

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

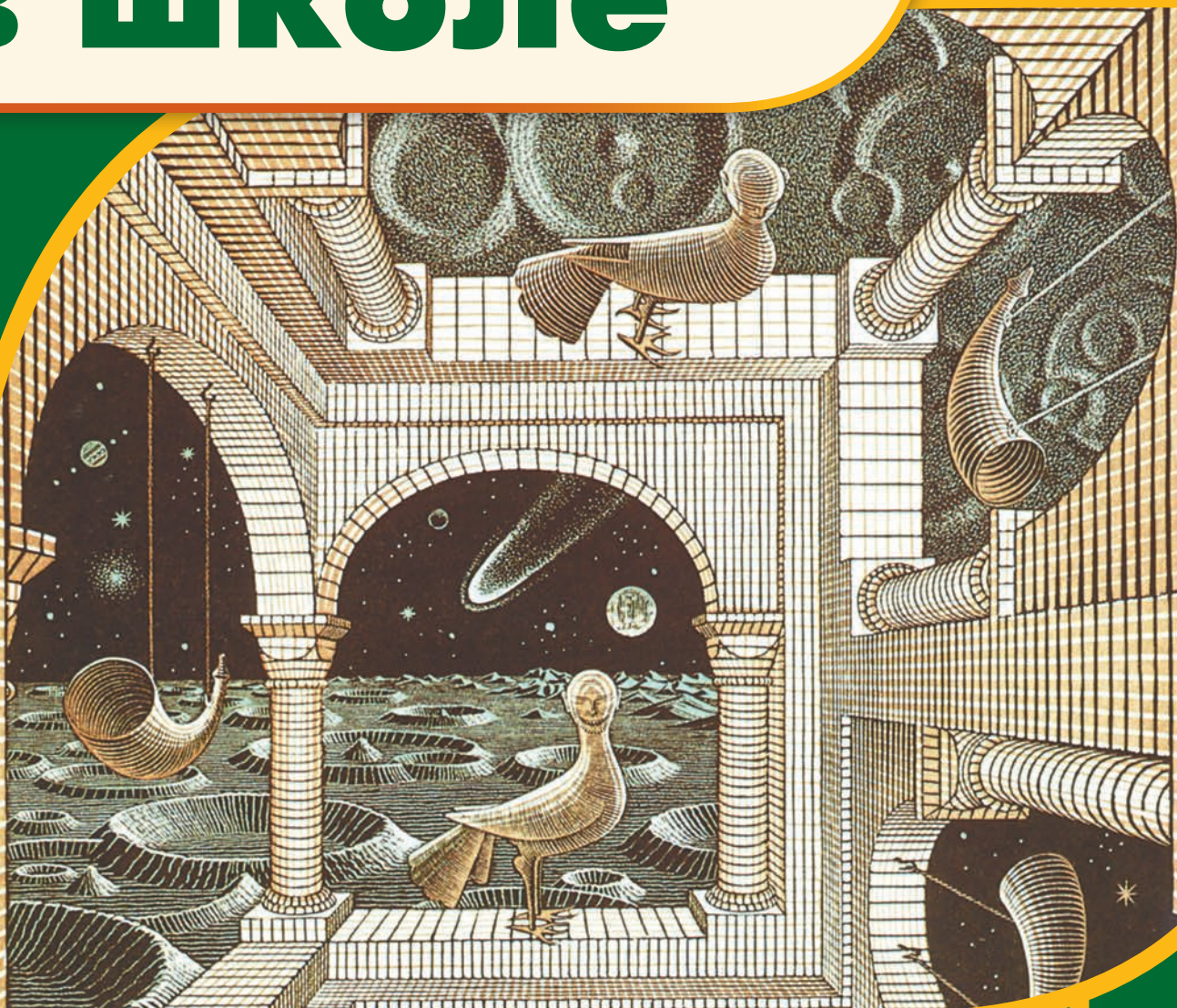


научно-теоретический и методический журнал

5 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



**О вступительных экзаменах по математике
в высшие учебные заведения Сербии**

Квадратные уравнения и теорема Виета

Такой удобный треугольник

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



ЗА МНОЙ, ЧИТАТЕЛЬ!

На страницах нового номера журнала читатели могут найти немало интересных и полезных для себя материалов, посвящённых разным аспектам многомерного пространства школьной математики.

Конечно, всегда в центре нашего внимания школьные экзамены — и в нашей стране, и в других странах. В этом номере в материале С.И. Калинина и А.Н. Соколовой представлен содержательный сравнительный анализ профильного российского ЕГЭ по математике и вступительного экзамена по математике в Белградском университете (Сербия), что позволяет, помимо прочего, посмотреть как бы «со стороны» на уровень требований и стилистику задач нашего национального экзамена.

Также традиционный интерес для наших читателей представляют материалы математических олимпиад, которые ныне являются не только смотром творческих достижений школьников, но и дополнительной возможностью продолжить изучение математики в системе высшего образования, в институтах и университетах. В этом номере мы продолжаем публикацию заданий и решений заключительного этапа одной из самых престижных наших олимпиад — олимпиады «Физтех» по математике 2022 года. Кроме того, в рубрике «Открытый урок» — любопытный материал А.Н. Попова «Об одной стереометрической задаче московской математической олимпиады», в которой представлен не только разбор самой задачи, но и анализ решений школьников, и, что особенно интересно, конструктор для объёмного моделирования, с помощью которого можно придумывать задачи для математических соревнований.

Не случайно и то, что в этом номере сошлись несколько материалов, рассматривающих с разных, иногда неожиданных сторон вроде бы хо-

рошо знакомую каждому учителю математики традиционную тему школьного курса. Это и статья А.И. Кузьмичева и Т.Н. Кузьмичевой «Квадратные уравнения и теорема Виета», в которой обращается внимание на привычную тему решения квадратных уравнений и неравенств как на одну из немногих, увы, оставшихся тем в школьном курсе математики, на которой можно развивать логическое, теоретическое мышление учеников, излагая тему строго доказательно, без интуитивных посылок. А название статьи М.С. Бичегкуева и Э.Г. Олисаева «О наибольшем и наименьшем значениях квадратичной функции» не требует пояснений о её содержании, которое, уверен, обогатит учителя новыми подходами к теме. И, наконец, в материале М.В. Подаева «Квадратный трёхчлен» рассматриваются нестандартные ситуации вокруг этого, такого вроде бы привычного, объекта школьного курса математики.

Формирование математической грамотности — важнейшая тема забот и размышлений любого настоящего учителя. В рубрике «Методический семинар» действующий учитель математики Т.С. Харбих предлагает посмотреть на решение прямых и обратных задач на работу с формулами именно как на средство формирования функциональной математической грамотности.

И ещё хочется отметить особо материалы нашего постоянного автора Н.М. Карпушиной, одинаково свободно чувствующей себя как в самых новейших («Нейросеть заменит учителя?»), так и в таких хрестоматийных вопросах, как заметки о египетском треугольнике.

За мной, читатель! — эти слова можно произнести не только на уроке литературы, цитируя хрестоматийный роман, но и здесь, на страницах нашего журнала, обращаясь к нашим верным друзьям-читателям.

Евгений Бунимович

ЭКЗАМЕНЫ

- 3 Калинин С.И., Соколова А.Н.
О вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения Сербии

ОЛИМПИАДЫ

- 13 Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Голубев М.О.,
Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Королёв Н.Ю., Молчанов Е.Г., Останин П.А.,
Подлипский О.К., Саулин С.М., А.А. Скубачевский А.А., Терёшин Д.А.
Заключительный этап олимпиады «Физтех-2022» по математике. Часть 2

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 23 Харбих Т.С.
**Решение прямых и обратных задач на работу с формулами
как средство формирования математической грамотности**

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 36 Кузьмичев А.И., Кузьмичева Т.Н.
Квадратные уравнения и теорема Виета
- 42 Бичегкуев М.С., Олисаев Э.Г.
О наибольшем и наименьшем значениях квадратичной функции

ПРОФИЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ

- 54 Попов А.Н.
Об одной стереометрической задаче московской математической олимпиады

ХРОНИКИ

- 63 Синкевич Г.И.
О Санкт-Петербургском семинаре по истории математики. Двести докладов (2013–2023)

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

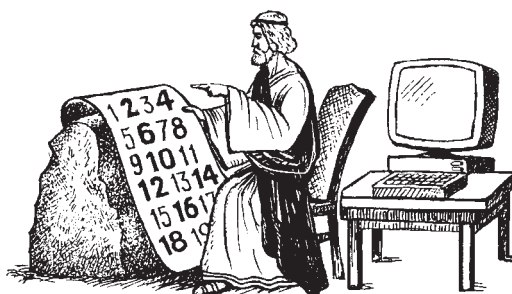
- 73 Карпушина Н.М.
«Нейросеть заменит учителя?» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 77** *Поддаев М.В.*
Квадратный трёхчлен

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 79** *Карпушина Н.М.*
Такой удобный треугольник



Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3776. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 5 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

О ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ СЕРБИИ

ABOUT ENTRANCE EXAMS IN MATHEMATICS TO HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS OF SERBIA

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_3

С.И. Калинин,Вятский государственный университет, г. Киров,
kalinin_gu@mail.ru;**А.Н. Соколова,**Вятский государственный университет, г. Киров,
junell@inbox.ru**S.I. Kalinin,**Vyatka State University, Kirov,
kalinin_gu@mail.ru;**A.N. Sokolova,**Vyatka State University, Kirov,
junell@inbox.ru

Аннотация: статья знакомит читателя с содержанием вступительного экзамена по математике в Белградский университет (Сербия) на инженерные направления подготовки; проводится его сопоставление с российским ЕГЭ по математике профильного уровня

Abstract: the article introduces the reader to the content of the entrance exam in mathematics to the University of Belgrade (Serbia) for engineering training directions; its comparison with the Russian Unified State Exam in mathematics of the profile level is carried out

Ключевые слова: образование в Сербии, Белградский университет, вступительные экзамены, ЕГЭ по математике

Keywords: education in Serbia, University of Belgrade, entrance exams, USE in mathematics

© С.И. Калинин, А.Н. Соколова 2023

Предлагаемые вниманию читателя материалы появились благодаря общению с профессором Zdravko Starc (Vrsac, Srbija) на предмет аттестации выпускников сербских общеобразовательных школ и продолжения ими образования в вузах. Профессор в ответ на нашу просьбу прислал варианты тестов, предлагаемые абитуриентам на вступительных экзаменах по математике в один из главных университетов Сербии – Белградский университет, за что авторы выражают ему свою глубокую признательность. Познакомившись с материалами, читатель сможет оценить содержание сербского школьного математического образования и сопоставить его с российским.

Присоединение Сербии к Болонской

конвенции в 2006 году повлекло за собой существенное реформирование всей образовательной системы, поскольку до этого времени страной наследовались образовательные традиции Югославии. Сегодня в Сербии действует система непрерывного образования, которая может начинаться буквально с ясельного возраста.

Обучение в основной школе в Сербии составляет 8 лет, затем выпускники могут продолжить обучение в гимназиях, что занимает ещё 4 года. Таким образом, полное школьное образование составляет 12 лет, как впрочем, во многих других европейских странах.

Выпускник школы, гимназии или художественного училища может продолжить

свое образование в вузе. Конкурсный отбор абитуриентов проходит на основе результатов выпускных экзаменов средней школы и результатов вступительного экзамена на выбранный факультет.

В Сербии существуют как государственные, так и частные вузы. Независимо от формы собственности обучение для иностранных студентов является платным. Владение сербским языком – обязательное условие для получения высшего образования.

Система высшего образования в Сербии подразделяется на два типа: *академическое высшее образование*, реализуемое в университетах, и *профессиональное высшее образование*, которое, прежде всего, осуществляется в высших школах, а также и в университетах.

Университет предполагает включение в себя нескольких факультетов. Срок обучения на них составляет от 3 до 4 лет. Как и в России, медицинское образование требует более длительного обучения: чтобы получить диплом врача, нужно учиться 6 лет, а для получения диплома ветеринара, стоматолога или фармацевта – 5 лет. Обучение в сербской высшей школе длится 3 года и предполагает получение особого вида диплома, аналогов которому нет в других странах.

Следует отметить, что сербские университеты позволяют студентам получать академические знания и ориентируют их на продолжение академической карьеры, в то время как подготовка слушателей высших школ имеет преимущественно прикладную направленность.

Крупнейшим и старейшим центром научной, образовательной и культурной жизни Сербии является Белградский университет. Историю его непрерывного развития можно проследить, начиная с 1808 года. В настоящее время в нём на-

считывается 31 факультет, имеются 11 научно-исследовательских институтов. Все факультеты разделены на четыре группы: первую составляют факультеты социальных и гуманитарных наук, вторую – медицинских и естественных, третью – математических, четвертую – технических наук.

В настоящей статье предполагается охарактеризовать содержание вступительных экзаменов по математике на электротехнический и машиностроительный факультеты Белградского университета. Абитуриентам каждого из названных факультетов предлагается 20 заданий тестового типа с шестью вариантами ответа. Время, отводимое на их выполнение, составляет 3 часа (180 минут).

На электротехническом факультете система оценивания следующая (таблица 1).

Таблица 1

Номера заданий	Баллов за правильный ответ	Всего баллов
1–2	3	6
3–7	4	20
8–13	5	30
14–18	6	30
19–20	7	14
Итого:		100

Отметим, неправильный ответ приносит –10% от количества баллов, предусмотренных за правильный ответ. Примечательным является и то, что последним вариантом ответа для всех заданий является вариант N) – «Не знаю», выбор которого не эквивалентен неправильно указанному ответу, то есть он не приносит «штрафных» баллов.

Тематика заданий для указанных факультетов охватывает следующий круг вопросов: преобразование иррациональных выражений, решение уравнений, не-

равенств, систем уравнений, тригонометрию, планиметрию и стереометрию, комплексные числа, арифметические и геометрические прогрессии, комбинаторику, начала математического анализа, задачи с параметром. При этом есть различия в распределении количеств заданий по темам. Так, например, вступительный экзамен по математике на машиностроительный факультет включает больше заданий по началам анализа, тригонометрии и геометрии, в то время как на электротехническом факультете больше внимания уделяется преобразованию выражений, решению уравнений и их систем.

Рассмотрим некоторые задания вступительного экзамена по математике для будущих инженеров. Для удобства читателя задания условимся группировать по тематике, а после номера задания в скобках приводить аббревиатуру факультета: ЭТФ – электротехнический, МФ – машиностроительный.

Обратим также внимание читателя на следующее. Если формулируемое задание аналогично существующим в отечественных контрольно-измерительных материалах (КИМ), то мы нередко приводим только его формулировку и правильный ответ, отмечаемый полужирным начертанием. Наиболее интересные на взгляд авторов задания приводятся с решениями.

Практико-ориентированные задачи

Задание 1 (ЭТФ). Цена компьютера составляла 100000 динаров, а затем она повысилась на 25%. Новая цена во время распродажи понизилась на 20% и составила:

- A) 90000; B) 96000; C) 120000;
D) 105000; **E) 100000;** N) Не знаю.

Решение. Найдём цену компьютера после повышения цены:

$$100000 \cdot 1,25 = 125000 \text{ (динаров).}$$

Во время распродажи цена компьютера составит $125000 \cdot 0,8 = 100000$ (динаров).

В российских школах подобные задачи рассматриваются при изучении темы «Проценты», а в ЕГЭ по математике профильного уровня для аналогичной задачи предполагается запись полученного ответа вместо выбора его варианта [1].

На машиностроительном факультете вступительный экзамен также включает практико-ориентированную задачу, однако она расположена ближе к концу теста.

Задание 16 (МФ). Прямоугольный бассейн размером 3 м × 4 м заполнен водой на высоту 1,5 м. На сколько поднимется уровень воды, если на дно бассейна опустить тяжёлый куб со стороной 2 м?

- A) $\frac{3}{4}$ м; B) $\frac{4}{3}$ м; C) $\frac{1}{2}$ м;
D) $\frac{2}{3}$ м; E) 1 м; N) Не знаю.

Аналогичные задачи можно встретить и в вариантах отечественного ЕГЭ по математике профильного уровня, причём в формулировках условий форма бассейна может быть более интересной: круглой, треугольной и т.п.

Числовые выражения и последовательности

К достаточно простым задачам вступительного экзамена в Белградский университет относятся задания на преобразование и вычисление числовых выражений. Их уровень несколько выше, чем у таких же заданий в отечественных КИМ. Рассмотрим их.

Задание 1 (МФ). Значением числового выражения

$$\left(\left(\sqrt{(-7)^2} + 10\frac{3}{5} + 18,4 \right) \cdot 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} : 8^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

является:

А) $\sqrt{3}$; В) $3\sqrt{3}$; С) $9\sqrt{3}$;

Д) 3; Е) 9; N) Не знаю.

Задание 3 (ЭТФ). Значением числового выражения

$$\left(\frac{2 - \log_{\sqrt{3}} 5 + 2 \log_9 4}{3^{\frac{4}{4}}} \right)^6$$

является:

А) 1; В) 8/9; С) 2;

Д) 25/9; Е) 216/5; N) Не знаю.

Задание 19 (МФ). Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма первых трёх её членов равна 26/3. Тогда произведение первых двух членов этой последовательности равно:

А) $\frac{1}{3}$; В) 2; С) 3;

Д) 6; Е) 12; N) Не знаю.

Решение. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии находится по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член этой прогрессии, а q – её знаменатель. По условию $\frac{b_1}{1-q} = 9$.

Кроме того, известно, что

$$b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = \frac{26}{3}.$$

Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = \frac{26}{3}, \\ \frac{b_1}{1-q} = 9. \end{cases}$$

Из неё получаем уравнение относительно неизвестного q :

$$(1-q)(1+q+q^2) = \frac{26}{27}.$$

Корнем последнего уравнения является значение $q = \frac{1}{3}$.

Затем находим первый член прогрес-

сии $b_1 = 6$. Таким образом, ответом к задаче будет число $b_1^2 q = \frac{36}{3} = 12$.

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию встречаются и в вариантах отечественного ЕГЭ по математике разных лет.

Начала математического анализа

На обоих факультетах представлены задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значений функции на отрезке.

Задание 2 (МФ). Произведение наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ на отрезке $[2, 5]$ равно:

А) 12; В) 15; С) 6;

Д) 4; Е) 0; N) Не знаю.

Подобные задачи часто присутствуют также в вариантах российского ЕГЭ по математике, однако в них, как правило, требуется найти только наименьшее или только наибольшее значение функции, а вычисление их произведения не предусматривается.

Задание 10 (ЭТФ). Наименьшее значение функции

$$f(x) = -\frac{8}{5}x^2 + 2x + 2 + \ln(1 + 4x^2) - \arctg 2x$$

на отрезке $[-3/8; 1]$ равно:

А) 2; В) -1; С) 1;

Д) 0; Е) 3; N) Не знаю.

Задание 5 (МФ). Если

$$f(x-1) = x^2 + 2x - 3, \text{ то } f(x+1)$$

равно:

А) $x^2 + 2x - 3$; В) $x^2 - 2x - 3$;

С) $x^2 + 6x + 5$; Д) $x^2 + 4x$;

Е) $x^2 - 4$; N) Не знаю.

Решение. Имеем:

$$f(x-1) = x^2 + 2x - 3 = ((x-1) + 4)(x-1), \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= ((x+1) + 4)(x+1) = \\ &= (x+5)(x+1) = x^2 + 6x + 5. \end{aligned}$$

Задание 7 (МФ). Если многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + 3x + 2$ ($a, b \in \mathbf{R}$) делится на многочлен $x^2 + 3x + 2$ без остатка, то значение выражения $a^2 - b^2$ равно:

A) 18; B) 6; C) 3;

D) 0; E) 9; N) Не знаю.

Выполнение данного задания абитуриенту, естественно, следует строить на том, что заданный в условии задания многочлен четвёртой степени будет обращаться в нуль в точках $x = -1$ и $x = -2$, которые являются корнями квадратного трёхчлена. Причём уже для $x = -1$ находим: $a - b = 0$. Для ответа на вопрос задачи этого достаточно.

Пределы входят в программу вступительного экзамена только на электротехническом факультете.

Задание 7 (ЭТФ). Значением предела

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 1}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}$$

является:

A) 3/2; B) -3/4; C) 1;

D) 3/4; E) -3/2; N) Не знаю.

Решение Рассматриваемый предел порождает неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для его вычисления достаточно числитель и знаменатель дроби разложить на множители, после чего – сократить общий множитель $\operatorname{ctg} x - 1$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 1}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 1)}{(1 - \operatorname{ctg} x) + (1 - \operatorname{ctg}^3 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{ctg} x - 1)(\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x + 1)}{(1 - \operatorname{ctg} x)(2 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x)} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Уравнения и неравенства

Большое внимание в обсуждаемых

программах вступительного экзамена по математике уделяется вопросам решения уравнений и неравенств. Рассмотрим некоторые примеры таких заданий.

Задание 3 (МФ). Множеством всех решений неравенства $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$ является:

A) $[-8; 4]$; B) $[-4; 8]$; C) $[-3; 2]$;

D) $[-6; 6]$; E) $[-6; 2]$; N) Не знаю.

Задание 4 (МФ). Действительный корень уравнения $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$ принадлежит промежутку:

A) $[5; 8]$; B) $[10; +\infty)$; C) $[1; 9]$;

D) $[0; 1]$; E) $[12; 16]$; N) Не знаю.

Задание 11 (ЭТФ). Количество различных действительных корней уравнения $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log_{10} x^2 - 1) \log_x 10$ равно:

A) 3; B) 1; C) 4;

D) 2; E) 0; N) Не знаю.

Формулировка последней задачи в определённом смысле – «хитрая»: вопрос состоит в определении количества корней, а не в указании их значений. Решение уравнения приводит к корню $x = 2$, а соответствующее значение присутствует в вариантах ответа, поэтому от абитуриента требуются внимательность и аккуратность при выборе ответа.

Задачи с параметром

Задание 19 (ЭТФ). Наибольшее количество действительных корней уравнения $|2 - |x - x^2|| = p$, где p — действительный параметр, равно:

A) 1; B) 6; C) 2;

D) 8; E) 4; N) Не знаю.

Решение. Формулировка задания дважды использует символ абсолютной величины, поэтому аналитический метод его решения видится не самым рациональным. Воспользуемся графическим методом: построим график функции

$f(x) = |2 - |x - x^2||$ (рис. 1) и подберём значения параметра p таким образом, чтобы для таких значений количество точек пересечения графика $f(x)$ и прямой $y = p$ было наибольшим.

Прямую $y = p$ будем перемещать снизу вверх в верхней полуплоскости, в которой расположен график функции $f(x)$.

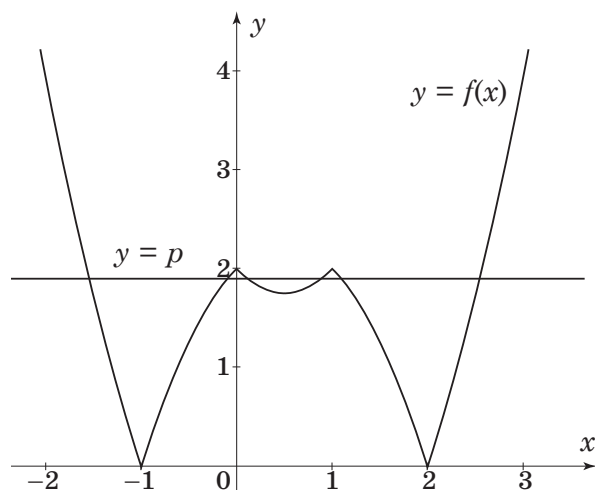


Рис. 1

Получается, что наибольшее число точек пересечения графика функции и прямой $y = p$ равно 6.

Планиметрия

Значительное внимание на вступительном экзамене по математике уделяется геометрическим задачам.

Задание 10 (МФ). Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза длиннее высоты, проведённой к ней. Чему равен меньший угол при катете?

- А) 15° ; В) 18° ; С) $22,5^\circ$;
 D) 30° ; Е) 36° ; N) Не знаю.

Решение. *Способ 1.* Обозначим неизвестный угол через x , а высоту к гипотенузе CD через h (рис. 2).

Тогда $CD = BC \cdot \sin x$, $BC = AB \cdot \cos x$. По условию $AB = 4CD = 4h$, то есть $BC = 4h \cdot \cos x$. Таким образом, имеем

уравнение относительно неизвестного угла: $h = 4h \cdot \cos x \cdot \sin x$, или $1 = 2\sin 2x$.

Из последнего уравнения находим:
 $x = 15^\circ$.

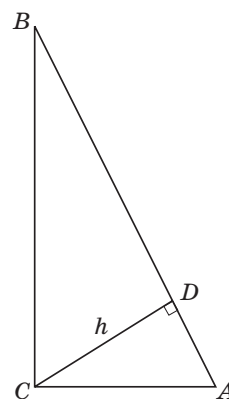


Рис. 2

Способ 2. Проведём медиану CE к гипотенузе AB (рис. 3). В прямоугольном треугольнике длина медианы CE равна половине длины гипотенузы, то есть $CE = 2h$.

