функции f , её значение $f(x)$ оценим сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left[\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} a^p + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} b^p\right]^{1/p}\right) \leq \\ &\leq \frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} \cdot f(a) + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} \cdot f(b). \end{aligned}$$

В произведённой оценке выражение

$$\frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} \cdot f(a) + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} \cdot f(b),$$

легко видеть, преобразуется к виду правой части (6). Следовательно, точка $(x; f(x))$, $x \in (a; b)$, графика функции f лежит не выше точки

$$\left(x; \frac{b^p f(a) - a^p f(b)}{b^p - a^p} + \frac{f(b) - f(a)}{b^p - a^p} x^p\right)$$

p -степенной дуги (6).

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что если $f(x)$ — строго p -выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l , и любого x , $x \in (a; b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит строго ниже точки p -степенной дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x .

Предлагаем читателю показать, что рассмотренные утверждения, характеризующие p -выпуклую и строго p -выпуклую функции геометрически, обратимы.

Предлагаем также привести соответствующую геометрическую характеристику и в отношении p -вогнутых функций.

О достаточных условиях строгой p -выпуклости функции

Условимся о следующей символике, которую будем использовать ниже. Во-первых, правую часть представления (6) будем обозначать $\sigma_f^{(a,b)}(x)$, то есть

$$\sigma_f^{(a,b)} = \frac{b^p f(a) - a^p f(b)}{b^p - a^p} + \frac{f(b) - f(a)}{b^p - a^p} x^p.$$

Кроме того, для дважды дифференцируемой функции $f(x)$ введём в рассмотрение символ $\Delta_f^p(x) = xf''(x) - (p-1)f'(x)$.

Поставим сейчас перед собой задачу вывести достаточные условия строгой p -выпуклости и строгой p -вогнутости непрерывной на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ и дважды дифференцируемой внутри данного промежутка функции. Справедлива

Теорема А. Пусть $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ — функция, непрерывная на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ числовой прямой Ox , дважды дифференцируемая внутри данного промежутка. Если для внутренних точек x из l выполняется условие $\Delta_f^p(x) > 0$, то f — строго p -выпуклая на промежутке l функция. Если же для таких точек выполняется условие $\Delta_f^p(x) < 0$, то f — строго p -вогнутая на рассматриваемом промежутке функция.

Доказательство. Пусть $\Delta_f^p(x) > 0$ для любой внутренней точки x промежутка l . Покажем, что в данном предположении для любого отрезка $[a; b] \in l$ будет выполняться неравенство $f(x) < \sigma_f^{(a,b)}(x)$, где x — произвольная точка из интервала (a, b) . Это будет означать, как отмечено выше, строгую p -выпуклость функции f на промежутке l .

Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) &= \\ &= \frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} \cdot f(a) + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} \cdot f(b) - f(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^p - x^p}{b^p - a^p} \cdot (f(a) - f(x)) + \frac{x^p - a^p}{b^p - a^p} \cdot (f(b) - f(x)) = \\
&= \frac{(b^p - x^p)(x^p - a^p)}{b^p - a^p} \times \\
&\times \left(\frac{f(a) - f(x)}{x^p - a^p} + \frac{f(b) - f(x)}{b^p - x^p} \right).
\end{aligned}$$

Замечаем, что в последнем произведении в силу неравенства $a < x < b$ дробь $K(a, x, b) = \frac{(b^p - x^p)(x^p - a^p)}{b^p - a^p}$ положительна при $p > 0$ и отрицательна при $p < 0$, а дроби $\frac{f(a) - f(x)}{x^p - a^p}$, $\frac{f(b) - f(x)}{b^p - x^p}$ по теореме Коши можно представить в виде

$$\frac{f(a) - f(x)}{x^p - a^p} = -\frac{f'(\xi)}{p\xi^{p-1}}, \quad \frac{f(b) - f(x)}{b^p - x^p} = \frac{f'(\eta)}{p\eta^{p-1}},$$

где ξ и η – некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Следовательно,

$$\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = K(a, x, b) \cdot \left(\frac{f'(\eta)}{p\eta^{p-1}} - \frac{f'(\xi)}{p\xi^{p-1}} \right).$$

Применяя теорему Лагранжа, отсюда получаем представление

$$\begin{aligned}
&\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) = \\
&= \frac{K(a, x, b)}{p\xi^p} \cdot (\zeta f''(\zeta) - (p-1)f'(\zeta))(\eta - \xi),
\end{aligned}$$

где ζ – некоторая точка, лежащая между точками ξ и η . Так как $\frac{K(a, x, b)}{p\xi^p} > 0$, $\eta - \xi > 0$, $\Delta_f^p(\zeta) = \zeta f''(\zeta) - (p-1)f'(\zeta) > 0$, то получаем $\sigma_f^{(a,b)}(x) - f(x) > 0$. Нужно показать.

Ясно, что второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 2. Техника доказательства теоремы А позволяет сформулировать следующее утверждение.

Если в условиях теоремы А для внутренних точек x промежутка l выполняется условие $\Delta_f^p(x) \geq 0$, то $f - p$ -выпуклая на промежутке l функция; выполнение же для таких точек неравенства $\Delta_f^p(x) \leq 0$ обеспечивает вывод о p -вогнутости функции f на рассматриваемом промежутке.

Замечание 3. Теорема А есть аналог классического утверждения о достаточных условиях строгой выпуклости и строгой вогнутости гладкой функции в терминах её второй производной.

Приведём некоторые примеры использования теоремы А.

Пусть $f(x) = e^x$, $x > 0$. Для данной функции величина $\Delta_f^p(x)$ есть $(x - p + 1)e^x$, следовательно, при $p < 1$ функция будет строго p -выпуклой.

Для функции $f(x) = x$, $x > 0$, величина $\Delta_f^p(x) = 1 - p$ будет положительной при $p < 1$ ($p \neq 0$) и отрицательной при $p > 1$, значит, данная функция в силу теоремы А является строго p -выпуклой при $p < 1$ и строго p -вогнутой при $p > 1$. Отмеченный факт выше был обоснован иным способом.

Для функции $f(x) = x^2$, $x > 0$, имеем $\Delta_f^p(x) = 2x(2 - p)$, следовательно, по теореме А данная квадратичная функция строго p -выпукла при $p < 2$ и строго p -вогнута при $p > 2$.

Если рассмотреть функцию $f(x) = \alpha + \beta x^p$, $x > 0$, $p \neq 0$, то для неё, легко видеть, $\Delta_f^p(x) = 0$. Следовательно, эта функция является и p -выпуклой, и p -вогнутой.

Об использовании p -выпуклых функций при решении уравнений

В настоящем разделе мы рассмотрим приём решения некоторых уравнений, основывающийся на использовании понятия строго p -выпуклой или строго

p -вогнутой функции. Но сначала установим следующую теорему.

Теорема Б. Пусть $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ – строго p -выпуклая или строго p -вогнутая на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ числовой прямой Ox функция и $u, v, [\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p} \in l$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда равенство

$$f([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \quad (8)$$

справедливо лишь при условии: либо $u = v$, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что если или $u = v$, или $\lambda = 0$, или $\lambda = 1$, то равенство (8) выполняется.

Пусть f – строго p -выпуклая на промежутке l функция, имеют место включения $u, v, w = [\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p} \in l$, а также выполняется (8). Предположим, что $u \neq v$.

В данных условиях включение $\lambda \in (0; 1)$ выполняться не может, ибо по определению строгой p -выпуклости функции выполнение равенства (8) невозможно.

Если $\lambda > 1$, то положим $\alpha = \frac{1}{\lambda}$; ясно, что $\alpha \in (0; 1)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} u^p &= \alpha w^p + (1 - \alpha)v^p, \\ u &= [\alpha w^p + (1 - \alpha)v^p]^{1/p}, \\ f(u) &= \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) = \\ &= \lambda f([\alpha w^p + (1 - \alpha)v^p]^{1/p}) + (1 - \lambda)f(v) < \\ < \lambda \alpha f(w) + \lambda(1 - \alpha)f(v) + (1 - \lambda)f(v) = f(w). \end{aligned}$$

Полученная оценка позволяет сделать вывод о том, что λ не может превосходить 1.

Если $\lambda < 0$, то положим $\beta = \frac{1}{1 - \lambda}$; очевидно, $\beta \in (0; 1)$. Имеем:

$$\begin{aligned} v^p &= \beta w^p + (1 - \beta)u^p, \\ v &= [\beta w^p + (1 - \beta)u^p]^{1/p}, \\ f(w) &= \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) = \\ &= \lambda f(u) + (1 - \lambda)f([\beta w^p + (1 - \beta)u^p]^{1/p}) < \\ < \lambda f(u) + (1 - \lambda)\beta f(w) + (1 - \lambda)(1 - \beta)f(u) = \\ &= f(u). \end{aligned}$$

И эта оценка невозможна, поэтому λ не может быть отрицательным значением.

Таким образом, если (8) выполняется,

то либо $u = v$, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$. Теорема Б доказана.

Замечание 4. Установленная теорема обобщает теорему 3 работы [4, с. 45] об использовании строго выпуклых и строго вогнутых функций при решении уравнений.

Перейдём сейчас к рассмотрению примеров применения установленной теоремы Б.

Задача 1. Сколько корней на интервале $(1; 4)$ имеет уравнение

$$\begin{aligned} (\sin^2 x \cdot \sqrt{x-1} + \cos^2 x \cdot \sqrt{4-x})^2 = \\ = \ln(\sin^2 x \cdot e^{x-1} + \cos^2 x \cdot e^{4-x})? \end{aligned} \quad (9)$$

Решение. Легко видеть, что уравнение (9) определено на интервале $(1; 4)$. На данном интервале, заметим, оно равносильно уравнению

$$\begin{aligned} e^{(\sin^2 x \cdot \sqrt{x-1} + \cos^2 x \cdot \sqrt{4-x})^2} = \\ = \sin^2 x \cdot e^{x-1} + \cos^2 x \cdot e^{4-x}. \end{aligned} \quad (10)$$

которое относится к виду (8). Действительно, уравнение (10) порождается функцией $f(x) = e^x$, $x > 0$, являющейся строго $\frac{1}{2}$ -выпуклой, для него параметр λ есть $\lambda = \sin^2 x$, $u = x - 1$, $v = 4 - x$. Следовательно, в силу теоремы Б уравнение (10) на интервале $(1; 4)$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x - 1 = 4 - x, \\ \sin x = 0, \\ \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим искомые корни уравнения (9): $x = 2,5$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: Два корня.

Приведём несколько уравнений, порождаемых простой строго p -выпуклой ($p < 1$) функцией $y = x$, $x > 0$.

Задача 2. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6}.$$

Решение. Уравнение задано на от-

резке $[1; 4]$, при этом значения $x = 1$, $x = 4$ не являются его корнями. На интервале же $(1; 4)$ оно, заметим, равносильно уравнению

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x}\right)^2 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(4-x),$$

которое есть уравнение вида (8) со строго $\frac{1}{2}$ -выпуклой функцией $f(x) = x$, $x > 0$, и $\lambda = \frac{1}{2}$, $u = x - 1$, $v = 4 - x$. Отсюда в силу теоремы Б следует, что нам теперь достаточно решить уравнение $x - 1 = 4 - x$. Из последнего находим единственный искомый корень $x = 2,5$.

О т в е т: $x = 2,5$.

Задача 3 [5, с. 26]. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 2.$$

Р е ш е н и е. Область определения неизвестного есть, очевидно, отрезок $[-1; 1]$. Легко видеть, что концы данного отрезка уравнению не удовлетворяют. На интервале $(-1; 1)$ рассматриваемое уравнение преобразуем к эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{1-x} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+x}\right)^4 &= \\ &= \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) порождается строго $\frac{1}{4}$ -выпуклой функцией $f(x) = x$, $x > 0$, и $\lambda = \frac{1}{2}$, $u = 1 - x$, $v = 1 + x$. Значит, оно равносильно уравнению $1 - x = 1 + x$, из которого находим единственный корень $x = 0$ исходного уравнения.

О т в е т: $x = 0$.

Точно так же решается следующая известная

Задача 4 [4, с. 43]. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{17-x} + \sqrt[4]{x+15} = 4.$$

Р е ш е н и е. Уравнение на области задания равносильно уравнению

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt[4]{17-x} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{x+15}\right)^4 = \frac{1}{2}(17-x) + \frac{1}{2}(x+15),$$

которое по теореме Б будет равносильно уравнению $17 - x = x + 15$, или $x = 1$.

О т в е т: $x = 1$.

Задача 5 [4, 6, 7]. Решите уравнение

$$\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}} = 2. \quad (12)$$

Р е ш е н и е. Областью определения данного уравнения является отрезок $[-1; 1]$, центр которого не обращает его в равенство. На множестве $[-1; 1] \setminus \{0\}$ запишем уравнение в эквивалентной форме вида (8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^5 &= \\ &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x^2}). \end{aligned} \quad (13)$$

Для уравнения (13) $f(x) = x$, $x > 0$, есть строго $\frac{1}{5}$ -выпуклая функция, $\lambda = \frac{1}{2}$, $u = 1 - \sqrt{1-x^2}$, $v = 1 + \sqrt{1-x^2}$. Значит, уравнения (13) и (12) равносильны уравнению $1 - \sqrt{1-x^2} = 1 + \sqrt{1-x^2}$, из которого находим искомые корни $x = \pm 1$.

О т в е т: $x = -1$; $x = 1$.

Замечание 5. В статье [7] рассмотрено 12 различных способов решения уравнения (12). Таким образом, вниманию читателя предложен ещё один подход к решению этого уравнения.

Литература

1. Zhang, KS, Wan, JP: p -convex functions and their properties. Pure Appl. Math. 23(1), 130–133 (2007).
2. Калинин С.И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: Учебное пособие по спецкурсу. Киров: Изд-во ВГТУ, 2002. 368 с.
3. Kalinin S.I. (0, 0)-Convex Functions and

Their Properties. Journal of Mathematical Sciences, 241(6), 727–734. DOI 10.1007/s10958-019-04458-9.

4. Чучаев И. И., Денисова Т. В. Выпуклые функции и уравнения // Математика в школе. 2005. № 5. С. 41–47.

5. Калинин С.И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического

профиля. Москва: Изд-во «Московский Лицей», 2013. 112 с.

6. Смоляков А. Н. Нестандартные способы решения иррациональных уравнений // Математика в школе. 2002. № 7. С. 35–36.

7. Калинин С.И. Уравнение одно, а сколько решений... целая дюжина! // Математика в профильной школе. Фрактал. 2016. № 1. С. 20–27.

Скончался ленинградский учёный и коллекционер Марк Башмаков

В своей петербургской квартире на 86-м году жизни умер Марк Башмаков – петербургский коллекционер, библиофил и математик. Об этом 1 апреля «Фонтанке» сообщили в пресс-службе Эрмитажа.

Марк Иванович был человеком разносторонним: доктором физико-математических наук, профессиональным альпинистом, исследователем и коллекционером. Он ребёнком пережил блокаду Ленинграда, после школы окончил математико-механический факультет ЛГУ и остался работать в университете: сначала аспирантом, потом доцентом и профессором. Создал свою научную школу и обогатил науку работами по алгебре и теории чисел. Известны его «теорема Башмакова», «проблема Башмакова» и «метод Башмакова».

Огромную часть его жизни занимала педагогика. Под руководством Марка Башмакова вышло 50 учебников по математике. Он организовал проведение международного математического конкурса-игры «Кенгуру» в России, в котором может принять участие любой школьник. Марк Башмаков стал одним из организаторов Академической гимназии и 610-й классической гимназии в Петербурге, где предложил ввести в программу «Латынь и греческий».

Начиная с 1950-х годов и до конца жизни, Марк Иванович собирал редкие книги. В 2010-е годы он стал советником директора Эрмитажа и, благодаря его деятельному участию, в главном музее Петербурга прошло 16 тематических выставок книжных экспонатов из его коллекции. В дар музею Марк Башмаков передал 40 редчайших книг, из которых сложилось целое направление в работе Эрмитажа, в том числе Кабинет книги художника.

Последней прижизненной выставкой из собрания Марка Башмакова стала экспозиция уникальных печатных экземпляров «Печать сюрреализма». Она прошла в Эрмитаже летом 2021 года и представила около ста изданий с иллюстрациями Жоана Миро, Макса Эрнста, Сальвадора Дали и других мастеров, демонстрирующих зарождение, развитие и метаморфозы художественного движения сквозь призму книги и печатной графики.

На основе материалов своей коллекции Марк Башмаков издал четыре книги.

Источник: Интернет-газета Фонтанка.ру

Коллектив редакции журнала «Математика в школе», активным членом редколлегии которого на протяжении многих лет был Марк Иванович, выражает соболезнования родным, близким и друзьям покойного, и в память о нём, будет активно использовать в работе его методическое наследие.

УГОЛ, ФРАКТАЛ И ЗВЁЗДЧАТЫЕ ИЛЛЮЗИИ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРИИ

Р.Р. Пименов,

учитель Академического лицея
«Физико-техническая школа» им. Ж.И. Алфёрова
РАН, Санкт-Петербург,
revoltp33@gmail.com

R.R. Pimenov,

teacher of the Academic Lyceum
«Physics and Technology School» named after
Zh.I. Alferov at the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, revoltp33@gmail.com

Ключевые слова: правильный многоугольник, симметрия, угол, фрактал, эстетика

Keywords: regular polygon, symmetry, angle, fractal, aesthetics

Аннотация: в статье приводятся примеры фракталов, орнаментов и иллюзий, построенных на основе правильных многоугольников. Преимущественно рассматриваются правильные пяти- и десятиугольники. Обсуждается использование полученных конструкций и методов их создания при изучении основ геометрии, в частности, понятия угла, а также тематика упражнений для школьников. Цель работы – преодолеть часто возникающую сухость и ограниченность материала при изложении начал геометрии и продемонстрировать полезность компьютерной лаборатории для её преподавания. Часть материалов статьи уже использовалась нами на уроках геометрии в восьмом классе лицея

Abstract: the article provides examples of fractals, ornaments and illusions built on the basis of regular polygons. Regular pentagons and decagons are mainly considered. The use of the obtained structures and methods of their creation in the study of the foundations of geometry, in particular, the concept of an angle, as well as the topics of exercises for schoolchildren are discussed. The purpose of the work is to overcome the often dryness and limited material in the presentation of the principles of geometry and to demonstrate the usefulness of a computer laboratory for teaching it. Some of the materials of the article have already been used by us in geometry lessons in the eighth grade of the Lyceum

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_33

Введение. В статье «Азбука геометрии, или Декаметр» [1] мы рассказывали об использовании правильного десятиугольника как пособия по элементарной геометрии. В цитируемой работе мы касались и построения фракталов на его основе. Теперь мы развиваем данную тему, рассказывая, как применение простейших свойств углов и симметрий ведёт к получению удивительных фигур. Наши примеры, основанные на одном несложном алгоритме, могут пригодиться при знакомстве с началами геометрии, а ис-

пользование компьютера (мы обращаемся к программе GeoGebra) позволит построить любую приведённую ниже фигуру за минуты.

При этом мы считаем, что даже незнание точного определения угла или симметрии не проблема: данные понятия интуитивно ясны.

В первых частях статьи представляются и обсуждаются необычные геометрические фигуры, в заключении высказываются идеи об их применении в школьном образовании.

1. Десятиугольник и фракталы. Построение первого, десятичастного, фрактала начинается (см. рис. 1) с правильного десятиугольника под номером 1. К его стороне AB приставляется (то есть симметрично отражается относительно AB исходный) равный ему десятиугольник с номером 2. Теперь уже на нём нужно выбрать сторону, к которой мы приставим третий десятиугольник, вновь равный исходному. Выберем сторону на десятиугольнике 2, ближайшую к той его стороне, которая параллельна AB . Таких сторон две, зафиксируем любую из них и обозначим её CD . Заметим, что угол между CD и AB минимален среди всех ненулевых углов, возможных между сторонами. Выбор стороны CD определит, в каком направлении (по часовой стрелке или против неё) мы будем продолжать построение, приставляя последовательно новые десятиугольники. Наконец, десятиугольник с номером 10 замкнёт конструкцию.