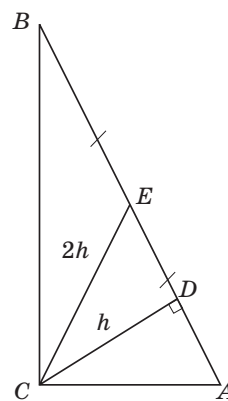


Рис. 3

Рассмотрим $\triangle CDE$. В нём $CD = h$, $CE = 2h$, тогда $\angle CED = 30^\circ$. Треугольник BCE — равнобедренный, так как

$$BE = \frac{1}{2} AB = 2h,$$

следовательно,

$$\angle CEB = 180^\circ - \angle CED = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

$$\angle ABC = \angle ECB = (180^\circ - 150^\circ)/2 = 15^\circ.$$

Значит, наименьшим является
 $\angle ABC = 15^\circ$.

Задание 14 (МФ). Чему равна сумма катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой 5, радиус вписанной окружности которого равен 1?

- А) 7; В) 6; С) $5\sqrt{2}$;
 Д) $1+2\sqrt{6}$; Е) $2+\sqrt{21}$; N) Не знаю.

Задание 15 (МФ). В равнобедренной трапеции с основаниями a и b диагонали перпендикулярны. Длина её боковой стороны равна:

- А) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$; В) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; С) $\sqrt{ab}$;
 Д) $\frac{a+b}{2}$; Е) $\sqrt{\frac{ab}{4}}$; N) Не знаю.

Стереометрия

Стереометрические задачи составителями вступительного теста по математике включены в число последних заданий.

Задание 18 (ЭТФ). Шар вписан в правильную усечённую четырёхугольную пирамиду. Если высота боковой грани усечённой пирамиды равна $\sqrt{3}$ см, а угол между боковыми рёбрами и стороной большего основания пирамиды равен 60° , то отношение объёмов усечённой пирамиды и шара равно:

- А) $10\sqrt{3} : \pi$; В) $5 : 4\pi$; С) $5 : 6\pi$;
 Д) $10 : \pi$; Е) $20 : \pi$; N) Не знаю.

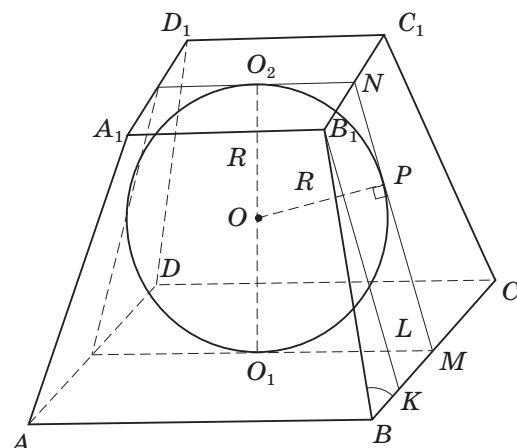


Рис. 4

Решение. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная усечённая четырёхугольная пирамида, о которой говорится в условии задачи (рис. 4), P – точка касания шара и боковой грани пирамиды на отрезке NM . Имеют место следующие равенства:

$$O_2 N = NP, O_1 M = MP, NP + MP = \sqrt{3}.$$

На отрезке BM возьмём точку K так, чтобы $KM = B_1 N$. Так как

$$BK = B_1 K \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,$$

то $BM = B_1 N + 1 = O_2 N + 1 = O_1 M = MP = NP + 1$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} NP + MP = \sqrt{3} \\ MP = NP + 1, \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} NP = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ MP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases}.$$

Выразим площади оснований пирамиды:

$$S_{\text{верх.}} = (2O_2 N)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$S_{\text{ниж.}} = (2O_1 M)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Пусть L – проекция точки N на нижнее основание пирамиды. Из треугольника NLM находим диаметр шара, вписанного в рассматриваемую пирамиду: $(2R)^2 = NM^2 - LM^2 = 3 - 1 = 2$, откуда легко выражаем радиус шара и его объём:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Объём усечённой пирамиды найдём по формуле

$$\begin{aligned} V_{\text{усеч. пирамиды}} &= \\ &= \frac{1}{3} h (S_{\text{верх.}} + \sqrt{S_{\text{верх.}} \cdot S_{\text{ниж.}}} + S_{\text{ниж.}}), \end{aligned}$$

где h – высота пирамиды.

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} V_{\text{усеч.пирамиды}} &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (4 - 2\sqrt{3} + \\ &+ \sqrt{(4 - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})} + 4 + 2\sqrt{3}) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} (8 + \sqrt{16 - 12}) = \frac{10\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Значит, искомое отношение объёмов равно

$$\frac{V_{\text{усеч.пирамиды}}}{V_{\text{шара}}} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{\pi\sqrt{2}} = 10 : \pi.$$

Задание 17 (МФ). Куб вписан в полусферу так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания полусферы, а вершины верхнего основания куба принадлежат поверхности полусферы. Отношение объёма тела, ограниченного полусферой и плоскостью её основания, к объёму куба равно:

- А) $5\pi : 3$; В) $\pi\sqrt{6} : 1$; С) $5\pi : 6$;
 Д) $\pi\sqrt{5} : 2$; Е) $\pi\sqrt{3} : \sqrt{2}$; Н) Не знаю.

Решение. Обозначим длину ребра куба $AB_1C_1D_1$ через a . Тогда объём куба есть $V_{\text{куба}} = a^3$.

Пусть вершины A, B, C, D куба лежат в плоскости основания полусферы, а вершины A_1, B_1, C_1, D_1 – на поверхности полусферы (рис. 5).

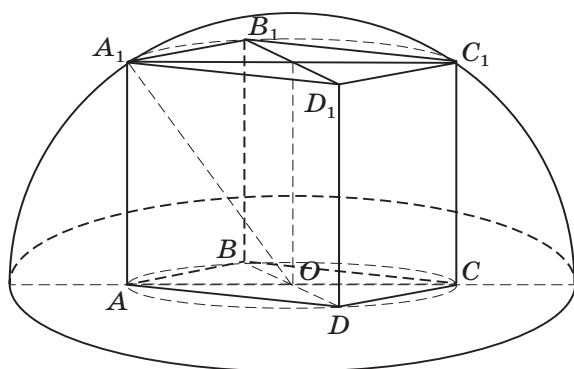


Рис. 5

Пусть, далее, точка O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ (она же – центр основания полусферы). Из прямоугольного треугольника ADC по теореме Пифагора найдём $AC = a\sqrt{2}$, значит, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Длина отрезка OA_1 равна радиусу полусферы. Его длину найдём из прямоугольного треугольника OAA_1 по теореме Пифагора:

$$OA_1^2 = AA_1^2 + AO^2,$$

где $AA_1 = a$.

$$\text{Отсюда имеем: } OA_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Объём тела, о котором идёт речь в задаче, вычислим как половину объёма шара радиуса $R = a\sqrt{\frac{3}{2}}$:

$$V_{\text{тела}} = \frac{2}{3} \pi \left(a\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^3 = \pi a^3 \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Итак, искомое отношение объёмов рав-

$$\text{но } \frac{V_{\text{тела}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{\frac{3}{2}}}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Комбинаторика

В программе вступительных экзаменов Белградского университета для будущих инженеров встречаются задачи на подсчёт количества объектов с помощью комбинаторных формул.

Задание 8 (ЭТФ). Чему равно количество различных натуральных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5 так, что каждая цифра используется не более одного раза?

- А) 325; В) 120; С) 5;
 Д) 3125; Е) 450; Н) Не знаю.

Решение. В формулировке задания не уточняется количество цифр в нату-

ральном числе, поэтому требуется перебрать все варианты.

Очевидно, что количество однозначных чисел совпадает с количеством цифр и равно 5. Количество двузначных чисел найдём с помощью формулы для размещений без повторов: $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$.

Аналогично находится количество трёхзначных и четырёхзначных чисел соответственно:

$$A_5^2 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60, \quad A_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120.$$

Количество пятизначных чисел определяется как число перестановок без повторов длины 5 и равно 120.

Итого, общее количество рассматриваемых натуральных чисел равно

$$5 + 20 + 60 + 2 \cdot 120 = 325.$$

Отметим, что в аналогичных задачах из российских учебников обычно уточняется разрядность чисел и их формулировки являются более ёмкими.

Задание 20 (МФ). Дано множество $S = \{t, e, h, n, i, k, a\}$. Сколько трёхбуквенных слов можно записать с помощью букв из множества S , если буквы могут повторяться?

A) 35; B) 210; C) 343;

D) 2187; E) 5040; N) Не знаю.

Следует заметить, что приведённая задача отличается большей формализованностью, нежели подобные задачи для российских школьников.

Комплексные числа

Данная тема не входит в программу по математике средней школы России, однако в Сербии комплексные числа изучаются, и на вступительных экзаменах соответствующие задания имеются.

Задание 8 (МФ). Для комплексного числа z выполняется свойство: $\operatorname{Re} z$ в три

раза больше, чем $\operatorname{Im} z$. Во сколько раз $\operatorname{Re}(z^2)$ больше $\operatorname{Im}(z^2)$?

A) 8/3; B) 4/3; C) 10/3;

D) 5/3; E) 9; N) Не знаю.

В другом варианте задание с таким же номером имеет иную формулировку.

Задание 8 (МФ). Значением выражения $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i} \right)^{16}$ является:

A) 1; B) 2^8 ; C) 2^{16} ;

D) 2^{24} ; E) 2^{32} ; N) Не знаю.

Задание 6 (ЭТФ). Пусть x и y — ненулевые комплексные числа. Если

$$\frac{x}{y} + 4 \frac{y}{x} = 2,$$

то выражение $\frac{x^3}{y^3}$ равно:

A) -8; B) 0; C) 16;

D) 8; E) -16; N) Не знаю.

Аналитическая геометрия на плоскости

Задание 2 (ЭТФ). Уравнением серединного перпендикуляра к отрезку MN , где $M(4; 2)$ и $N(-2; 0)$, является:

A) $y = -1/3x + 4/3$; B) $y = 3x - 2$;

C) $y = -3x + 4$; D) $y = -3x + 10$;

E) $y = -x + 2$; N) Не знаю.

Задание 20 (ЭТФ). Минимальная длина отрезка касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a \geq b > 0$) в точке первого квадранта, заключённого между осями координат, равна:

A) $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$; B) $\frac{ab}{a+b}$; C) $\sqrt{a^2 + b^2}$;

D) $\frac{b(a+b)}{2}$; E) $a + b$; N) Не знаю.

Заметим, что в России эллипс в стандартном школьном курсе математики не рассматривается. Если данная задача вызывает интерес у читателя, можно решить её самостоятельно.

Анализ содержания вступительного экзамена по математике в Белградский университет показывает, что при 12-летнем обучении в общей сербской школе удаётся охватить более широкий круг вопросов, чем в 11-летней российской школе.

В России при аттестации выпускников, в частности, отсутствуют задания на комплексные числа, ряд вопросов аналитической геометрии, теории пределов и др. Обращает на себя внимание тот факт, что в рассмотренных вариантах заданий отсутствуют задачи с чертежами в условиях.

Общий уровень представленных выше заданий можно сопоставить с ЕГЭ по математике профильного уровня, однако некоторые из формулировок – более «интересные», они вполне могут быть рассмотрены на уроках математики при изучении соответствующих тем школьниками России.

Список источников

1. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2022. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2022 года: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-н/Д: Легион, 2021. – 336 с.
2. Система образования Сербии: преимущества и недостатки // URL: <https://emigranto.ru/evropa/serbiya/obrazovanie-v-serbii.html> (дата обращения: 20.02.2023).
3. Система образования в Сербии // URL: <https://vseobr.com/sistemy-obrazovaniya/serbija/> (дата обращения: 20.02.2023).
4. Study in Serbia: Your Info Centre for education in Serbia // URL: <https://www.studyinserbia.rs/ru> (дата обращения: 20.02.2023).
5. Официальный сайт Белградского университета // URL: <http://www.bg.ac.rs/> (дата обращения: 20.02.2023).

Статья поступила в редакцию

13.03.2023.

Принята к публикации

14.04.2023.

ИНФОРМАЦИЯ

Объявлены лауреаты Премии Шао 2023 г. в области математики

Премия Шао в области математики 2023 г. присуждена 30 мая в равных долях Владимиру Дринфельду, заслуженному профессору Чикагского университета, США, и Шинтану Яу, директору Математического центра Университета Цинхуа, КНР, члену Международного жюри Конкурса на соискание медали и премии имени Н.И. Лобачевского, за их вклад в математическую физику, арифметическую геометрию, дифференциальную геометрию и Кэлерову геометрию.

Более подробная информация о лауреатах доступна на официальном сайте премии. Пресс-релиз, содержащий в том числе более подробную информацию о научных достижениях лауреатов, доступен по ссылке на официальном сайте Премии.

Премия Шао (также Премия Шао Ифу) — крупная международная премия, присуждаемая учёным, «которые добились значительных прорывов в исследованиях и чья работа оказала глубокое и положительное влияние на человечество». Носит имя учредителя — медиаманата, одного из основателей китайского кинематографа, мецената Шао Жэньлэна. Премия вручается в трёх номинациях: астрономия, науки о жизни и медицина, математика. Неофициальное название награды — «Нобелевская премия Востока».

Источник: mathcenter.kpfu.ru

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ «ФИЗТЕХ-2022» ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 2

OLYMPIAD «PHYSTECH-2022» ON MATHEMATICS. THE FINAL. PART 2

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_13

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов,
А.Ю. Головки, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий,
В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Е.Г. Молчанов,
П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин,
А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин
(Московский физико-технический институт),
Москва, nazar_ag@mail.ru

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov, I.V. Glukhov,
A.Yu. Golovko, M.O. Golubev, S.E. Gorodetskiy,
V.Yu. Dubinskaya, N.Yu. Korolev, E.G. Molchanov,
P.A. Ostanin, O.K. Podlipskii, S.M. Saulin,
A.A. Skubachevskii, D.A. Tereshin
(Moscow Institute of Physics and Technology),
Moscow, nazar_ag@mail.ru

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) заключительного этапа олимпиады «Физтех» по математике 2022 года

Abstract: problems with solutions of the final stage of the Olympiad «Phystech» on mathematics held in 2022 are provided

Ключевые слова: Российские олимпиады школьников, математическая олимпиада, олимпиада «Физтех», олимпиадная задача

Keywords: Russian Olympiad for school students, mathematics Olympiad, Olympiad «Phystech», Olympiad problem

© Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головки, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Е.Г. Молчанов, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин 2023

Заключительный этап олимпиады «Физтех» по математике проводился в феврале 2022 года, и он прошёл в 59 городах России. В олимпиаде приняли участие более 7 тысяч учащихся 9–11 классов. В предыдущей статье были представлены один вариант заданий олимпиады для 11 класса и ряд задач вариантов 9 и 10 классов. В данной статье представлен ещё один вариант заданий олимпиады для 11 класса, а также избранные задачи вариантов 9 и 10 классов.

Условия задач 11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точ-

ки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3} \sin(x+2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. Найдите все пары чисел (a, b) такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, грани $ABCD$ и $CDD_1 C_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых $B_1 C_1$ и $C_1 D_1$, плоскости CDD_1 , а также плоскости ABC в точке A . Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M . Найдите $\angle BB_1 C_1$ и объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1 M = 3$.

10 класс

8. Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $0 < c < b < a$). Большой корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

9. Четырёхугольник $ABCD$ – паралле-

лограмм с тупым углом C . Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC , проходящим через C , а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N . Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$.

а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ENA .

10. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN , касается стороны AB в точке A . Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K . Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырёхугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.

11. На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

12. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$-\frac{10x+10}{5x+6} \leq ax+b \leq 5x+2+|10x+6|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-1; -\frac{2}{5}\right]$.

9 класс

13. Решите неравенство

$$\left(\frac{(x-5)^2+4}{|x-5|}-4\right)(|x-4|+|x-6|-2) \leq 0.$$

14. Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и D . Точка Y – осно-

вание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB , а X – вторая точка пересечения EY со вписанной окружностью треугольника ABC . Найдите радиус этой окружности, если площадь треугольника AXD равна 12, а $5AD = 6EY$.

15. На доске выписано $10n$ последовательных натуральных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Из них выбираются три попарно различных числа, среди которых ровно одно кратно 2 и ровно одно кратно 5. Известно, что можно составить ровно 5112 таких троек. Чему равно n ?

16. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y + 3x \geq |2y - 3x|, \\ y \leq -2x + 16, \\ x^2 - 12y + y^2 + 16 \geq 0. \end{cases}$$

Решения задач

11 класс

1. Ответ: $(9; -28)$.

Решение. Складывая и вычитая уравнения, получаем систему

$$\begin{cases} (4x + y) - 2\sqrt{(y - 4x)(y + 4x)} = 24, \\ 4x - y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x + y) - 2\sqrt{(-4^3)(y + 4x)} = 24, \\ y - 4x = -4^3, \end{cases}$$

равносильную исходной. Пусть $\sqrt[3]{4x + y} = t$. Тогда первое уравнение новой системы принимает вид $t^3 + 8t - 24 = 0$. Заметим, что функция $f(t) = t^3 + 8t - 24$ является строго возрастающей на всей числовой оси (её производная $3t^2 + 8$ положительна), а $f(2) = 0$. Следовательно, $t = 2$ является единственным корнем уравнения, а значит, $4x + y = 8$. В итоге получаем систему

$$\begin{cases} 4x + y = 8, \\ 4x - y = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = -28. \end{cases}$$

2. Ответ: $\left(\frac{1}{9}; 3^{\frac{4}{3}}\right] \cup \{1\}$.

Решение. Переходя в обоих логарифмах к основанию 3, получим неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\log_3(x^4)}{\log_3(3x)}} &\leq \frac{\log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log_3(9x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4\log_3 x}{1 + \log_3 x}} &\leq \frac{-2\log_3 x}{2 + \log_3 x}. \end{aligned}$$

Обозначаем $\log_3 x = t$ и получаем

$$\sqrt{\frac{t}{1+t}} \leq -\frac{t}{2+t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+t} \leq 0, \\ \frac{t}{1+t} \geq 0, \\ \frac{t}{1+t} \leq \frac{t^2}{(2+t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{2+t} \leq 0, \\ \frac{t}{1+t} \geq 0, \\ \frac{(3t+4)t}{(1+t)(2+t)^2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-2; 0], \\ t \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty), \\ t \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup (-1; 0], \end{cases}$$

откуда $t \in \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup \{0\}$. Возвращаясь к переменной x , окончательно находим:

$$\begin{cases} -2 < \log_3 x \leq -\frac{4}{3}, \\ \log_3 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} < x \leq 3^{\frac{4}{3}}, \\ x = 1. \end{cases}$$

3. Ответ: 189.

Решение. Пусть искомое число есть $abcdefg$ ($a \neq 0$). Определим, какой может быть максимальная степень десятки, на

Из условия следует, что $ABCP$ – параллелограмм, откуда $\angle BAP = \angle BCP = \psi$. Кроме того, трапеция $ABCD$ равнобокая, поэтому $\angle ADC = \angle BAP = \psi = \arctg \frac{12}{5}$.

Пусть CH – высота трапеции. Рассматривая равнобедренные треугольники BSP и CPD , получаем $CP = 2BC \cos \psi$,

$$CH = CP \sin \psi = 2BC \sin \psi \cos \psi = \frac{2BC \sin \psi \cos \psi}{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} = \frac{2BC \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{60}{13}.$$

Из равенства треугольников BNQ и BPC (по двум сторонам и углу между ними) следует, что $\angle BNQ = \psi$, поэтому четырёхугольник $NCDQ$ – параллелограмм ($NC \parallel DQ$, $\angle CNQ = \angle CDQ$) с основанием $CN = 13$. Его площадь равна $CN \cdot CH = 60$.

5. Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 2 и вводя вспомогательный угол, получаем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} \cos(x+2y) - \cos \frac{\pi}{6} \sin(x+2y) &= \\ &= -8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) = \\ &= -8 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Складываем это уравнение с первым уравнением, заменив его правую часть по формулам приведения:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x - 2y\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(x+y) &= 2 \sin(x+y) \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\sin(x+y) = 0$, то из первого исходного уравнения получаем уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0, \text{ откуда } x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \text{ (здесь и далее в этой задаче } k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}),$$

$$y = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Если же $\cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, то либо $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (и тогда выражение $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$ не определено), либо $y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$. Подставляя найденное значение в первое из данных в условии уравнений, получим соотношение:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x &= \\ = \frac{9}{2} \cos x + \frac{9\sqrt{3}}{2} \sin x &\Leftrightarrow -4\sqrt{3} \sin x = 5 \cos x. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} x = -\frac{5}{4\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -\frac{5}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

6. Ответ: $a = \frac{4}{3}, b = \frac{25}{3}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$.

Графиком этой функции является парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка выполнены равенства $h\left(-\frac{5}{2}\right) = 5$, $h\left(\frac{7}{2}\right) = 13$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{5}{2}; 5\right)$ и $N\left(\frac{7}{2}; 13\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Следовательно, самое «высокое» расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Со-

ставим её уравнение по двум точкам:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \quad (\text{назовём эту прямую } l).$$

Теперь рассмотрим первое неравенство и функцию $y = \sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2}$. Это равенство при $y \geq 0$ эквивалентно такому: $\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + y^2 = 15^2$ и задаёт полуокружность, лежащую в верхней полуплоскости $y \geq 0$, с центром в точке $F\left(\frac{25}{2}; 0\right)$ радиуса 15.

Заметим, что она касается прямой l в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right]$. Действительно, система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2}, \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \frac{1}{2}$, $y = 9$, а этого достаточно, чтобы утверждать, что прямая и окружность касаются. Поэтому l – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{25}{3}$.

7. Ответ: $\angle BB_1C_1 = 2\arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$, $V = 80$.

Решение. Пусть O – центр сферы S , а K – её точка касания с прямой C_1B_1 . Плоскость A_1AD перпендикулярна AB , так как $AB \perp AD$ и $AB \perp AA_1$ (отсюда следует, что $\angle AD_1C = 90^\circ$ и что плоскости A_1AD и ABC перпендикулярны). Сфера S касается ABC в точке A , поэтому O лежит на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через точку A . Так как плоскости A_1AD и ABC перпендикулярны, точка O лежит в плоскости A_1AD . Поскольку сфе-

ра S касается прямой C_1D_1 и плоскости CDD_1 , а её центр лежит в плоскости A_1AD , то точкой касания является точка D_1 . По теореме о касательной и секущей $C_1K = C_1D_1 = \sqrt{C_1M \cdot C_1A} = \sqrt{3 \cdot 8}$. Из теоремы Пифагора для треугольника AD_1C_1 находим

$$AD_1 = \sqrt{AC_1^2 - C_1D_1^2} = \sqrt{8^2 - 24} = \sqrt{40}.$$

Обозначим через K' проекцию точки K на плоскость A_1AD (точки A , O , K' лежат на одной прямой). Далее отметим, что

$$\begin{aligned} \angle BB_1C_1 &= \angle(DD_1, DA) \stackrel{(*)}{=} \angle(D_1O, AO) = \\ &= 180^\circ - \angle D_1OA = \\ &= \angle AD_1O + \angle D_1AO \stackrel{(**)}{=} 2\angle D_1AO = \\ &= 2\arcsin \frac{D_1K'}{AD_1} = 2\arcsin \frac{C_1K}{AD_1} = 2\arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Равенство $(*)$ справедливо, поскольку $D_1O \perp DD_1$ и $AO \perp DA$, а равенство $(**)$ – так как $OD_1 = OA$ как радиусы сферы.

Пусть H – середина основания AD_1 равнобедренного треугольника ADD_1 ($DD_1 = DA$ по свойству касательных). Тогда

$$\begin{aligned} \angle ADH &= \frac{1}{2} \angle ADD_1 = \arcsin \sqrt{\frac{3}{5}}; \\ AD &= \frac{AH}{\sin \angle ADH} = \frac{\sqrt{40}}{2} : \sqrt{\frac{3}{5}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Следовательно, объём параллелепипеда равен

$$AD \cdot C_1D_1 \cdot AK' = 5\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{40 - 24} = 80.$$

10 класс

8. Ответ: 1.

Решение. Из свойств арифметической прогрессии следует равенство:

$$b = (a + c)/2.$$

Так как $a > 0$, четвёртый член прогрессии равен

$$a_4 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}}{a} = 1.$$

9. Ответ: а) $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{5}{4}$, б) $S_{\triangle AEN} = 135$.

Решение. Обозначим точку пересечения отрезков DE и BC через T (рис. 2). Треугольники ENA и CND подобны по двум углам, следовательно, $CD : AE = CN : AN = 1 : 2$. Тогда $\frac{1}{2}AE = CD = AB$. Следовательно, CB – медиана, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника ECA . Тогда $CB = \frac{1}{2}AE = AB$, а $ABCD$ – ромб. Как известно, у ромба диагонали являются биссектрисами углов, поэтому

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ADC,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle BAC &= \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{1}{2} \angle ADC \right) = \\ &= \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \angle ADC \right) = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

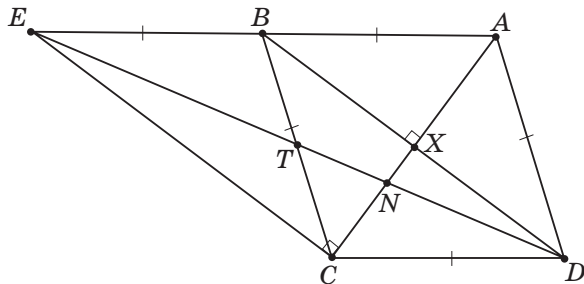


Рис. 2

В прямоугольном треугольнике ACE находим $CE = AC \cdot \operatorname{tg} \angle BAC = 18 \cdot \frac{5}{4} = \frac{45}{2}$, площадь треугольника ACE равна $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{45}{2} = \frac{405}{2}$. У треугольников ACE и AEN общая высота, прове-

дённая из вершины E , поэтому их площади относятся как основания, откуда

$$S_{\triangle AEN} = S_{\triangle ACE} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{405}{2} \cdot \frac{12}{18} = 135.$$

10. Ответ: $\angle ACB = 90^\circ$, $R = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $S_{\triangle ANKM} = \frac{441}{11\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда смежный с ним угол равен $180^\circ - 2\alpha$, а далее получаем

$$\angle NAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha,$$

$\angle BAM = \angle CAM = \alpha$, $\angle MAN = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$. Так как окружность описана около прямоугольного треугольника AMN , его гипотенуза MN является диаметром, а середина гипотенузы P – центром окружности (рис. 3). Кроме того, $\angle ANM = \angle BAM = \alpha$ (один из них – вписанный, другой образован касательной и хордой, и оба они опираются на дугу AM). Тогда $\angle ACN = 180^\circ - \angle ANM - \angle CAN = 90^\circ$.

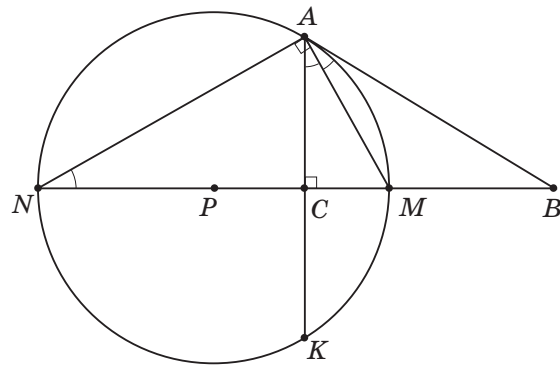


Рис. 3

По теореме о касательной и секущей $BA^2 = BM \cdot BN$, следовательно, $BN = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $MN = BN - BM = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, радиус окружности R равен $\frac{MN}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Отрезок AC – вы-

сота прямоугольного треугольника ABP . Выразая его площадь двумя способами, получим уравнение $AC \cdot BP = AB \cdot AP$, поэтому $AC = \frac{21\sqrt{3}}{11}$. Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точка C – середина AK . Отсюда $S_{АНКМ} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot AK = MN \cdot AC = \frac{441}{11\sqrt{2}}$.

11. Ответ: 7.

Решение. Пусть на доску выписали M чисел первого вида (чётные и не делящиеся на 3) и N чисел второго вида (нечётные и делящиеся на 3). При составлении тройки чисел мы должны взять хотя бы по одному числу каждого вида, поэтому есть две возможности: два числа первого вида и одно число второго вида или, наоборот, два числа второго вида и одно число первого. Количество способов осуществить такой выбор равно $C_M^2 \cdot C_N^1 + C_N^2 \cdot C_M^1$. По условию имеем уравнение

$$\frac{M(M-1)}{2} \cdot N + \frac{N(N-1)}{2} \cdot M = 25,$$

откуда $MN(M+N-2) = 50$.

Число 50 представить в виде произведения трёх натуральных чисел (без учёта порядка сомножителей) можно четырьмя различными способами: $50 = 1 \cdot 1 \cdot 50 = 1 \cdot 2 \cdot 25 = 1 \cdot 5 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 5$. Перебрав все возможные варианты, убеждаемся, что равенство $MN(M+N-2) = 50$ возможно только при $M = 5$, $N = 2$ (или наоборот). При этом $M+N-2 = 5$, а значит, на доске было выписано $M+N = 7$ чисел.

12. Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Обозначим

$$h(x) = -\frac{10x+10}{5x+6} = -2 + \frac{2}{5x+6}.$$

Графиком этой функции на промежутке

$\left[-1; -\frac{2}{5}\right]$ будет ветвь гиперболы, выпуклая вниз. На концах промежутка выполнены равенства $h(-1) = 0$, $h\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{2}$.

Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M(-1; 0)$ и $N\left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{2}\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Отсюда самое «низкое» расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Составляем её уравнение по двум точкам:

$$y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2} \text{ (назовём эту прямую } l\text{)}.$$

Рассмотрим второе неравенство и обозначим $g(x) = 5x + 2 + |10x + 6|$.

Графиком этой функции будет «уголок» с вершиной в точке $P\left(-\frac{3}{5}; -1\right)$ и ветвями, направленными вверх. Заметим, что точка P лежит на прямой l , а угловой коэффициент левой ветви «уголка» меньше углового коэффициента прямой l . Поэтому неравенство будет выполнено для прямой l . Для любой прямой, расположенной выше l , неравенство не будет выполнено по крайней мере в точке $x = -\frac{3}{5}$ рассматриваемого промежутка.

Итак, l – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$.

9 класс

13. Ответ: $\{3\} \cup [4; 5) \cup (5; 6] \cup \{7\}$.

Решение. Выражение в первых скобках равно $\frac{(|x-5|-2)^2}{|x-5|}$ (так как $(x-5)^2 = |x-5|^2$), поэтому оно определено при $x \neq 5$, неотрицательно и обращается в нуль только при $|x-5| = 2$, то есть при $x = 3$ и $x = 7$. Заметим, что $|x-4| + |x-6| -$

это сумма расстояний от точки x до точек 4 и 6 на числовой прямой, поэтому выражение во вторых скобках обращается в нуль при $x \in [4; 6]$ и положительно при остальных x . Таким образом, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда один из множителей в левой части обращается в нуль. С учётом ОДЗ получаем, что $x \in \{3\} \cup [4; 5] \cup (5; 6] \cup \{7\}$.

14. Ответ: $\frac{12}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть I – центр окружности (рис. 4). Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle IAC = \alpha$. Касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны между собой, следовательно, $AD = AE$,

$$\angle ADE = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника DEY находим $\angle DEY = 90^\circ - \angle EDY = \alpha$. Также отметим, что $\angle XDY$ равен половине дуги DX как угол между касательной и хордой, а $\angle DEX$ равен половине этой же дуги как вписанный угол, на неё опирающийся, то есть $\angle XDY = \alpha$.

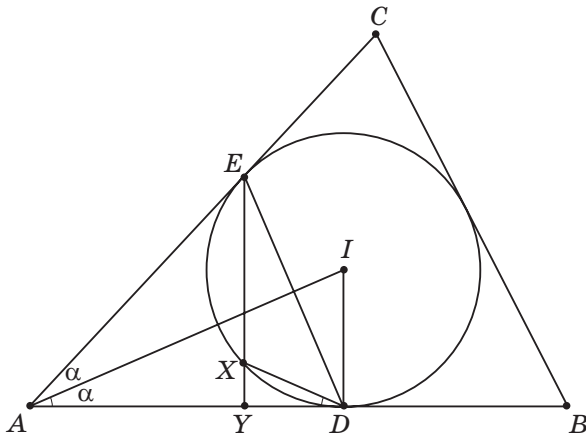


Рис. 4

Из полученного выше равенства углов следует, что треугольники AID , DXY , EDY подобны (они прямоугольные с острым

углом, равным α). Из этого подобия следует, что $\frac{ID}{AD} = \frac{XY}{DY} = \frac{DY}{EY}$. Из второго равенства находим

$$\begin{aligned} DY &= \sqrt{XY \cdot EY} = \sqrt{XY \cdot \frac{5}{6} AD} = \\ &= \sqrt{\frac{5}{6} \cdot 2S_{\triangle ADX}} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Но тогда из равенства левой и правой частей следует, что

$$DI = \frac{AD}{EY} \cdot DY = \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

15. Ответ: 6.

Решение. Среди $10n$ последовательных натуральных чисел есть ровно n чисел, кратных 10, n чисел, кратных 5, но не кратных 2, и $4n$ чисел, кратных 2, но не кратных 5. Количество чисел, не делящихся ни на 5, ни на 2, равно $4n$. Если в тройке присутствует число, кратное 10, то остальные два числа не делятся ни на 2, ни на 5. Следовательно, таких троек $n \cdot C_{4n}^2$. Оставшиеся тройки не содержат чисел, кратных 10. Значит, в них нужно включить одно число, делящееся только на 5 (n способов), одно число, делящееся только на 2 ($4n$ способов) и одно число, не делящееся ни на 5, ни на 2 ($4n$ способов). Получаем $n \cdot 4n \cdot 4n = 16n^3$ троек. Таким образом, $n \cdot C_{4n}^2 + 16n^3 = 5112$, откуда $n = 6$.

16. Ответ: $64 - 10\pi$.

Решение. Первое неравенство при $2y \geq 3x$ сводится к неравенству $x \geq 0$, а при $2y < 3x$ – к неравенству $y \geq 0$. Поэтому множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, есть объединение двух множеств: в первом лежат все точки выше

прямой $y = \frac{3}{2}x$ с неотрицательными абсциссами (включая точки на прямой), а во втором лежат все точки ниже этой прямой (не включая точки на ней) с неотрицатель-

ными ординатами. Объединение этих множеств есть первая координатная четверть ($x \geq 0, y \geq 0$).

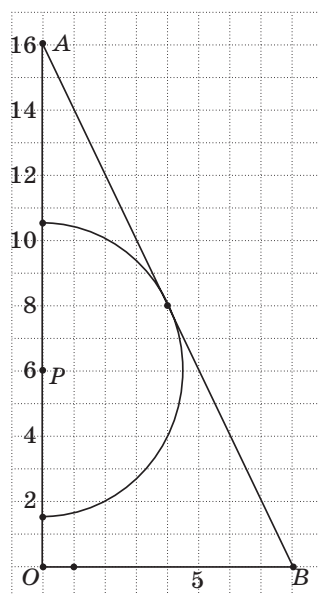


Рис. 5

Второе неравенство определяет полуплоскость, находящуюся ниже прямой $y = -2x + 16$ (включая точки на прямой). Первые два неравенства вместе определяют прямоугольный треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $B(8; 0)$, $A(0; 16)$ (рис. 5). Наконец, третье неравенство может быть записано в виде $x^2 + (y - 6)^2 \geq 20$,

и оно задаёт внешнюю часть круга с центром $P(0; 6)$ и радиусом $2\sqrt{5}$ (включая точки на окружности).

Поскольку система уравнений $x^2 + (y - 6)^2 = 20$, $y = -2x + 16$ имеет ровно одно решение $(4; 8)$, окружность касается гипотенузы треугольника. Поэтому внутри треугольника ABC оказывается половина круга.

Искомая площадь равна площади треугольника без половины площади круга:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 = 64 - 10\pi.$$

Список источников

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кожевников П.А., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ».

МАТЕМАТИКА (задачи 2015–2020 гг.). – М.:Физматкнига, 2022. – 344 с.

2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2018. № 6. С. 8–15.

3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2018. № 7. С. 22–28.

4. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2019. № 8. С. 11–22.

5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2020. № 1. С. 31–42.

6. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 1 // Математика в школе. 2020. № 6. С. 21–29.

7. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 2 // Математика в школе. 2020. № 7. С. 16–25.

Статья поступила в редакцию

26.08.2022.

Принята к публикации

29.11.2022.

РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА РАБОТУ С ФОРМУЛАМИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ

SOLVING DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR WORKING WITH FORMULAS AS A MEANS OF FORMING MATHEMATICAL LITERACY

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_23

Т.С. Харбих,
МБОУ «Оболенская СОШ» (Серпухов, Московская обл.), stratat@yandex.ru

T.S. Harbih,
MBEI «Obolenskaya secondary School» (Serpukhov, Moscow reg.), stratat@yandex.ru

Аннотация: в статье представлен опыт работы по формированию функциональной математической грамотности школьников посредством решения базовых прямых и обратных задач «на формулы»

Abstract: the article presents the experience of work on the formation of functional mathematical literacy of schoolchildren by solving basic direct and inverse problems «on formulas»

Ключевые слова: прямая и обратная задачи, математическая формула

Keywords: direct and inverse problems, mathematical formula

© Т.С. Харбих 2023

Перед школой поставлена задача выйти на качественно новый уровень по формированию у учащихся умений применять математику для решения практико-ориентированных задач. Учащиеся должны научиться видеть в конкретной жизненной ситуации «школьные алгоритмы», то есть узнавать и успешно применять те методы, что хорошо отработаны и закреплены на уроках математики. Чем меньше будет таких «кирпичиков», из которых складывается решение реальных жизненных задач, и чем они будут проще, тем больше вероятность их «узнавания в контексте» и успешного решения сложной задачи.

Подобными «кирпичиками» в математике служат, на наш взгляд, алгоритмы решения задач на дроби, проценты и пропорции. Однако самым распространённым является алгоритм решения прямой и обратной задач на работу с формулами (или кратко – задач на формулы), который следует из постулата: «Запомни формулу в том виде, в каком запомнил её словесную формулировку, и не пытайся переделывать её. Вместо этого учись делать подстановку чисел вместо букв и либо вычислять (прямая задача), либо решать соответствующее уравнение (обратная задача)».

Как видим, решение задач на формулы не только способствует формированию математической грамотности, сочетая в себе две основные содержательно-методические линии (числовую и алгебраическую), но и формирует у учащихся диалектическое мировоззрение, в рамках которого всякая прямая операция (действие, задача, тео-

рема) имеет себе обратную. А взаимосвязь прямого и обратного порождает базовые понятия, правила и алгоритмы не только школьной математики, но и науки в целом.

Данный вид задач, как никакой другой из школьных математических алгоритмов, заставляет задуматься о преемственности курсов математики начальной, основной и средней школ. Дети с первых лет обучения должны слышать от учителя одни и те же основополагающие постулаты. Один из них, на наш взгляд, – постулат о «преобразовании» формулы либо в пример на вычисление, либо в уравнение. Со временем будут появляться новые методы решения уравнений, тогда как логика преобразований и алгоритм решения задач на формулы останутся неизменными на протяжении всех лет обучения.

Далее рассмотрим алгоритмы решения базовых задач на основные виды формул, изучаемых в школьном курсе математики. Заметим, что в базовых задачах всё должно быть предельно просто: все данные подбираются так, чтобы после несложных вычислений (преобразований уравнения) ответ получился в виде натурального числа или конечной десятичной дроби.

На первых уроках работы с конкретной формулой рекомендуем придерживаться следующих методических приёмов, облегчающих усвоение нового материала:

1. Обратная задача должна содержать те же величины, что и прямая;
2. В одной задаче используем по возможности только одну формулу.

В реальной жизни подобная «простота» встречается нечасто. Поэтому, знакомя учащихся с задачами базового уровня сложности, сразу нужно предъявить им и «реальные» практико-ориентированные задачи. То есть задачи, при решении которых помимо применения школьного алгоритма нужно прикидывать результат, округлять число в ответе до заданного разряда (а порой самим решать, до какого разряда нужно округлить ответ).

На уроках закрепления следует рассмотреть ряд комбинированных задач, в которых наряду с новой формулой применяются ранее изученные формулы, чтобы новые знания логично встроились в систему знаний учащихся.

Задачи на формулы для 5 класса

Начнём с курса математики 5 класса. Пятиклассники уже знают формулы периметра и площади прямоугольника (квадрата), однако решение задач на применение этих формул умеют записывать в виде действий с пояснением. Следует показать новый способ записи решения, где вместо пояснений используется алгебраическая символика, а решение обратной задачи сводится к уравнению, решаемому по правилам нахождения неизвестного компонента арифметического действия. Кроме того, в различных видах задач на движение зачастую неявно используется формула зависимости пройденного пути от скорости и времени.

Новыми в курсе математики 5 класса являются формулы для вычисления длин рёбер, площади поверхности и объёма прямоугольного параллелепипеда, а также формула, связывающая диаметр и радиус окружности.

В таблице 1 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач на все перечисленные виды формул.

Таблица 1

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$	$P = 2(a + b)$ $P = 2 \cdot (2,5 + 4) =$ $= 2 \cdot 6,5 = 13 \text{ см.}$	$P = 13 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$	$P = 2(a + b)$ $13 = 2 \cdot (a + 4),$ $a + 4 = 13 : 2,$ $a + 4 = 6,5,$ $a = 6,5 - 4,$ $a = 2,5.$ О т в е т: 2,5 см
	$P = ? \text{ см}$		$a = ? \text{ см}$	
2	$a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$	$S = ab$ $S = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ см}^2.$	$S = 10 \text{ см}^2$ $a = 2,5 \text{ см}$	$S = ab$ $10 = 2,5 \cdot b,$ $b = 10,0 : 2,5,$ $b = 100 : 25,$ $b = 4.$ О т в е т: 4 см
	$S = ? \text{ см}^2$		$b = ? \text{ см}$	
3	$t = 3,5 \text{ ч}$ $V = 6 \text{ км/ч}$	$S = tV$ $S = 3,5 \cdot 6 = 21 \text{ км.}$	$S = 21 \text{ км}$ $V = 6 \text{ км/ч}$	$S = tV$ $21 = t \cdot 6,$ $t = 21 : 6,$ $t = 3,5.$ О т в е т: 3,5 ч
	$S = ? \text{ км}$		$t = ? \text{ ч}$	
4	$a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$ $c = 1,5 \text{ см}$	$L = 4(a + b + c)$ $L = 4 \cdot (2,5 + 4 + 1,5) =$ $= 4 \cdot 8 = 32 \text{ см.}$	$L = 32 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$ $c = 1,5 \text{ см}$	$L = 4(a + b + c)$ $32 = 4 \cdot (a + 4 + 1,5),$ $32 = 4 \cdot (a + 5,5),$ $a + 5,5 = 32 : 4,$ $a + 5,5 = 8,$ $a = 8 - 5,5,$ $a = 2,5.$ О т в е т: 2,5 см
	$L = ? \text{ см}$		$a = ? \text{ см}$	
5	$a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$ $c = 1,5 \text{ см}$	$S = 2(ab + bc + ac)$ $S = 2 \cdot (2,5 \cdot 4 + 4 \cdot 1,5 +$ $+ 2,5 \cdot 1,5) =$ $= 2 \cdot (10 + 6 + 3,75) =$ $= 2 \cdot 19,7 = 39,5 \text{ см}^2.$	$S = 39,5 \text{ см}^2$ $a = 2,5 \text{ см}$ $c = 1,5 \text{ см}$	$S = 2(ab + bc + ac)$ $39,5 = 2 \cdot (2,5b + 1,5b +$ $+ 2,5 \cdot 1,5),$ $39,5 = 2 \cdot (4b + 3,75),$ $4b + 3,75 = 39,5 : 2,$ $4b + 3,75 = 19,75,$ $4b = 19,75 - 3,75,$ $4 \cdot b = 16,$ $b = 16 : 4,$ $b = 4.$ О т в е т: 4 см
	$S = ? \text{ см}^2$		$b = ? \text{ см}$	
6	$a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$ $c = 1,5 \text{ см}$	$V = abc$ $V = 2,5 \cdot 4 \cdot 1,5 = 15 \text{ см}^3.$	$V = 15 \text{ см}^3$ $a = 2,5 \text{ см}$ $b = 4 \text{ см}$	$V = abc$ $15 = 2,5 \cdot 4 \cdot c,$ $15 = 10 \cdot c,$ $c = 15 : 10,$ $c = 1,5$ О т в е т: 1,5 см
	$V = ? \text{ см}^3$		$c = ? \text{ см}$	
7	$r = 0,5 \text{ м}$	$d = r$ $d = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м.}$	$d = 1 \text{ м}$	$d = 2r$ $1 = 2 \cdot r,$ $r = 1 : 2,$ $r = 0,5.$ О т в е т: 0,5 м
	$d = ? \text{ м}$		$r = ? \text{ м}$	
		О т в е т: 1 м		

Задачи на формулы для 6 класса

В 6 классе учащиеся знакомятся с формулами длины окружности и площади круга, выраженными как через диаметр, так и через радиус окружности (круга). К величинам, представленным в виде натурального числа или десятичной дроби, добавляются величины, выраженные обыкновенной дробью или смешанным числом.

В таблице 2 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач на формулы длины окружности и площади круга. Разряд, до которого следует округлить число π , указан в условии задач. При этом использование знака приближённого равенства вместо знака равенства желательно, но не обязательно. Заметим, что последняя из разобранных ниже задач является комбинированной, поскольку в ней используются базовые задачи на применение двух формул.

Таблица 2

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$d = 12$ см $\pi \approx 3,1$ $C \approx ?$ см	$C = \pi d$ $C \approx 3,1 \cdot 12 =$ $= 37,2$ см. О т в е т: 37,2 см	$C = 37,2$ см $\pi \approx 3,1$ $d = ?$ см	$C = \pi d$ $37,2 = 3,1 \cdot d,$ $d = 37,2 : 3,1,$ $d = 12.$ О т в е т: 12 см
2	$r = 2,6$ см $\pi \approx 3$ $C \approx ?$ см	$C = 2\pi r$ $C \approx 2 \cdot 3 \cdot 2,6 =$ $= 15,6$ см. О т в е т: 15,6 см	$C = 15,6$ см $\pi \approx 3$ $r = ?$ см	$C = 2\pi r$ $15,6 = 2 \cdot 3 \cdot r,$ $15,6 = 6 \cdot r,$ $r = 15,6 : 6,$ $r = 2,6.$ О т в е т: 2,6 см
3	$r = 5$ см $\pi \approx 3,14$ $S \approx ?$ см ²	$S = \pi r^2$ $S \approx 3,14 \cdot 5^2 =$ $= 3,14 \cdot 25 =$ $= 78,5$ см ² . О т в е т: 78,5 см ²	$S = 78,5$ см ² $\pi \approx 3,14$ $r = ?$ см	$S = \pi r^2$ $78,5 = 3,14 \cdot r^2,$ $r^2 = 78,5 : 3,14,$ $r^2 = 7850 : 314,$ $r^2 = 25,$ $r^2 = 5^2,$ $r = 5.$ О т в е т: 5 см
4	$d = 5$ см $\pi \approx 3$ $S \approx ?$ см ²	1) $d = 2r$ $5 = 2 \cdot r,$ $r = 5 : 2,$ $r = 2,5.$ 2) $S = \pi r^2$ $S \approx 3 \cdot 2,5^2 =$ $= 3 \cdot 6,25 =$ $= 18,75$ см ² . О т в е т: 18,75 см ²	$S = 18,75$ см ² $\pi \approx 3$ $d = ?$ см	1) $S = \pi r^2$ $18,75 = 3 \cdot r^2,$ $r^2 = 18,75 : 3,$ $r^2 = 6,25,$ $r = 2,5.$ 2) $d = 2r$ $d = 2 \cdot 2,5 = 5$ см. О т в е т: 5 см

Задачи на формулы для 7 класса

В 7 классе на уроках алгебры учащиеся знакомятся с формулами линейной функции и функции прямой пропорциональности, на уроках статистики и теории вероятностей – с формулой среднего арифметического нескольких величин, а на уроках геометрии – с формулами, связывающими длины нескольких отрезков (величины нескольких углов). Линейные уравнения семиклассники решают методом «переброски», в основе которого лежат свойства верных числовых равенств.

В таблице 3 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач для перечисленных формул.