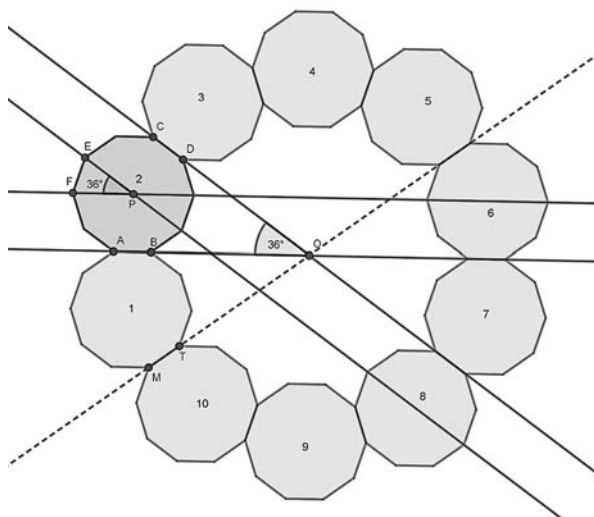


Рис. 1. Начало десятичастного фрактала

Этот результат может удивить, но сейчас мы его обоснуем, используя самые элементарные свойства углов и симметрии.

Начнём с несложной, но поучительной леммы.

Лемма. Для всякой стороны правильного десятиугольника существует параллельная ей диагональ, проходящая через противоположные вершины десятиугольника.

Для доказательства достаточно рассмотреть симметрию десятиугольника, меняющую местами вершины выбранной стороны. Тогда вершины десятиугольника разобьются на пары вершин, переходящих друг в друга при данной симметрии. Среди этих пар найдётся и пара противоположных вершин. Соединим их и получим искомую диагональ.

Подробно тема симметрии правильного десятиугольника обсуждена в [1].

Воспользуемся леммой и проведём две диагонали, параллельные AB и CD . Образующий ими равнобедренный треугольник PEF (P – центр десятиугольника 2) при вершине P имеет угол в 36° . Поскольку $AB \parallel PF$ и $CD \parallel PE$, то угол между AB и CD также равен 36° .

Теперь мысленно продлим общие стороны десятиугольников и докажем, что все они пересекаются в одной точке (на рисунке 1 это точка O). Рассмотрим три последовательных десятиугольника и те три их стороны, относительно которых осуществляется симметрия. По построению первая из выбранных стороны симметрична третьей относительно второй. Следовательно, продолжение третьей стороны проходит через точку пересечения первых двух. Так как любые три последовательно взятые прямые пересекаются в одной точке, все прямые совокупности пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать. Отсюда также следует, что сторона MT (рис. 1) десятого десятиугольника лежит на той же прямой, что совпадает с соответствующей ей стороной первой фигуры.

Но, может быть, вершины десятой фигуры не совпадут с вершинами первой? Докажем невозможность этого. Рассмотрим точку O пересечения прямых AB и CD . Отрезки OD и OB равны, что следует из симметрии десятиугольника 2, переводящей точки B и D друг в друга. Значит, $OT = OD = OB$ (удобный случай поговорить о транзитивности равенства).

Аналогичное построение можно применить уже не к одному десятиугольнику, а ко всей полученной на рисунке 1 фигуре. Результатом будет конструкция, изображённая на рисунке 2.

Подчеркнём, что роль вершин теперь играют не точки, как на рисунке 1, а соответствующие десятиугольники. С полученной фигурой можно продолжать делать то же самое.

Отметим, что орнамент на рисунке 2 состоит из 80 десятиугольников, но их построение с помощью программы GeoGebra займёт менее 5 минут и может стать нескучной практической работой.

2. Пятиугольник и возникающие из него фракталы. Применим теперь опи-

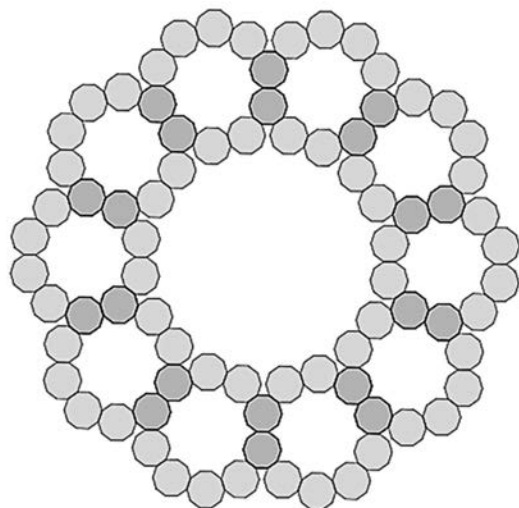


Рис. 2. Вторая итерация десятичастного фрактала

санное построение к пятиугольнику. Процесс снова замкнётся, но не на пятом, как можно было ожидать, а на десятом шаге. Почему так происходит, поясняет рисунок 3. Подробное доказательство приводить не будем, оно вполне элементарно.

Назовём полученную фигуру «пентадека», поскольку она состоит из десяти пятиугольников. Пентадеки, состоящие из равных пятиугольников, можно соединять друг с другом различными способами. Один из них показан на рисунке 4, где построена новая фигура с пятикратной симметрией, замыкающаяся на пятом шаге.

Обратим внимание, что если мы теперь будем аналогично действовать с фигурой на рисунке 4, построение замкнётся на десятом шаге.

Мы можем составлять пентадеки иным способом. Если между приставляемыми пятиугольниками будет находиться два пятиугольника, а не один, как в прошлом случае, построение замкнётся на десятом шаге, и мы получим фигуру, изображённую на рисунке 5. Она напоминает фигуру на рисунке 2, но состоит из пятиугольников.

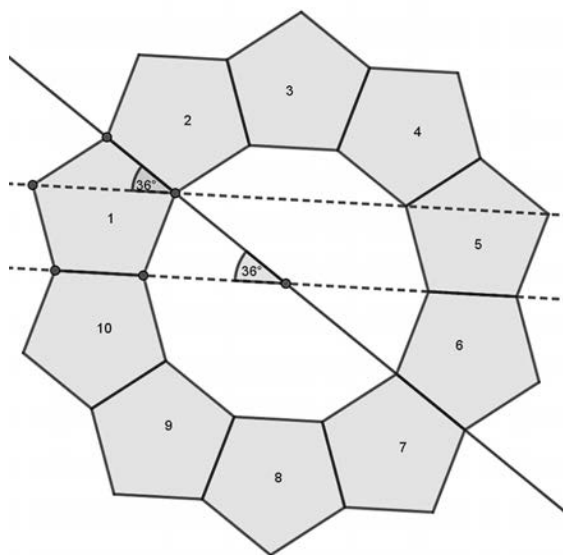


Рис. 3. Пентадека

Комбинируя различные способы соединения пятиугольников, можно создавать необычные фракталы и узоры, например, изображённый на рис. 6.

3. Три звёздчатых иллюзии. Схожие действия можно совершать с любыми правильными многоугольниками. Правильный треугольник и квадрат дадут хорошо известные шестиугольные «соты» и «тетрадку в клеточку». А вот в других случаях мы получим интересные фигуры, глядя на которые, непросто осознать их форму и догадаться о том, как они были созданы. Они кажутся объёмными.

Чтобы изобразить эти фигуры, упростим прежний алгоритм: возьмём какой-нибудь правильный многоугольник и присоединим два равных ему к его соседним сторонам. Теперь замыкание фигуры не так очевидно, поскольку возникающие многоугольники могут пересекаться. Можно говорить не о замыкании, а о том, что в случае присоединения очередного многоугольника все его стороны ложатся на уже имеющиеся на рисунке отрезки,

поскольку совпадают со сторонами уже построенных правильных многоугольников. Это происходит в тот момент, когда мы возвращаемся (двигаясь по соседним сторонам присоединяемых многоугольников) на исходную сторону первоначального. Число присоединённых многоугольников при этом зависит от чётности числа сторон исходного многоугольника.

Заметим, что если применить этот алгоритм к правильному пятиугольнику, то получится «розетка», которую можно увидеть в центре и по краю узора на рисунке 6.

Для демонстрации мы выбрали три примера, показавшихся нам наиболее интересными.

Первый из них (рис. 7) кажется сочетанием прямоугольных параллелепипедов в пространстве. При взгляде на рисунок то один, то другой параллелепипед кажутся выпирающими, создавая постоянную иллюзию. Построена данная фигура, однако, на основе правильного восьмиугольника, который можно увидеть, например, в левой части рисунка. Мы не стали

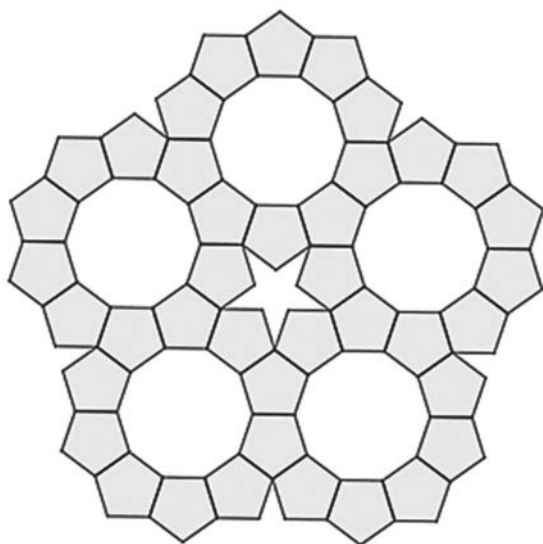


Рис. 4. Конструкция из пяти пентадек

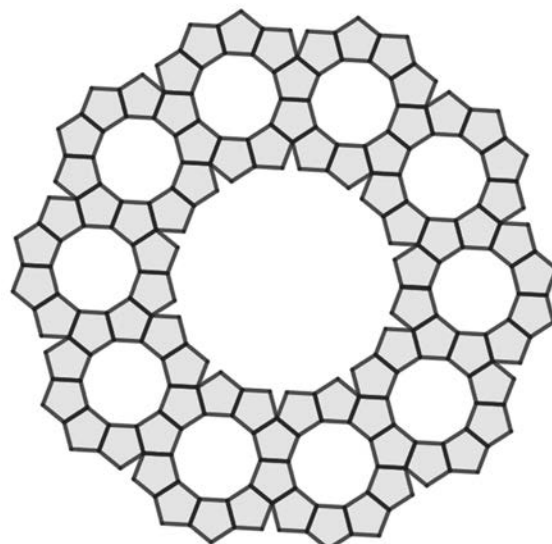


Рис. 5. Конструкция из десяти пентадек – «пентадекадека»

нумеровать на рисунке присоединяемые восьмиугольники, чтобы не исказить восприятие всей фигуры.

При увеличении числа сторон (рис. 8 и рис. 9) иллюзия становится более плавной, но изображённую фигуру мы также видим объёмной, и расположение её выступов движется вместе с нашим взглядом. Найти исходные многоугольники на каждом из данных рисунков вполне возможно, это правильный двенадцати- и шестнадцатиугольник соответственно.

4. Заключение. Начнём с технических деталей работы. В программе GeoGebra есть удобные инструменты «симметрия» и «правильный многоугольник». Если мы не хотим, чтобы на экране появилось более сотни обозначений точек и отрезков, лучше отключить их автоматическое генерирование. Чтобы при симметрии правильного многоугольника отражалась не только его внутренность, но и стороны, можно обвести построенный многоугольник (с помощью инструмента «Много-

угольник») и далее отражать именно обведённый многоугольник. Все описанные построения вполне доступны семиклассникам и даже школьникам более младшего возраста.

Перейдём к геометрической и методической сторонам дела. Как замечали ещё древние греки, «удивление – это начало познания». Мы надеемся, что демонстрируемые построения и фигуры удивят тех, кто видит их впервые. В учебниках геометрии пишут о разнообразии геометрических фигур, а используя компьютер мы можем ввести учеников в их мир, предоставляя возможность познавать его самостоятельно.

Но удивление – это только начало. Как использовать свойства фигур для обучения геометрии? Каждая рассмотренная фигура даёт возможность провести по ней практическую работу или сформулировать содержательное домашнее задание.

Начнём с простейшего. Вычисление параметров фигур, например длины OT при заданной стороне AB исходного де-

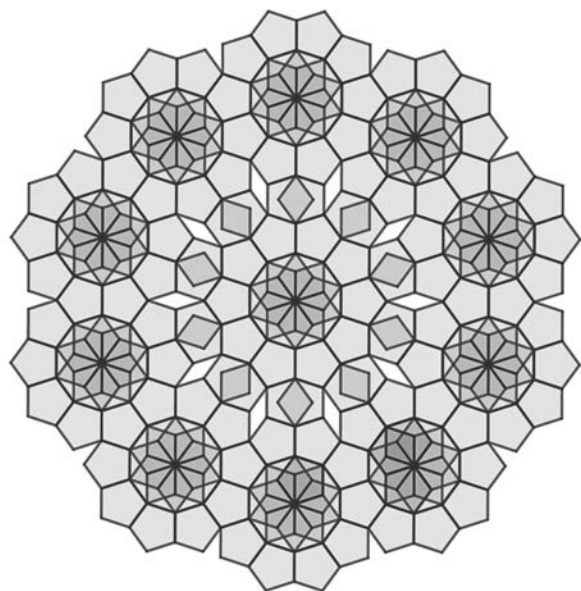


Рис. 6.
Узор пятиугольчатый

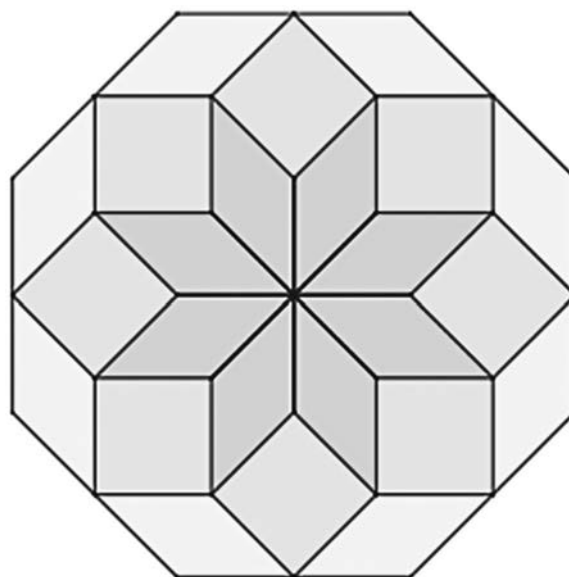


Рис. 7. Узор из восьми правильных
восьмиугольников

сятиугольника на рисунке 1 – хорошее упражнение по теме «Подобие треугольников». При этом правильный десятиугольник тесно связан с золотым сечением, поскольку радиус AP описанной вокруг десятиугольника окружности относится к его стороне в пропорции золотого сечения (см. [1]). Строгое доказательство замыкания фигуры на рисунке 2 также, на наш взгляд, полезно. Наконец, свойства замыкания фигур на рис. 7–9 – неплохое упражнение на нахождение углов.

Но возможны и более обширные работы, связанные с рассмотренными фигурами. Например, ученики могут самостоятельно исследовать алгоритм создания фрактала в случае произвольного правильного n -угольника. Возможные задания: проведём для n -угольника построения, аналогичные описанным в п. 1. Замкнётся ли образуемая фигура и если замкнётся, то на каком шаге? Ответ зависит от чётности n , и мы считаем обнаружение этой закономерности поучительным исследованием. Компьютер

позволяет легко ставить подобные геометрические эксперименты.

Интересны красота и фрактальные свойства возникающих фигур. Для демонстрации фракталов удобнее всего стартовать с десятиугольника, как показано на рисунках 1 и 2. Но фигуры на основе пятиугольника открывают больше неожиданностей и потому особенно привлекательны. Можно дать им условные названия, используя греческие числительные «пента» и «дека». Если «пентадекой» мы назвали фигуру, полученную десятикратным «тиражированием» правильного пятиугольника, то фигуру на рисунке 1 естественно назвать «декадека», а на рисунке 2 – «декадекадека». Заметим, что нашими действиями из фигуры с пятикратной симметрией можно получить только фигуру с десятикратной симметрией, а из фигуры с десятикратной симметрией – фигуру как с десятикратной, так и с пятикратной симметрией. Это означает, что фигур, которые можно было бы назвать «пентапентадека» или «пентапентапентадека» не существу-

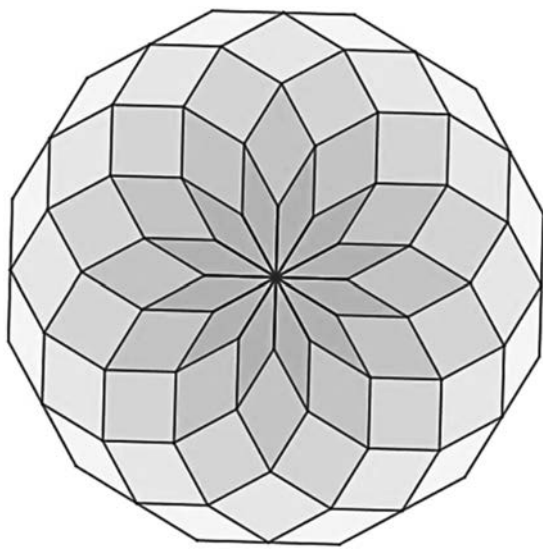


Рис. 8. Узор из двенадцати двенадцатиугольников

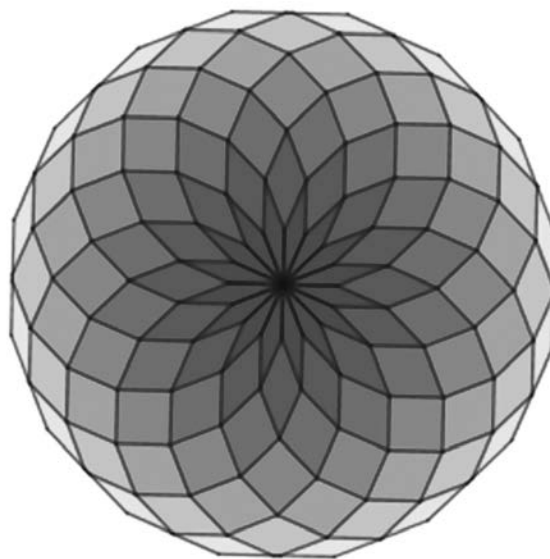


Рис. 9. Узор из шестнадцати шестнадцатиугольников

ет. Впрочем, интересные фигуры, возникающие на основе присоединения друг к другу правильных пятиугольников, не ограничиваются данной классификацией (например, фигура с рисунка 6 выпадает из неё), но создание подобных узоров может увлечь учеников.

Хорошо прослеживается также связь уроков информатики и геометрии. Использовать программирование для рисования фрактальных фигур очень естественно, и мы считаем плодотворными занятия, когда на уроке или факультативе соединяются геометрия и программирование, а результат строго выверен и непосредственно красив. Хороший пример этому «система Линденмайера» или «L-systems», правда она доступна скорее старшеклассникам (см. [3–4]). Заметим также, что аналогичные фракталы можно создавать не из правильных многоугольников, а из касающихся друг друга равных кругов. В этом случае метод построения даже прозрачнее, подробно он рассмотрен нами в конце книги [2].

Подчеркнём, наконец, следующее: именно в курсе геометрии учащиеся чаще всего сталкиваются с самим понятием «доказательство» и необходимостью доказывать, участь тем самым логике. Это замечательно и ни в коем случае не должно теряться. Но компьютер позволяет содержательно обогатить традиционное изучение геометрии, внося в него дух исследования, увлекая в лабораторию. Например, на первых уроках ученикам демонстрируются изображённые в начале статьи фигуры. Ученики узнают или

обнаруживают самостоятельно свойство их замыкания. Для них это – неожиданный опытный факт. Как убедиться, что он всегда имеет место, как его доказать? Последующие определения отрезков и углов решают эту возникшую из геометрического эксперимента проблему. Возможно, что при построении узоров на основе правильного пятиугольника ученики обнаружат новые свойства, которые в дальнейшем смогут доказывать самостоятельно. Мы видим в рассмотренных фигурах большие возможности для функционирования эстетическо-геометрической лаборатории на уроках и факультативах. С их демонстрации мы рекомендуем начинать систематическое изучение угла: не с определения, а с проблемы и красивой загадки.

Мы благодарим

А.М. Саблину,

В.И. Рыжика,

М.Г. Иванова

за интересные беседы о преподавании геометрии.