Таблица 3

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$y = 2x + 5$ $x = 1,5$ $y(1,5) = ?$	$y = 2x + 5$ $y(1,5) = 2 \cdot 1,5 + 5 = 3 + 5 = 8.$ О т в е т: $y(1,5) = 8$	$y = 2x + 5$ $y = 8$ $x = ?$	$y = 2x + 5$ $8 = 2x + 5,$ $8 - 5 = 2x,$ $2x = 3, \quad : 2$ $x = 1,5.$ О т в е т: $x = 8$
2	$y = 0,2x$ $x = 2,4$ $y(2,4) = ?$	$y = 0,2x$ $y(2,4) = 0,2 \cdot 2,4 = 0,48.$ О т в е т: $y(2,4) = 0,48$	$y = 0,2x$ $y = 0,48$ $x = ?$	$y = 0,2x$ $0,48 = 0,2x, \quad \cdot 100$ $48 = 20x, \quad : 20$ $x = 2,4.$ О т в е т: $x = 2,4$
3	$a_1 = 2,6$ $a_2 = 3,5$ $a_3 = 4,4$ $n = 3$ $a_{\text{ср.}} = ?$	$a_{\text{ср.}} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ $a_{\text{ср.}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ $a_{\text{ср.}} = \frac{2,6 + 3,5 + 4,4}{3} =$ $= \frac{10,5}{3} = \frac{105}{30} = 5.$ О т в е т: 3,5	$a_{\text{ср.}} = 3,5$ $n = 3$ $a_1 = 2,6$ $a_2 = 3,5$ $a_3 = ?$	$a_{\text{ср.}} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ $a_{\text{ср.}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ $3,5 = \frac{2,6 + 3,5 + a_3}{3}, \quad \cdot 3$ $10,5 = 6,1 + a_3,$ $10,5 - 6,1 = a_3,$ $a_3 = 4,4.$ О т в е т: 4,4
4	$C \in AB$ $AC = 3,2 \text{ см}$ $BC = 2,8 \text{ см}$ $AB = ? \text{ см}$	$AB = AC + BC$ $AB = 3,2 + 2,8 = 6 \text{ см.}$ О т в е т: 6 см	$C \in AB$ $AB = 6 \text{ см}$ $BC = 2,8 \text{ см}$ $AC = ? \text{ см}$	$AB = AC + BC$ $6 = AC + 2,8,$ $6 - 2,8 = AC,$ $AC = 3,2 \text{ см.}$ О т в е т: 3,2 см
5	Луч BD – внутри $\angle ABC$ $\angle ABD = 32^\circ$ $\angle DBC = 28^\circ$ $\angle ABC = ?^\circ$	$\angle ABC =$ $= \angle ABD + \angle DBC$ $\angle ABC = 32^\circ + 28^\circ =$ $60^\circ.$ О т в е т: 60°	Луч BD – внутри $\angle ABC$ $\angle ABC = 60^\circ$ $\angle DBC = 28^\circ$ $\angle ABD = ?^\circ$	$\angle ABC =$ $= \angle ABD + \angle DBC$ $60^\circ = \angle ABD + 28^\circ,$ $60^\circ - 28^\circ = \angle ABD,$ $\angle ABD = 32^\circ.$ О т в е т: 32°

Задачи на формулы для 8 класса

В 8 классе на уроках алгебры учащиеся знакомятся с формулами функций обратной пропорциональности и квадратного корня, а на уроках геометрии – с теоремой о пропорциональных отрезках, теоремой Пифагора, с формулой среднего геометрического нескольких величин, формулами площадей (треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции), свойством периметров и площадей подобных треугольников, свойством средней линии треугольника, свойством вписанного угла. Для всех этих формул следует рассмотреть как прямые, так и обратные задачи, а ключевую в курсе геометрии задачу на решение прямоугольного треугольника рассмотреть как комбинированную задачу, состоящую из прямых и обратных задач на применение определений (представленных в виде формул) синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

В таблице 4 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач для некоторых из перечисленных формул. Заметим, что для формул, содержащих квадраты длин отрезков, прямая и обратная задачи сводятся к решению квадратного уравнения, как, например, в случае применения теоремы Пифагора для решения прямоугольного треугольника

Таблица 4

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$y = \frac{2}{x}$ $x = 1,5$ $y(1,5) = ?$	$y = \frac{2}{x}$ $y(1,5) = \frac{2}{1,5} = \frac{20}{15} = 1\frac{1}{3}$ О т в е т: $y(1,5) = 1\frac{1}{3}$	$y = \frac{2}{x}$ $y = \frac{4}{3}$ $x = ?$	$y = \frac{2}{x}$ $\frac{4}{3} = \frac{2}{x}$, $x = \frac{3 \cdot 2}{4}$, $x = 1,5$. О т в е т: $x = 1,5$
2	$y = 2\sqrt{x}$ $x = 0,09$ $y(0,09) = ?$	$y = 2\sqrt{x}$ $y(0,09) = 2 \cdot \sqrt{0,09} =$ $= 2 \cdot \sqrt{0,3^2} = 2 \cdot 0,3 = 0,6$. О т в е т: $y(0,09) = 0,6$	$y = 2\sqrt{x}$ $y = 0,6$ $x = ?$	$y = 2\sqrt{x}$ $0,6 = 2\sqrt{x}$, $0,6^2 = (2\sqrt{x})^2$, $0,36 = 4x$, $: 4$ $x = 0,09$. О т в е т: $x = 0,09$
3	$\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$ $AC = 3$ см $BC = 4$ см $AB = ?$ см	$AB^2 = AC^2 + BC^2$ $AB^2 = 3^2 + 4^2$, $AB^2 = 9 + 16$, $AB^2 = 25$, $AB^2 = 5^2$, $AB = 5$ см. О т в е т: 5 см	$\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$ $AB = 5$ см $BC = 4$ см $AC = ?$ см	$AB^2 = AC^2 + BC^2$ $5^2 = AC^2 + 4^2$, $25 = AC^2 + 16$, $25 - 16 = AC^2$, $9 = AC^2$, $AC^2 = 3^2$, $AC = 3$ см. О т в е т: 3 см

4	MN – ср. линия $\triangle ABC$ $AB = 5$ см	$MN = \frac{1}{2} AB$	MN – ср. линия $\triangle ABC$ $MN = 2,5$ см	$MN = \frac{1}{2} AB$
	$MN = ?$ см	$MN = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} = 2,5$ см. О т в е т: 2,5 см	$AB = ?$ см	$2,5 = \frac{1}{2} \cdot AB, \quad \cdot 2$ $AB = 5$ см. О т в е т: 5 см
5	$\angle ABC$ – вписанный в окр. $(O; r)$ $\angle AC = 36^\circ$	$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$	$\angle ABC$ – вписанный в окр. $(O; r)$ $\angle ABC = 18^\circ$	$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$
	$\angle ABC = ?^\circ$	$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$ О т в е т: 18°	$\cup AC = ?^\circ$	$18^\circ = \frac{1}{2} \cup AC, \quad \cdot 2$ $\cup AC = 36^\circ$. О т в е т: 36°

Задачи на формулы для 9 класса

В 9 классе на уроках алгебры учащиеся знакомятся с формулами квадратичной и степенной функций, формулами, связанными с прогрессиями, а на уроках геометрии – с формулами, связанными с координатами вектора, со свойством средней линии трапеции, с теоремами синусов и косинусов, с формулами суммы внутренних углов выпуклого многоугольника, длины дуги окружности и площади кругового сектора, с формулами, необходимыми для решения правильных многоугольников, с формулой площади треугольника, выраженной через две его стороны и синус угла между ними.

В таблице 5 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач для некоторых из этих формул.

Таблица 5

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$y = 2x^2 - 1$ $x = 1,5$	$y = 2x^2 - 1$ $y(1,5) = 2 \cdot 1,5^2 - 1 =$ $= 2 \cdot 2,25 - 1 = 3,5.$	$y = 2x^2 - 1$ $y = 3,5$	$y = 2x^2 - 1$ $3,5 = 2x^2 - 1,$ $3,5 + 1 = 2x^2,$ $4,5 = 2x^2, \quad : 2$ $x^2 = 2,25,$ $x = 1,5.$ О т в е т: $x = 1,5$
	$y(1,5) = ?$	О т в е т: $y(1,5) = 3,5$	$x = ?$	
2	$y = 0,5x^3$ $x = -2$	$y = 0,5x^3$ $y(-2) = 0,5 \cdot (-2)^3 =$ $= 0,5 \cdot (-8) = -4.$	$y = 0,5x^3$ $y = -4$	$y = 0,5x^3$ $-4 = 0,5x^3, \quad \cdot 2,$ $-8 = x^3,$ $x^3 = (-2)^3,$ $x = -2.$ О т в е т: $x = -2$
	$y(-2) = ?$	О т в е т: $y(-2) = -4$	$x = ?$	

3	a_n – арифм. прогрессия $a_1 = 1,2$ $d = -2,1$	$a_n = a_1 + d(n - 1)$ $a_5 = 1,2 - 2,1 \cdot (5 - 1) = 1,2 - 2,1 \cdot 4 = -7,2.$ О т в е т: $-7,2$	a_n – арифм. прогрессия $a_5 = -7,2$ $d = -2,1$	$a_n = a_1 + d(n - 1)$ $-7,2 = a_1 - 2,1 \cdot (5 - 1),$ $-7,2 = a_1 - 2,1 \cdot 4,$ $-7,2 = a_1 - 8,4,$ $a_1 = -7,2 + 8,4,$ $a_1 = 1,2.$ О т в е т: $1,2$
	$a_5 = ?$		$a_1 = ?$	
4	b_n – геом. прогрессия $b_1 = -1$ $d = -2$	$b_n = b_1 d^{n-1}$ $b_5 = -1 \cdot (-2)^{5-1} = -1 \cdot (-2)^4 = -1 \cdot 16 = -16.$ О т в е т: -16	b_n – геом. прогрессия $b_1 = -1$ $b_5 = -16$	$b_n = b_1 d^{n-1}$ $-16 = -1 \cdot q^{5-1},$ $-16 = -1 \cdot q^4, \quad : (-1)$ $16 = q^4,$ $q^4 = 2^4,$ $q = \pm 2.$ О т в е т: -2 или 2
	$b_5 = ?$		$d = ?$	
5	$ABCD$ $BC \parallel AD$ $AB \nparallel CD$ MN – ср. линия $ABCD$ $AD = 3$ см $BC = 4$ см	$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ $MN = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4) = \frac{7}{2} = 3,5$ см. О т в е т: $3,5$ см	$ABCD$ $BC \parallel AD$ $AB \nparallel CD$ MN – ср. линия $ABCD$ $MN = 3,5$ см $BC = 4$ см	$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ $3,5 = \frac{1}{2} \cdot (AD + 4), \quad \cdot 2$ $7 = AD + 4,$ $AD = 7 - 4,$ $AD = 3.$ О т в е т: 3 см
	$MN = ?$ см		$AD = ?$ см	
6	$r = 2$ см $\alpha = 30^\circ$ $\pi \approx 3$	$C_{\alpha^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$ $C_{30^\circ} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{12 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = 1$ см. О т в е т: 1 см	$C_{\alpha^\circ} = 1$ см $r = 2$ см $\pi \approx 3$	$C_{\alpha^\circ} = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$ $1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{360} \cdot \alpha, \quad \cdot 360$ $360 = 12 \cdot \alpha, \quad : 12,$ $\alpha = 30.$ О т в е т: 30°
	$C_{30^\circ} \approx ?$ см		$\alpha = ?^\circ$	
7	$r = 3$ см $\alpha = 60^\circ$ $\pi \approx 3,14$	$S_{\alpha^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$ $S_{60^\circ} = \frac{3,14 \cdot 3^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{3,14 \cdot 9}{6} = 4,71$ см ² . О т в е т: $4,71$ см ²	$S_{60^\circ} = 4,71$ см ² $\alpha = 60^\circ$ $\pi \approx 3,14$	$S_{\alpha^\circ} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$ $4,71 = \frac{3,14 \cdot r^2}{360} \cdot 60,$ $4,71 = \frac{3,14 \cdot r^2}{6}, \quad \cdot 6$ $28,26 = 3,14 \cdot r^2, \quad : 3,14$ $r^2 = 9,$ $r = 3.$ О т в е т: 3 см
	$S_{60^\circ} = ?$ см ²		$r = ?$ см	

Задачи на формулы для 10 класса

В 10 классе на уроках алгебры и начал анализа учащиеся знакомятся с формулами показательной, логарифмической и тригонометрических функций, с формулами тригонометрии, а на уроках геометрии – со свойством диагонали прямоугольного параллелепипеда, формулами для вычисления площади поверхности призм и пирамид, формулами векторной алгебры в пространстве.

В таблице 6 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач для некоторых из этих формул.

Таблица 6

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$y = 2^{x-1} + 1$ $x = 1,5$	$y = 2^{x-1} + 1$ $y(1,5) = 2^{1,5-1} + 1 =$ $= 2^{0,5} + 1 = 2^{\frac{1}{2}} + 1 =$ $= 1 + \sqrt{2}.$ О т в е т: $y(1,5) = 1 + \sqrt{2}$	$y = 2^{x-1} + 1$ $y = 1 + \sqrt{2}$ $x = ?$	$y = 2^{x-1} + 1$ $1 + \sqrt{2} = 2^{x-1} + 1,$ $\sqrt{2} = 2^{x-1},$ $2^{\frac{1}{2}} = 2^{x-1},$ $\frac{1}{2} = x - 1,$ $x = 1,5.$ О т в е т: $x = 1,5$
2	$y = \log_{0,5}(7 - x)$ $x = -1$	$y = \log_{0,5}(7 - x)$ $y(-1) =$ $= \log_{2^{-1}}(7 + 1) =$ $= -\log_2 8 =$ $= -\log_2 2^3 = -3.$ О т в е т: $y(-1) = -3$	$y = \log_{0,5}(7 - x)$ $y = -3$ $x = ?$	$y = \log_{0,5}(7 - x)$ $-3 = \log_{0,5}(7 - x)$ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{2}}(7 - x),$ $2^3 = 7 - x,$ $x = 7 - 8,$ $x = -1.$ О т в е т: $x = -1$
3	$\sin \alpha = 0,3$ $\alpha \in I \text{ четв.}$	$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot 0,3^2 =$ $= 1 - 2 \cdot 0,09 = 0,82.$ О т в е т: 0,82.	$\cos \alpha = 0,82$ $\alpha \in I \text{ четв.}$ $\sin \alpha = ?$	$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ $0,82 = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$ $2 \sin^2 \alpha = 1 - 0,82,$ $2 \sin^2 \alpha = 0,18, \quad : 2$ $\sin^2 \alpha = 0,09,$ $\sin \alpha = \pm 0,3.$ Так как $\alpha \in I \text{ четв.},$ то $\sin \alpha = 0,3.$ О т в е т: 0,3.

4	$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прям. параллелепипед d – диагональ параллелепипеда $a = 3$ см $b = 4$ см $c = 5$ см	$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $d^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$, $d = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ см.	$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прям. параллелепипед d – диагональ параллелепипеда $a = 3$ см $b = 4$ см $d = 5\sqrt{2}$ см	$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $(5\sqrt{2})^2 = 3^2 + 4^2 + c^2$, $50 - 25 = c^2$, $c^2 = 25$, $c = 5$.
	$d = ?$ см	О т в е т: $5\sqrt{2}$ см	$c = ?$ см	О т в е т: 5 см
5	$ABCA_1 B_1 C_1$ – прямая призма h – высота призмы $h = 1,5$ см $P_{\text{осн.}} = 4,2$ см	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$ $S_{\text{бок.}} = 4,2 \cdot 1,5 = 6,3$ см ² .	$ABCA_1 B_1 C_1$ – прямая призма h – высота призмы $h = 1,5$ см $S_{\text{бок.}} = 6,3$ см ²	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$ $6,3 = P_{\text{осн.}} \cdot 1,5$, $: 1,5$ $P_{\text{осн.}} = 4,2$.
	$S_{\text{бок.}} = ?$ см ²	О т в е т: 6,3 см ²	$P_{\text{осн.}} = ?$ см	О т в е т: 4,2 см

Задачи на формулы для 11 класса

В 11 классе на уроках алгебры учащиеся знакомятся с формулами обратных тригонометрических функций, с формулами дифференцирования и интегрирования функций, а на уроках геометрии – с формулами для вычисления площади поверхности тел вращения, а также объёмов многогранников и тел вращения. Кроме того, в ЕГЭ по математике профильного уровня присутствует задание, в котором нужно решить либо прямую, либо обратную задачу на работу с формулой (чаще всего из физики). При этом в случае обратной задачи возможно решение не только уравнения, но и неравенства.

В таблице 7 показаны алгоритмы решения прямой и обратной задач для некоторых из изученных в 11 классе формул.

Таблица 7

№	Прямая задача		Обратная задача	
1	$y = \arccos x$ $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$y = \arccos x$ $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$	$y = \arccos x$ $y = \frac{\pi}{4}$	$y = \arccos x$ $\frac{\pi}{4} = \arccos x$,
	$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ?$	$= \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. О т в е т: $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	$x = ?$	$\cos \frac{\pi}{4} = \cos(\arccos x)$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. О т в е т: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2	$y = \arcsin x$ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y = \arcsin x$ $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ $= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$ О т в е т: $y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	$y = \arcsin x$ $y = \frac{\pi}{3}$ $x = ?$	$y = \arcsin x$ $\frac{\pi}{3} = \arcsin x,$ $\sin \frac{\pi}{3} = \sin(\arcsin x),$ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ О т в е т: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$			
3.	Цилиндр с осью OO_1 $r = 2$ см $h = 3,4$ см $V = ?$ см ³	$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$ $V = \pi r^2 h$ $V = \pi \cdot 2^2 \cdot 3,4 =$ $= 13,6\pi$ см ³ . О т в е т: $13,6\pi$ см ³	Цилиндр с осью OO_1 $r = 2$ см $V = 13,6\pi$ см ³ $h = ?$ см	$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$ $V = \pi r^2 h$ $13,6\pi = \pi \cdot 2^2 \cdot h,$ $4\pi \cdot h = 13,6\pi, \quad : 4\pi$ $h = 3,4.$ О т в е т: $3,4$ см
4	Конус с осью PO $r = 2$ см $l = 3,4$ см $S_{\text{бок.}} = ?$ см ²	$S_{\text{бок.}} = \pi r l$ $S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 2 \cdot 3,4 =$ $= 6,8\pi$ см ² . О т в е т: $6,8\pi$ см ²	Конус с осью PO $S_{\text{бок.}} = 6,8\pi$ см ² $l = 3,4$ см $r = ?$ см	$S_{\text{бок.}} = \pi r l$ $6,8\pi = \pi \cdot r \cdot 3,4$ $3,4\pi \cdot r = 6,8\pi, \quad : 3,4\pi$ $r = 2$ О т в е т: 2 см
5	$PABC$ – пи- рамида h – высота пирамиды $h = 1,2$ см $S_{\text{осн.}} = 4,5$ см ² $V = ?$ см ³	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \cdot 1,2 \cdot 4,5 =$ $= \frac{1}{3} \cdot 5,4 = 1,8$ см ³ . О т в е т: $1,8$ см ³	$PABC$ – пира- мида h – высота пи- рамиды $V = 1,8$ см ³ $S_{\text{осн.}} = 4,5$ см ² $h = ?$ см	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ $1,8 = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot h,$ $1,8 = 1,5 \cdot h,$ $h = \frac{18}{15},$ $h = 1,2.$ О т в е т: $1,2$ см

В заключение покажем, как более сложные практико-ориентированные задачи могут быть представлены в виде комбинации прямых и обратных подзадач на ту или иную формулу. При этом приходится использовать не только «школьные» формулы, но и выводить несложные формулы самостоятельно, например формулу, отражающую связь пройденного пути с длиной окружности колеса и числа его полных оборотов. В таблице 8 представлен ряд подобных задач по теме «Длина окружности и площадь круга» (математика, 6 класс). Для перевода единиц измерения использовался метод пропорций.

Таблица 8

№	Текст задачи	Решение задачи	
1	Тепловоз прошёл 1260 м. Найдите диаметр колеса тепловоза (в см), если известно, что оно сделало 400 оборотов ($\pi \approx 3$).	$S = 1260$ м $n = 400$ об. $\pi \approx 3$ $d = ?$ см	1) $S = Cn$ $1260 = C \cdot 400$, $C = 1260 : 400$, $C = 3,15$. 2) $C = \pi d$ $3,15 = 3 \cdot d$, $d = 3,15 : 3$, $d = 1,05$, $1,05$ м = 105 см. О т в е т: 105 см
2	Диаметр колеса тепловоза равен 105 см. За 5 мин. колесо сделало 1000 оборотов. Найдите скорость тепловоза (в км/ч).	$d = 105$ см $t = 5$ мин. $n = 1000$ об. $\pi \approx 3,14$ $V = ?$ км/ч	1) $C = \pi d$ $C = 3,14 \cdot 105 = 329,7$ см. 2) $S = Cn$ $S = 329,7 \cdot 1000 = 329\,700$ см = $= 3,297$ км. 3) $t = ?$ ч 1 ч – 60 мин. x ч – 5 мин. $\frac{x}{1} = \frac{5}{60}$, $x = \frac{1 \cdot 5}{60}$, $t = \frac{1}{12}$ ч. 4) $S = tV$ $3,297 = \frac{1}{12} \cdot V$, $V = 3,297 : \frac{1}{12}$, $V = 3,297 \cdot 12 = 39,564$ км/ч $\approx$ ≈ 40 км/ч. О т в е т: ≈ 40 км/ч

3	Диаметр колеса тепло- воза равен 105 см. Сколько полных оборотов в минуту делает колесо тепловоза при скорости 66 км/ч?	$d = 105$ см $t = 1$ мин. $V = 66$ км/ч $\pi \approx 3,14$ $n = ?$ об.	1) $C = \pi d$ $C = 3,14 \cdot 105 = 329,7$ см. 2) $t = ?$ ч 1 ч – 60 мин. x ч – 1 мин. $\frac{x}{1} = \frac{1}{60}, t = \frac{1}{60}$ ч. 3) $S = tV$ $S = \frac{1}{60} \cdot 66 = \frac{66}{60} = 1,1$ км = = 110 000 см. 4) $S = Cn$ $110\,000 = 329,7 \cdot n,$ $n = 110\,000 : 329,7,$ $n \approx 333,64, n = 333.$ О т в е т: 333 оборота.
4	Сколько километров прое- дет телега за 15 мин., если площадь её колеса равна $3,14$ м ² , а за час каждое из её колес делает ровно 3000 оборотов?	$t = 15$ мин. $S_r = 3,14$ м ² $n = 3000$ об. $\pi \approx 3,14$ $S = ?$ км	1) $S_r = \pi r^2$ $3,14 = 3,14 \cdot r^2, r^2 = 1, r = 1$ м. 2) $C = 2\pi r$ $C = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 = 6,28$ м. 3) $t = ?$ ч 1 ч – 60 мин. x ч – 15 мин. $\frac{x}{1} = \frac{15}{60}, x = \frac{1 \cdot 15}{60}, t = \frac{1}{4}$ ч. 4) 3000 об. – 1 ч $\frac{1}{4}$ x об. – $\frac{1}{4}$ ч $\frac{x}{3000} = \frac{\frac{1}{4}}{1},$ $x = 3000 \cdot \frac{1}{4}, x = 750$ об. 5) $S = Cn$ $S = 6,28 \cdot 750 = 4710$ м ≈ 5 км. О т в е т: ≈ 5 км

В заключение отметим, что на уроках физики учащимся предлагается другой способ решения задач на формулы. Этот способ опирается на преобразование формул и «сложные» подстановки одних формул в другие. Однако физическая задача на ОГЭ и ЕГЭ по математике подобных умений и навыков не проверяет, а решается именно «преобразованием» формулы в уравнение или неравенство. Думаем, что и на уроках физики, и на уроках математики учащимся следует показать оба способа решения задач на формулы, а какой из этих способов применять в конкретной задаче, учащийся выберет сам.

Статья поступила в редакцию 29.01.2023. Принята к публикации 20.04.2023.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРЕМА ВЬЕТА

QUADRATIC EQUATIONS AND VIET'S THEOREM

Научная статья 5.8.2

УДК: 512(075.3)

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_36

А.И. Кузьмичев, к.п.н., НГПУ, г. Новосибирск,
vnlsof@yandex.ru;

Т.Н. Кузьмичева, НГПУ, г. Новосибирск,
vnlsof@yandex.ru

A.I. Kuzmichev, Ph.D (Pedagogy), NGPU,
Novosibirsk, vnlsof@yandex.ru;

T.N. Kuzmicheva, NGPU, Novosibirsk,
vnlsof@yandex.ru

Аннотация: решение квадратных уравнений и неравенств – одна из немногих тем в школьном курсе алгебры и начал анализа, которую можно излагать доказательно, без каких-либо интуитивных посылок, развивая теоретическое мышление учеников. В статье предлагаются задачи с решениями, разбор которых позволит более основательно изучить соответствующий материал и применять теорему Виета, теорию квадратных уравнений и неравенств к решению многих задач школьного курса математики

Abstract: the solution of quadratic equations and inequalities is one of the few topics in the school course of algebra and the beginning of the analysis, which can be presented probatively, without any intuitive premises, developing the theoretical thinking of students. The article proposes problems with solutions, the analysis of which will allow a more thorough study of the relevant material and apply Viet's theorem, the theory of quadratic equations and inequalities to the solution of many problems of the school course of mathematics

Ключевые слова: квадратные уравнения, корни квадратных уравнений, теорема Виета, уравнения с параметром

Keywords: quadratic equations, roots of quadratic equations, Viet's theorem, equations with parameter

© А.И. Кузьмичев, Т.Н. Кузьмичева 2023

*Расскажи мне – и я забуду,
покажи мне – и я запомню,
дай мне сделать – и я пойму.*

Конфуций

Ко времени изучения квадратных уравнений и неравенств у школьников должно быть достаточно развито понимание сущности уравнения (в последние лет 10–15 многие абитуриенты (!) не могут дать точное определение корня уравнения), а также сформированы навыки тождественных преобразований. В данной статье предлагается система упражнений, направленная на эффективное формирование у обучающихся основной школы умений,

связанных с теоремой Виета и её применениями.