Литература

1. Пименов Р.Р. Алгебра геометрии, или Декаматрон // Математика в школе. 2021. № 6. С. 21–31.
2. Пименов Р.Р. Эстетическая геометрия или Теория симметрий // СПб, изд-во «Образовательные проекты» (серия «Нанешкола»), 2014. 296 с.
3. L-система // <http://poivs.tsput.ru/ru/Math/Geometry/Fractals/LSystem>.
4. L-система, компьютерная реализация <http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems/>.



ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ. 10 КЛАСС

В.А. Смирнов,
v-a-smirnov@mail.ru;
И.М. Смирнова,
i-m-smirnova@yandex.ru,
Московский педагогический государственный
университет

V.A. Smirnov,
v-a-smirnov@mail.ru;
I.M. Smirnova,
i-m-smirnova@yandex.ru,
Moscow State Pedagogical University

Ключевые слова: экстремальные задачи по геометрии, 10 класс

Keywords: extreme geometry problems, 10-th grade

Аннотация: в работе рассматриваются задачи по геометрии на нахождение наибольших и наименьших значений (экстремальные задачи), которые могут быть использованы при обучении геометрии в 10-м классе

Abstract: the paper deals with problems in geometry to find the largest and smallest values (extreme problems) that can be used when teaching geometry in the 10-th grade

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_40

Данная статья является продолжением статей, опубликованных в журнале «Математика в школе», в которых были представлены задачи на нахождение наибольших и наименьших значений для учащихся 7, 8 и 9 классов.

В ней рассматриваются задачи на нахождение наибольших и наименьших значений расстояний и углов в пространстве, площадей сечений многогранников. Большинство из этих задач являются аналогами соответствующих экстремальных задач на плоскости. Они могут быть использованы при обучении в 10-м классе на основных уроках, при проведении обобщающего повторения и курсов по выбору, организации проектной и исследовательской деятельности учащихся.

В качестве дополнительной литературы, посвящённой экстремальным зада-

чам, рекомендуем книги [1–6].

В заключительной статье предлагаемой серии будут рассмотрены экстремальные задачи по геометрии для 11 класса.

Начнём с задач, являющихся пространственными аналогами задач о перпендикуляре и наклонной, которые были рассмотрены в первой статье.

Задача 1. Точка A не принадлежит плоскости β . Среди всех точек этой плоскости найдите такую точку B , расстояние до которой от точки A наименьшее (рис. 1).

Решение. Искомой точкой, расстояние от которой до данной точки A является наименьшим, будет основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β (рис. 2). Для любой другой точки B' этой плоскости отрезок AB' будет наклонной, следовательно, будет больше перпендикуляра AB .

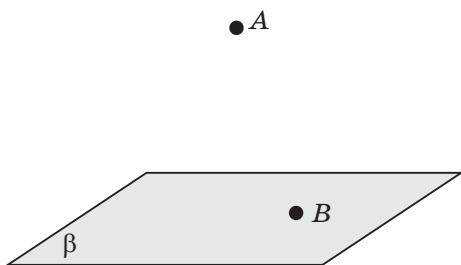


Рис. 1

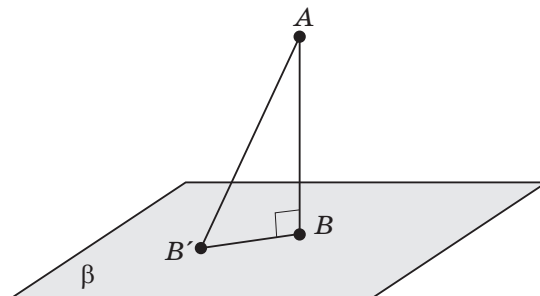


Рис. 2

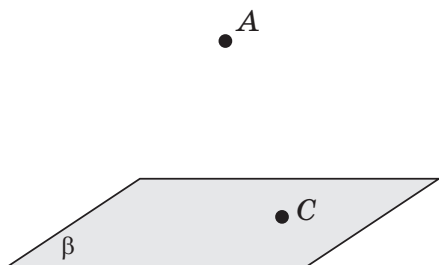


Рис. 3

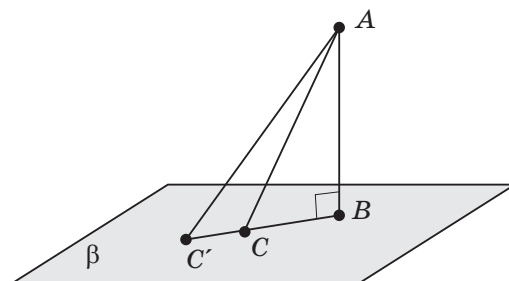


Рис. 4

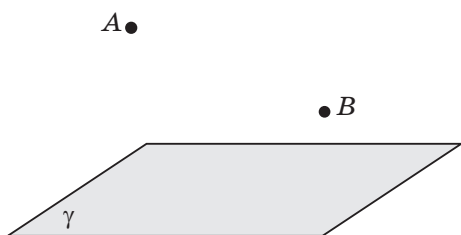


Рис. 5

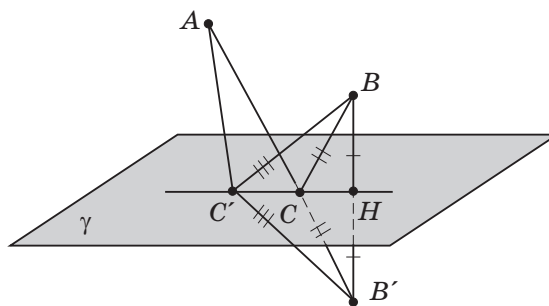


Рис. 6

Задача 2. Точка A не принадлежит плоскости β . Докажите, что не существует точки C на этой плоскости, для которой расстояние AC наибольшее (рис. 3).

Решение. Докажем, что такой точки не существует. Пусть B — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость β . Для произвольной точки C этой плоскости рассмотрим точку C' , лежащую на прямой BC по ту же сторону от точки B , что и точка C так, что $BC' > BC$ (рис. 4). Так как угол $AC'B$ острый и против большего угла треугольника лежит большая сторона, то сторона AC' тре-

угольника ACC' будет больше стороны AC .

Следующая задача является пространственным аналогом задачи Герона.

Задача 3. Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости γ . Найдите такую точку C на этой плоскости, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 5).

Решение. Опустим на плоскость γ перпендикуляр BH и отложим на его продолжении отрезок HB' , равный BH . Пусть C' — произвольная точка на плоскости γ (рис. 6). Прямоугольные тре-

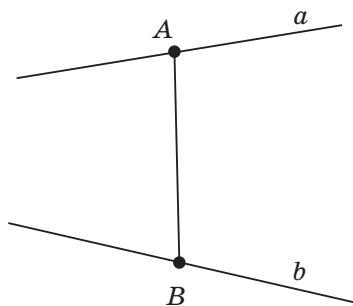


Рис. 7

угольники BHC' и $B'HC'$ равны (по двум катетам), следовательно, имеет место равенство $C'B = C'B'$. Сумма $AC' + C'B$ будет наименьшей тогда и только тогда, когда наименьшей будет равная ей сумма $AC' + C'B'$. Ясно, что последняя сумма является наименьшей в случае, если точки A, B', C' принадлежат одной прямой, то есть искомая точка C является точкой пересечения прямой AB' с плоскостью γ .

Следующая задача относится к одному из важных свойств общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Задача 4. На данных скрещивающихся прямых a и b найдите точки соответственно A и B , расстояние между которыми наименьшее (рис. 7).

Решение. Искомым отрезком, имеющим наименьшую длину, будет общий перпендикуляр AB к данным прямым a, b (рис. 8). Действительно, пусть C, D — другие точки, принадлежащие этим прямым. Опустим перпендикуляр CC' на прямую a' , проходящую через точку B и параллельную прямой a . Прямая CC' будет перпендикулярна плоскости γ , содержащей прямые a' и b . Отрезок CC' будет перпендикуляром к этой плоскости, а отрезок CD — наклонной. Значит, $AB = CC' < CD$.

В следующем важном классе задач представлены задачи на нахождение кратчайших путей по поверхностям мно-

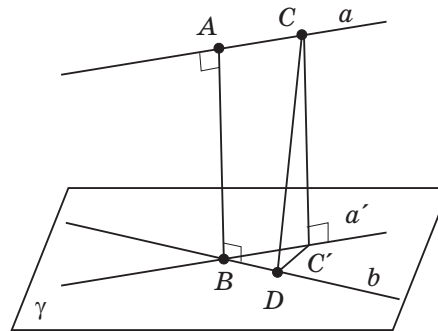


Рис. 8

гогранников. Общий метод решения этих задач основан на использовании развёрток многогранников.

Задача 5. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра $ABCD$, соединяющего середины рёбер AB и CD (рис. 9).

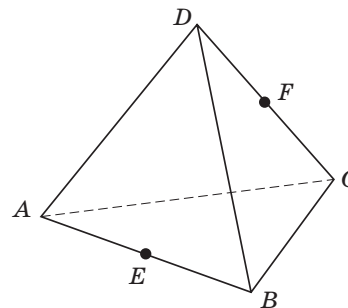


Рис. 9

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображённую на рисунке 10а. Соответствующий путь по поверхности данного тетраэдра изображён на рисунке 10б. Его длина равна 1.

Задача 6. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, соединяющего вершины A и C_1 (рис. 11).

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из двух соседних граней куба, изображённую на рисунке 12а. Кратчайшим путём из A в C_1 является отрезок AC_1 , длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответ-

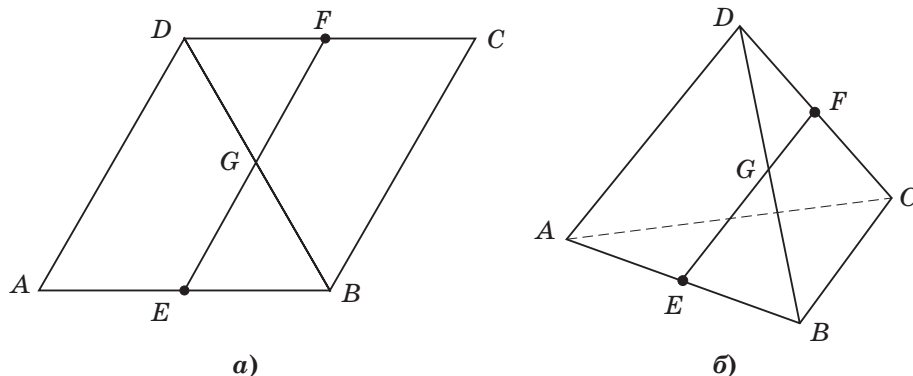


Рис. 10

ствующий путь по поверхности куба изображён на рисунке 12б.

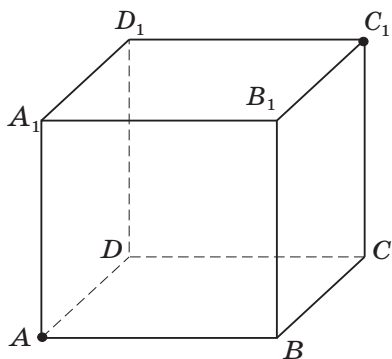


Рис. 11

Заметим, что указанный путь из A в C_1 является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины рёбер BB_1 , A_1B_1 , A_1D_1 , DD_1 , CD и BC .

Задача 7. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шести-

угольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, соединяющего вершины A и D_1 . Все рёбра призмы равны 1 (рис. 13).

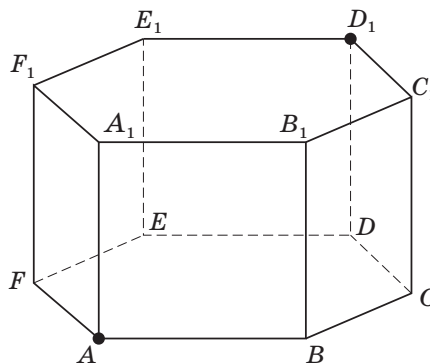
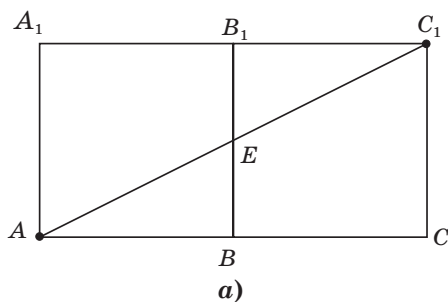


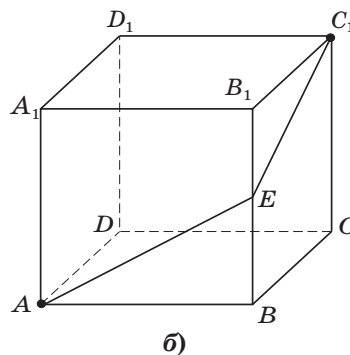
Рис. 13

Решение. Рассмотрим развёртку, состоящую из трёх боковых граней призмы, изображённую на рисунке 14а.

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка AD_1 и равна $\sqrt{10}$. Соответствующий путь на по-



а)



б)

Рис. 12

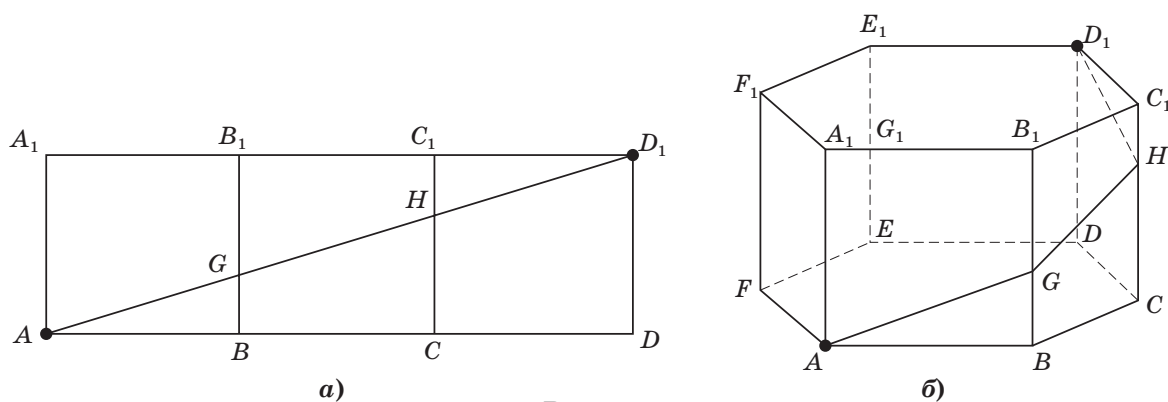


Рис. 14

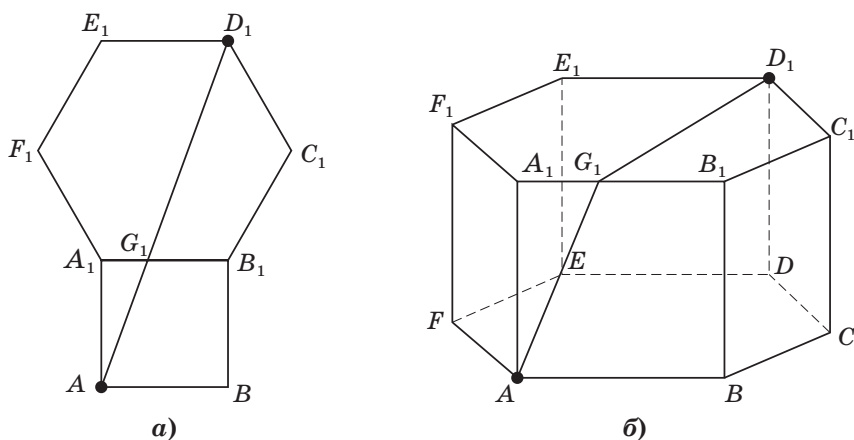


Рис. 15

верхности призмы изображён на рисунке 14б.

Однако путь из A в D_1 может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию. Соответствующая развёртка изображена на рисунке 15а.

В этом случае кратчайшим путём является отрезок AD_1 , длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}} < \sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности призмы изображён на рисунке 15б.

Задача 8. На поверхности единичного куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин A , C , B_1 наименьшая (рис. 16). Чему равна эта сумма?

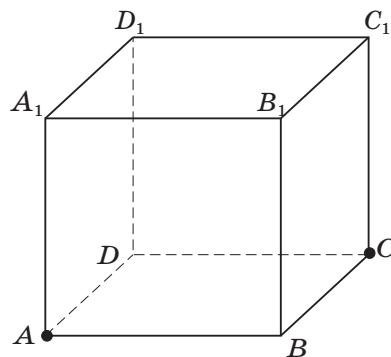


Рис. 16

Решение. Рассмотрим развёртку двух граней куба (рис. 17а).

Воспользуемся решением задачи Ферма. Искомой точкой будет такая точка E на ребре BB_1 , для которой углы B_1EA и B_1EC равны 120° (рис. 17б). Непосредственные вычисления показывают, что

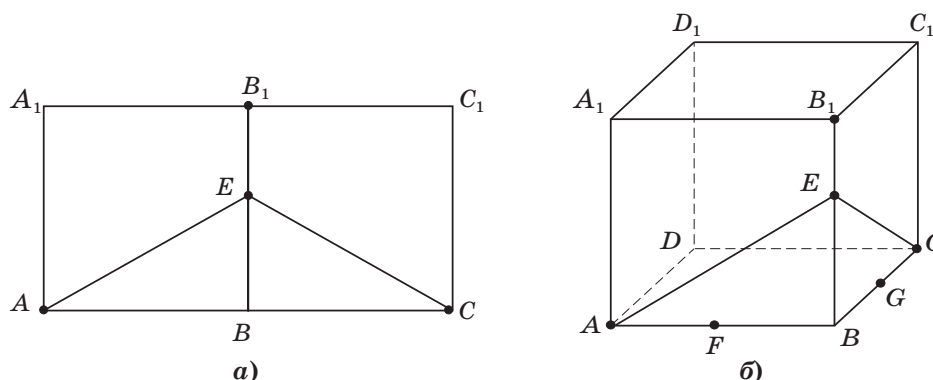


Рис. 17

$BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AE + B_1E + CE = \sqrt{3} + 1$. Аналогичными точками являются точки F и G , для которых $AF = CG = B_1E = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Следующие задачи относятся к нахождению наименьших углов в пространстве. Они аналогичны задачам на нахождение наименьших углов на плоскости, рассмотренным во второй статье.

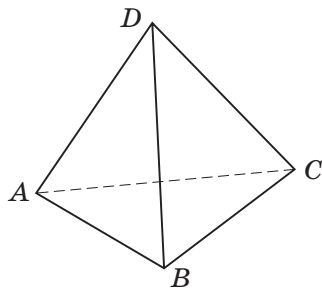
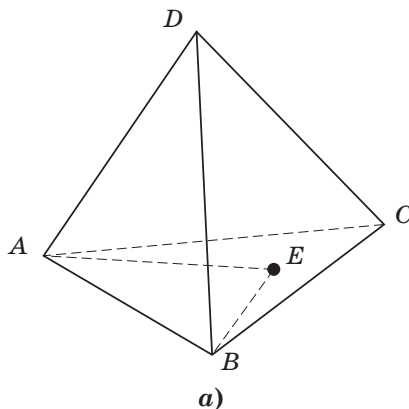
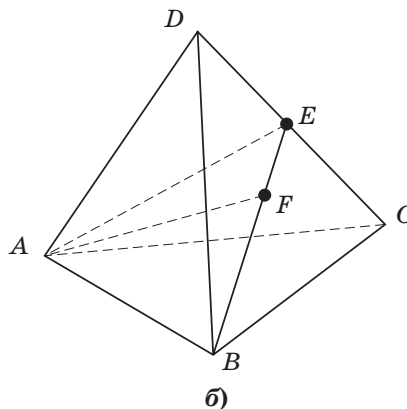


Рис. 18



а)



б)

Рис. 19

Задача 9. На поверхности правильного тетраэдра $ABCD$ найдите такие точки E , из которых ребро AB видно под наименьшим углом, то есть угол AEB наименьший (рис. 18). Чему равен этот угол?