Вначале актуализируем некоторые теоретические сведения. Как положено по программе, все ученики должны уметь выделять из квадратного трёхчлена полный квадрат двучлена. Каждое квадратное уравнение можно привести к виду

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0. \quad (*)$$

Преобразуем левую часть данного уравнения:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= \\
 &= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right),
 \end{aligned}$$

где $D = b^2 - 4ac$.

При $D \geq 0$ уравнение (*) имеет корни

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Заметим, что аналогичные рассуждения проводятся и во многих школьных учебниках.

Складывая и перемножая корни x_1, x_2 уравнения (*), получаем следующее утверждение.

Теорема Виета. Если $a \neq 0, D \geq 0$, то уравнение (*) имеет два корня x_1, x_2 , причём $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Следствие. При $a = 1$ получаем, что $x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$.

В дальнейшем для краткости записи будем использовать знак $\Leftrightarrow$ вместо словосочетания «тогда и только тогда, когда».

Теорема (обратная теорема Виета). Если $x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$, то x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
 x^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^2 - x_1 \cdot x) - x_2 \cdot (x - x_1) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x - x_1) \cdot (x - x_2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, \\ x = x_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следствие. Если $a \neq 0$ и x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Доказательство. По теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \cdot (x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2) = \\
 &= a \cdot ((x^2 - x_1 \cdot x) - (x_2 \cdot x - x_1 \cdot x_2)) = \\
 &= a \cdot ((x - x_1) \cdot x - (x - x_1) \cdot x_2) = \\
 &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).
 \end{aligned}$$

Следствие. При $a \neq 0$ и $D = b^2 - 4ac \geq 0$ многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ делится на $x - x_1$ и $x - x_2$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Исходя из того, что по теореме Виета коэффициенты квадратного уравнения связаны с суммой и произведением его корней, выясним некоторые свойства суммы и произведения корней квадратного уравнения (*), которые нам понадобятся в дальнейшем.

1) Корни уравнения (*) имеют разные знаки $\Leftrightarrow$ их произведение отрицательно $\Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$.

2) Корни уравнения (*) одного знака $\Leftrightarrow$ их произведение положительно $\Leftrightarrow \frac{c}{a} > 0$.

3) Оба корня уравнения (*) положительны $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0. \end{cases}$

4) Оба корня уравнения (*) отрицательны $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0. \end{cases}$

5) Хотя бы один корень уравнения (*) равен 0 $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Рассмотрим некоторые задачи, которые решаются с помощью теоремы Виета, обратной к ней или по формуле нахождения корней, играющие немаловажную роль в понимании этих теорем и имеющие достаточно много применений.

1) Составьте квадратное уравнение, имеющее действительные корни

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Решение. По теореме, обратной тео-

реме Виета, получаем после соответствующих вычислений $-b = x_1 + x_2 = 2$, $c = x_1 \cdot x_2 = -1$. Искомое уравнение имеет вид $x^2 - 2x - 1 = 0$.

О т в е т: $x^2 - 2x - 1 = 0$.

2) Найдите p , если сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + p = 0$ равна 16.

Р е ш е н и е. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = p. \end{cases}$$

По условию

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 16 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \\ &= 16 \Leftrightarrow 16 - 2p = 16 \Leftrightarrow p = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что при этом значении p дискриминант уравнения неотрицателен.

О т в е т: $p = 0$.

3) Найдите все значения параметра t , при которых корни квадратного уравнения $tx^2 + 2x + 4 = 0$ удовлетворяют соотношению $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq 2$.

Р е ш е н и е. По смыслу задачи $t \neq 0$ и

$$D = 4 - 16t \geq 0, \text{ значит, } \begin{cases} t \neq 0, \\ t \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \text{ По теореме Виета}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2}{t}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{t}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 \cdot x_2} = \\ &= \frac{\frac{4}{t^2} - \frac{8}{t}}{\frac{4}{t}} = \frac{1}{t} - 2 \geq 2, \end{aligned}$$

откуда следует $\frac{1}{t} \geq 4$.

Получаем систему

$$\begin{cases} t \neq 0, \\ t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{t} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0, \\ t \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1-4t}{t} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{1}{4}.$$

О т в е т: $0 < t \leq \frac{1}{4}$.

4) Найдите все значения параметра t , при которых произведение корней уравнения $x^2 + 3t \cdot x + 2t^2 + 1 = 0$ меньше 19.

Р е ш е н и е. По условию

$$\begin{aligned} \begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 \cdot x_2 < 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 4(2t^2 + 1) \geq 0, \\ 2t^2 + 1 < 19 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4 \geq 0, \\ t^2 - 9 < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-2) \cdot (t+2) \geq 0, \\ (t-3) \cdot (t+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 < t \leq -2 \text{ или } 2 \leq t < 3. \end{aligned}$$

О т в е т: $-3 < t \leq -2$ или $2 \leq t < 3$.

5) Найдите все значения параметра t , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2t \cdot x + t = 0$ меньше 2.

Р е ш е н и е. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2t, \\ x_1 \cdot x_2 = t. \end{cases}$$

По условию

$$\begin{aligned} \begin{cases} D \geq 0, \\ x_1^2 + x_2^2 < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 4t \geq 0, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t(t-1) \geq 0, \\ 4t^2 - 2t - 2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решаем неравенство

$4t^2 - 2t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} < 0$. Корни уравнения $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$ есть $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 1$, поэтому

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot (t-1) < 0.$$

Значит,

$$\begin{cases} t(t-1) \geq 0, \\ 4t^2 - 2t - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} t(t-1) \geq 0, \\ \left(t + \frac{1}{2}\right) \cdot (t-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t \leq 0.$$

О т в е т: $-\frac{1}{2} < t \leq 0$.

6) Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $x^2 + 2 \cdot (t+4)x + t^2 - 4 = 0$ имеет два различных корня одного знака.

Р е ш е н и е. Из предыдущего для удовлетворения требуемых условий имеем

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D}{4} > 0, \\ t^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+4)^2 - (t^2 - 4) > 0, \\ (t-2) \cdot (t+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t + 20 > 0, \\ (t-2) \cdot (t+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -\frac{5}{2}, \\ (t-2) \cdot (t+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < t < -2 \text{ или } t > 2.$$

О т в е т: $-\frac{5}{2} < t < -2$ или $t > 2$.

7) Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $x^2 - 2 \cdot (t-3)x + t^2 - 2 = 0$ имеет корни разных знаков.

Р е ш е н и е. Как и в предыдущих задачах

$$\begin{cases} \frac{D}{4} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)^2 - (t^2 - 2) > 0, \\ t^2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6t + 11 > 0, \\ t^2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{11}{6}, \\ (t - \sqrt{2}) \cdot (t + \sqrt{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}.$$

О т в е т: $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

8) Найдите все значения параметра t , при которых оба корня уравнения $(t-2) \cdot x^2 - 2 \cdot t \cdot x + t + 3 = 0$ положительны.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ t - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (t-2) \cdot (t+3) \geq 0, \\ \frac{t+3}{t-2} > 0, \\ \frac{2t}{t-2} > 0, \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t + 6 \geq 0, \\ \frac{t+3}{t-2} > 0, \\ \frac{t}{t-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 6, \\ \frac{t+3}{t-2} > 0, \\ \frac{t}{t-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow t < -3 \text{ или } 2 < t \leq 6.$$

О т в е т: $t < -3$ или $2 < t \leq 6$.

9) Найдите все значения параметра t , при которых оба корня уравнения $x^2 + 2 \cdot (t+2) \cdot x + 9 \cdot t + 10 = 0$ отрицательны.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+2)^2 - (9t+10) \geq 0, \\ 9t+10 > 0, \\ -2(t+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 5t - 6 \geq 0, \\ t > -\frac{10}{9}, \\ t > -2. \end{cases}$$

Решая неравенство $t^2 - 5t - 6 \geq 0$, находим $t \leq -1$ или $t \geq 6$. Учитывая дополнительное условие $t > -\frac{10}{9}$, окончательно

получаем $-\frac{10}{9} < t \leq -1$ или $t \geq 6$.

О т в е т: $-\frac{10}{9} < t \leq -1$ или $t \geq 6$.

10) Найдите все значения параметра t , при которых уравнения $2x^2 - (3t + 2) \cdot x + 12 = 0$ и $4x^2 - (9t - 2) \cdot x + 36 = 0$ имеют общий корень.

Решение. Данную задачу можно решать различными способами, но мы, в соответствии с проблематикой статьи, вновь воспользуемся теоремой Виета. Пусть D_1 , D_2 – дискриминанты соответствующих уравнений:

$$D_1 = (3t + 2)^2 - 96 = 9t^2 + 12t - 92 \geq 0, \\ D_2 = (9t - 2)^2 - 576 = 81t^2 - 36t - 572 \geq 0;$$

x_1, x_2 – корни первого уравнения,

x_1, x_3 – корни второго.

Тогда по теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = \frac{3t + 2}{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = 6;$$

$$x_1 + x_3 = \frac{9t - 2}{4}, \quad x_1 \cdot x_3 = 9.$$

Откуда следует $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_3} = \frac{6}{9}$, или $\frac{x_2}{x_3} = \frac{2}{3}$,
 $x_3 = \frac{3}{2} \cdot x_2$.

Тогда из условий $x_1 + x_3 = \frac{9t - 2}{4}$ и $x_3 = \frac{3}{2} \cdot x_2$ получаем

$$2x_1 + 3x_2 = \frac{9t - 1}{2}.$$

Прибавим к этому равенству первое, умноженное на -2 :

$$x_2 = \frac{9t - 2}{2} - 2 \cdot \frac{3t + 2}{2} = \frac{3t - 6}{2},$$

$$x_1 = \frac{3t + 2}{2} - x_2 = \\ = \frac{3t + 2}{2} - \frac{3t - 6}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{6}{x_1} = \frac{3}{2}.$$

Получаем $x_1 + x_2 = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2} = \frac{3t + 2}{2}$;
 $t = 3$, $x_3 = \frac{9}{4}$. В этом случае $D_1 = 25$,
 $D_2 = 49$.

Уравнения имеют вид $2x^2 - 11x + 12 = 0$, $4x^2 - 25 + 36 = 0$.

Ответ: $t = 3$.

11) Докажите, что если x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то $D = (x_1 - x_2)^2$.

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

Тогда

$$D = b^2 - 4c = (-(x_1 + x_2))^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \\ = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \\ = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2.$$

12) Корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \cdot c \neq 0) \quad (1)$$

равны x_1, x_2 . Найдите корни уравнения

$$cx^2 + bx + a = 0. \quad (2)$$

Решение. Так как дискриминанты уравнений $D_1 = b^2 - 4ac \geq 0$ и $D_2 = b^2 - 4ac$ равны, то уравнение (2) имеет корни. По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Пусть α_1, α_2 – корни уравнения (2). Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{c}, \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{a}{c}. \end{cases}$$

Докажем, что $\alpha_1 = \frac{1}{x_1}$, $\alpha_2 = \frac{1}{x_2}$.

Действительно,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}, \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Таким образом, по теореме, обратной теореме Виета, $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ – корни уравнения

(2), а значит, это есть α_1 и α_2 , что и требовалось доказать.

О т в е т: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

13) Найдите все значения параметра t , при которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - (t-3) \cdot x - t + 1} = \sqrt{x}$$

имеет единственный корень.

Р е ш е н и е. Легко видеть, что данное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда либо оба корня уравнения

$$x^2 - (t-3) \cdot x - t + 1 = x \quad (3)$$

равны и положительны, либо один корень отрицателен, а другой неотрицателен.

Заметим, что при $D = 0$ ($D = (t-2)^2 - 4 \cdot (-t+1) = t^2$) получим $t = 0$, корни уравнения (3) отрицательны, что не удовлетворяет условию задачи.

Если $x_1 = 0$, то условию задачи удовлетворяет $t = 1$ (тогда $x_2 = -1$).

Пусть теперь оба корня уравнения (3) не равны нулю. Тогда $x_1 \cdot x_2 < 0$ и уравнение (3) равносильно уравнению $x^2 - (t-2) \cdot x - t + 1 = 0$. Для него имеем:

$$D = t^2 \geq 0, \quad x_{1,2} = \frac{t-2 \pm t}{2};$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = t - 1.$$

Отрицательность произведения корней возможна лишь при $t - 1 > 0$, то есть $t > 1$.

О т в е т: $t \geq 1$.

14. Найдите все значения параметра t , при которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - (t+2) \cdot x - 2t - 2} = \sqrt{2x + 10} \quad (4)$$

имеет единственный корень.

Р е ш е н и е. Данное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда либо уравнение

$$x^2 - (t+2) \cdot x - 2t - 2 = 2x + 10 \quad (5)$$

имеет один корень x_1 такой, что $2x_1 + 10 < 0$, а другой корень x_2 такой, что $2x_2 + 10 \geq 0$, либо когда уравнение (2) име-

ет дискриминант, равный 0, а его равные корни таковы, что подкоренное выражение в одной из частей уравнения (4) неотрицательно.

Заметим, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$x^2 - (t+4) \cdot x - 2t - 12 = 0. \quad (6)$$

Решим это уравнение.

$$\begin{aligned} D &= (t+4)^2 - 4 \cdot (-2t-12) = \\ &= t^2 + 16t + 64 = (t+8)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Если $D = 0$, то $t = -8$, а корни уравнения (6) равны $x_{1,2} = -2$. Легко видеть, что значение $t = -8$ удовлетворяет требованиям задачи.

Если же $t \neq -8$, то получаем

$$x_{1,2} = \frac{t+4 \pm (t+8)}{2}; \quad x_1 = t+6, \quad x_2 = -2.$$

Так как $2x_2 + 10 = 2 \cdot (-2) + 10 = 6 \geq 0$, то x_2 – требуемый корень по указанному условию $2x_2 + 10 \geq 0$.

Далее работаем с корнем x_1 :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 10 < 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot (t+6) + 10 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2t < -22 \Leftrightarrow t < -11. \end{aligned}$$

О т в е т: $t = -8$ или $t < -11$.

Предложенные задачи с решениями, сгруппированными в соответствии с принципом нарастания сложности, можно применять на уроках математики, занятиях кружка или факультатива, при подготовке к различным проверочным работам.

Список источников

1. Губин А.Ю., Тропина Н.В., Таранова М.В., Пугач А.Ю., Скворцова О.В. Ознакомительная практика: элементарная математика: учебное пособие / Губин А.Ю. [и др.]. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2022. – 259 с.
2. Кузьмичев А.И. Учебная практика (алгебра): учебное пособие / Кузьмичев А.И. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2014. – 136 с.

Статья поступила в редакцию

19.12.2022.

Принята к публикации

29.03.2023.

О НАИБОЛЬШЕМ И НАИМЕНЬШЕМ ЗНАЧЕНИЯХ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

ABOUT THE GREATEST AND MINIMUM VALUES QUADRATIC FUNCTION

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_42

М.С. Бичегкуев, д-р физ.-мат. наук,
СОГУ им. К.Л. Хетагурова (Владикавказ),
bichegkuev@yandex.ru;

Э.Г. Олисаев, канд. физ.-мат. наук,
СОГУ им. К.Л. Хетагурова (Владикавказ),
eolisaev@yandex.ru

M.S. Bichegkuev, ShiD (Phys&Math),
NOSU named after K.L. Khetagurov (Vladikavkaz),
bichegkuev@yandex.ru;

E.G. Olisaev, PhD (Phys&Math),
NOSU named after K.L. Khetagurov (Vladikavkaz),
eolisaev@yandex.ru

Аннотация: в статье рассматриваются задачи о числе точек, в которых квадратичная функция, а также приводящиеся к ней функции принимают наибольшее или наименьшее значения

Abstract: the article deals with problems on the number of points at which the quadratic function, as well as the functions reduced to it, take the largest or smallest values

Ключевые слова: квадратичная функция, наибольшее значение функции, наименьшее значение функции, точки минимума и максимума, промежуток монотонности функции, модуль действительного числа

Keywords: quadratic function, maximum value of a function, minimum value of a function, minimum and maximum points, monotonicity interval of a function, modulus of a real number

© М.С. Бичегкуев, Э.Г. Олисаев 2023

Известно, что многие задачи на исследование функции сводятся к отысканию её наименьшего и наибольшего значений на различных промежутках (см. [1]–[7]). В настоящей статье приводятся решения задач на нахождение числа точек, в которых достигаются наибольшее или наименьшее значения функции. В основном рассматриваются функции, аналитическое выражение которых содержит параметр или область определения которых зависит от параметра (в таком контексте данную статью можно рассматривать как продолжение нашей работы [2]). Это позволяет значительно расширить круг задач, связанных с исследованием функции.

Пусть задана функция $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, где

D – числовое множество. Если существует точка $x_0 \in D$, такая что при любом $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что функция f достигает своего наибольшего значения $f(x_0)$ при $x = x_0$ и пишут $f_{\text{наиб.}} = f(x_0)$.

Аналогично определяется наименьшее ($f_{\text{наим.}}$) значение функции f на множестве D .

Задача о нахождении числа точек, в которых достигается наибольшее (наименьшее) значение функции $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ является, строго говоря, задачей о нахождении множества $\{x \in D: f(x) = f_{\text{наиб.}} (f_{\text{наим.}})\}$. Известно, что если $f: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывная функция, то множество точек, в которых достигается наибольшее (наименьшее)

значение функции, всегда непустое. При этом вопрос о числе таких точек остаётся открытым, то есть множество может быть одноэлементным (например, если f – строго возрастающая функция на отрезке $[\alpha; \beta]$), а может быть бесконечным (например, если $f(x) = 3 - |x| - |x - 1|$, $D = [-2, 2]$, то каждая точка $x \in [0; 1]$ является точкой, в которой функция принимает своё наибольшее значение).

Для функции $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, в случае существования $f_{\text{наиб.}} = M$ и $f_{\text{наим.}} = m$, задача о числе точек, в которых функция достигает наибольшего (наименьшего) значений, эквивалентна задаче о количестве решений уравнения $f(x) = M$ ($f(x) = m$) на множестве D . Будем рассматривать эту задачу для самой распространённой в школьной математике функции – квадратичной, а также для функций, приводящихся к ней.

Пусть $k(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, – квадратичная функция, определённая на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Функция $k(x)$ достигает наибольшего значения в двух точках отрезка $[\alpha; \beta]$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta;$$

2°. Функция $k(x)$ достигает наименьшего значения в двух точках отрезка $[\alpha; \beta]$ тогда и только тогда, когда $a < 0$ и

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta;$$

3°. Функция $f(x) = |k(x)|$ при $a > 0$ (для определённости) достигает наибольшего значения в трёх точках отрезка $[\alpha; \beta]$, если

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta,$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{8}[\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2];$$

4°. Функция $f(x) = |k(x)|$ достигает наименьшего значения в двух точках отрезка $[\alpha; \beta]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a \cdot k(\alpha) \leq 0 \text{ (или } a \cdot k(\beta) \leq 0), \\ -\frac{b}{a} = \alpha + \beta \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} D > 0, \\ a \cdot k(\alpha) > 0, \\ a \cdot k(\beta) > 0, \\ a < -\frac{b}{2a} < \beta, \end{cases}$$

причём в случае первой системы такими точками являются концы отрезка $[\alpha; \beta]$, а в случае второй системы – корни квадратного трёхчлена $k(x)$.

Отметим, что равенство $-\frac{b}{a} = \alpha + \beta$

означает, что абсцисса $x_b = -\frac{b}{2a}$ вершины параболы $y = k(x)$ совпадает с серединой отрезка $[\alpha; \beta]$, то есть $x_b = x_c$.

Следовательно, функция k на отрезке $[\alpha; \beta]$ достигает наибольшего значения при $a > 0$ тогда и только тогда, когда

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta.$$

В основе доказательства утверждений 1° и 2° лежит следующее соотношение:

$$k(\alpha) = k(\beta) \Leftrightarrow a(\beta - \alpha) \left(\beta + \alpha + \frac{b}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} = \alpha + \beta.$$

При решении представленных ниже задач часто будем использовать соотношение

$$k(\beta) = -k(\alpha) \Leftrightarrow \left(\beta + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{2a^2},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

В качестве иллюстрации к приведённым выше утверждениям рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Найдите все значения

параметра a , при которых функция $k(x) = x^2 - 4x - 5$, определённая на отрезке $[-|a| - 1; a^2 + 3]$, принимает наибольшее значение в двух точках. В ответе укажите также наибольшее значение этой функции.

Решение. Графиком функции $y = k(x)$ является парабола с абсциссой вершины $x_b = 2$. Тогда, согласно утверждению 1°, функция k достигает наибольшего значения при всех a , являющихся решением уравнения

$$\frac{a^2 + 3 - |a| - 1}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - |a| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2; \\ a = 2. \end{cases}$$

Таким образом, область определения функции k есть отрезок $[-3; 7]$, а на его концах, то есть при $x = -3$ и $x = 7$, будет достигаться наибольшее значение функции k , равное $k(-3) = k(7) = 16$.

Ответ: $a \in \{-2; 2\}$; $f_{\text{наиб.}} = 16$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax^2 + (a - 2)|x - 2|$ на отрезке $x \in [-|a| - 1; 5]$ достигается в двух различных точках и является наибольшим из возможных.

Решение. Рассмотрим три случая, которые связаны со значением параметра a , выступающим в качестве коэффициента при x^2 .

1. Пусть $a = 0$. Тогда имеем функцию $f(x) = -2|x - 2|$, определённую на отрезке $[-1; 5]$. В этом случае графиком функции $y = f(x)$ является «угол» с вершиной в точке $(-2; 0)$ со сторонами, направленными вниз, то есть ломаная, состоящая из звеньев (отрезков) прямой $y = 2(x - 2)$ при $-1 \leq x \leq 2$; $y = -2(x - 2)$ при $2 \leq x \leq 5$. Так как прямая $x = 2$ является осью симметрии графика функции $y = f(x)$ и $x_c = 2$ — середина отрезка (области определения) $[-1; 5]$,

то наименьшее значение функции f , равное -6 , достигается в точках $x = -1$ и $x = 5$.

2. Пусть $a < 0$. График функции $y = f(x)$, $x \in [a - 1; 5]$, состоит из двух частей парабол $y = ax^2 + (a - 2)(x - 2)$, $x \in [2; 5]$ и $y = ax^2 - (a - 2)(x - 2)$, $x \in [a - 1; 2]$, ветви которых направлены вниз. Следовательно, функция f возрастает на отрезке $[a - 1; 2]$ и убывает на отрезке $[2; 5]$, а значит, условие задачи будет выполнено, если $f(a - 1) = f(5) \Leftrightarrow a^2 - 3a - 22 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = \frac{3 - \sqrt{97}}{2}$ (так как $a < 0$). Для найденного значения параметра a получаем:

$$f(x) = \frac{3 - \sqrt{97}}{2}x^2 - \frac{1 + \sqrt{97}}{2}|x - 2|,$$

$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{97}}{2}; 5 \right],$$

наименьшее значение функции есть $36 - 14\sqrt{97}$.

3. Пусть $a > 0$. В этом случае, рассуждая как в пункте 2, получаем, что функция f достигает наименьшего значения в одной точке $x = 2$. Значит, при $a > 0$ условие не выполнено.

Таким образом, наименьшее значение функции f достигает в двух точках при $a = 0$ (равное -6), а также при $a = \frac{3 - \sqrt{97}}{2}$,

равное $36 - 14\sqrt{97}$. Так как $36 - 14\sqrt{97} < -6$, то удовлетворяет условию $a = 0$.

Ответ: $a = 0$.

Пример 3. Найдите наибольшую длину отрезка $[-3a - 6; a^2 + 1]$, который является областью определения функции $k(x) = x^2 + x + 4$, достигающей наибольшего значения в двух точках.

Решение. Согласно утверждению 1° функция k принимает наибольшее значение в двух точках, если выполнено условие $x_b = x_c$, то есть

$$\frac{a^2 + 1 - 3a - 6}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; \\ a = 4. \end{cases}$$

При $a = -1$ имеем отрезок $[-3; 2]$, а при $a = 4$ выполнено условие задачи и наибольшая длина отрезка равна 35.

О т в е т: 35.

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при которых функция $f(x) = (a^2 + 2a - 3)x^2 + (a^3 - 2a^2 - 3a)x + 13a + 16$ принимает отрицательное наименьшее значение на отрезке $[-2; 2]$ в двух точках.

Решение. Согласно утверждению 2° имеем, что условие задачи выполнено для всех значений a , удовлетворяющих следующей системе:

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 3 < 0, \\ a^3 - 2a^2 - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 1, \\ a = 0; \\ a = -1; \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; \\ a = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что наименьшее значение функция f принимает в точках $x = -2$ и $x = 2$ при $a = -1$ или $a = 0$.

При $a = 0$ имеем: $f(x) = -3x^2 + 16$ и её наименьшее значение есть $f(2) = 4$; при $a = -1$ имеем: $f(x) = -4x^2 + 3$ и $f(2) = -13$. Следовательно, условие задачи выполнено при $a = -1$.

О т в е т: $a = -1$.

Пример 5. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $k(x) = x^2 + (|a - 2| + |a + 2|)x + 2|a - 1| - 3$, $x \in [-6; 2]$, принимаемое в двух точках, является наименьшим возможным?

Решение. Из условия достижения наибольшего значения функции в двух точках (см. утверждение 1°) имеем: $|a - 2| + |a + 2| = 4$. Последнее верно для любых $a \in [-2; 2]$. Следовательно, анализируемая функция принимает вид

$k(x) = x^2 + 4x + 2|a - 1| - 3$, $x \in [-6; 2]$, и достигает своего наибольшего значения на концах отрезка $[-6; 2]$ при любом значении $a \in [-2; 2]$. Так как $k_{\text{наиб.}} = k(2)$, то получаем $k(2) = 9 + 2|a - 1| = \varphi(a)$ при $a \in [-2; 2]$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют те значения $a \in [-2; 2]$, при которых функция $\varphi(a)$ (относительно a) принимает наименьшее значение. Но наименьшее значение функции $\varphi(a)$ достигается, если $|a - 1| = 0$ (так как $1 \in [-2; 2]$), то есть $a = 1$. Таким образом, функция $\varphi(a)$ принимает наименьшее значение, равное 9, при $a = 1$.

О т в е т: $a = 1$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при которых наименьшее значение функции $f(x) = -x^2 + (1 - 2a)x + 3a - 3$, определённой на отрезке $[-a; |a| + 1]$, достигается в двух точках и является наименьшим возможным.

Решение. Середина отрезка $[-a; |a| + 1]$ есть

$$x_c = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } a > 0, \\ \frac{1 - 2a}{2} & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$$

Графиком функции $y = f(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз, а абсцисса её вершины равна

$$x_b = \frac{1 - 2a}{2}.$$

Следовательно, согласно утверждению 2°, условие задачи выполнено при $x_b = x_c$.

При $a > 0$ имеем $x_b \neq x_c$ (так как $\frac{1}{2} \neq \frac{1 - 2a}{2}$ при каждом $a > 0$), а значит, условие задачи не выполнено.

Пусть $a \leq 0$. Тогда равенство $x_b = x_c$ выполняется при любом $a \leq 0$. Следовательно, функция f достигает своего наименьшего значения на концах отрезка $[-a; a - 1]$, то есть $f_{\text{наим.}} = f(-a)$ при $a \leq 0$. Поскольку $f(-a) = (a + 1)^2 - 4$ при $a \leq 0$,

то отсюда получаем, что наименьшее значение достигается в точке $a = -1$ и равно -4 .

О т в е т: $a = -1$.

Пример 7. Найдите все пары чисел $(a; b)$, удовлетворяющие уравнению $|a - 1| + |b + 1| = 1$, при которых функция $f(x) = x^2 - 2(3a - b)x + 8a^2 - 10ab - 3b^2$, $x \in [-1; 7]$,

принимает целочисленное наибольшее значение в двух точках.

Решение. Так как $x = 2a - 3b$ и $x = 4a + b$ – корни квадратного трёхчлена f , то справедливо представление $f(x) = (x - 2a + 3b)(x - 4a - b)$. Графиком функции $y = f(x)$ является парабола и абсцисса вершины параболы равна $x_b = 3a - b$. Согласно утверждению 1°, существование двух точек, в которых достигается наибольшее значение, равносильно равенству $x_b = x_c$, где $x_c = 3$ – середина отрезка $[-1; 7]$, то есть $3a - b = 3 \Leftrightarrow b = 3a - 3$. Поскольку пары $(a; b)$ удовлетворяют уравнению $|a - 1| + |b + 1| = 1$, то, решая систему

$$\begin{cases} b = 3a - 3, \\ |a - 1| + |b + 1| = 1, \end{cases}$$

получаем $a = 1, b = 0$ или $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

Таким образом, при $a = 1, b = 0$ имеем функцию $f_1(x) = x^2 - 6x + 8$, а при $a = \frac{1}{2},$

$b = -\frac{3}{2}$ – функцию $f_2(x) = x^2 - 6x + \frac{11}{4}$. Находя $f_1(-1) = f_1(7) = 15$ и $f_2(-1) = f_2(7) = \frac{39}{4}$,

приходим к выводу, что условие задачи выполнено для пары $(1; 0)$.

О т в е т: $(1; 0)$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a , при которых функция

$$f(x) = ax^2 + (|a + 1| - |a - 1|)x + a^2 - \frac{11}{4}a - \frac{1}{8},$$

$x \in [-3; 1]$, принимает отрицательное наименьшее значение в двух точках.

Решение. Легко проверить, что при $a = 0$ условие задачи не выполнено. Поэтому будем считать $a \neq 0$. Так как функция f по условию задачи достигает минимального значения в двух точках, то, согласно утверждению 2°, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} a < 0, \\ \frac{|a + 1| - |a - 1|}{a} = -(-3 + 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 \leq a < 0. \end{cases}$$

Для найденных значений $a \in [-1; 0)$ выражение $|a + 1| - |a - 1|$ равно $2a$. Следовательно, функция f принимает вид

$$f(x) = ax^2 + 2ax + a^2 - \frac{11}{4}a - \frac{1}{8},$$

то есть имеем семейство парабол, ветви которых направлены вниз и абсцисса каждой из парабол равна $x_b = -2$. Другими словами, прямая $x = -2$ является осью симметрии каждой из парабол $y = f(x)$ при $a \in [-1; 0)$, и каждая из функций $y = f(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x = 1$ (или $x = -3$). Из полученного представления функции f имеем:

$$f(1) = a^2 + \frac{a}{4} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow f(1) = \left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{9}{64}$$

для любого $a \in [-1; 0)$. Согласно условию $f(1) < 0$ при $a \in [-1; 0)$, а значит, условие выполнено для всех a , являющихся решениями системы

$$\begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq a < 0, \\ \left(a + \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\right)\left(a + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < a < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ выполнено неравенство $f_{\text{наим.}} < 0$.

О т в е т: $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Пример 9. Найдите все множества, на каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x^2 - 3x| - 9$ достигает своего наименьшего значения в четырёх различных точках.

Решение. Функция f после раскрытия модуля принимает следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x - 9 & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ -x^2 + 6x - 9 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } x \geq 3. \end{cases}$$

Построим график функции f (рис. 1).

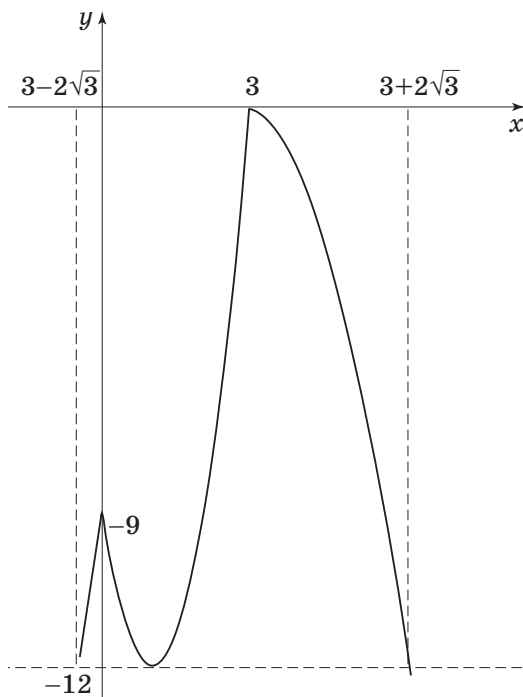


Рис. 1

Уравнение $f(x) = c$ имеет ровно четыре различных корня для всех $c \in (-12; -9)$. Действительно, уравнение $f(x) = c$, $x \in [0; 3]$, имеет два различных корня

$x = 1 \pm \sqrt{4 + \frac{c}{3}}$, при $c > -12$, а уравнение

$f(x) = c$ при $x \leq 0$ или $x \geq 3$ имеет два различных корня $x = 3 \pm \sqrt{-c}$ при $c < -9$. Заметим, что при $c = -9$ и $c = -12$ уравнение $f(x) = c$ имеет ровно три корня.

Следовательно, условие задачи будет выполнено на множестве, которое является объединением двух отрезков:

$$\left[3 - \sqrt{-c}; 1 - \sqrt{4 + \frac{c}{3}}\right] \text{ и } \left[1 + \sqrt{4 + \frac{c}{3}}; 3 + \sqrt{-c}\right]$$

для каждого $c \in (-12; -9)$.

$$\text{О т в е т: } \left[3 - \sqrt{-c}; 1 - \sqrt{4 + \frac{c}{3}}\right] \cup \left[1 + \sqrt{4 + \frac{c}{3}}; 3 + \sqrt{-c}\right],$$

$c \in (-12; -9)$.

Пример 10. При каких значениях параметра a функция $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, определённая на отрезке $[a - 1; |a|]$, принимает наименьшее значение в двух точках?

Решение. Положим $k(x) = x^2 - 6x + 5$. Так как $f(x) = |k(x)|$ и $k(x) = (x - 1)(x - 5)$, то график функции $y = f(x)$ имеет вид, указанный на рисунке 2.

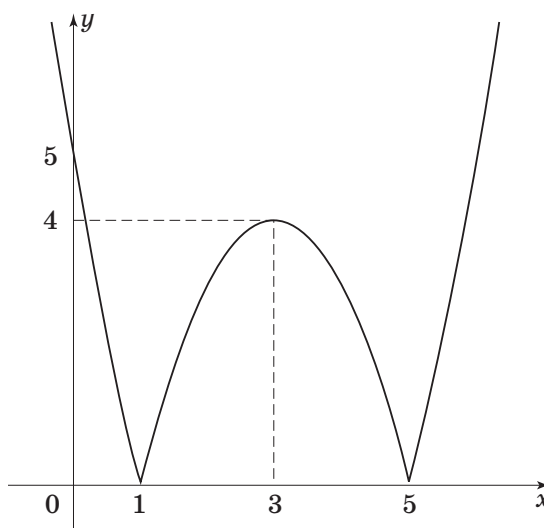


Рис. 2

Относительно параметра a рассмотрим два случая.

1. Пусть $a \geq 0$. Тогда функция f определена на отрезке $[a - 1; a]$, длина которого равна 1. Согласно утверждению 4°, условие задачи выполнено для всех действительных значений a , являющихся решениями системы

$$\begin{cases} \frac{a-1+a}{2} = 3, \\ k(a) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2}; \\ 1 \leq a \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

Отметим, что случай, когда корни $x = 1$ и $x = 5$ одновременно принадлежат отрезку $[a - 1; a]$, невозможен.

2. Пусть $a < 0$. Тогда имеем отрезок $[a - 1; a]$, причём левый конец этого отрезка находится левее точки $x = -1$ на числовой прямой. Применяя утверждение 4° к функции f на этом отрезке, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} k(a-1) \leq 0, \\ 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset$$

и

$$\begin{cases} k(a-1) \geq 0, \\ k(-a) \geq 0, \\ a-1 < 3 < -a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a-6) \geq 0, \\ (-a-1)(-a-5) \geq 0, \\ a < -3 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -5.$$

Объединяя найденные решения, получаем: $a = \frac{7}{2}$ или $a \leq -5$.

$$\text{О т в е т: } a \in (-\infty; -5) \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

Пример 11. Для каждого значения параметра a найдите точки, в которых функция $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$, определённая на множестве решений неравенства $|x + 3| + |x + 1| \geq a^2 + 2a + 3$, достигает наименьшего значения.

Решение. Из свойств суммы модулей (см. [1]) имеем, что неравенство, за-

дающее область определения функции f , равносильно совокупности

$$\begin{cases} x \leq -3 - \frac{1}{2}(a+1)^2; \\ x \geq -1 + \frac{1}{2}(a+1)^2. \end{cases}$$

Следовательно, область определения функции f есть объединение двух лучей:

$$L_1 = \left\{ x : x \leq -3 - \frac{1}{2}(a+1)^2 \right\}$$

и

$$L_2 = \left\{ x : x \geq -1 + \frac{1}{2}(a+1)^2 \right\}.$$

Если начало каждого луча принадлежит отрезку $[-4; 2]$, то имеем систему

$$\begin{cases} -3 - \frac{1}{2}(a+1)^2 \geq -4, \\ -1 + \frac{1}{2}(a+1)^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+1| \leq \sqrt{2}, \\ |a+1| \leq \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq a \leq \sqrt{2} - 1,$$

из которой получаем две точки $x = -4$ и $x = 2$, в которых f достигает своего наименьшего значения.

Если

$$a \in [-\sqrt{6} - 1; -\sqrt{2} - 1) \cup (\sqrt{2} - 1; \sqrt{6} - 1],$$

имеем одну точку $x = 2$, в которой достигается наименьшее значение функции f . В этом случае начало луча L_1 находится левее точки $x = -4$, начало же луча L_2 принадлежит отрезку $[-4; 2]$.

Если $|a+1| > \sqrt{6}$, то наименьшее значение функция f принимает в точке $x = -1 + \frac{1}{2}(a+1)^2$. Это связано с тем, что начало луча L_1 находится дальше от абсциссы вершины параболы $f(x) = x^2 + 2x - 8$, то есть выполняется неравенство

$$f\left(-3 - \frac{1}{2}(a+1)^2\right) > f\left(-1 + \frac{1}{2}(a+1)^2\right).$$

О т в е т: при $a \in [-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1]$ наименьшее значение достигается в двух точках $x = -4$, и $x = 2$;

при $a \in [-\sqrt{6}-1; -\sqrt{2}-1) \cup (\sqrt{2}-1; \sqrt{6}-1]$ наименьшее значение достигается в одной точке $x = 2$;

при $a \in (-\infty; -\sqrt{6}-1) \cup (\sqrt{6}-1; +\infty)$ наименьшее значение достигается в одной точке $x = -1 + \frac{1}{2}(a+1)^2$.

Пример 12. Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, при которых функция $f(x) = |x^2 - (m^2 - 2mn + n^2 - 2)x - |m - 1| - |n - 2||$, $x \in [-3; 1]$, достигает наибольшего значения в трёх точках. В ответе укажите также наибольшее значение функции f .

Решение. Положим $p = (m - n)^2 + 2$ и $q = -|m - 1| - |n - 2|$. Тогда функция f принимает вид $f(x) = |x^2 - px + q|$, где дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - px + q$ больше нуля. Согласно утверждению 3°, функция f принимает наибольшее значение в трёх точках, если $p = 2$ и $q = -1$.

Таким образом, условие задачи выполнено для всех значений m и n , которые удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} -(m-n)^2 + 2 = 2, \\ -|m-1| - |n-2| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n, \\ |m-1| + |n-2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n, \\ 1 \leq m \leq 2. \end{cases}$$

Здесь мы для решения второго уравнения воспользовались соотношением (см. [1, с. 41]):

$$|m-1| + |m-2| = 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Так как m, n – целые числа, то получаем пары $(1; 1)$ и $(2; 2)$.

Наибольшее значение, равное двум, функция f достигает в точках $1, -3, -1$, при этом $f_{\text{наиб}} = 2$.

О т в е т: $(1; 1), (2; 2); f_{\text{наиб}} = 2$.

Пример 13. Найдите все пары действительных чисел $(a; b)$, при которых функция $f(x) = |x^2 - (a - 3b)x - a^2 - b^2 - 2|$, определённая на множестве решений не-

равенства $1 \leq |x - 1| \leq 3$, достигает наибольшего значения в четырёх точках.

Решение. Заданное в условии неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |x-1| \leq 3, \\ |x-1| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ x \geq 1; \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0; \\ 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Следовательно, областью определения заданной функции f является множество $M = [-2; 0] \cup [2; 4]$. Ясно, что множество M симметрично на числовой прямой относительно точки $x_c = 1$.

Рассмотрим квадратичную функцию $k(x) = x^2 - (a - 3b)x - a^2 - b^2 - 2$. Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена в её правой части $D \geq 8$, то k имеет два различных корня x_1, x_2 . Положим для определённости $x_1 < x_2$. Значит, функция f возрастает на промежутках $[x_1; x_b]$ и $[x_2; \infty)$, где x_b – абсцисса вершины параболы $y = k(x)$, а на промежутках $(-\infty; x_1]$ и $[x_b; x_2]$ – убывает. Учитывая это, условие задачи будет выполнено, если концы отрезков множества M являются точками, в которых функция достигает наибольшего значения. При этом значения функции f в этих точках совпадают. Кроме того, из симметричности графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $x_b = \frac{1}{2}(a - 3b)$ и множества M относительно точки $x_c = 1$ соответственно, заключаем: пары действительных чисел $(a; b)$, удовлетворяющие условию задачи, являются решениями системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a - 3b) = 1, \\ k(0) = -k(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b + 2, \\ a^2 + b^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, получаем пары $(-1; -1)$ и $\left(\frac{7}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

О т в е т: $(-1; -1); \left(\frac{7}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a , при которых функция $f(x) = |x^2 + 2(a+1)x - 2a - 3|$, определённая на отрезке $[-1; |a|]$, принимает наименьшее значение в двух точках.

Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $k(x) = x^2 + 2(a+1)x - 2a - 3$. Так как $x = -2a - 3$ и $x = 1$ — его корни, то справедливо представление $k(x) = (x + 2a + 3)(x - 1)$.

Если $-2a - 3 = 1$, то $a = -2$. Это означает, что тогда дискриминант квадратного трёхчлена k равен нулю. Поскольку в этом случае $f(x) = k(x) \Leftrightarrow f(x) = (x - 1)^2$, условие задачи не выполнено.

Пусть $a \neq -2$, то есть дискриминант квадратного трёхчлена k больше нуля. Согласно утверждению 4°, условие задачи выполнено для всех значений параметра a , являющихся решениями следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} k(-1) \leq 0, \\ -2(a+1) = |a| - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -1, \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1;$$

$$\begin{cases} k(-1) > 0, \\ k(|a|) > 0, \\ -1 < -a - 1 < |a| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a^2 + 4a + 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < a < -1, \\ a < 0 \end{cases}$$

Отсюда, объединяя найденные значения a , получаем, что $-3 < a \leq -1$, а учитывая, что $a \neq -2$, будем иметь: $-3 < a < -2$ или $-2 < a \leq -1$.

Ответ: $a \in (-3; -2) \cup (-2; -1]$.

Пример 15. Дана функция $k(x) = x^2 - 2(a^2 - a - 6)x - 3a$, определённая на множестве решений неравенства $1 \leq |x - a + 3| \leq 3$. Найдите все значения параметра a , при которых функция k достигает неотрицательного наибольшего значения в двух точках и отрицательного наимень-

шего значения в двух точках.

Решение. Для заданного в условии задачи неравенства имеем:

$$1 \leq |x - a + 3| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6 \leq x \leq a - 4, \\ a - 2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Получается, что область определения функции k есть множество $[a - 6; a - 4] \cup [a - 2; a]$, которое симметрично на числовой прямой относительно точки $x_c = a - 3$. Более того, каждый из отрезков $[a - 6; a]$ и $[a - 4; a - 2]$ также симметричен относительно этой точки.

Графиком функции $y = k(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх и абсцисса вершины равна $x_b = a^2 - a - 6$. Принимая во внимание симметричность параболы $y = k(x)$ относительно вертикальной прямой $x = x_b$, а также симметричность её области определения, для выполнения условия задачи (см. утверждение 1°) необходимо, чтобы

$$x_b = x_c \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = a - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; \\ a = 3. \end{cases}$$

При $a = -1$ имеем функцию $k(x) = x^2 + 8x + 3$, определённую на множестве $x \in [-7; -5] \cup [-3; -1]$, для которой $k_{\text{наиб}} = k(-1) = -4 < 0$, то есть условие задачи не выполнено.

При $a = 3$ имеем $k(x) = x^2 - 9$, $x \in M = [-3; -1] \cup [1; 3]$, для которой $k_{\text{наиб}} = k(-3) = k(3) = 0$ и $k_{\text{наим}} = k(-1) = k(1) = -8$. Таким образом, только при $a = 3$ выполняется условие задачи.

Ответ: $a = 3$.

Пример 16. Дана функция $f(x) = x^2 - 4|x - a| - 2ax + 4a$.

а) Найдите отрезок, на котором наибольшее значение функции f достигается в трёх точках и является наибольшим из возможных.

б) В зависимости от значений параметра a найдите все отрезки, на каждом из которых наибольшее и наименьшее зна-

чения функции f достигаются в двух точках.

в) Найдите все отрезки, на каждом из которых наибольшее значение достигается в двух точках и положительно, а наименьшее значение – в одной точке и отрицательно.

Решение. Данная функция после выделения полных квадратов принимает вид $f(x) = (|x - a| - 2)^2 - (a - 2)^2$.

График функции $y = f(x)$ состоит из двух частей парабол $y = (x - a - 2)^2 - (a - 2)^2$ при $x \geq a$ и $y = (x - a + 2)^2 - (a - 2)^2$ при $x \leq a$ с вершинами в точках $(a + 2; -(a - 2)^2)$ и $(a - 2; -(a - 2)^2)$ соответственно. Эти части симметричны относительно прямой $x = a$ и имеют общую точку $(a; 4 - (a - 2)^2)$ (рис. 3).

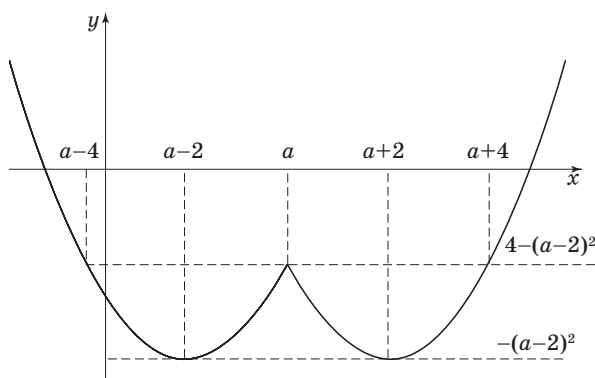


Рис. 3

а) Функция f на каждом отрезке $[a - 4; a + 4]$ имеет три точки $a - 4$, a , и $a + 4$, в которых достигается наибольшее значение функции f , равное $4 - (a - 2)^2$. Ясно, что значение $4 - (a - 2)^2$ будет наибольшим возможным, если $a = 2$. Следовательно, искомым является отрезок $[-2; 6]$.

б) Отметим, что при любом значении параметра a функция f принимает наименьшее значение в двух точках $x = a - 2$ и $x = a + 2$, которое равно $-(a - 2)^2$. Сле-

довательно, нужно рассматривать отрезки, которые содержат точки $x = a - 2$ и $x = a + 2$. Наибольшее значение достигается в двух точках на каждом из следующих отрезков: $[a - p; a + 4]$ при $p \in [2; 4)$ (в точках $x = a$ и $x = a + 4$, а наименьшие значения – в точках $x = a - 2$ и $x = a + 2$); $[a - p; a + 4]$ при $p \in [2; 4)$ (в точках $x = a - 4$ и $x = a$, а наименьшие значения – в точках $x = a - 2$ и $x = a + 2$); $[a - p; a + p]$ при $p > 4$ (в точках $x = a - p$ и $x = a + p$, а наименьшие значения – в точках $x = a - 2$ и $x = a + 2$).

в) Рассмотрим отрезки, содержащие точку $x = a$. Учитывая, что график функции $y = f(x)$ состоит из двух частей парабол, симметричных относительно прямой $x = a$, получаем, что эти отрезки должны содержать точку $x = a + 4$ или $x = a - 4$. Значит, функция f на отрезке $[a - 2 + p; a + 4]$ при $p \in (0; 2]$ и $a \in (0; 2) \cup (2; 4)$ достигает наибольшее положительное значение в двух точках $x = a$ и $x = a + 4$, и принимает в точке $x = a + 2$ наименьшее значение, которое отрицательно (так как $a \neq 2$).

Из соображений симметрии получаем отрезок $[a - 4; a + 2 - p]$ при $p \in (0; 2]$ и $a \in (0; 2) \cup (2; 4)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ при $x \geq a$. Тогда согласно утверждению 1° наибольшее значение достигается в двух точках $x = a + 2 - p$ и $x = a + 2 + p$ при $p \in (0; 2)$ и наименьшее значение достигается в одной точке $x = a + 2$. Поскольку наименьшее значение $-(a - 2)^2$ отрицательно, а наибольшее значение положительно, то при $p \in (0; 2)$ имеем систему

$$\begin{cases} a \neq 2, \\ f(a + 2 - p) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ 2 - p < a < 2 + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - p < a < 2, \\ 2 < a < 2 + p. \end{cases}$$

Поэтому, отрезки $[a + 2 - p; a + 2 + p]$

при $p \in (0; 2)$ и $a \in (2 - p; 2) \cup (2; 2 + p)$ удовлетворяет условию.

Снова используя симметричность графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $x = a$, получаем, что функция достигает наибольшего значения в двух точках $x = a - 2 - p$ и $x = a - 2 + p$ при $p \in (0; 2)$ и наименьшего значения в точке $x = a - 2$.

Значит, для отрезков $[a - 2 - p; a - 2 + p]$ при $p \in (0; 2)$ и $a \in (2 - p; 2) \cup (2; 2 + p)$ выполнено условие задачи.

Таким образом, отрезки $[a - 2 - p; a - 2 + p]$ и $[a + 2 - p; a + 2 + p]$ при $p \in (0; 2]$ и $a \in (2 - p; 2) \cup (2; 2 + p)$ удовлетворяют условию пункта в).