Решение. Искомые точками являются вершины C и D данного тетраэдра. Углы, под которыми из этих точек видно ребро AB , равны 60° . Докажем, что для других точек E угол AEB будет больше. Если точка E принадлежит грани ABC и отлична от её вершин (рис. 19а), то она лежит внутри окружности, описанной около этой грани. Следовательно, угол AEB будет больше угла ACB . Аналогично, доказывается, что для точек E грани ABD , отличных от её вершин, угол AEB будет больше угла ADB .

Если точка E принадлежит ребру CD и отлична от вершин C, D , то стороны AE ,

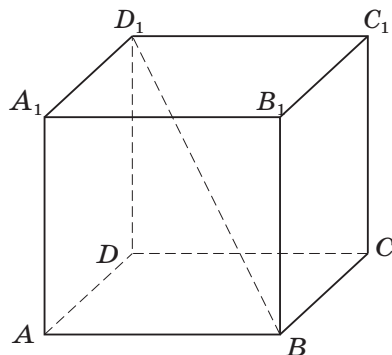


Рис. 20

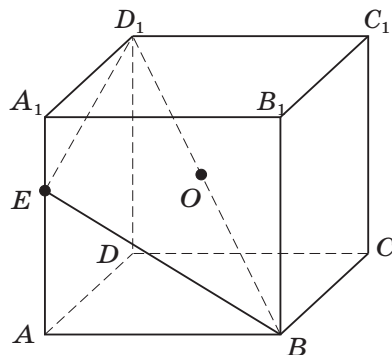


Рис. 21

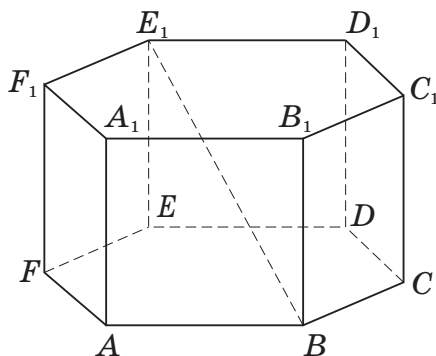


Рис. 22

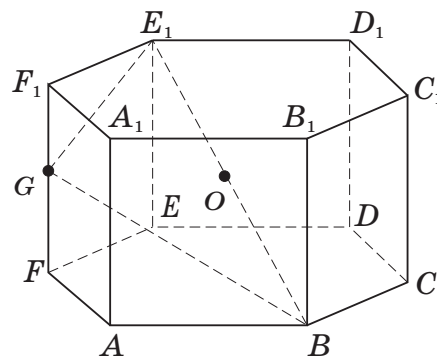


Рис. 23

BE равнобедренного треугольника ABE будут меньше сторон AC , BC треугольника ABC . Следовательно, угол AEB будет больше угла ACB . Если точка F принадлежит стороне BE или стороне AE треугольника ABE , то угол AFB будет больше угла AEB , следовательно, больше угла ACB .

Задача 10. На поверхности куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите такие точки E , из которых диагональ BD_1 видна под наименьшим углом (рис. 20), то есть угол BED_1 наименьший. Чему равен этот угол?

Решение. Искомые точками являются вершины A , C , D , A_1 , B_1 , C_1 данного куба. Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BD_1 , равны 90° . Докажем, что для других точек E угол BED_1 будет больше. Рассмотрим сферу с диаметром BD_1 . Все вершины куба принадлежат этой сфере, а остальные точки E лежат внутри неё. Следовательно, эти точки

лежат внутри соответствующей большой окружности сферы. Значит, угол BED_1 больше 90° (рис. 21).

Задача 11. На поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ найдите такие точки G , из которых диагональ BE_1 видна под наименьшим углом (рис. 22), то есть угол BGE_1 наименьший. Чему равен этот угол?

Решение. Искомые точками являются вершины A , C , D , E , F , A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 , F_1 данной призмы. Углы, под которыми из этих точек видна диагональ BE_1 , равны 90° . Докажем, что для других точек G угол BGE_1 будет больше. Рассмотрим сферу с диаметром BE_1 . Все вершины призмы принадлежат этой сфере, а остальные точки G лежат внутри неё. Следовательно, эти точки лежат внутри соответствующей большой окружности сферы. Значит, угол BGE_1 больше 90° (рис. 23).

Следующие задачи на нахождение наибольших и наименьших значений относятся к теме «Построение сечений многогранников».

Задача 12. Найдите сечение правильного единичного тетраэдра, пересекающее все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 24). Чему равен этот периметр?

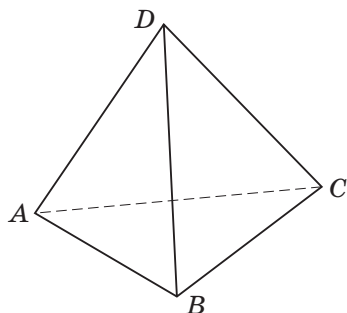


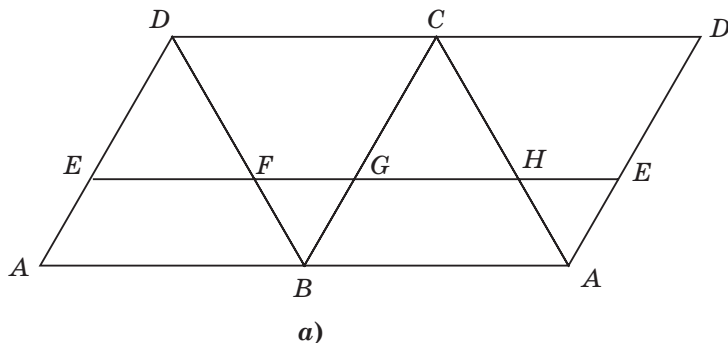
Рис. 24

Решение. Рассмотрим развёртку тетраэдра (рис. 25а). Стороны четырёх-

угольника $EFGH$, являющегося сечением тетраэдра (рис. 25б), образуют на этой развёртке ломаную. Длина этой ломаной будет наименьшей, если все её вершины принадлежат одной прямой. Это будет, если стороны четырёхугольника $EFGH$ параллельны соответствующим рёбрам тетраэдра. Периметры таких сечений равны 2.

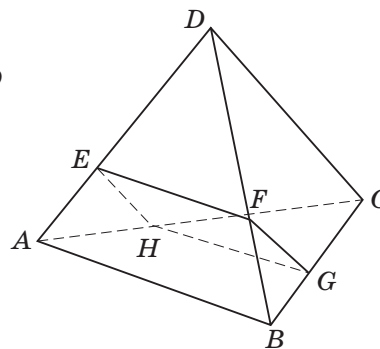
Задача 13. Найдите сечение правильного единичного тетраэдра $ABCD$, параллельное двум противоположным рёбрам DA и BC , наибольшей площади (рис. 26). Чему равна его площадь?

Решение. В сечениях правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостями, параллельными прямым AD и BC , получаются прямоугольники $EFGH$ с фиксированным периметром, равным сумме рёбер AD и BC . Из таких прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат, получаю-



а)

Рис. 25



б)

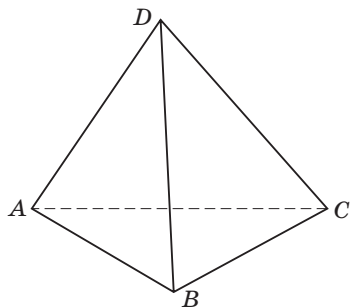


Рис. 26

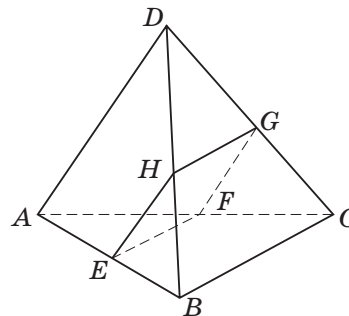


Рис. 27

щийся в сечении, проходящим через середину ребра AB (рис. 27). Его площадь равна $\frac{1}{4}$.

Задача 14. Найдите сечение правильного тетраэдра $ABCD$, проходящее через середины двух противоположных рёбер, наименьшей площади (рис. 28).

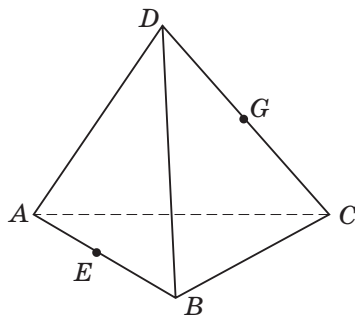
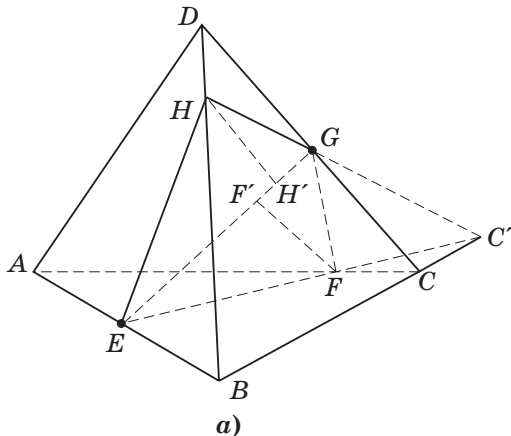


Рис. 28

Решение. Рассмотрим сечение $EFGH$ правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины E, G соответственно рёбер AB и CD . Проведём диагональ EG и опустим на неё перпендикуляры FF' и HH' (рис. 29а). Площадь четырёхугольника $EFGH$ равна

$$\frac{1}{2} EG(FF' + HH').$$

Она будет наименьшей, если наименьшей будет сумма $FF' + HH'$. Эта сумма будет наименьшей, если отрезки FF', HH' будут



наименьшими, то есть будут общими перпендикулярами соответственно AC и EG , BD и EG . Это будет, если точки F и H являются серединами этих рёбер. Искомым четырёхугольником наименьшей площади является квадрат $EFGH$ (рис. 29б).

Задача 15. Найдите сечение единичного куба, пересекающее все его грани, имеющее наименьший периметр (рис. 30). Чему равен этот периметр?

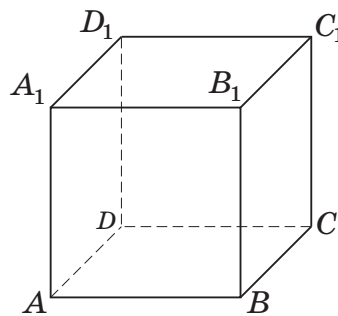


Рис. 30

Решение. Рассмотрим развёртку куба (рис. 31а). Стороны шестиугольника $EFGHIJ$, являющегося сечением куба (рис. 31б), образуют на этой развёртке ломаную. Длина этой ломаной будет наименьшей, если все её вершины принадлежат одной прямой. Это будет, если сечение перпендикулярно диагонали куба. Периметры таких сечений равны $3\sqrt{2}$.

Задача 16. Найдите сечение куба

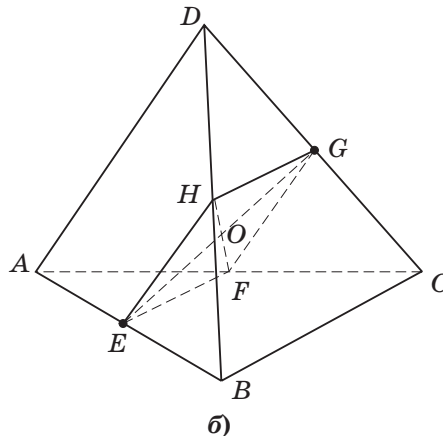


Рис. 29

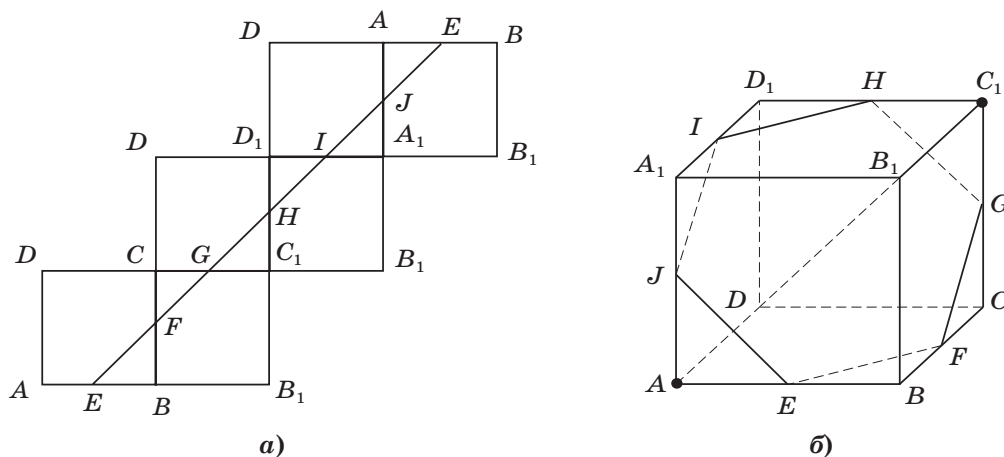


Рис. 31

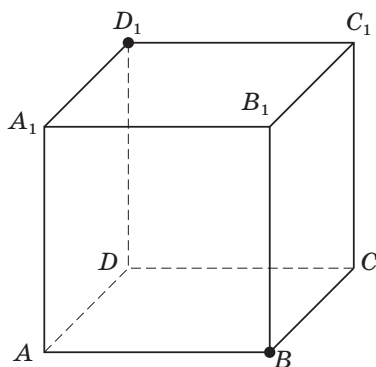


Рис. 32

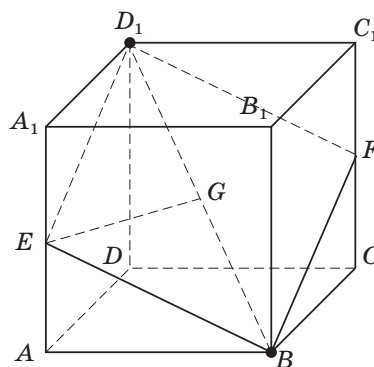


Рис. 33

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через две противоположные вершины B и D_1 , наименьшей площади (рис. 32). Найдите эту площадь для единичного куба.

Решение. Сечением куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B , D_1 и точку E на ребре AA_1 , будет параллелограмм BFD_1E . Из точки E опустим перпендикуляр EG на прямую BD_1 . Площадь сечения равна $BD_1 \cdot EG$. Она будет наименьшей, если наименьшим будет отрезок EG , то есть если этот отрезок будет общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BD_1 . Это будет, если точка E является серединой ребра AA_1 . Таким образом, искомым сечением наименьшей площади является ромб BFD_1E (рис. 33). Для еди-

ничного куба его площадь равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Литература

1. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на экстремумы. – М.: Просвещение, 1985.
2. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы. – М.: Просвещение 1966.
3. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МИЦМО, 2005.
4. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Экстремальные задачи по геометрии. – М.: Чистые пруды, 2007.
5. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
6. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.

ТЕХНОЛОГИИ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА ОСНОВЕ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ: РОССИЙСКО-ФИНСКИЙ ОПЫТ

Ану Туоминен, Университет Турку (Финляндия),
anu.tuominen@utu.fi;
Е.С. Ветошкина, ГСГУ (Коломна),
elena.vetoshkina@mail.ru;
С.П. Хэкало, ГСГУ (Коломна),
khekalo@mail.ru

Anu Tuominen, University of Turku (Finland),
anu.tuominen@utu.fi;
E.S. Vetoshkina, SSHU (Kolomna),
elena.vetoshkina@mail.ru;
S.P. Khekalo, SSHU (Kolomna),
khekalo@mail.ru

Ключевые слова: проектная деятельность, функциональная математическая грамотность, PISA

Keywords: project activity, functional mathematical literacy, PISA

Аннотация: в статье описаны примеры организации проектной деятельности учащихся во внеурочной деятельности

Abstract: the article describes examples of organizing students' project activities outside of school hours

DOI: 10.47639/0130-9358_2022_5_50

Знания могут дать, но опыт можно только заработать.
Joy Gumz

Исследования ученика, проведённые в процессе проектной деятельности, необходимы для трансформации его общематематической «знаниево-урочной» культуры, для осознания метапредметной деятельности, важны в плане формирования его функциональной математической грамотности и подготовки к участию в проекте PISA.

Три «математических опыта», которыми мы хотим поделиться, подготовлены в рамках сотрудничества педагогов Московской области с нашими коллегами из Финляндской Республики, несомненно, задающей тонус в PISA-гонке.

Проект № 1. Дешифровщик

Возрастная группа: 11+.

Тема: Признаки делимости.

Оборудование: бумага, ножницы, карандаши, ручки.

Задание

Начертите два квадрата размером 3×3 клетки. Укажите номер вашей группы, присвоенный учителем (рис. 1). Заполните клетки первого квадрата числами от 1 до 9 без повторов в случайном порядке, перемножьте числа в каждой строке и в каждом

Группа № _____ Шифровала группа № _____
 Дешифровала группа № _____

Рис. 1

Группа № _____ Шифровала группа № _____
 Дешифровала группа № _____

1	9	5
8	2	6
4	7	3

			45
			96
			84
32	126	90	

Рис. 2

столбце, запишите ответы в соответствующие строки и под соответствующими столбцами второго квадрата (пример показан на рисунке 2).

По полученным от другой группы произведениям определите, какие числа она записала в каждой клетке первого квадрата.

Рекомендации к выполнению

Класс делится на группы по 4–6 человек. Каждая группа выполняет первую часть задания: заполняет указанные клетки числами (производит шифрование, см. рисунок 2), оставляет у себя первый квадрат и передаёт второй квадрат учителю. Учитель вписывает номер группы, которой передаст второй квадрат для дальнейшей работы. Затем просит группы вписать числа от 1 до 9 без повторений в пустые клетки по известным произведениям (произвести дешифровку). Получив результаты дешифровки, учитель возвращает их исходным группам для проверки, после чего каждая группа сообщает классу решение: расшифровано правильно или неправильно.

Вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

1. Напомнить признаки делимости на 2, на 3, на 5 и на 9.
2. Какие алгоритмы можно применить при расшифровке?

Например, алгоритмы, основанные на переборе делителей по принципу «от большего к меньшему» (см. рисунок 3) или «от большего простого к меньшему простому и затем от большего к меньшему» (см. рисунок 4)?

3. Может ли случиться так, что процесс расшифровки будет неоднозначным?

Проект № 2. «Волшебный мешок» с апельсинами

Возрастная группа: 13+.

Темы: Среднее арифметическое. Пропорция. Проценты.

Оборудование: бумага, ручка, линейка, измерительный цилиндр, прозрачная ёмкость, весы, непрозрачный мешок, апельсины.

Задание

Принесите на занятие «волшебный мешок», наполненный апельсинами (не менее

	?	?	45	: 9
			96	
			84	
32	126	90		
	: 9	: 9		

	?	?	45	
8			96	: 8
			84	
32	126	90		
	: 8			

	?	?	45	
8			12	
	7		84	: 7
4	126	90		
	: 7			

	?	?	45	
8	?	?	12	: 6
	7	?	12	: 6
4	18	90		
	: 6	: 6		

	?	5	45	: 5
8	?	?	12	
	7	?	12	
4	18	90		
	: 5			

	?	5	9	
8	?	?	12	
	7	?	12	
4	18	18		

1	←9	←5	1	
8	?	?	12	
	7	?	12	
4	2	18		

1	9	5	1	
↓	↓			
8	2	?	6	
↓				
4	7	?	3	
1	1	18		

1	9	5	1	
8	2→	6	1	
4→	7	3	1	
1	1	1		

Рис. 3

10 штук разного размера). Сообщите учащимся массу апельсинов W (кг) в этом мешке и их суммарную стоимость P (руб.).

Необходимо определить параметры реального апельсина, ответить на следующие вопросы.

1. Сколько процентов составляет объём кожуры от общего объёма апельсина?
2. Сколько процентов составляет масса кожуры от общей массы апельсина и какова плотность апельсина с кожурой?
3. Сколько апельсинов в мешке и какова их реальная цена за килограмм (без кожуры!)?

Рекомендации к выполнению

Учащиеся делятся на четыре группы, каждый член группы участвует в сборе необходимых данных. Каждой группе выдаётся по два апельсина. Учащиеся должны видеть, что в мешке сколько-то апельсинов осталось (обратите на это внимание).