О т в е т: а) $[-2; 6]$;

б) $[a - p; a + 4]$, $[a - 4; a + p]$

при $p \in [2; 4)$ и $[a - p; a + p]$ при $p > 4$;

в) $[a - 2 - p; a - 2 + p]$,

$[a + 2 - p; a + 2 + p]$ при

$p \in (0; 2]$; $a \in (2 - p; 2) \cup (2; 2 + p)$.

Пример 17. Найдите все значения параметра a и отрезки, при которых функция $f(x) = |x^2 - 4|x| + |a - 4| + |a| - 2|$ достигает наибольшего значения в пяти точках.

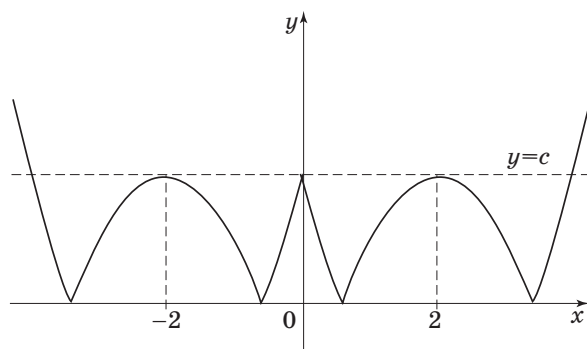


Рис. 4

Решение. Положим $c = |a - 4| + |a| - 2$ и $k(x) = x^2 - 4|x| + c$. Квадратичная функция k является чётной, а её график состоит из двух частей парабол $y = x^2 - 4x + c$ при $x \geq 0$ и $y = x^2 + 4x + c$ при $x \leq 0$ с вершинами в точках $(2; c - 4)$

и $(-2; c - 4)$ соответственно. Следовательно, график функции $y = f(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox той части графика функции $y = k(x)$, которая расположена ниже оси Ox , а остальная часть остаётся без изменений (рис. 4).

Если $c - 4 \geq 0$, то $f(x) = k(x) \geq 0$, и функция f не может достигать наибольшего значения более чем в трёх точках.

Если $c - 4 < 0$ и $k(c) \neq -k(c - 4)$, то функция достигает наибольшего значения не более чем в четырёх точках; при $k(c) > -k(c - 4)$ — не более чем в двух точках. Поэтому условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда $c - 4 < 0$ и $c = 4 - c$, то есть $c = 2$. Следовательно, согласно определению c , получаем равенство

$$|a - 4| + |a| - 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a - 4| + |a| = 4 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4.$$

Значит, при всех $a \in [0; 4]$ выполняется равенство $k(c) = -k(c - 4)$ при $c = 2$. Решив уравнение $k(x) = k(0)$ при $c = 2$ на множестве $x \geq 0$, находим:

$$k(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x = 4. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая чётность функции k , получаем, что уравнение $k(x) = k(0)$ на множестве $x \leq 0$ равносильно $x = -4$.

Итак, для каждого $a \in [0; 4]$ функция f , определённая на отрезке $[-4; 4]$, принимает наибольшее значение ровно в пяти точках.

О т в е т: $a \in [0; 4]$; отрезок $[-4; 4]$.

Список источников

1. Бичегкуев М.С., Олисаев Э.Г. Сумма модулей и уравнение отрезка числовой прямой // Математика в школе. 2020. № 7. С. 39–52.

2. Бичегкуев М.С., Олисаев Э.Г. Наименьшее и наибольшее значения функции в задачах с параметром // Математика в школе. 2022. № 8. С. 8–15.

3. Голубев В.И. Решения сложных и нестандартных задач по математике. М.: ИЛЕКСА, 2020. 252 с.

4. Козко А.И., Панферов В.С., Сергеев И.Н., Чирский В.Г. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. М.: МЦНМО. 2016. 232 с.

5. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии (Серия: «Библиотека “Математическое просвещение”»). М.: МЦНМО, 2005. 56 с.

6. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2006. 200 с.

7. Шестаков А.С. ЕГЭ 2016. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень). М.: МЦНМО, 2016. 240 с.

Статья поступила в редакцию

13.12.2022.

Принята к публикации

31.03.2023.

ИНФОРМАЦИЯ

Российским школьникам предложили бесплатный онлайн-курс по математике

В сентябре в России стартует двухлетний бесплатный онлайн-курс «Математика для всех» — для школьников 4–6 классов. Об этом говорится в сообщении «Тинькофф», организатора проекта.

Цель проекта — привить детям интерес к математике, показав, что предмет может быть увлекательным. В фокусе обучения — развитие логики, критического мышления и творческих способностей. В курс включены нестандартные задания, которых нет в школьной программе — например, задачи на шифрование и кодирование.

Авторы курса — тренеры сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике прошлого года, члены жюри и методических комиссий ведущих математических олимпиад и лауреаты грантов в сфере образования.

Курс проходит онлайн. Обучение разбито на модули, каждый из них включает в себя несколько коротких лекций с разбором типовых задач, 10–15 задач с автоматической проверкой и несколько задач повышенной сложности с подробным видеоразбором. Изучение темы занимает 2–3 часа в неделю.

В середине и конце каждого полугодия школьники будут писать тест с целью закрепления знаний. Обучение можно проходить в своем темпе, предусмотрена возможность возвращаться к пройденным материалам.

По словам председателя правления компании Станислава Близняка, «Математика для всех» является частью работы компании по развитию STEAM-образования в России — подхода, где к традиционным STEM-дисциплинам (математическим, естественнонаучным, инженерным) добавляется развитие творческого нестандартного мышления.

Источник: iz.ru

ОБ ОДНОЙ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ON ONE STEREOMETRIC TASK OF THE MOSCOW MATHEMATICAL OLYMPIAD

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_54

А.Н. Попов, ассистент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва), popovan@my.msu.ru

A.N. Popov, assistant, MSU (Moscow), popovan@my.msu.ru

Аннотация: в статье рассматривается один из способов (конструктор для объёмного моделирования), с помощью которого можно придумать задачу для интеллектуального математического соревнования. Обсуждается, каким образом можно изменить придуманную задачу и получить на её основе новые задачи. Проведён анализ решений стереометрической задачи школьниками с Московской математической олимпиады. Показано, что задачу можно использовать при изучении различных тем геометрии: параллельность в пространстве, дополнительные построения, метод координат, развёртка, гомотетия, симметрия

Abstract: the article discusses one of the methods to come up with a task for intellectual mathematical competition (via the constructor for 3D modeling). Furthermore, it describes how to change the invented task and create new tasks based on the invented one. It demonstrates the results of the analysis of the schoolchildren's solutions to the stereometric task from the Moscow Mathematical Olympiad. It was shown, that the exercise can be used in the study of various topics of geometry: parallelism in space, additional constructions, the method of coordinates, unfolding on the plane, homothety, and symmetry

Ключевые слова: олимпиада, геометрический конструктор, стереометрия, метод координат

Keywords: olympiad, the constructor for 3D modeling, stereometry, the method of coordinates

© А.Н. Попов 2023

В качестве игрушки для детей был куплен конструктор для объёмного моделирования ТИКО, набор «Геометрия», одним из создателей которого является профессор механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова И.Х. Сабитов. С помощью этого набора можно конструировать различные объёмные фигуры (рис. 1) – куб, тетраэдр, икосаэдр, додекаэдр, призмы, пирамиды и другие. Это в свою очередь позволяет наглядно изучать основы стереометрии – объёмы тел, пространственные фигуры. Разные сложные объёмные геометрические фигу-

ры можно представить в виде развёртки на плоскости, а шарнирное соединение многоугольников делает наглядным процесс перехода от плоскости к пространству.

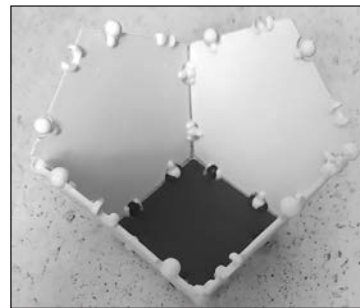


Рис. 1

Одна из форм обучения – это игра. Конструктор по геометрии идеально для этого подходит. Как и любой конструктор, конструктор по геометрии позволяет создавать не только фигуры, которые предусмотрены по плану и есть в документации к нему, но и фантазировать самостоятельно. Проще всего начать изобретать с помощью правильных фигур, так как практически сразу возникает симметрия, в чём автор убедился самостоятельно. Так родилась первая задача.

Задача 1. У многогранника, изображённого на рисунке 2, нижнее основание – это квадрат, а боковые грани, смежные с основанием, – четыре правильных шестиугольника. Найдите расстояние между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , где A_1, B_1, C_1, D_1 – точки, полученные при пересечении прямых, содержащих верхние стороны упомянутых шестиугольников.

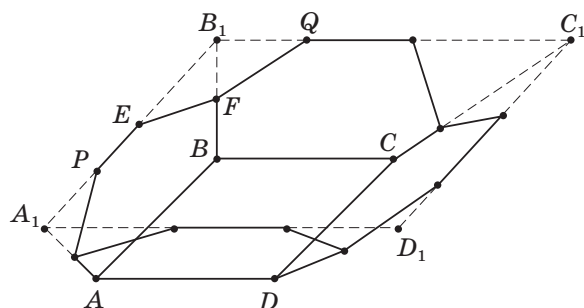


Рис. 2

Решение. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a . Пусть прямые PE и BF пересекаются в точке B_1 . Очевидно, что $\angle EFB_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Прямые PE и AB параллельны, следовательно, $\angle EB_1F = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Получили, что треугольник EB_1F – равносторонний, то есть $B_1F = EB_1 = EF = a$.

Теперь заметим, что треугольник QB_1F также равносторонний и точки B_1, Q, C_1 лежат на одной прямой. Так как $B_1Q \parallel BC$ и $B_1E \parallel AB$, то угол $\angle EB_1Q$ равен 90° . Про-

должая верхние линии правильных шестиугольников до пересечения, получим квадрат $A_1B_1C_1D_1$ со стороной $3a$ (аналогично доказывается, что $A_1P = a$). Поэтому расстояние между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равно длине отрезка B_1C_1 , то есть $3a$.

О т в е т: $3a$.

При решении задачи 1 показано, что треугольники EB_1F, QB_1F – правильные, что сильно упростило получение ответа. Поэтому решено было задачу усложнить, и под рукой как раз оказались правильные пятиугольники. Заменив правильные шестиугольники на правильные пятиугольники в задаче 1, получаем задачу 2, которую методическая комиссия московской математической олимпиады решила дать на LXXXII олимпиаде для 11-го класса во второй день.

Задача 2. (ММО 2019, 11 класс, 2 день, № 3, см. [1]). У многогранника, изображённого на рисунке 3, гранями являются четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?

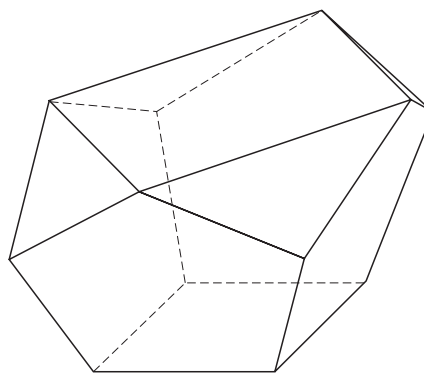


Рис. 3

Решение. Способ 1. Ключевая идея: свести задачу к плоскости (развёртка). Пусть $ABCD$ – нижний квадрат. Примем его сторону за 1 и найдём сторону верхнего квадрата. Проведём через вершины

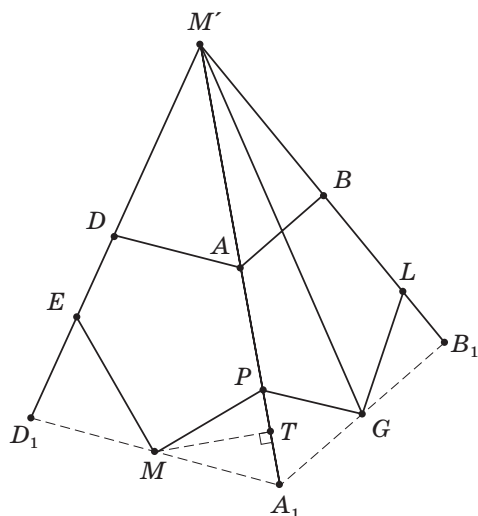


Рис. 6

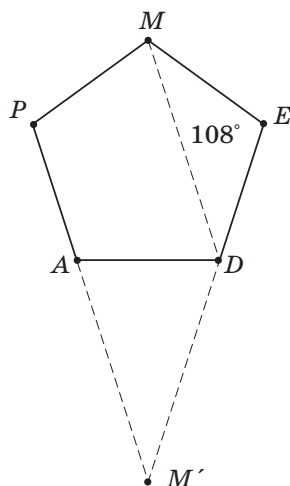


Рис. 7

Через точки M и G проведём прямые l и k , параллельные AD и AB соответственно. Тогда $D_1 = l \cap DE$, $A_1 = k \cap AP$ и $B_1 = k \cap BL$. Отметим, что $\angle D_1A_1B_1 = 90^\circ$, так как $A_1D_1 \parallel AD$, $A_1B_1 \parallel AB$, $\angle DAB = 90^\circ$. Из-за равноудалённости точек M и M' от AD отрезок D_1A_1 в два раза больше AD (рис. 6). Аналогично получаем, что A_1B_1 в два раза больше AB .

Точка M равноудалена от концов отрезка AD , $D_1A_1 \parallel DA$, следовательно, точка M – это середина отрезка A_1D_1 и

$A_1M = MD_1 = AD$. Аналогично доказывается, что точка G – это середина A_1B_1 . Отсюда находим требуемое отношение:

$$\frac{MG}{AB} = \frac{MG}{A_1G} = \sqrt{2}.$$

Замечание. После того, как мы доказали, что точки M и M' симметричны относительно прямой AD , можно воспользоваться гомотетией с центром в точке M' и коэффициентом, равным 2.

Способ 4. Ключевая идея: параллельность в пространстве. Из равенства $\angle ADM + \angle PAD = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$ следует, что $AP \parallel DM$ (рис. 7). Аналогично доказывается, что $AP \parallel BG$. Отсюда получаем, что $DM \parallel BG$. В равных правильных пятиугольниках диагонали равны, следовательно, $DM = BG$. Получили, что четырёхугольник $DMGB$ – параллелограмм и $DB = MG$. Тогда $\frac{MG}{AB} = \frac{BD}{AB} = \sqrt{2}$.

Способ 5. Ключевая идея: теорема косинусов для трёхгранного угла. Для решения будет использоваться теорема косинусов для трёхгранного угла (см. [2]). Сформулируем её.

Теорема. Пусть α, β, γ – плоские углы трёхгранного угла и θ – двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ . Тогда $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta$.

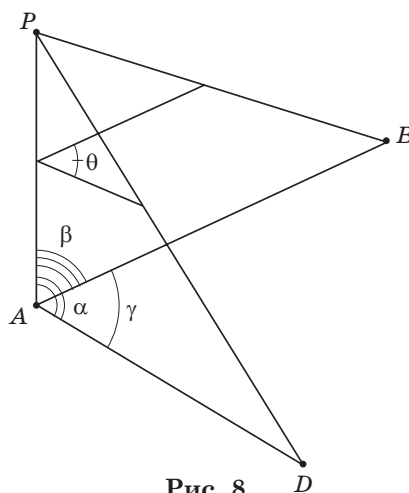


Рис. 8

Обозначим двугранный угол при ребре AP за θ (рис. 8). Запишем теорему косинусов для трёхгранного угла $ADPB$:

$$\cos 90^\circ = \cos 108^\circ \cos 108^\circ + \sin 108^\circ \sin 108^\circ \cos \theta.$$

откуда $\cos \theta = -\operatorname{ctg}^2 108^\circ$. Из точки M опустим высоту MT на прямую AP (рис. 6). Тогда, очевидно, что $GT \perp AP$ и $MT = GT = MP \sin 72^\circ = AP \sin 72^\circ$. Используя теорему косинусов для треугольника MTG , а также опираясь на равенство $\operatorname{ctg}^2 108^\circ = \operatorname{ctg}^2 72^\circ$, получаем

$$\begin{aligned} MG^2 &= MT^2 + TG^2 - 2 \cdot MT \cdot TG \cdot \cos \theta = \\ &= 2 \cdot (AP \cdot \sin 72^\circ)^2 + \\ &+ 2 \cdot (AP \cdot \sin 72^\circ)^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 108^\circ = 2 \cdot AP^2, \end{aligned}$$

$$\text{то есть } \frac{MG}{AP} = \frac{MG}{AB} = \sqrt{2}.$$

Способ 6. Ключевая идея: вычисление двугранного угла. Без ограничения общности будем считать, что $AB = 1$. Возьмём на DP точку H так, что $AH \perp AD$ (рис. 9). Тогда $AH = \operatorname{tg} \angle ADP = \operatorname{tg} 36^\circ$,

$$DH = \frac{AD}{\cos 36^\circ} = \frac{1}{\cos 36^\circ}.$$

Из равнобедренного треугольника PAD с углом при основании в 36° находим $DP = 2AD \cos 36^\circ$. Треугольник PBD – равнобедренный $BP = PD$, так как боковые грани – это равные правильные пятиугольники), следовательно,

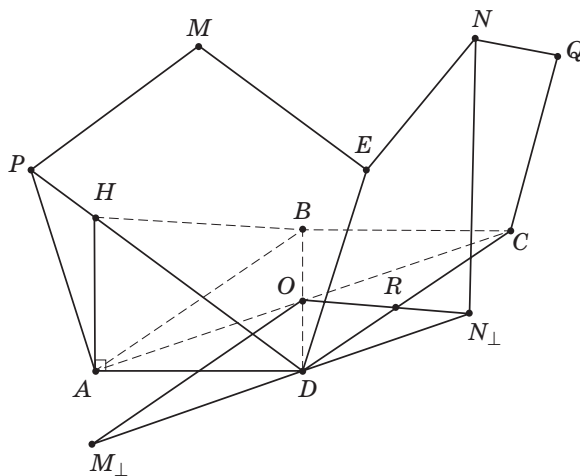


Рис. 9

$$\begin{aligned} \cos \angle PDB &= \frac{DO}{DP} = \frac{BD}{2DP} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2AD \cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{4 \cos 36^\circ}. \end{aligned}$$

Тогда по теореме косинусов для треугольника DBH вычислим

$$BH = \sqrt{DB^2 + DH^2 - 2DB \cdot DH \cdot \cos \angle PDB} = \sqrt{2}.$$

Мера двугранного угла между плоскостью основания и любой боковой гранью равна мере угла $\angle BAH$ (так как $AB \perp AD$, $AH \perp AD$). В треугольнике ABH вычислим косинус его угла:

$$\cos \angle BAH = \frac{AH^2 + AB^2 - HB^2}{2 \cdot AH \cdot AB} = -\operatorname{ctg} 72^\circ.$$

Пусть точка R – это середина CD . Тогда из правильного пятиугольника со стороной 1 легко найти $NR = \frac{\operatorname{tg} 72^\circ}{2}$. Пусть $M_\perp$,

$N_\perp$ – это соответственно проекции точек M , N на плоскость основания, тогда $N_\perp R = NR \cos(180^\circ - \angle BAH) = \frac{1}{2}$, то есть

$ON_\perp = 1$. Аналогично находится $OM_\perp = 1$, и тогда $MN = M_\perp N_\perp = \sqrt{2}$, следовательно,

$$\frac{MN}{AB} = \sqrt{2}.$$

Замечание. Можно доказать, что прямая $M_\perp N_\perp$, являющаяся проекцией прямой MN на плоскость (ABC) , пройдёт через точку D .

Способ 7. Ключевая идея: трапеция. Очевидно, что в силу симметрии относительно плоскости, перпендикулярной основанию, параллельной AD и проходящей через центр квадрата $ABCD$, $EE_1 = QQ_1$, $DE_1 = CQ_1$, $ME_1 = TQ_1$ и $MT \parallel EQ \parallel E_1Q_1$, где M и T – это противоположные вершины верхнего квадрата (рис. 10).

Без ограничения общности можем считать, что сторона квадрата основания равна 1, тогда $E_1Q_1 = 1$ (четырёхугольник

DCQ_1E_1 – параллелограмм). Треугольник DE_1E равнобедренный, так как $\angle EDE_1 = \angle DEE_1 = 72^\circ$, следовательно,

$$EE_1 = QQ_1 = \frac{\frac{ED}{2}}{\cos \angle EDE_1} = \frac{1}{2 \cos 72^\circ}.$$

Из правильного пятиугольника $DENQC$ найдём $EQ = 2 \cos 36^\circ$ (длину диагонали правильного пятиугольника уже находили в шестом способе).

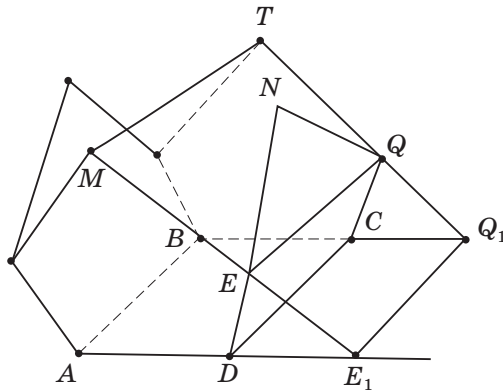


Рис. 10

Рассмотрим трапецию ME_1Q_1T (рис. 11). Проведём $Q_1Y \parallel ME_1$, получим подобные треугольники XQ_1Q и YQ_1T . На основании этого составим пропорцию $\frac{Q_1Q}{Q_1T} = \frac{XQ}{YT}$, откуда запишем равенство

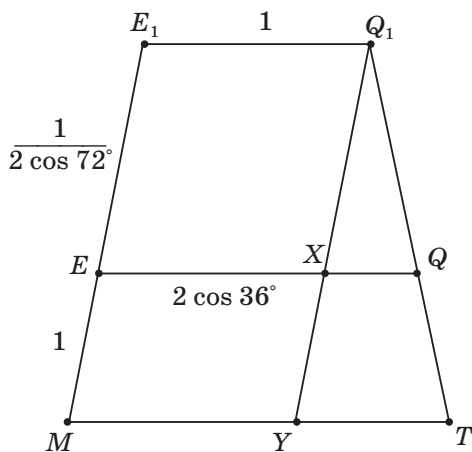


Рис. 11

$$\frac{\frac{1}{2 \cos 72^\circ}}{\frac{1}{2 \cos 72^\circ} + 1} = \frac{2 \cos 36^\circ - 1}{YT}.$$

Отсюда $YT = 1$, то есть $MT = 2$. Отрезок MT является диагональю верхнего квадрата, следовательно, сторона $MN = \sqrt{2}$, то есть $\frac{MN}{AD} = \sqrt{2}$.

Способ 8. Ключевая идея: метод координат, скалярное произведение. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ расположены на сторонах квадрата основания фигуры, а вектор $\vec{v}$ – на общем ребре двух правильных пятиугольников (рис. 12). Введём систему координат Декарта, как показано на рисунке.

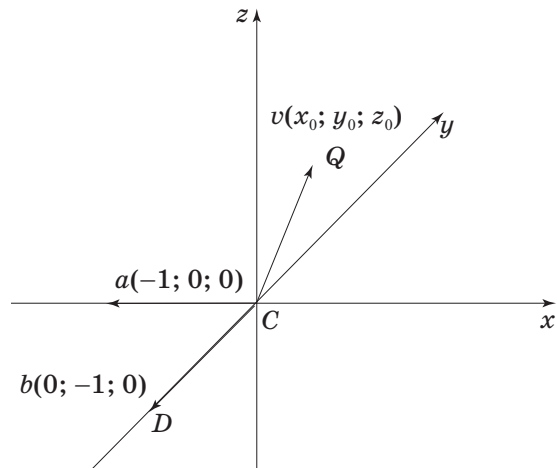


Рис. 12

Без ограничения общности можем считать, что сторона квадрата основания равна 1. Тогда $\vec{a}(-1; 0; 0)$, $\vec{b}(0; -1; 0)$ и $\vec{v}(x_0; y_0; z_0)$. Выполним вычисления:

$$\cos(\vec{a}, \vec{v}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = -x_0 = \cos 108^\circ,$$

$$\cos(\vec{b}, \vec{v}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{v}|} = -y_0 = \cos 108^\circ,$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1.$$

Следовательно,
 $z_0^2 = 1 - 2 \cdot \cos^2 108^\circ = 1 - 2 \cdot \sin^2 18^\circ = \cos 36^\circ$,
 то есть $z_0 = \sqrt{\cos 36^\circ}$. Получили координаты вектора $\vec{v}(\cos 72^\circ; \cos 72^\circ; \sqrt{\cos 36^\circ})$. Ортогональная составляющая вектора $\vec{v}$ на плоскость Oxz имеет координаты $\vec{v}_\perp = (\cos 72^\circ; 0; \sqrt{\cos 36^\circ})$, поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\cos 36^\circ}}{\cos 72^\circ}$$

и

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\cos 72^\circ}{\sqrt{1 - \cos^2 72^\circ}} = \\ &= \frac{\cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \operatorname{ctg} 72^\circ, \end{aligned}$$

где φ – это наименьший из углов между боковой гранью и плоскостью основания. Высота, проведённая из вершины N правильного пятиугольника $DENQC$ к противоположной стороне DC , очевидно, опустится в середину DC и будет равна $NR = \operatorname{tg} 72^\circ DR = \frac{\operatorname{tg} 72^\circ}{2}$. Следовательно,

расстояние от центра O квадрата $ABCD$ до проекции $N_\perp$ точки N на плоскость Oxy равно

$$ON_\perp = OR + RN_\perp = \frac{1}{2} + NR \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(рис. 13).