Первая группа отвечает на первый вопрос задания. Для этого оба апельсина разрезаются приблизительно по диаметальному сечению. Далее выполняются необходимые измерения и вычисления. В первом приближении форма апельсина считается шарообразной. Диаметры D (м) и d (м) «шаров» (апельсинов с кожурой и без кожуры со-

			45	
			96	
	7		84	: 7
32	126	90		
	: 7			

		5	45	: 5
			96	
	7		12	
32	18	90		
	: 5			

	? ₃	5	9	: 3
	? ₃	? ₃	96	: 3
	7	? ₃	12	: 3
32	18	18		
	: 3	: 3		

	? ₃	5	9	
? ₂	? ₃ ? ₂	? ₃ ? ₂	96	: 2
? ₂	7	? ₃ ? ₂	12	: 2
32	18	18		
: 2	: 2	: 2		

	9	5	9	: 9
			96	
	7		12	
32	18	18		
	: 9	: 9		

	9	5	1	
			96	: 2
	7		12	
32	2	18		
	: 2			

1	9	5	1	
	2		48	: 8
	7		12	
32	1	18		
: 8				

1	9	5	1	
8	2		6	
	7		12	
4	1	18		

1	9	5	1	
8→	2	6	1	
↓		↓		
4→	7	3	1	
1	1	1		

Рис. 4

ответственно) определяются как средние значения диаметров розданных долей апельсинов, измеренных в различных сечениях. Каждый член группы делает свои замеры. Сначала измеряет диаметры долей с кожурой и записывает свои показания, а затем кожура удаляется и процесс повторяется. Если в группе m детей, то

$$D = \frac{D_1 + D_2 + \dots + D_{4m}}{4m}$$

и

$$d = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{4m}}{4m}.$$

Для вычисления объёмов апельсина с кожурой и без кожуры – V (м³) и v (м³) соответственно – применяются формулы (постулируемые)

и

$$V = \frac{\pi D^3}{6}$$

$$v = \frac{\pi d^3}{6}.$$

Для ответа на первый вопрос учащиеся первой группы должны найти процентное отношение объёмов кожуры и всего апельсина

$$\frac{V - v}{V} \cdot 100\%.$$

Вторая группа также отвечает на первый вопрос, но для нахождения объёмов апельсина с кожурой и без кожуры использует объёмы вытесняемой жидкости. Если доступен измерительный цилиндр,

который может вместить апельсин, то объёмы апельсина с кожурой и без кожуры измеряются по изменению уровня жидкости в цилиндре на основе четырёх замеров:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

и

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Если апельсин не помещается в измерительный цилиндр, то берётся произвольная прозрачная ёмкость с водой, уровень которой отмечен на стенке, в воду полностью погружается апельсин, а затем вода из ёмкости переливается в измерительный цилиндр до тех пор, пока уровень жидкости вместе с погруженным в неё апельсином не окажется на отмеченном уровне.

Для ответа на вопрос учащиеся второй группы должны воспользоваться тем же процентным отношением

$$\frac{V - v}{V} \cdot 100\%.$$

Третья группа отвечает на второй вопрос задания. Она определяет долю массы кожуры апельсина на основе взвешивания апельсинов до и после очищения от кожуры соответственно. Для этого она находит массу апельсина с кожурой – M (кг), а также без кожуры – m (кг) как среднее арифметическое масс выданных апельсинов:

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}$$

и

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2},$$

затем вычисляет процентное отношение массы кожуры апельсина и общей массы апельсина

$$\frac{M - m}{M} \cdot 100\%.$$

Для вычисления плотности ρ (кг/м³) апельсина с кожурой необходимо воспользоваться формулой

$$\rho = \frac{M}{V},$$

после того как учащимися первой или второй группы определён объём V (или найти средний объём, используя данные, полученные первой и второй группами).

Четвёртая группа отвечает на третий вопрос задания. Она определяет массу апельсина с кожурой, а затем без кожуры тем же способом, что и третья группа, а также находит приближённое количество N (шт.) апельсинов в мешке и реальную цену p (руб./кг) апельсинов без кожуры за килограмм:

$$N = \frac{W}{M}$$

и

$$p = \frac{P}{N \cdot m}.$$

Вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Группы представляют усреднённые результаты каждого измерения и значения искомых величин, сравнивают полученные значения, обмениваются результатами. Дополнительно можно обсудить с учащимися, почему апельсин, погружённый в воду, плавает (не тонет) и подтвердить рабочую гипотезу о плотности апельсина: $\rho \leq 1 \text{ кг/м}^3$.

Задание о нахождении количества апельсинов в мешке – отличный способ обсудить, как может варьироваться ответ на математическую задачу в реальных жизненных ситуациях, поскольку в зависимости от выданных каждой группе апельсинов средняя масса апельсина может быть разной.

Проект № 3. Барби на «тарзанке»

Возрастная группа: 14+.

Тема: Линейная зависимость.

Оборудование: канцелярские резинки, кукла Барби, штатив, линейка метровая, бумага и ручка, смартфон, кювета с водой.

Задание

Сделайте для куклы Барби «тарзанку» сначала из одной канцелярской резинки (рис. 5–7). Добавляя по одной резинке каждый раз, можно получить представление о том, насколько растянется «тарзанка», когда кукла Барби будет «прыгать». Закрепите резинку на штативе или пальце так, чтобы ноль на шкале линейки соответствовал месту крепления «тарзанки» (см. рисунок 6). Поставьте Барби головой вверх так, чтобы ступни её находились на уровне нуля на шкале линейки. Бросьте куклу и посмотрите,



Рис. 5



Рис. 6

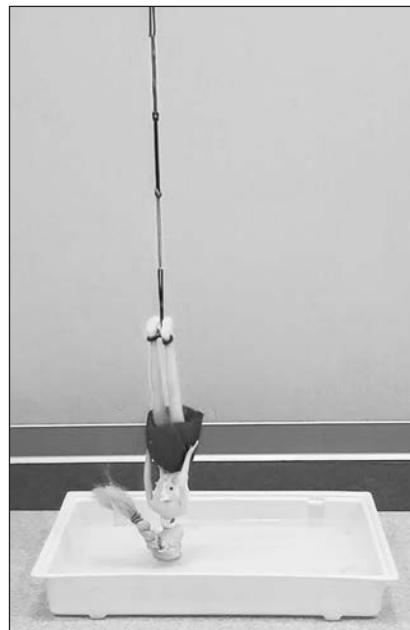


Рис. 7

какое расстояние пройдут её ступни, прежде чем «канат» потянет куклу назад. После этого, добавляя по одной резинке к «канату» раз за разом, выполните последовательные замеры пройденных расстояний. Для завершения опыта добавляйте резинки так, чтобы последний прыжок был успешным, то есть голова куклы должна коснуться воды, а не дна кюветы (см. рисунок 7). На основе эмпирических наблюдений сделайте теоретическое предположение о том, сколько нужно резинок для того, чтобы кукла смогла совершить захватывающий прыжок на «тарзанке» с высоты второго этажа (примерно 7,5 м).

Рекомендации к выполнению

Для выполнения этого задания учащимся понадобятся смартфоны. С помощью них учащиеся должны будут сделать видео движения «тарзанки» для повышения точности измерений (фиксация кадров).

Пусть x (шт.) – число канцелярских резинок в «тарзанке», y (м) – измеренное расстояние полёта Барби (расстояния измеряются с учётом сантиметров и миллиметров, а затем переводятся в метры, все дальнейшие замеры и вычисления делаются в тысячных долях), b (м) – рост куклы Барби, k (м/шт.) – коэффициент растяжения «тарзанки».

Будем предполагать, что зависимость между величинами y и x линейная. Для аналитической записи этой зависимости заполним таблицу 1.

Таблица 1

x (шт.)	1	2	...	n
y (м)	y_1	y_2	...	y_n
k (м/шт.)	$k_1 = \frac{y_1}{1}$	$k_2 = \frac{y_2}{2}$	...	$k_n = \frac{y_n}{n}$

Будем предполагать, что канцелярские резинки примерно одинаковой структуры (одинаково тянутся) и почти не имеют массы (то есть массой самих резинок можно пренебречь). Тогда, рассчитав средний коэффициент растяжения «тарзанки»

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_1 + \dots + k_n}{n},$$

за теоретическую модель зависимости можно принять формулу

$$y_{\text{теор}} = k \cdot x + b.$$

Определим также абсолютные $\Delta(y)$ и относительные $\varepsilon(y)$ погрешности вычислений теоретических расстояний, см. таблицу 2.

Таблица 2

x (шт.)	1	2	...	n
y (м)	y_1	y_2	...	y_n
$y_{\text{теор}}$ (м)	$y_{\text{теор},1}$	$y_{\text{теор},2}$	...	$y_{\text{теор},n}$
$\Delta(y)$	$\Delta(y_1)$	$\Delta(y_2)$	...	$\Delta(y_n)$
$\varepsilon(y)$	$\varepsilon(y_1)$	$\varepsilon(y_2)$	...	$\varepsilon(y_n)$

$$y_{\text{теор},i} = i \cdot k_{\text{ср}} + b; \Delta(y_i) = |y_{\text{теор},i} - y_i|;$$

$$\varepsilon(y_i) = \frac{\Delta(y_i)}{y_i} \cdot 100\%, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь положим $y_{\text{теор}} = 7,5$ м и вычислим количество резинок:

$$k_{\text{ср}} \cdot x = y_{\text{теор}} - b, \quad x = \frac{y_{\text{теор}} - b}{k_{\text{ср}}}.$$

Остаётся отметить, что число x , скорее всего, окажется дробным. Поэтому для того чтобы Барби не стукнулась головой о дно, необходимо в ответе указать целочисленное приближение числа x с недостатком, то есть его целую часть $[x]$, и определить средние приближённые абсолютную и относительную погрешности измерений.

$$\Delta(y)_{\text{ср}} = \frac{\Delta(y_1) + \dots + \Delta(y_n)}{n}, \quad \varepsilon(y)_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon(y_1) + \dots + \varepsilon(y_n)}{n}.$$

Вопросы для совместного обсуждения в ходе выполнения проекта и по его окончании

Учащимся под руководством учителя можно предложить написать отчёт об этом эксперименте по следующему плану:

- 1) цель эксперимента;
- 2) необходимое оборудование;
- 3) организация измерений;
- 4) проведение расчётов;
- 5) построение графика зависимости;
- 6) возможные ошибки и погрешности.

Степень детализации данного отчёта должна быть такой, чтобы другой учащийся смог повторить эксперимент, опираясь исключительно на этот отчёт.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

День числа Пи: что и как отмечают 14 марта

Международный день числа Пи отмечают в день рождения Эйнштейна – 14 марта. Эта дата, записанная в формате «месяц, день», образует всем знакомую комбинацию: 3,14.

Учёные в этот день смотрят на часы в ожидании, когда стрелки покажут 1 час 59 минут и 26 секунд. Это дополнит последовательность до восьмой цифры: 3,1415926.

День Пи был придуман 30 лет назад физиком Ларри Шоу, сотрудником научного музея Эксплораториум, что находится в Сан-Франциско. Из года в год этот учёный, провозглашённый Принцем Пи, возглавлял праздничное шествие в стенах музея – до самой своей смерти в августе 2017 года.

Источник: mathcenter.kpfu.ru.

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРОФЕССОРА Ф.Ф. НАГИБИНА «ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

В.И. Варанкина,

к.ф.-м.н., доцент,
veravarankina@gmail.com;

Е.М. Вечтомов,

д.ф.-м.н., профессор,
vecht@mail.ru;

ФГБОУ ВО «Вятский государственный
университет (г. Киров)

V.I. Varankina,

PhD (Phys&Math), Assoc. Prof.,
veravarankina@gmail.com;

E.M. Vechtomov,

DrSci (Phys&Math), Professor,
vecht@mail.ru;

Head of Department of Fundamental Mathematics,
Vyatka State University (Kirov)

Ключевые слова: профессор Ф.Ф. Нагибин, научная школа, математика, методика обучения математике

Keywords: professor F.F. Nagibin, scientific school, mathematics, teaching mathematics

Аннотация: статья посвящена личности профессора Фёдора Фёдоровича Нагибина, известного в Советском Союзе математика-методиста, руководителя научно-методической школы «Теория и методика обучения решению математических задач» в Кировском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина, ныне Вятском государственном университете. В историческом аспекте раскрываются направления его деятельности: руководство аспирантурой, заведование кафедрой, преподавание в вузе, работа с учителями, организационная деятельность, публикации

Abstract: the article is devoted to the personality of Professor Fedor Fedorovich Nagibin, who is a well-known mathematician-methodologist in the Soviet Union, the head of the scientific and methodological school «Theory and Methods of Teaching to Solving Mathematical Problems» at Kirov State Pedagogical Institute named after V.I. Lenin. Now it is Vyatka State University. In the historical aspect, the directions of his activity are revealed: the management of graduate school, the head of the department, teaching at the university, work with teachers, organizational activities, publications



Ф.Ф. Нагибин

Кировская научная школа по методике математики сформировалась в 50-ые годы XX века в Кировском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина (КГПИ). Её основателем и руководителем стал кандидат педагогических наук, доцент, известный в СССР методист-математик Фёдор Фёдорович Нагибин (1909–1976), получивший учёное звание профессора в 1967 г.

Личность Нагибина всегда вызывала глубокое уважение не только тех, кому довелось быть с ним знакомым – студентов, аспирантов и коллег, но и всего научного сообщества математиков-методистов Советского Союза середины и третьей четверти 20-го столетия.

Фёдор Фёдорович Нагибин родился 5 февраля (18 февраля по новому стилю) 1909 г. в деревне Корпухино Великоустюгского района Вологодской области. Его жизненный путь начинался очень непросто. Фёдор рос без отца в настолько бедных условиях, что ему вместе с матерью приходилось батрачить и нищенствовать по дворам в поисках еды. В 15 лет Нагибин остался сиротой. Его дальнейшее личное и профессиональное становление – результат усердной и самоотверженной работы над собой. Сначала он закончил Великоустюгский педагогический техникум, а затем, проработав три года учителем, в 1930 г. поступил на только что открывшееся математическое отделение Вятского педагогического института (ВПИ). В 1933 г. фамилия Нагибина значится среди 17 первых выпускников этого отделения. Кафедра математики приняла решение об оставлении его при институте. Этим был ознаменован факт начала подготовки Вятским пединститутом своих собственных педагогических кадров. До этой поры в ВПИ преподавательскую работу вели лишь выпускники университетов из других городов, направленные в Вятку Наркомпросом.

В 1936–1938 гг. Фёдор Фёдорович учился в аспирантуре Наркомпроса, где его научными руководителями были известные специалисты: профессор Е.С. Березанская – по методике математики и член-корреспондент АН СССР, профессор А.Я. Хинчин – по математическому анализу (так тогда было принято в методической аспирантуре). В 1939 г. Нагибин защитил кандидатскую диссертацию на тему «Вопросы изучения функций в курсе математики средней школы» в Московском государственном педагогическом институте имени В.И. Ленина (МГПИ). В области методики в то время диссертаций почти

не было. Кировский учёный был одним из первых, ставшим кандидатом педагогических наук по методике преподавания математики. В 1941 г. получил учёное звание доцента. С середины 1930-х годов по начало 1950-х он активно публиковался, вышли 5 статей в журнале «Математика в школе» и учебные пособия [2; 3].

Формальным толчком к становлению методической школы послужило открытие в 1951 г. в КГПИ аспирантуры по методике преподавания математики под руководством Ф.Ф. Нагибина, который на протяжении 25 лет возглавлял математико-методические исследования в регионе. Под его руководством сформировалась научно-методическая школа «Теория и методика обучения решению математических задач», оказавшая влияние на развитие математического образования не только в Кировской области, но и в стране. Подготовку в аспирантуре Нагибина прошло около 20 человек из разных пединститутов страны, подготовлено и защищено 5 кандидатских диссертаций по методике преподавания математики в школе. Все выпускники аспирантуры стали профессиональными вузовскими преподавателями математического анализа.

Рассмотрим основные направления деятельности Ф.Ф. Нагибина.

Руководство аспирантурой

Аспирантура по методике преподавания математики под руководством Ф.Ф. Нагибина начала действовать с 1951 г. В аспирантуру поступали как лучшие выпускники КГПИ, так и выпускники других вузов. Конкурс был высоким – от 4 до 7 человек на место. Распределение выпускников по вузам страны осуществляло Министерство просвещения РСФСР.

В деятельности аспирантуры сформировалась чёткая система работы, подчи-

нявшаяся неукоснительным правилам. Ежеженедельно в отведённое время Фёдор Фёдорович встречался с аспирантом для обсуждения хода исследований и дальнейших планов.

В период обучения аспиранты сдавали четыре кандидатских экзамена. По итогам математической подготовки – кандидатский экзамен по математике. Программа была составлена Нагибиным, утверждена кафедрой и Учёным советом института. Также аспиранты сдавали общий кандидатский экзамен по результатам изучения программы по вопросам методики, психологии и дидактики. Ещё были экзамены по философии и иностранному языку.

Все аспиранты проходили обязательную практическую подготовку, в рамках которой посещали уроки математики учителей школ г. Кирова и сами проводили уроки. Все посещения тщательно протоколировались, анализировались, отбиралось полезное и нужное для дальнейшего педагогического эксперимента.

Аспиранты регулярно принимали участие в методических семинарах и конференциях разного уровня – на кафедральных семинарах и ежегодных итоговых научных конференциях КГПИ, выступали с докладами на Уральских, позднее Поволжских, Сибирских, Центрального района конференциях математиков педвузов. Результаты исследований публиковались в центральной печати. Только в журнале «Математика в школе» были опубликованы 42 статьи аспирантов Ф.Ф. Нагибина, 16 статей – в других центральных изданиях.

В аспирантуре в разное время до 1976 г. обучались семь человек, работавших затем в КГПИ, из них пять защитили кандидатские диссертации: М.А. Вершинина (1922–1977), А.И. Жаворонков (1923–1965), Е.С. Канин (профессор,

1926–2013), Н.Г. Килина (1929–1996), В.С. Семаков (1935–2021), А.П. Шихова (1932 г.р.), Л.Г. Ярославцева (1940 г.р.). Были ещё аспиранты и соискатели из других городов, проводившие исследования под руководством Ф.Ф. Нагибина.

Первым аспирантом являлся Аркадий Иванович Жаворонков. Защитив в 1955 г. кандидатскую диссертацию «Изучение элементарных алгебраических функций в средней школе», он в 1957 г. стал деканом физико-математического факультета, а в 1963 г. – проректором КГПИ по научной работе. Участник Великой Отечественной войны, награждён орденом Красной Звезды и орденом «Знак Почёта». Трагически погиб.

Евгений Степанович Канин поступил в аспирантуру к Нагибину в 1956 г., в 1965 г. защитил кандидатскую диссертацию «Формирование алгебраических умений и навыков у учащихся 6–7 классов» в МГПИ. В 1989 г. ВАК СССР присвоила ему учёное звание профессора по кафедре математического анализа и МПМ. Е.С. Канин после кончины Ф.Ф. Нагибина возглавил руководство научной школой. Под его руководством были выполнены и защищены две кандидатские диссертации по методике обучения математике (Е.В. Малых, Л.В. Караулова). Опубликовал 102 статьи, из них 33 в журнале «Математика в школе» и 10 статей в других центральных изданиях. Автор или соавтор 36 книг и брошюр. Участник Великой Отечественной войны, награждён орденом «Отечественная война» 2-й степени, 11 медалями. Отличник народного просвещения РСФСР (1968) и СССР (1985).

Виктор Степанович Семаков учился в аспирантуре в 1966–1969 гг. Защитил кандидатскую диссертацию по теме «Дидактические средства обучения математике в средней школе»

(1972), доцент (1973). Автор 15 диафильмов по математике для школ (студия «Союздиафильм»), общий их тираж составил 450000 экз., имел 48 публикаций в различных изданиях. Декан математического факультета (1972–1988), проректор КГПИ по учебной работе с 1988 г., первый проректор Вятского государственного гуманитарного университета (1999–2004). Отличник просвещения СССР, Заслуженный работник высшей школы (2000), почётный работник высшего профессионального образования РФ (2002).

Многие ученики профессора Ф.Ф. Нагибина, пройдя систему его аспирантской подготовки, в дальнейшем проявили себя как в научной и преподавательской деятельности, так и в административной работе, внося заметный вклад в развитие высшего профессионального образования Волго-Вятского региона и страны в целом.

Заведование кафедрой

С 1947 по 1969 гг. Ф.Ф. Нагибин – заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики.

В послевоенное время и преподавателям, и студентам приходилось преодолевать большие трудности. Одна из серьёзных проблем – недостаток квалифицированных кадров. Ф.Ф. Нагину удалось её решить. Если вначале на кафедре был лишь один кандидат наук, доцент – сам заведующий Нагибин, то к 70-м годам уже работали пять кандидатов наук: профессор Ф.Ф. Нагибин, доценты А.М. Тезин, Е.С. Канин, Н.Г. Килина, В.С. Семаков, П.А. Крупин.

Большое внимание Ф.Ф. Нагибин уделял совершенствованию математического и методического уровня преподавателей. На кафедре действовал семинар, на еже-

недельных заседаниях которого заслушивались доклады преподавателей с результатами их научных исследований, а также выступления о вновь появившихся книгах по близким темам в области математики и её преподавания. Например, были изучены книги Р. Дедекинда «Что такое числа и что они есть», Н.Н. Лузина «Теория функций действительного переменного» и «Интеграл и тригонометрические ряды», Б.З. Вулиха «Краткий курс теории функций вещественной переменной». Основной математической подготовке своих учеников и коллег Нагибин придавал принципиальное значение.

Ф.Ф. Нагибин стал инициатором и редактором многих изданий, в которых публиковались статьи преподавателей кафедры математического анализа и методики преподавания математики. Так, выпуски сборника «Труды физико-математического факультета Кировского педагогического института» состоялись в 1955, 1958, 1964 и 1970 гг., Были изданы и другие сборники: «Вопросы обучения математике в школе» (1962), «Вопросы преподавания физики и математики в средней школе» (1959, 1969, 1970), «Математические упражнения», выпуск 1 в 1975 г. и выпуск 2 в 1976 г. по коллективной теме, принятой на кафедре. Кроме того, преподаватели кафедры публиковали учебники, книги и брошюры в других изданиях: Е.С. Канин «Тождественные преобразования» (1973), Е.С. Канин «Алгебраические упражнения в восьмилетней школе» (1973), Н.Г. Килина «Сборник задач по методике преподавания математики» (1976), М.Г. Лускина «Элементы теории рядов на факультативных занятиях в школе» (1976), В.С. Семаков «Применение учебно-наглядных пособий и технических средств обучения на уроках математики» (М.: Высшая школа, 1972) и др.

За время заведования кафедрой Ф.Ф. Нагибиным преподаватели опубликовали, не считая работ самого Нагибина, 154 работы, в том числе 7 книг, 9 диафильмов (студия «Диафильм», Москва), 16 статей в журнале «Математика в школе», 4 статьи в других центральных изданиях.

Преподаватели регулярно по плану проводили открытые занятия, на которых присутствовала вся кафедра. Особое внимание уделялось начинающим преподавателям. Заведующий кафедрой сначала внимательно просматривал план курса преподавателя, высказывал замечания и давал советы по его улучшению, затем посещал занятия и дотошно, но очень доброжелательно и профессионально разбирал их проведение, давал математические и методические рекомендации. Не раньше чем через полгода планировалось проведение открытого занятия. При коллективном обсуждении открытых занятий происходил обмен мнениями, опытом преподавания математики и обучения студентов. Так накапливался коллективный опыт кафедры.

Под руководством Ф.Ф. Нагибина на кафедре были разработаны новые курсы: Обучение решению математических задач, Внеклассная работа по математике, Спецсеминар по методике преподавания математики. Позднее появились и другие дисциплины, отражающие научные интересы преподавателей: Олимпиадные задачи, Учителя-новаторы и др.

Был организован практикум студентов по изготовлению наглядных пособий по математике, которым руководил В.С. Семаков, выпускник аспирантуры Ф.Ф. Нагибина. Высокого качественного уровня наглядные пособия для уроков математики ежегодно в большом количестве изготавливались и передавались школам г. Кирова и области, что способствовало

повышению их наглядно-методического обеспечения.

Для повышения качества обучения студентов при кафедре был создан кабинет методики преподавания математики, которым руководила старший лаборант кафедры М.С. Шишмакова. Этот кабинет обеспечивал техническое сопровождение учебного процесса, демонстрацию кино- и диафильмов, осуществлял обеспечение лекций, семинаров и практикумов учебно-наглядными пособиями и учебной литературой. Кабинет также осуществлял организацию самостоятельной работы студентов. Вечерами с 18.00 до 21.00 одна из больших аудиторий факультета была полностью заполнена – в ней студенты занимались выполнением курсовых работ, готовились к занятиям, экзаменам и зачётам.

Нужно отметить особую атмосферу сотрудничества, взаимопомощи, царящую на кафедре благодаря личным человеческим качествам Нагибина. Она поддерживалась добрыми дружескими отношениями, неформальными встречами на днях здоровья и праздновании общих событий и дат.

Преподавание в вузе

Все, кому довелось учиться у Фёдора Фёдоровича Нагибина, отмечают его особый незабываемый стиль изложения, сочетающий в себе высокий профессионализм и педагогическое мастерство.

Ф.Ф. Нагибин читал курсы: Математический анализ, Теория функций действительного переменного, Теория аналитических функций, История математики, Методика преподавания математики, Дополнительные главы математического анализа.

Вот что написала, вспоминая о студенческих годах, Заслуженный учитель школы РСФСР Зинаида Борисовна Плюсни-

на [6, С. 136]: «Открываю пожелтевшую студенческую тетрадь. Дата: 1 сентября 1949 года. Лекцию по математическому анализу читает нам, первокурсникам, Фёдор Фёдорович Нагибин. Она начинается заголовком: «Советы первокурсникам». Весь его внешний вид и манера общения с аудиторией сразу захватывают нас. Мы стараемся очень чётко и красиво выписывать каждое слово. Он не торопит. Он как бы сливается с аудиторией, понимая наше ликование, что мы уже студенты, нашу беспомощность, так как мы ранее не слушали лекций, и, тем более, не имеем представления, как её коротко записать. Конечно же, стараемся записать дословно. Его аккуратность, подтянутость, какое-то ему одному присущее умение очень доверительно говорить со студентами, вселяли в нас возвышенную любовь к науке вообще и к математике в частности, как-то приподнимали нас над мелочами жизни (неустроенный быт, голод, нехватка бумаги, учебных пособий и т. д.). С первого занятия Фёдор Фёдорович стал для нас эталоном настоящего учителя».

Из воспоминаний профессора Е.С. Канина [7, с. 9]: «Лекции профессора Нагибина отличали чёткость и логичность построения; безупречное, грамотное изложение; чёткая речь (хотя звонкие согласные он произносил несколько приглушённо); темп, позволяющий записать конспективно содержание излагаемого; интересные иллюстрации, красиво, хотя и от руки, выполненные на доске чертежи, рисунки; разборчивые, разумно расположенные записи на доске. По записям лекций Ф.Ф. Нагибина можно было свободно готовиться к экзаменам, лишь изредка прибегая к помощи учебников и учебных пособий. Лекции Ф.Ф. Нагибина играли не только обучающую, но и воспитывающую роль. Воспитательное влияние оказывали

на нас аккуратная строгая одежда лектора, его манера выполнять записи и рисунки на доске, правильная, грамотная речь, манера выделения главного, логичность построения лекций, безупречность математических рассуждений и умозаключений».

Из воспоминаний кандидата физико-математических наук, доцента Г.А. Клековкина [9, с. 45]: «...его лекции отличались какой-то органичной целостностью и подкупали неповторимым педагогическим мастерством. В них было всё: мотивировки введения новых понятий, выделение основных идей и ключевых положений, лаконичные и в то же время логически безупречные доказательства, многочисленные примеры. Эти примеры были подготовлены на библиографических карточках, которые находились во внутреннем кармане пиджака. Нам нравилось, как Ф.Ф. Нагибин доставал стопку карточек из кармана, снимал очки, щурился, и всякий раз приводил яркий пример. Затем верхняя карточка перекладывалась вниз стопки, последняя возвращалась обратно в карман. Особый колорит его лекциям придавала и своеобразная неповторимая дикция. Ещё одной отличительной чертой лекций Ф.Ф. Нагибина было хорошо структурированное оформление чётким каллиграфическим подчерком всех записей на доске. Создавалось впечатление, что лектор при подготовке продумывает не только содержание лекции и методику его изложения, но и такие моменты, как оформление своих записей».

Работа с учителями

В статье Л. Макаровой, опубликованной в «Кировской правде» за 1968 г. (см. [6, С. 103]), читаем: «...самая главная страсть, которой он посвятил всю жизнь, – методика математики. В этой области

он, в своем роде, поэт. Профессора Нагибина знают не только в нашем институте. Книги с его именем разошлись по всему Советскому Союзу. Без преувеличения можно сказать, что он является учителем учителей. Учителем мудрым, заботливым».

В Советском Союзе в то время было всего шесть профессоров по методике математики. И самый молодой среди них – Нагибин. Благодаря его деятельности существенно вырос уровень математической и методической подготовки учителей математики города Кирова и Кировской области.

Большинство статей и книг профессора Ф. Ф. Нагибина посвящено вопросам преподавания математики в средней школе и популяризации математики. На повышение уровня математической подготовки школьников были направлены и другие формы его деятельности.

Ф.Ф. Нагибиным при кафедре был организован семинар для учителей математики, сыгравший большую роль в совершенствовании их подготовки. Заседания семинара проводились раз в месяц. На них с докладами выступали преподаватели и аспиранты кафедры, часто сам Нагибин, а учителя делились своим опытом обучения математике в школе.

Большое влияние на развитие математического образования в Кировской области оказало сотрудничество и совместная деятельность Ф.Ф. Нагибина и профессора Николая Андреевича Колмогорова (1897–1965), заведующего кафедрой геометрии КГПИ, руководителя аспирантуры по геометрии тетраэдра. Н.А. Колмогоров является соавтором нескольких школьных учебников математики. Он организовал и возглавил олимпиадную работу со школьниками города и области: в 1939, 1940 и 1941 гг. были проведены

первые в г. Кирове школьные математические олимпиады, а позднее состоялись и областные математические олимпиады школьников. Под руководством Н.А. Колмогорова сотрудниками кафедры математики в 1942–1943 учебном году для учителей средних школ был составлен сборник задач на применение математики к военному делу. Кафедрами математики, возглавляемыми Ф.Ф. Нагибиным и Н.А. Колмогоровым, был организован математический кружок для учащихся 10–11 классов средних школ г. Кирова. С осени 1960 г. при факультете начала функционировать школа юных математиков (ШЮМ). Её деятельность продолжалась вплоть до середины 80-х годов 20-го столетия. Занятия со школьниками, увлечёнными математикой, еженедельно по составленной программе проводили лучшие преподаватели математических кафедр.

Организационная деятельность

На протяжении многих лет работы в институте Ф.Ф. Нагибин, помимо преподавательской и методической, вёл ещё и огромную административно-организационную деятельность: заведующий кафедрой, руководитель аспирантуры, декан факультета, директор института.

Сразу после защиты кандидатской диссертации в 1939 г он был назначен деканом физико-математического факультета КГПИ и выполнял эти обязанности до ноября 1943 г. А с декабря 1943 г. до сентября 1944 г. Ф.Ф. Нагибин – директор Кировского пединститута. Институт с началом Великой Отечественной войны был эвакуирован в г. Яранск, районный центр Кировской области. Многие студенты и преподаватели ушли на фронт. Математические кафедры были снова объединены в одну кафедру математики, которую

возглавил Н.А. Колмогоров. Институт в годы войны выдержал все возникшие в борьбе за выживание хозяйственные трудности. Много было совсем не учебных дел: заготовка топлива – лесозаготовки и лесосплав, сельхозработы, работа в госпитале для инвалидов войны. В одной из многотиражек Нагибин позднее вспоминал [6, с. 46]: «Мы должны были сами ремонтировать свои кабинеты и общежития, заготавливать дрова, работать в подсобном хозяйстве. Нам приходилось делать всё. Мы рубили и возили на санках за 5 км дрова, лопатами выравнивали землю для посевов, впрягались в бороны, сеялки и телеги, косили траву, метали сено в стога, жали, молотили, переносили в рюкзаках картофель, заготавливали торф для заводов». Несмотря на это, в 1942–1943 гг. институт собрал 111000 рублей на помощь фронту для постройки самолета «Кировский пединститут».

Даже в эти тяжёлые годы преподаватели продолжали вести научно-методическую работу, писать и публиковать статьи. В 1943 г. на физико-математическом факультете была проведена научная сессия, посвящённая 300-летию со дня рождения Исаака Ньютона. Для учителей Яранского и соседних с ним районов был открыт воскресный университет, где Ф.Ф. Нагибин читал лекции. В 1943 г. Кировский пединститут, благодаря стараниям директора, провёл первый набор аспирантов.

Активная научно-методическая и организационная деятельность Ф.Ф. Нагибина была связана с установлением научных связей с известными математиками и математиками-методистами СССР, с научно-методическими центрами г. Москвы, Уральской зоны и зоны Поволжья. В середине 20-го столетия в разных городах региона по очереди проводились научные конференции математиков и

математиков-методистов педвузов зоны Урала. Благодаря авторитету в научном сообществе Ф.Ф. Нагибина, в Кирове на базе КГПИ проходили V, XI, XVI, XXI, XXVI конференции. Как правило, на этих конференциях собирался весь цвет отечественной науки в области преподавания математики. Консультации ведущих учёных начинающим исследователям, совместное обсуждение проблем развития народного образования, публикация материалов конференций двигало отечественную науку вперёд.

Ф.Ф. Нагибин вёл большую общественную работу. В 1948–1952 гг. он являлся заместителем председателя президиума Кировского областного общества «Знание», в 1951–1954 гг. – заместитель председателя кировского обкома Союза работников высшей школы и научных учреждений, в 1968–1973 гг. работал в областном Комитете защиты мира.

За свой многолетний труд Фёдор Фёдорович Нагибин награждён орденом «Знак Почета», медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», значком «Отличник народного просвещения РСФСР», грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР, юбилейной ленинской медалью, 6 раз заносился на доску почёта КГПИ имени В.И. Ленина, записан в Книгу почёта Кировского пединститута.

Публикации

Научно-методическое наследие Ф.Ф. Нагибина является свидетельством его высочайшего профессионализма в области методики обучения математике и популяризации математики. Сфера научных интересов Нагибина в начале его исследовательской деятельности – вопросы обучения алгебре в средней школе, методика обучения началам математического

анализа. Позднее – методика обучения решению геометрических задач, а также развитие мышления и творчества школьников в процессе обучения математике.

Первой научной работой Ф. Ф. Нагибина стала статья «Развитие глазомера на уроках математики», опубликованная в журнале «Математика в школе», № 4 за 1935 г. Всего же известны 92 работы профессора Ф.Ф. Нагибина, изданные прижизненно, а 12 его работ были опубликованы учениками Нагибина в 1977–2006 гг. после его смерти. Оставленное научное наследие включает в себя 35 книг, учебников и учебных пособий, 39 статей в центральных изданиях, из них 29 статей в журнале «Математика в школе», 13 работ были переведены на другие языки.

В 1964 г. в СССР был объявлен всесоюзный конкурс учебников по геометрии для 8-летней школы, в результате которого учебник «Геометрия. Учебник для 6–8 классов», написанный группой авторов в составе Ф.Ф. Нагибина, А.Ф. Семеновича, Р.С. Черкасова, был признан лучшим и выпущен издательством «Просвещение» в 1967 г. Академик А.Н. Колмогоров, возглавлявший комиссию АН СССР по реформе математического образования, предложил коллективу продолжить работу. После напряжённого труда этого авторского коллектива издательством «Просвещение» были выпущены учебники по геометрии для 6 и 7 классов под редакцией академика А.Н. Колмогорова, который стал единым действующим учебником для всего Советского Союза и неоднократно переиздавался.

Ф.Ф. Нагибин является автором многих книг и учебных пособий, полезных как для школьников, так и для учителей математики. Заметное место среди них занимает книга для старшеклассников «Экстремум» [11], выпущенная в серии

«Библиотека школьника» издательством «Просвещение». Неоднократное издание выдержали и другие его книги: [1–3]; [8]; [10].

Но самой популярной стала книга Ф.Ф. Нагибина «Математическая шкатулка» [10]. Этот сборник занимательных и нестандартных задач, направленных на развитие логического мышления школьников, занимает особое место в творчестве Ф.Ф. Нагибина. Благодаря этой быстро ставшей популярной книге, имя Нагибина приобрело широкую известность не только в СССР, но и за рубежом. Первое издание «Математической шкатулки» было выпущено издательством «Просвещение» в 1958 г. тиражом 108 000 экземпляров. Затем книга переиздавалась много раз. Только в 1984 г. её тираж составил 760 тыс. экземпляров, а в 1988 г. – 1 млн. экземпляров. «Математическая шкатулка» была переведена на японский, китайский, башкирский, киргизский, молдавский, татарский языки, а также была выпущена в 4-х книгах на языке Брайля для слепых.

Ф.Ф. Нагибин планировал написать продолжение «Математической шкатулки», но не успел. Его ученик, профессор Е.С. Канин, решил усовершенствовать книгу, дополнив её новыми задачами и немного изменив структуру. В результате в 1984 г. издательство «Просвещение» выпустило книгу «Математическая шкатулка» уже двух авторов – Ф.Ф. Нагибина и Е.С. Канина. В 2006 г. в издательстве «Дрофа» вышло ещё одно обновлённое издание книги [12].

После кончины Ф.Ф. Нагибина, созданная им научно-методическая школа продолжила своё существование, расширившись и обретя новые направления исследований (см. [4]; [5]; [6, глава седьмая]). Развитию и современному состоянию кировской математико-методической

школы будет посвящена отдельная статья «Кировская научно-методическая школа по математическому образованию» (авторы: Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Калинин С.И.).

Литература

1. Березанская Е. С., Колмогоров Н.А., Нагибин Ф. Ф., Черкасов Р.С. Сборник задач и вопросов по геометрии: Пособие для учителей средней школы. – М.: Учпедгиз, 1962. 208 с.

2. Березанская Е.С., Нагибин Ф.Ф. Упражнения для устных занятий по алгебре для 6–7 классов средней школы: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1949. 144 с.

3. Березанская Е.С., Нагибин Ф.Ф. Сборник вопросов и упражнений по алгебре и тригонометрии. Для 8–10 классов средней школы: Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1951. 95 с. (Изд. 2-е. Учпедгиз, 1955. 160 с.).

4. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М. Кировская научно-методическая школа по математическому образованию // 3 Национальная (Всероссийская) научная конференция «Математическое моделирование и информационные технологии»: сб. материал. – Сыктывкар: СыктГУ, 2019. С. 52–54.

5. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М. Первая кафедра математики на Вятской земле // Ма-

тематический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 1. С. 39–56.

6. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Канин Е.С. Профессор Фёдор Нагибин. Сквозь призму времени. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2014. 316 с. (Серия «Научно-педагогическое наследие ВятГГУ», Т. 1).

7. Канин Е.С. Профессор Фёдор Фёдорович Нагибин: к 100-летию со дня рождения. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2009. 72 с.

8. Колмогоров Н.А., Нагибин Ф.Ф., Чудиновских В.В. Сборник задач для подготовки учащихся средних школ к математическим олимпиадам. – Горький: Волго-Вятское книжное изд-во, 1968. 136 с.

9. Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции «Проблемы современного математического образования в вузах и школах России», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Ф. Ф. Нагибина. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2009. 172 с.

10. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка. – М.: Учпедгиз, 1958. 166 с.

11. Нагибин Ф.Ф. Экстремумы: Пособие для учащихся старших классов. – М.: Просвещение, 1966. 120 с. (Б-ка школьника).

12. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка. Перераб. и доп. изд. – М.: Дрофа, 2006. 271 с.



III МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ, ИНФОРМАТИКЕ И ФИЗИКЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ», ПОСВЯЩЁННАЯ 130-ЛЕТИЮ ЧЛ.-КОРР. АПН П.А. ЛАРИЧЕВА

Статья основана на материалах III Международной научно-практической конференции «Задачи в обучении математике, информатике и физике в условиях цифровой трансформации», состоявшейся 16–18 марта 2022 г. в Вологодском государственном университете. Конференция была проведена в смешанном формате, сочетающем очные выступления, онлайн выступления и стендовые доклады. Участники поделились своими научно-методическими находками и опытом обучения студентов и школьников математике, информатике и цифровым технологиям.

16–18 марта 2022 г. на базе Вологодского государственного университета состоялась международная научно-практическая конференция «Задачи в обучении математике, физике и информатике в условиях цифровой трансформации». В конференции приняло участие 110 человек, среди них 33 доктора и 57 кандидатов педагогических и физико-математических наук, авторы современных учебников и задачников по математике для школы. Широко была представлена география участников: Москва, Санкт-Петербург, Архангельск, Елец, Казань, Киров, Кострома, Краснодар, Ростов-на-Дону, Самара, Сыктывкар, Томск, Ульяновск, Ярославль и другие регионы. В конференции приняли участие учёные и из зарубежных стран (Азербайджан, Белоруссия, Таджикистан), а также учителя и студенты.

Конференция посвящалась 130-летию чл.-корр. АПН Павла Афанасьевича Ларичева, который родился 16 февраля 1892 г. в г. Грязовце Вологодской губер-

нии. По окончании учительской семинарии в 1911 г. П.А. Ларичев получает звание народного учителя. В 1922 г. он заканчивает физико-математический факультет Вологодского педагогического института. С 1923 г. начинается московский период его жизни, он становится преподавателем математики трудовой школы и одновременно преподавателем рабфака, а с 1935 г. – преподавателем в Московском педагогическом институте. В 1944 г. П.А. Ларичев был приглашён на работу в Министерство просвещения РСФСР, где в течение 17 лет беспрерывно разрабатывает основные методические документы. Главным результатом его многолетней упорной работы стал «Сборник задач по алгебре» для средней школы в двух частях. Первая часть как пробный учебник вышла из печати в 1948 г., а вторая – в 1949 г. Деятельность П.А. Ларичева была высоко оценена, и в 1950 г. он избирается членом-корреспондентом Академии педагогических наук [2].

Задачник П.А. Ларичева, благодаря своим достоинствам (строгая система упражнений и задач с последовательно нарастающей сложностью, наличие разнообразных задач, ясность, краткость, доступность), выгодно отличался от всех существовавших тогда задачников, он долгие годы использовался в советской школе, был удостоен премии им. К.Д. Ушинского, переведён на многие языки. Педагогические идеи, заложенные П.А. Ларичевым, позднее использовались другими учёными, авторами современных учебников и задачников.

Сравнительный анализ задачного материала школьных учебников на конференции дан в докладе проф. И.Е. Маловой (Брянск). Автором выделены особенности реализации технологии анализа задачного материала на примере темы «Квадратные уравнения» у П.А. Ларичева и других авторов.

В докладах участников конференции прозвучали новые подходы в развитии идей П.А. Ларичева об использовании задач в обучении. Так, в докладе проф. В.А. Тестова (Вологда) было раскрыто значение деятельности по решению математических задач как основы формирования у обучающихся компетенций цифровой эры, показана ошибочность попыток переориентации содержания образования на формирование большого числа «мелких» компетенций.

В докладе проф. И.М. Смирновой (Москва) показано, что задачи являются важной составной частью как традиционного, так и современного обучения математике. Автор рассматривает разные типы проблемных задач, направленных на развитие критического мышления учащихся: на распознавание конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям; сравнение и оценивание

геометрических величин; нахождение ошибок в формулировках и доказательствах и т.д.

Проф. С.Р. Когаловский (Шуя) в своём докладе обратил внимание на «нестандартные» функции задач в обучении математике, рассмотрел виды задач, используемые в процессах формирования и освоения ведущих математических понятий, их развивающие роли.

Доклад проф. М.В. Шабановой (Москва) и И.В. Шутровой (Архангельск) посвящался формированию и оценке функциональной грамотности школьников. Данный вопрос является важным направлением модернизации системы общего образования, решающим проблему подготовки учащихся к применению полученных в школе предметных знаний к решению жизненных задач в разнообразных контекстах. В докладе были приведены примеры и описаны способы конструирования контекстуальных задач на математическую оценку нематематических предикатов в категориях «всегда», «иногда», «никогда».

Доклад проф. Н.В. Бровки (Минск) и М.В. Ненартович (Беларусь) посвящён методу наглядного моделирования при изучении алгебры. В нём было дано определение данного метода применительно к обучению учащихся старших классов алгебре. Приведена классификация типов задач в зависимости от представления математического объекта в упорядоченной взаимосвязи трёх компонентов: словесного описания, формульной записи, наглядной модели.

В связи с цифровой трансформацией образования актуальной становится задача конструирования учебных текстов, развивающих умение работать с информацией. Этой проблеме был посвящён доклад проф. И.Г. Гельфман, И.И. Сошенко

и Л.Н. Демидовой (Томск). В нём представлены типы учебных текстов, которые создают условия для развития умения работать с информацией по теме «Квадратные уравнения».

Большой интерес у слушателей вызвал доклад профессора А.В. Ястребова (Ярославль), в котором рассмотрен математический эксперимент как средство изучения систем динамической математики. Автор выявил противоречие между целесообразностью постановки математических экспериментов и отсутствием времени на отдельное изучение систем динамической математики, предложил группу задач, позволяющих смягчить это противоречие.

Ряд докладов посвящался усилению роли исследовательских, нестандартных, краеведческих и других классов задач. В частности, доц. Жук Л.В. (Елец) посвятила своё выступление организации деятельности старшеклассников по решению исследовательских задач в условиях применения интеллектуальной обучающей среды. Краеведческие задачи рассмотрены доц. Н.А. Зелениной Н.А. и студентом Д.А. Орловой (Киров). Авторами представлены результаты исследования, связанного с составлением рабочей тетради по математике для учащихся 5–6 классов с привлечением краеведческого материала.

Прикладные задачи для организации проектной деятельности учащихся математических лицеев, основанные на использовании классического математического материала, рассмотрены в докладе В.С. Котова (Москва). Геометрические задачи как средство диагностики индивидуальных когнитивных стилей одарённых подростков обсуждались в докладе проф. Н.Г. Подаевой (Елец) и доц. М.В. Подаева (Липецк). Задачи на использование необходимых и достаточных

условий рассматривались в докладе доцентов Е.В. Галиевой, Л.Н. Евелиной и О.М. Кечиной (Самара).

Большой интерес вызвали доклады, связанные с реализацией профильного обучения в школе. Содержательным явился доклад проф. С.И. Калинина (Киров) « p -Выпуклые функции и иррациональные уравнения». В своём сообщении докладчик показал применение свойств p -выпуклых функций к решению иррациональных уравнений различного вида. В докладе проф. Е.А. Перминова (Екатеринбург) предложен новый вид исследовательских задач на группы автоморфизмов графов и решёток, называемых группами симметрий. Заслуженный учитель РФ М.И. Тимачева (Вологда) в своём докладе «Методические особенности преподавания темы «Обратные тригонометрические функции» в 10–11 классах Вологодского многопрофильного лицея» обобщила свой опыт преподавания математики в этом образовательном учреждении. Следует отметить, что Вологодский многопрофильный лицей входит в ТОП-100 школ России.

Большое количество докладов было посвящено преподаванию математических дисциплин в высшей школе.

В своём докладе проф. Л.В. Шкерина и доц. М.Б. Шашкина (Красноярск) представили опыт выявления и предупреждения математических дефицитов студентов – будущих учителей математики в период обучения в вузе, описали возможности использования специального образовательного онлайн-модуля в курсе элементарной математики для преодоления у них дефицитов в области решения математических задач.

В докладе проф. Е.И. Смирнова (Ярославль), доц. В.С. Абатуровой (Владикавказ) и доц. Г.И. Худяковой (Ярославль) представлены результаты исследования

симбиоза математического и компьютерного моделирования как эффекта освоения сложного знания. Авторами рассмотрены процессы управления математическим образованием с синергетическим эффектом на основе выявления и исследования «проблемных зон» освоения математики средствами информационного, компьютерного и математического моделирования.

В докладе проф. Е.И. Деза (Москва) рассмотрены вопросы, связанные с местом арифметических задач в системе профессиональной подготовки учителя математики, охарактеризована роль арифметики как важной составной части общего и высшего педагогического математического образования. Автор обосновывает целесообразность использования арифметических задач для повышения качества предметной подготовки учителя математики и приводит примеры такого использования, в том числе для организации исследовательской работы студентов.

С этим докладом тесно перекликается доклад проф. Г.Г. Хамова и доц. Л.Н. Тимофеевой (Санкт-Петербург), посвящённый методике использования составления арифметических задач для формирования исследовательских умений у обучающихся. Подробно рассмотрен пример методики составления неопределённых уравнений, решаемых методом исследования свойств входящих в него многочленов.

В докладе В.Г. Казакевич и доц. Е.А. Толкачевой (Санкт-Петербург) были рассмотрены различные подходы к используемому в учебном процессе задачам как к основе инженерного математического образования. Предложенный авторами подход к формулированию и построению задачи позволяет предложить инструментарий развития мышления обучающихся.

В целом ряде докладов обсуждались задачи и упражнения по конкретным темам. Так, в докладе проф. Е.М. Вечтомова и магистранта И.А. Сазанова (Киров) приведены исходные понятия и система теоретических задач и практических упражнений на тему размерности упорядоченных множеств. Проф. Р.М. Асланов (Баку) и доц. В.В. Сушков (Сыктывкар) в своём докладе рассмотрели принципы построения фондов оценочных материалов для проведения контрольных работ по дисциплине «Теория функций комплексного переменного». Проф. В.В. Афанасьев (Ярославль) рассмотрел вероятностный подход к продолжению знаменитой Базельской задачи с использованием урновых моделей. В докладе проф. В.С. Секованова, К.Ю. Стрункиной (Кострома) и доц. И.В. Шапошниковой (Сургут) рассмотрена организация антиципационной деятельности студентов в процессе решения задач голоморфной динамики, связанных с методом Ньютона.

Доц. Шилова Г.Н. (Вологда) обобщила опыт преподавания математического анализа на направлении «Прикладная математика и информатика» и продемонстрировала систему контрольных работ, разработанных по данному предмету. Доц. Панфилова Т.Л. (Вологда) рассказала об особенностях преподавания элементарной геометрии студентам педагогических направлений подготовки, показала использование различных методических приёмов при решении геометрических задач.

Проблеме разработки методической системы повышения квалификации учителей математики был посвящён доклад доц. Д.И. Прохорова (Минск). В нём представлено краткое описание структурных компонентов концепции развития системы повышения квалифи-

кации учителей математики на основе дидактического дизайна, а также методической системы непрерывного повышения квалификации и самообучения учителей математики.

Важное место в развитии образования сегодня занимают цифровые технологии. Поэтому в докладах уделено значительное внимание освещению достижений в применении таких технологий в математическом образовании, а также обсуждались проблемы, возникшие в результате начавшейся цифровой трансформации.

Так, проф. А.Г. Ягола (Москва) поделился опытом преподавания математики на физическом факультете МГУ в период пандемии. А профессор мехмата МГУ И.В. Астахова и доц. РЭУ им. Г.В. Плеханова С.С. Ежак (Москва) в своём докладе осветили опыт применения цифровых образовательных технологий при создании массового открытого онлайн-курса «Дифференциальные уравнения» с использованием принципов педагогического дизайна.

В докладе доц. Л.В. Котовой (Москва) рассматривались современные тенденции в области организации занятий со студентами в смешанном и гибридном формате. Автором проанализированы основные «плюсы и минусы» очных и онлайн форм занятий. Доц. Ю.С. Налбандян (Ростов-на-Дону) и Э.А. Медер (Челябинск) представили опыт внедрения цифровых технологий в практику преподавания различных дисциплин. Авторами осмыслены общие проблемы и влияние дистанционного обучения на уровень освоения учебного материала.

Программно-методическое сопровождение дистанционного учебно-воспитательного процесса в системе общего образования рассмотрено в докладе проф.

А.И. Архиповой, проф. С.П. Грушевского и доц. В.А. Иванова (Краснодар). Авторы отмечают, что учебные материалы, учебники и пособия для цифрового и дистанционного образования должны принципиально отличаться от классических моделей, т.к. предназначены, в основном, для самостоятельной работы учащихся и студентов, без постороннего принуждения и контроля. Поэтому в них должны быть максимально усилены мотивирующие функции, обучающихся они должны «заставить захотеть» учиться.

Проф. Т.Г. Везиров (Махачкала) в своём докладе рассмотрел некоторые аспекты использования цифровых технологий в подготовке магистров по направлению подготовки «Педагогическое образование» в Дагестанском государственном педагогическом университете, где важное место занимают онлайн-курсы и цифровое портфолио будущих магистров.

Доценты О.Б. Голубев и Е.М. Ганичева (Вологда) предложили направления развития содержания дисциплины «Основы искусственного интеллекта» и варианты её реализации в рамках учебной практики на всех профилях высшего образования. К этой тематике примыкает и доклад А.Л. Коровина (Вологда), в котором автор раскрывает возможности использования современных технологий и методов искусственного интеллекта, анализа больших данных для решения ряда образовательных задач, таких как контроль текущей успеваемости, проектирование индивидуальных траекторий обучения и т.д.

Для решения проблемы активизации учебно-познавательной деятельности учащихся, как отмечено в докладе доц. Ю.А. Гороховой (Вологда), одним из актуальных направлений использования цифровых образовательных технологий является геймификация, использование игро-

вых элементов в образовательной среде. Автором такие элементы были внедрены при разработке и использовании на базе LMS Moodle электронного учебного курса по дисциплине «Информационные технологии».

По результатам работы конференции подготовлен и издан сборник материалов [1].

Литература

1. Задачи в обучении математике, физике и информатике: материалы III Международной научно-практической конференции, посвящённой 130-летию П.А. Ларичева / М-во науки и высшего образования РФ, Вологод. гос. ун-т, Вологда: ВоГУ, 2022. – 243 с.

2. Тестов В.А. П.А. Ларичев – учёный и

педагог (к 115-летию со дня рождения) // Математика в школе. 2007. № 8. – С. 79–80.

Голубев О.Б.,

к.п.н., доцент, директор института математики, естественных и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет, golubevob@vogu35.ru;

Тестов В.А.,

д.п.н., к.ф.-м.н., профессор кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», vladafan@inbox.ru;

Шилова Г.Н.,

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой математики и информатики ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», shilovagn@vogu35.ru.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Провал ОГЭ! Девятиклассники не сдали математику

Об этом сообщает «Рамблер».

Далее: https://news.rambler.ru/education/48769939/?utm_content=news_media&utm_medium=read_more&utm_source=copylink.

Со слов родителей выпускников девятых классов во Владимирской области почти 22% девятиклассников, сдававших ОГЭ по математике, получили неудовлетворительную оценку и будут направлены на пересдачу. При этом у выпускника есть право на пересдачу. Это право действует только в том случае, если школьник не сдал 1–2 экзамена (вне зависимости от того, обязательные это предметы или по выбору). В этом случае можно попробовать свои силы во второй раз, в специальные резервные дни летом. Если же и со второго раза написать на «тройку» не получилось, будет ещё одна пересдача в сентябре. Если же и после трёх попыток 9-классник не сдал больше 2 предметов, то аттестат об основном общем образовании он не получит. Ему придётся остаться в девятом классе на второй год и попробовать себя следующим летом. На поступление в колледж рассчитывать тоже не придётся.

Напомним, что ученики 9-х классов сдают всего четыре экзамена. Два из них – это обязательные русский язык и математика, а остальное — предметы по выбору. Чтобы получить аттестат об окончании средней школы, нужно сдать все четыре экзамена хотя бы на тройку.

Для пересдачи экзаменов в 9 классе назначаются специальные резервные дни до 2 июля и осенью до 24 сентября включительно.

АЛГОРИТМЫ В РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ

Представляемая вниманию читателя подборка задач в этот раз посвящена *алгоритмам*. В каждой из задач либо описан некий алгоритм, либо нужно придумать алгоритм, ведущий к решению задачи. Разберём для примера несколько задач

Задача 0. В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок (можно взвешивать только пару яблок). Придумайте способ узнать суммарный вес всех яблок за 8 взвешиваний.

Решение. За пять взвешиваний можно узнать вес 10 яблок, разбив их на пять пар. Осталось три яблока и три взвешивания. Оставшиеся три яблока можно тремя способами разбить на пары. Взвесим каждую такую пару. Тогда, сложив результаты этих трёх взвешиваний, мы получим удвоенный суммарный вес этих трёх яблок. Теперь несложно найти вес всех 13 яблок.

Задача 00 (*Игра «Сыщик и воры»*). В ряд стоят 7 человек. У кого-то одного из них в кармане «украденный пятак». «Сыщик» может проверить карманы у любых трёх человек. После проверки тот, у кого пятак, передаёт его своему соседу (слева или справа). Как сыщику за два хода найти пятак?

Решение. Занумеруем людей, стоящих в ряду, числами от 1 до 7. Первым ходом сыщик проверит карманы у второго, четвёртого и шестого человека. Если ни у кого из них пятака нет, то он находится у одного из людей с нечётными номерами. Значит, следующим ходом пятак переключает к одному из людей с чётными номерами. Снова проверим карманы у второго,

четвёртого и шестого человека, и на этот раз пятак будет обнаружен.

Задача 000. Фокусник с завязанными глазами выдаёт зрителю 29 карточек с номерами от 1 до 29. Зритель прячет две карточки, а остальные отдаёт ассистенту фокусника. Ассистент указывает зрителю на две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался? (*А.К. Толтыго, А.В. Шаповалов.*)

Решение. Расположим мысленно карточки по кругу. Тогда если зритель загадал две не соседние карточки *A* и *B*, ассистент указывает на карточку, идущую следом за *A* и на карточку, идущую следом за *B* (по часовой стрелке). Если же зритель загадал две соседние карточки, ассистент указывает на следующие две соседние карточки (по часовой стрелке).

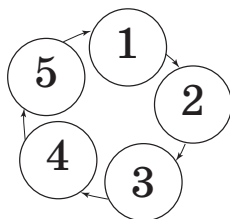
Замечание. Заметим, что количество карточек в данной задаче несущественно. Сколько бы их ни было, выполнить аналогичный приём всегда удастся.

Задачи

для самостоятельного решения

Задача 31. У фокусника есть пять одинаковых шаров, лежащих по кругу. В одном из них рубин. Если в шаре рубин,

то он тяжелее. Можно взять любые два шара и сравнить их по весу. После взвешивания можно забрать любой шар, если он с рубином. Иначе фокусник машет палочкой, и рубин перемещается по стрелке в соседний шар. Как за 2 взвешивания забрать рубин? (*Е.Ю. Иванова, Олимпиада начальной школы ДваждыДва, 2022 год, 4 класс.*)



Задача 32. Первоначально на каждом поле доски $1 \times n$ стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нём шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним. Докажите, что за $n - 1$ ход можно собрать все шашки на одной клетке. (*А.В. Шаповалов.*)

Задача 33. У Маши есть коробка, в которой лежат 2019 белых и 2020 чёрных шаров. У Васи есть мешок, в котором находятся 10000 чёрных шаров. Дети играют в следующую игру. Маша наугад вытаскивает из коробки два шара. Если они одного цвета, то она их выкидывает, а Вася берёт из своего мешка чёрный шар и кладёт в Машину коробку. Если вынутые Машей шары разного цвета, то она выкидывает чёрный шар, а белый кладёт обратно в коробку. Игра продолжается до тех пор, пока в коробке не останется один шар. Если он белый, то выигрывает Маша, а если чёрный, то Вася. Кто выигры-

вает в этой игре? (*по мотивам Харьковских Олимпиад 2005 года, Олимпиада шестиклассников матклассов ДваждыДва, 2019 год.*)

Задача 34. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, – алюминиевые (хотя бы один алюминиевый точно есть!), остальные – дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний определить число дюралевых кубиков? (*Фольклор.*)

Задача 35. Имеются 39 металлических покрашенных шариков – по 3 каждого цвета. Известно, что в каких-то двенадцати тройках все шарики весят по 10 г, а в тринадцатой какой-то один шарик весит 9 г, («фальшивый легкий»), другой – 10 г, а третий – 11 г («фальшивый тяжелый»). Можно ли за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые шарики? (*К. Кноп.*)

Задача 36. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». Как гномам заранее договориться действовать, чтобы спастись? (*А.В. Шаповалов.*)

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Ивановой Елене Юрьевне по адресу distant@mathbaby.ru к 01.09.22 в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать:

для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт);

для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь.

Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Решения задач из номера 1/2022 г.

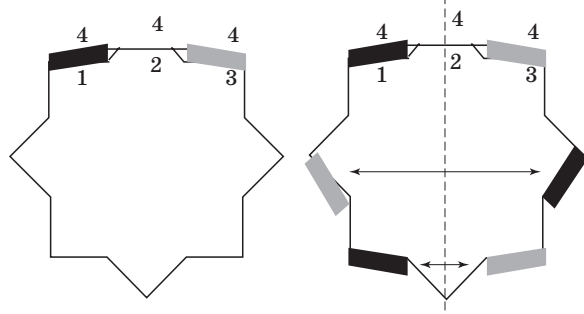
Задача 13. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются соответственно диллеры и даллеры, причём в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинаящий финансист имеет 1 диллер, может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что у него количество даллеров никогда не сравняется с количеством диллеров. (*Уральский турнир 1993 года.*)

Решение. Рассмотрим, что происходит с количеством монет после одного обмена. Пусть в какой-то момент у нашего финансиста K диллеров и T даллеров. И он меняет A монет одного вида на $10A$ монет другого вида. Тогда новое количество монет либо $K - A$ и $T + 10A$, либо $K + 10A$ и $T - A$. Рассмотрим разность количеств монет в каждом из случаев. В первом случае это $(K - A) - (T + 10A) = K - T - 11A$, во втором случае $(K + 10A) - (T - A) = K - T + 11A$. Тем самым мы показали, что остаток от деления на 11 разности диллеров и даллеров в результате любых операций нашего финансиста остаётся неизменным. Но изначально он был равен 1. Значит, сделать его равным нулю (а это необходимое условие равенства двух чисел) не получится.

Задача 14. Два игрока по очереди красят непокрашенные стороны 43-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним

ввёл в игру новый цвет. Кто из игроков может обеспечить себе победу? (*Личная олимпиада 7 класса, Уральский турнир 1998 года.*)

Ответ: Второй выигрывает.



Решение. Пусть первый покрасил какую-то сторону в белый цвет (на рисунке серый). Тогда второй нумерует все стороны многоугольника с 1 до 43 так, чтобы покрашенная сторона была 43-й по счёту. И красит 42-ую сторону в чёрный цвет (см. рисунок). На рисунке изображён 15-угольник, но наше решение справедливо для любого многоугольника с нечётным количеством сторон.

После своего хода второй мысленно делит многоугольник пополам и «зеркально повторяет» ходы первого. А именно: если первый красит в одной половине какое-то ребро в белый цвет, то второй красит симметричное ребро в чёрный цвет и наоборот.

Поскольку после каждого хода позиция второго абсолютно симметрична в вышеописанном смысле, то если есть ход у первого, то есть ход и у второго. Поскольку сторон нечётное количество, то ходов тоже должно быть нечётное количество. Значит, последний будет ходить первый, и он будет вынужден покрасить 42-ое ребро и, значит, ввести новый цвет.

Если вдруг первый введёт третий цвет раньше (в надежде, что второму придётся ввести ещё четвёртый цвет), то после этого второй может ходить уже без стратегии,

так как у него всегда есть ход, поскольку у любого ребра два соседа и всегда можно покрасить его в цвет, отличающийся от них обоих.

Задача 15. В ряд слева направо лежат карточки с надписями «Один», «Два», «Три», «Четыре», «Пять», «Шесть», «Семь», «Восемь», «Девять». Петя подчеркнул 9 разных букв, по одной в каждой надписи. Затем он поменял местами пару карточек. Могли ли в результате все подчеркнутые буквы расположиться так, что каждая следующая справа будет стоять в алфавите дальше предыдущей? (*М. Шаповалов, Уральский турнир 2012 года, лига 7 классов.*)

О т в е т: Нет.

Р е ш е н и е. В слове «Один» самая близкая к началу алфавита буква – Д, а самая далекая в «Два» – тоже Д. Значит, первые две карточки должны изменить взаимное расположение. Это можно сделать, либо поменяв их друг с другом, либо поменяв «Один» с карточкой, где есть буква ближе Д: со словом «Восемь» или «Девять». В любом случае в карточке на втором месте будет отмечена минимум Д, тогда в «Три» – минимум И, в «Четыре» – минимум Р, в «Пять» – минимум Т, в «Шесть» – минимум Ш, в «Семь» – минимум Б. На восьмом месте лежит либо «Восемь», либо поменявшаяся с ней карточка «Один». Но ни в одной из этих карточек нет букв дальше Б. Противоречие.

Задача 16. Для какого наибольшего натурального n можно указать на плоскости n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и раскрасить их в несколько цветов так, чтобы ни один из треугольников с тремя вершинами одного цвета и ни один из треугольников с вершинами трёх разных цветов не был тупоугольным? (*Уральский турнир 2010 года, лига 8 классов.*)

О т в е т: 12.

Р е ш е н и е. Для решения нам потребуются три вспомогательных утверждения.

Лемма 0. Существует не более одного способа дополнить данный треугольник четвёртой вершиной до прямоугольника.

Доказательство. Действительно, один из углов треугольника должен стать углом прямоугольника. Значит, если исходный треугольник не прямоугольный, то искомого способа не существует. Если же наш треугольник ABC имеет прямой угол B , то тогда сторона AC должна быть диагональю прямоугольника. Так как у прямоугольника диагонали равны и пересекаются в серединах, то единственное возможное положение для четвёртой вершины прямоугольника – точка, симметричная B относительно середины AC .

Лемма 1. Если среди четырёх точек не нашлось трёх точек, образующих тупоугольный треугольник, то эти четыре точки образуют прямоугольник.

Доказательство. Пусть A, B, C, D – данные точки. Возможны два случая:

А) Одна из точек лежит внутри треугольника, образованного тремя остальными точками.

Б) Четыре точки образуют выпуклый четырёхугольник.

Первый случай. Пусть, без ограничения общности, A лежит внутри треугольника BCD . Тогда сумма углов BAC, CAD, DAB равна 360° , то есть среди них найдётся угол 120° или больше. Это означает, что один из треугольников BAC, CAD или DAB будет тупоугольным. Противоречие с предположением леммы. Значит, такой случай невозможен.

Второй случай. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник. Предположим, что ни один из его углов не является тупым. Так как сумма его четырёх углов равна 360° и каждый из них 90° или меньше, то

каждый из углов должен быть равен 90° , что и даёт нам утверждение леммы.

Лемма 2. Среди пяти различных точек плоскости обязательно найдутся три, образующие тупоугольный треугольник.

Доказательство. Предположим, что это не так, и нашлись какие-то пять точек A, B, C, D, E , среди которых не нашлось тупоугольного треугольника. Значит, и среди любых четырёх тоже нельзя выбрать тупоугольный треугольник. Тогда по лемме 1 точки A, B, C, D образуют прямоугольник. Но по той же лемме A, B, C, E тоже образуют пятиугольник. Получается, что нашлись две различные точки D и E , дополняющие тройку точек A, B, C до прямоугольника, что противоречит лемме 0.

Теперь – решение исходной задачи. На плоскости не может быть более 4-х точек одного цвета. Иначе по лемме 2 найдётся тупоугольный треугольник с одноцветными вершинами. Аналогично, цветов не может быть пять или больше. Так как тогда мы придём к противоречию с леммой 2, выбрав пять разноцветных точек.

Таким образом, цветов не более 4-х и точек каждого цвета не более 4-х.

Покажем, что в искомом нами максимальном примере цветов не может быть четыре.

Действительно, пусть нашлись точки A, B, C, D четырёх различных цветов. По первой лемме A, B, C, D образует прямоугольник. Пусть у нас нашлась какая-то другая точка E того же цвета, что и D . Тогда A, B, C, E тоже образуют прямоугольник. Но существует только один способ дополнить точки A, B, C до прямоугольника, поэтому точки E и D должны совпасть. Противоречие. Значит, точка D – единственная точка своего цвета. Аналогично, A, B, C – единственные точки своих цветов. Значит, в случае наличия

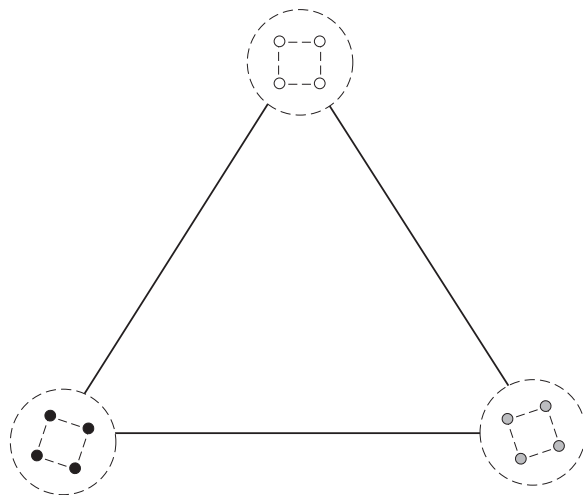
точек четырёх цветов всего четыре.

Таким образом, мы показали, что в максимальном примере не может быть больше, чем 3 цвета, и что точек каждого цвета не более 4-х. Из чего получается, что в максимальном примере не может быть более, чем 12 точек.

Осталось построить пример из 12 точек.

Идея. Рассмотрим правильный треугольник ABC . Если треугольник достаточно большой, то поместив в каждую вершину маленький квадратик из 4-х точек одного цвета, мы получим, что любой треугольник с тремя разноцветными вершинами будет остроугольным с углами, близкими к 60° .

Осталось только расположить квадратики так, чтобы никакие три точки не лежали на одной прямой.



Задача 17. В начале игры есть пустая клетчатая доска 10×11 . Петя и Вася ходят по очереди, первым ходит Петя. За ход Петя ставит по фишке в две пустые клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину, а Вася ставит фишку в любую пустую клетку. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

О т в е т: Петя.

Решение. Доску 10×11 нетрудно разбить на один прямоугольник со сторонами 1 и 2 и 36 трёхклеточных «уголков». Петя выиграет, если зафиксирует такое разбиение: первым ходом поставит обе фишки в прямоугольник со сторонами 1 и 2, а следующие ходы будет делать в тот же уголок, куда предыдущим ходом поставил свою фишку Вася.

Задача 18. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , продолжения его сторон AB и CD пересекаются в точке E , а продолжения его сторон AD и BC – в точке F . Точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Точки P, Q, R являются точками пересечения пар прямых OF и LN , OE и KM , KM и LN соответственно. Докажите, что точки O, P, Q , и R лежат на одной окружности. (С.Л. Берлов, И.И. Богданов, Кубок Колмогорова 2002 года, лига 10–11 классов.)

Решение. Заметим, что утверждение задачи равносильно тому, что направленные углы $\angle(OP, PR)$ и $\angle(OQ, QR)$ равны, то есть $\angle(OF, LN) = \angle(OE, KM)$. Этот факт позволяет нам упростить чертёж, убрав из рассмотрения точки P, Q , и R .

Далее, OE – полярная точка F , а OF – полярная точка E , следовательно, если отметить центр T описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, то прямые OE и TF перпендикулярны, а также перпендикулярны прямые OF и TE . Здесь мы вос-

пользовались следующим фактом: пусть $ABCD$ – четырёхугольник, вписанный в окружность Ω , а F – точка пересечения его двух боковых сторон. Проведём из F касательные к Ω . Тогда точки касания с Ω , точка пересечения диагоналей четырёхугольника и точка пересечения двух других сторон лежат на одной прямой, которая и является полярной для точки F относительно окружности Ω .

Отсюда имеем: утверждение задачи равносильно тому, что $\angle(TE, LN) = \angle(TF, KM)$. Так как K – середина AB , а T – центр окружности, то $TK \perp AB$; аналогично $TL \perp BC$, $TM \perp CD$ и $TN \perp AD$. Следовательно, четвёрки точек T, N, L, F и T, K, M, E лежат на одной окружности. Теперь вычислим углы:

$$\begin{aligned}\angle(TE, LN) &= \angle(TE, TK) + \angle(TK, LN) = \\ &= \angle(EM, MK) + \angle(TK, LN) = \\ &= \angle(CD, MK) + \angle(TK, AB) + \angle(AB, LN) = \\ &= \angle(CD, MK) + 90^\circ + \angle(AB, LN).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\angle(TF, KM) = \angle(BC, LN) + \angle(AD, MK) + 90^\circ.$$

Осталось показать, что

$$\begin{aligned}\angle(BC, LN) + \angle(AD, MK) + 90^\circ &= \\ &= \angle(CD, MK) + 90^\circ + \angle(AB, LN).\end{aligned}$$

Но $\angle(BC, LN) + \angle(AD, MK) + 90^\circ = \angle(BC, AB) + \angle(AB, LN) + \angle(AD, CD) + \angle(CD, MK) + 90^\circ = 90^\circ + \angle(AB, LN) + \angle(CD, MK)$, так как четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Что и требовалось доказать.

Рубрику ведёт **Иванова Е.Ю.**



БИБЛИОТЕКА

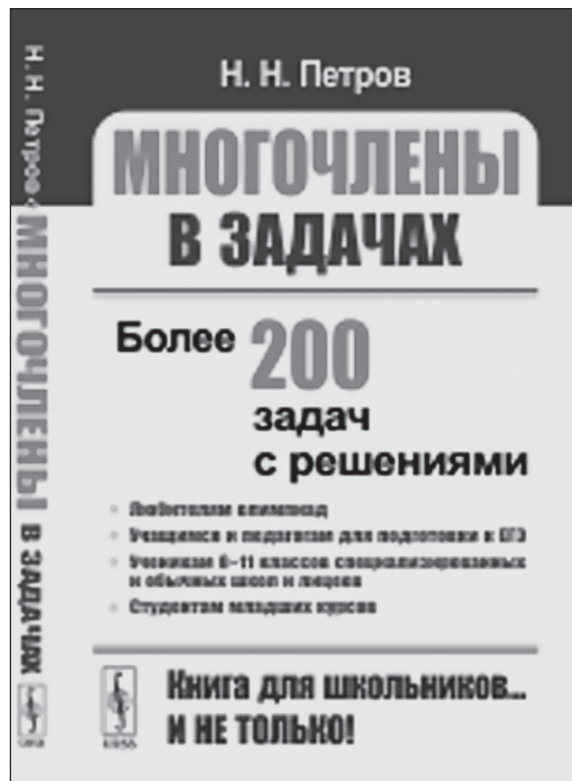
Н.Н. Петров

МНОГОЧЛЕНЫ В ЗАДАЧАХ: БОЛЕЕ 200 ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

URSS. 2022. 256 с.

В школьном курсе математики большое внимание уделяется исследованию квадратичной функции. Это направление является частью большого и содержательного раздела математики, изучающего производные многочлены от одной и нескольких переменных. Теория многочленов часто применяется в различных разделах математики. Использование многочленов во многих случаях оправдано, так как, с одной стороны, вычисления с многочленами проводить существенно проще, чем с другими функциями, а с другой стороны, множество многочленов всюду плотно в пространстве непрерывных функций на отрезке. Это позволяет в некоторых случаях заменять рассматриваемые функции многочленами. В книге излагаются некоторые элементы теории, но её основная часть посвящена задачам, большинство из которых снабжено решениями. Кроме того, рассматриваются различные свойства многочленов, не всегда изучаемые в школьном курсе, но непосредственно примыкающие к нему.

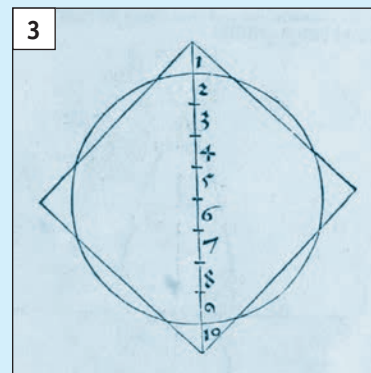
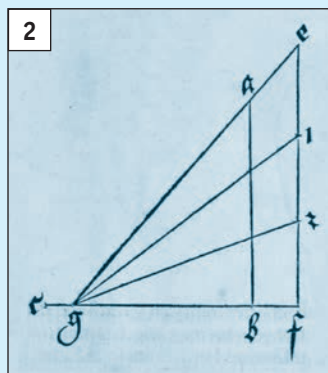
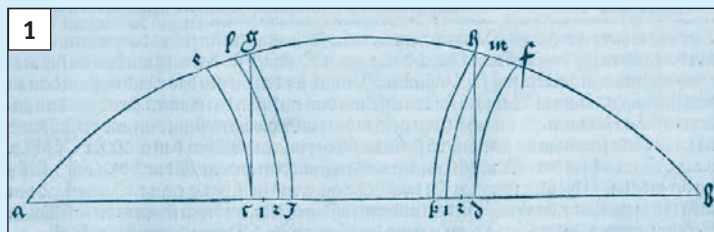
Данная книга будет полезна ученикам 8–11 классов, как обычных школ, так и классов с углублённым изучением математики, лицеев и специализированных школ. Любители олимпиад также найдут в данной книге много задач, требующих для своего решения особого подхода. Книга может служить источником для подготовки к решению задач ЕГЭ, в частности задач с параметрами. Полезной будет книга и студентам вузов 1–2 курсов.



Дюрер и классические задачи древности

Как художник и как математик Альбрехт Дюрер много внимания уделял геометрическим построениям. В свой трактат «Руководство к измерению...» (1525) он включил немало конструктивных задач. В их числе популярные в то время классические задачи древности, неразрешимые с помощью циркуля и линейки.

Трисекция угла. Дюрер рассматривал центральный угол и делил на части соответствующую ему дугу окружности. Его построение поясняет рисунок [1]. Разделим стягивающую угол хорду ab на отрезки $ac = cd = db$. Восставим перпендикуляры cg и dh . Построим дуги окружностей с центрами a , b и радиусами ag , bh . Они пересекут хорду в точках j и k . Разделим каждый из отрезков cj и kd на три равные части точками 1 и 2. Проведём окружности с центрами a , b и радиусами $a2$, $b1$. Они пересекут исходную дугу в точках l и m , которые разделят её на приблизительно равные части al , lm и mb .



Исследователи научного наследия

Дюрера подтвердили на основе вычислений высокую точность его метода. Трисекция отрезка – это отдельная задача. Один из способов её решения, описанный в трактате, основан на соображениях подобия и ясен из рисунка [2]. Здесь прямая cf перпендикулярна данному отрезку ab , а ef ему параллельна, отрезки $f2$, 21 , $1e$ равны. Точки пересечения прямых $g1$ и $g2$ с отрезком ab делят его на три равные части.

Квадратура круга. А вернее сказать, кругатура квадрата. Дюрер взялся за обратную задачу и дал приближённый метод построения круга, равновеликого квадрату: «Нарисуйте квадрат и разделите его диагональ на десять равных частей. Затем нарисуйте круг, диаметр которого включает в себя восемь из этих частей» [3]. Выразим и приравняем площади этих фигур, считая диаметр круга равным $4/5$ диагонали квадрата с известной стороной. Отсюда $\pi = 25/8 = 3,125$. Этим значением числа π пользовался ещё Витрувий. Оно куда менее точно, чем архимедово приближение $22/7 \approx 3,14$.

Удвоение куба. Никакого решения «делосской проблемы» Дюрер не предложил. Зато охотно пересказал историю задачи и привёл несколько решений без циркуля и линейки, придуманных ещё древними греками. В частности, «механическое», приписываемое Платону: с применением устоя в виде П-образной рамы с пазами и передвижной рейкой. Дюрер вслед за Иоганном Вернером (немецкий математик, современник художника) использовал для того же построения более простую конструкцию из угольника, вдоль стороны которого перемещается перпендикулярная ей линейка. Но если Вернер показал её схематично, то Дюрер изобразил готовый инструмент во всех деталях.

Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2022. II ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

П1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

Подписной индекс

П1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
ДЛЯ
ШКОЛЬНИКОВ»
Подписной
индекс — П1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:

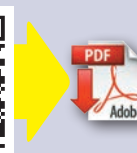
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • БиблиоШкола – biblioclub.ru • Знаниум – znanium.com

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.

Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2022, № 5, 1–80