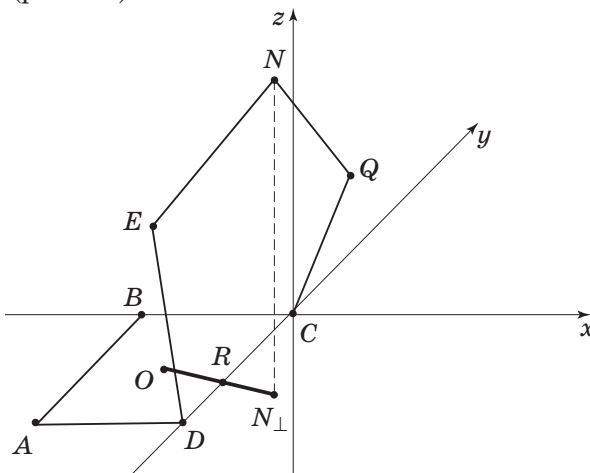


Рис. 13

Получили, что каждая вершина правильного пятиугольника, наиболее удалённая от плоскости нижнего основания, ортогонально проецируется в точку на плоскости основания, удалённую от центра квадрата на расстояние 1, следовательно, сторона верхнего квадрата равна $\sqrt{2}$, а требуемое отношение равно $\sqrt{2}$.

Способ 9. Ключевая идея: дополнительные построения, подобие. Продолжим стороны правильных пятиугольников. Заметим, что в третьем способе решения показано, что прямые AP , DE , CQ пересекаются в одной точке M' . Аналогично можно показать, что прямые PM , DE , NQ также пересекаются в одной точке Z (рис. 14).

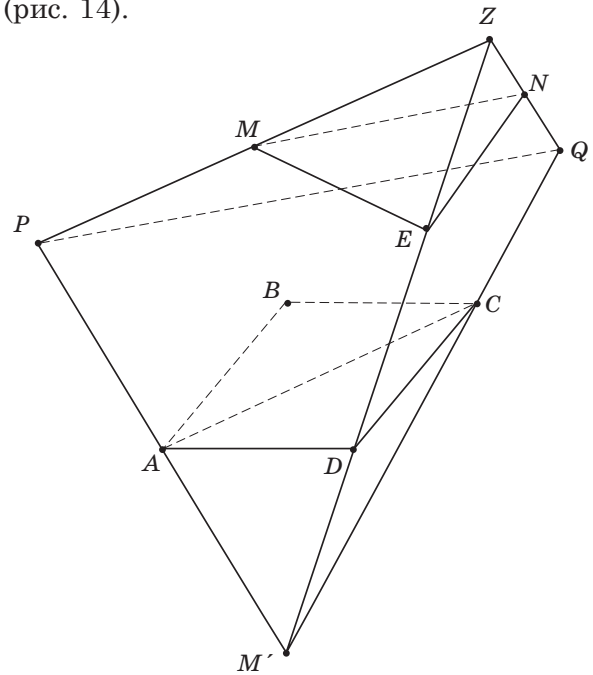


Рис. 14

Пятиугольники $APEDM$, $DENQC$ – правильные, поэтому треугольники $AM'D$, MZE , EZN , $DM'C$ равны друг другу, следовательно, $PM' = PZ = ZQ = QM'$. Тогда равны треугольники PZQ и $PM'Q$ (по трём сторонам). Так как $AM' = MZ = ZN = M'C$, то MN и AC – соответственные элементы

равных треугольников, поэтому они равны: $MN = AC = \sqrt{2}AB$, то есть отношение стороны верхнего квадрата к стороне нижнего квадрата равно $\sqrt{2}$.

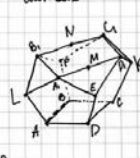
Ответ: $\sqrt{2}$.

При проверке олимпиадных работ всегда находятся логические ошибки. Не стала исключением и данная задача. Одну из таких работ автор приводит ниже. Читателям предлагается найти ошибку (почувствовать себя в роли экзаменаторов) на первый взгляд в правильном решении.

Многообразие решений задачи 2 участниками олимпиады дало импульс к появлению новых задач, правда, не геометрических, а алгебраических. Ученики при решении этой задачи активно использовали тригонометрию, и поэтому ответы у них зачастую получались не $\sqrt{2}$, а записывались различными алгебраическими выражениями с тригонометрическими функциями, содержащими «не табличные» аргументы, но при упрощении равные $\sqrt{2}$. В качестве упражнений читателю предлагается убедиться в истинности приведённых ниже равенств.

- $2(1 - 2 \sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ) = 1$.
- $\cos 36^\circ + \operatorname{tg} 18^\circ \sin 36^\circ = \sqrt{2}$.
- $\frac{4 \sin^2 54^\circ - 1}{\sqrt{2} \sin 54^\circ} = \sqrt{2}$.
- $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin 18^\circ + \frac{\sin 18^\circ}{\sqrt{2} \cos 36^\circ} = \sqrt{2}$.
- $\frac{2(\cos 720^\circ + \sin 36^\circ \operatorname{ctg} 72^\circ) + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
- $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{8 \cos^2 \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5} = \sqrt{2}$.
- $\frac{1 + \left(1 + \frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}\right)(\sqrt{2 - 2 \cos 108^\circ} - 1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Читатель.



Решение.

Заметим, что рисунок симметричен относительно плоскости, проходящей через диагонали нижнего квадрата, перпендикулярно плоскости нижнего квадрата. (Каждая точка вершины многогранника – вершина одного из пятиугольников, поэтому рисунок симметричен относительно таких плоскостей (относительно которых доказываем симметрию), оставшиеся ребра – ребра верхнего квадрата соединяют либо две симметричные точки, либо 2 точки A_1B_1 и точки A_2B_2 , что A_1 симметрично A_2 и B_1 симметрично B_2 (смотрим относительно какой плоскости симметричны)).

Прямая α проходит через BD и перпендикулярна плоскости $(ABCD)$, β проходит через AC перпендикулярно плоскости $(ABCD)$. Т.е. α – плоскость симметрии многогранника, β – плоскость симметрии многогранника. Точки $E, F \in \alpha$. Треугольники ABE и FBC симметричны себе относительно α . Аналогично $\triangle FBC$.

$A_1D \neq AD \Rightarrow A_1 \notin \alpha$. Аналогично $B_1, C_1, D_1 \notin \alpha$, $A_1, B_1, C_1, D_1 \notin \beta$. Т.е. $D \in A_1D_1 \notin \alpha \Rightarrow E \in \alpha \Rightarrow A_1$ симметрична D относительно α . Т.е. α проходит через середину A_1D_1 . Аналогично β проходит через середину B_1C_1 .

Точка M — середина A_1D_1 , Точка N — середина B_1C_1 .

MD симметрична N относительно β , т.к. A_1D_1 симметрична B_1C_1 относительно β .

Читатель.

B симметрична P относительно β , M симметрична N относительно $\beta \Rightarrow MD$ симметрична NP относительно β . Т.е. $NP = MD$. Плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, $DA_1 = DD_1$, т.к. это диагонали в равных пятиугольниках $\Rightarrow \triangle DAA_1 \cong \triangle DD_1A_1$ – равнобедренные с основаниями AA_1, DD_1 , M – середина $AA_1 \Rightarrow DM$ – высота и медиана и симметрична NP относительно β . Тогда $DM \perp AA_1$, $DM \perp CC_1$, $\alpha \perp ABCD \Rightarrow \alpha \perp A_1B_1C_1D_1$, т.к. $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$, $A_1D \in ABCD$, значит $DM \perp A_1B_1C_1D_1$. Аналогично $BN \perp A_1B_1C_1D_1$. Тогда DM и BN параллельны (и равны, мы это уже доказывали). Значит $BDMN$ – параллелограмм, т.е. $BD = MN$, MN – средняя линия в квадрате $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}a$. Сторона большего квадрата равна диагонали меньшего (нижнего) квадрата. Если $AD = AB = BC = CD = a$, то $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = \sqrt{2} \cdot a$. Т.е. сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего в $\sqrt{2}$ раз.

- $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10} - \sqrt{35 + 15\sqrt{5}} + 5\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.
- $2\sqrt{4 \sin^3 54^\circ - 4 \sin^2 54^\circ + 1} = \sqrt{2}$.

10.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(2 \left(\frac{2}{6 - \sqrt{20}} - 1 \right) \left(1 + \frac{\sqrt{6 - \sqrt{20}}}{2} \right) + 1 \right) = \sqrt{2}.$$

$$11. \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sin 18^\circ + 2\sqrt{2} \sin^2 18^\circ = \sqrt{2}.$$

Отметим, что можно продолжить изменять условие задачи 1 (задачи 2), тем самым организуя систему заданий для школьников. Задачи могут звучать следующим образом.

Задачи

для самостоятельного решения

Задача 3. В задаче 2 меняем правильный пятиугольник на правильный семиугольник. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?

Задачи 4. Чему равен двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью (плоскостью правильного семиугольника), смежной с плоскостью основания?

Задача 5. Чему равно расстояние между плоскостями квадратов из задачи 3?

Задача 6. Что произойдёт, если попытаться заменить в задаче 1 правильный шестиугольник на правильный восьмиугольник?

Полезно задать вопрос и самим школьникам, какие у них возникают дополнительные вопросы по представленным задачам 1 и 2. Исходя из полученных решений, можно предположить, что хороших вопросов (задач) они могут придумать много, тем самым они откроют для себя новую образовательную творческую деятельность – составление задач. Этот вид деятельности на классических уроках практически отсутствует.

И в заключение отметим, что данный конструктор удобно использовать не только для игры, не только для визуализации и «объёмизации» при изучении стерео-

метрии учениками средних школ, но он может быть полезным и на занятиях со студентами, уже увлечёнными наукой. Например, при изучении поверхностей, можно с помощью элементов конструктора собрать «седло» и «обезьянье седло» (рис. 15 и 16). Более подробную информацию по этим вопросам читатель найдёт в работе [3].

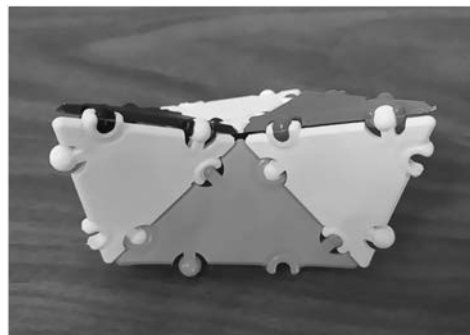


Рис. 15

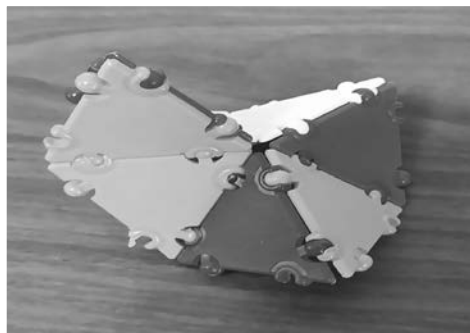


Рис. 16

Список источников

1. LXXXII Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. М.: МЦНМО, 2019. 60 с.
2. А.С. Погорелов. Элементарная геометрия. Стереометрия. М.: Наука, 1970. 96 с.
3. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия: Пер. с нем., 3-е изд. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья поступила в редакцию

19.07.2022.

Принята к публикации

06.02.2023.

О САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОМ СЕМИНАРЕ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. ДВЕСТИ ДОКЛАДОВ (2013–2023)

ON THE ST. PETERSBURG WORKSHOP ON THE HISTORY OF MATHEMATICS. TWO HUNDRED REPORTS (2013–2023)

Материалы семинара 5.8.1

УДК: 51(091)

Seminar materials 5.8.1

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_63

Г.И. Синкевич, д.ф.-м.н.,
профессор кафедры математики,
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
galina.sinkevich@gmail.com

G.I. Sinkevich, SciD (Phys&Math),
Professor of Department of Mathematics,
Saint-Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering
galina.sinkevich@gmail.com

Аннотация: в обзорной статье рассказано о десятилетней деятельности Санкт-Петербургского семинара по истории математики: выделены основные группы тем, соответствующих структуре исследований по истории математики; охарактеризован состав участников семинара по возрастным, по географическим признакам, по направлению научных интересов

Abstract: the review article talks about the ten-year activity of the St. Petersburg Workshop on the History of Mathematics: the main groups of topics are identified that correspond to the structure of research on the history of mathematics; the list of the Workshop participants was characterized by age, by geographical characteristics, by the direction of scientific interests

Ключевые слова: история математики, научные школы, персоналии.

Keywords: history of mathematics, scientific schools, personalities

© Г.И. Синкевич 2023

Наш семинар начал свою работу 2 октября 2013 г. в Петербургском отделении математического института имени В.А. Стеклова РАН, с тех пор ежемесячно по первым четвергам в течение учебного года проходят доклады, видеозаписи и сопровождающие материалы (презентации и статьи) можно посмотреть на сайте семинара <http://www.mathnet.ru/conf504>.

История математики развивалась вместе с самой математикой. Постепенно формировалась её методология. Начавшись с кратких экскурсов в историю отдельных проблем и биографических сведений об учёных, история математики пришла к исследованиям, использующим как исто-

рические, текстологические, так и математические методы, и превратилась в самостоятельную ветвь исследований со сформировавшейся методологией. Литература по истории математики обширна и многопланова – от популярного уровня до глубоких исследований, ею занимаются во всех странах, она входит в учебные курсы, она интересна всем любителям математики.

Сейчас в основании истории математики по-прежнему лежит изложение последовательности математических событий (документов, манускриптов, публикаций, конференций и съездов) и персональные научные биографии. Постепенно архитек-

тура истории математики обогащалась новыми уровнями: историей математических школ, историей преемственности и развития идей, теорий; анализом генезиса понятий от слабо формализованных до фундаментальных конструктов; историей математического образования в различных странах и регионах; историей математических документов и артефактов; историографией и методологией истории математики; историей переводов и персоналиями переводчиков; историей издательств и персоналиями издателей; социальной историей математических сообществ. Все эти уровни пронизаны внутренними связями и лишь условно разделимы.

Следуя этому условному делению, доклады нашего семинара можно распределить так.

Доклады, посвящённые истории математических идей (65 докладов).

История научных школ (5 докладов).

Научные биографии и история идей отдельных математиков (79 докладов).

История математики и математического образования в отдельно взятых странах и регионах (9 докладов).

История математических артефактов и документов (5 докладов).

Историография, история и методология истории математики (10 докладов).

История математики в научных и учебных заведениях (6 докладов).

История математических событий: документов, конференций, съездов, олимпиад (4 доклада).

История книг, манускриптов, издательств и персоналии издателей (6 докладов).

Социальная история математического сообщества (10 докладов).

Выступали докладчики из 14 городов России и из 10 зарубежных стран. Если докладчик говорил по-английски, мы ста-

рались выложить параллельную презентацию по-русски.

Доклады, посвящённые истории математических идей

1. История теоремы Ролля. – Г.И. Синкевич. 03.10.2013.

2. К 100-летию открытия полиномов Бернштейна. – В.С. Виденский. 07.11.2013.

3. Леонард Эйлер и теория кораблестроения. – Л.В. Коновалова. 06.02.2014.

4. История понятия числовой прямой. – Г.И. Синкевич. 06.03.2014.

5. Проблема меры Анри Лебега и первые её решения. – Л.И. Брылевская. 03.04.2014.

6. От наивного бесконечно малого к аксиоматическому нестандартному анализу. – Ю.Н. Ловягин. 05.06.2014.

7. Общая теория дифференциальных уравнений с частными производными в XIX–XX столетиях: диалектика концептуального развития. – С.С. Демидов. 06.11.2014.

8. Основные концепции финансовой математики в 20–21 веке. – Я.И. Белопольская. 04.12.2014.

9. Возникновение в XIV веке финансовой математики и формирование категории риска на материале торговых книг эпохи позднего Средневековья и Возрождения. – Г.И. Синкевич. 04.12.2014.

10. Об истории применения теории графов для целей хозяйствования и культуры. – В.П. Одинец. 05.03.2015.

11. История развития задачи нелинейной оптимизации с ограничениями в XVIII–XIX веке. – А.В. Петрова. 02.04.2015.

12. История языка эпсилон-дельта от Коши до Вейерштрасса. 200-летию со дня рождения Вейерштрасса посвящается. – Г.И. Синкевич. 04.06.2015.

13. История метода сходящихся последовательностей или метода вложенных отрезков от Архимеда до Кантора. – Г.И. Синкевич. 01.10.2015.
14. Закон взаимности – история и современное состояние. – С.В. Востоков. 05.05.2016.
15. История линейного программирования в нашей стране и в США как приложение структурной формулы В.Я. Проппа (1895–1970) решения трудной задачи. – В.Б. Кирьянов. 01.09.2016.
16. История расширения числовой области. – J. Sesiano. 06.10.2016.
17. К истории центральной предельной теоремы. – И.А. Ибрагимов. 02.03.2017.
18. О вероятности взаимной простоты двух наугад выбранных натуральных чисел (задача Чебышёва и её история). – Я.Ю. Никитин, С.М. Абрамович. 06.04.2017.
19. История построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки от Евклида до Гаусса. – J. Sesiano. 04.05.2017.
20. Последняя геометрическая теорема Пуанкаре: история и драма идей. – А.Н. Кириллов. 07.09.2017.
21. Прогулки с Эйлером. Задача обхода шахматным конём досок различной формы. – J. Sesiano. 05.10.2017.
22. История функционального уравнения дзета-функции и роль различных математиков в его доказательстве. – Я.В. Благушин. 01.03.2018.
23. История комплексных чисел и их геометрических представлений. – Г.И. Синкевич. – 04.01.2018.
24. Бикомплексные и гиперкомплексные числа и их приложения. Краткая история. – В.Б. Кирьянов. 04.01.2018.
25. Краткая история проблемы Варинга. – J. Sesiano. 01.03.2018.
26. История математической лингвистики. – С.В. Лесников. 05.04.2018.
27. От регулярной динамики к хаосу. – С.Ю. Пилюгин. 03.05.2018.
28. Краткая история конечных непрерывных дробей. – J. Sesiano. 06.09.2018.
29. Некоторые аспекты истории бесконечных непрерывных дробей. – J. Sesiano. 04.10.2018.
30. Влияние идей Лейбница на развитие дискретной математики. – В.Г. Алябьева. 01.11.2018.
31. Топологическое развитие последней геометрической теоремы Пуанкаре. – А.Н. Кириллов. 07.02.2019.
32. О коэффициентах Грегори. – Я.В. Благушин. 06.06.2019.
33. Лагранж о решении уравнений простой степени. – Н.В. Ингтем. 06.06.2019.
34. Санкт-Петербургский парадокс: математика и экономика. – А.А. Кудрявцев. 07.11.2019.
35. Самые ранние трактаты о магических квадратах. – J. Sesiano. 05.12.2019.
36. Цепные дроби, уравнение Пелля–Ферма и шутка Фибоначчи. – Г.А. Зверкина. 02.01.2020.
37. О работе И.В. Мещерского в области гироскопической стабилизации монорельсового вагона. – А.О. Юлина, Д.В. Бородин. 06.02.2020.
38. О единстве математики. – Н.М. Ивочкина. 03.09.2020.
39. История исследований двойного маятника. – Смирнов А.С., Смольников Б.А. 03.09.2020.
40. История применения методов статистики в филологии: Буняковский, Марков-ст. и Колмогоров. – С.В. Лесников. 05.11.2020.
41. К истории задачи о вращении твёрдого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. – А.О. Юлина. 03.12.2020.
42. О развитии нелинейных интегральных уравнений. Первые шаги, ста-

новление и новые идеи. – Е.М. Богатов. 07.01.2021.

43. Кто решил проблему Варинга? Н.А. Вавилов. – 25.02.2021.

44. К 150-летию юбилею Б.Г. Галёркина: метод Бубнова–Галёркина и его связь с другими методами. – С.И. Репин, М.Е. Фролов. 04.03.2021.

45. Спираль Нуньеса и предыстория исчисления бесконечно малых. – J.-F. Rodrigues. 01.04.2021.

46. Динамический хаос – трудный путь открытия. – Р.Р. Мухин. 01.04.2021.

47. Неравенство Коши–Буняковского и его математические интерпретации. – S. Kichenassamy. 15.04.2021.

48. Развитие геометрических идей и роль теории относительности. – Sumio Yamada. 06.05.2021.

49. Чебышёвские приближения. – В.Н. Малоземов. 20.05.2021.

50. История теоремы о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах. – Н.В. Ингтем. 03.06.2021.

51. Геометрия специальной и общей теории относительности и некоторые физические приложения. – А.А. Гриб. 17.06.2021.

52. История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса. – А.С. Смирнов, Б.А. Смольников. 02.09.2021.

53. Кто решил проблему Гольдбаха? – Н.А. Вавилов. 16.09.2021.

54. Неравенства Коши–Буняковского: краткие исторические сведения, обобщения и приложения. – С.М. Ситник. 04.11.2021.

55. Конденсационные методы вычисления определителей: идея и ретроспектива. – Н.А. Перязев. 02.12.2021.

56. Математическая строгость, математическое творчество и выход за пределы ограничений. – Е. Knobloch. 02.12.2021.

57. Развитие теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова. – А.О. Юлина. 06.01.2022.

58. Из истории комбинаторного анализа: от идеи до научных школ. – В.Г. Алябьева. 03.02.2022.

59. Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу в развитии теории уравнений в частных производных. – S. Kichenassamy. 07.04.2022.

60. Эллиптические и гиперболические уравнения Лиувилля и их математические и физические интерпретации. – Е.М. Богатов, С. Кишнассами. 05.05.2022.

61. Вокруг лёгкой проблемы Варинга. – Н.А. Вавилов. 06.10.2022.

62. Тождество Эйлера. История красавицы-формулы. – Г.И. Синкевич. 02.02.2023.

63. Модулярные уравнения и эллиптическая функция Галуа. – С.Ф. Адлай. 02.03.2023.

64. Числа Ферма и циклотомия. – Н.А. Вавилов. 06.04.2023.

65. Задача о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки и таутохронная задача в фундаментальных исследованиях О.И. Сомова – А.О. Юлина. 04.05.2023.

66. О вкладе отечественных математиков в развитие нелинейного функционального анализа в 1920-е – 1960-е гг. – Е.М. Богатов. 01.06.2023 г.

История научных школ

1. История польской математической школы. Феномен возникновения польской математической школы (до 1939 года). – В.П. Одинец. 05.12.2013.

2. История польской математической школы. Вацлав Серпинский и основание варшавской школы теории множеств. – Г.И. Синкевич. 05.12.2013.

3. Ещё несколько слов об Академии Знаний (Краков) конца 19 века. – В.П. Одинец. 06.02.2013.

4. Философия логики и математики в Варшавской школе. – R. Murawski. 13.05.2014.

5. О работах по аналитической механике на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ за 70-летний период (1950–2020 гг.). Обобщённая задача Чебышёва. – М. П. Юшков. 20.05.2021.

Научные биографии и история идей отдельных математиков

1. Академик А.Н. Крылов – известное и неизвестное. – Н.С. Ермолаева. 06.03.2014.

2. Продолжение доклада о жизни и научной работе академика А.Н. Крылова. – Н.С. Ермолаева. 03.04.2014.

3. Жизнь и деятельность Павла Петровича Мельникова. – М.М. Воронина. 05.06.2014.

4. Довоенные работы С.Л. Соболева и их значение для последующего развития математики. – В.М. Бабич. 02.10.2014.

5. Судьба переводов Кантора в России. – Г.М. Синкевич. 02.10.2014.

6. К 100-летию Н.М. Матвеева (1914–2014). – Л.В. Коновалова. 06.11.2014.

7. Вольфганг Дёблин (1915–1940). – Г.А. Зверкина. 05.02.2015.

8. Труды проф. Г.В. Колосова по биомеханике. – И.И. Демидова. 05.02.2015.

9. Габриэль Ламе – русский период жизни и творчества. – М.М. Воронина. 05.03.2015.

10. Нижегородский математик Артемий Григорьевич Майер и его курс истории математики. – Г.М. Полотовский. 07.05.2015.

11. О научной, педагогической и государственной деятельности механиков и инженеров, пяти братьев Кирпичёвых. –

Н.М. Репникова. 07.05.2015.

12. Насиреддин Туси (1201–1274). – А.А. Бабаев. 04.06.2015.

13. Кто Вы, месье Леблан? – Д.Е. Апушкинская. 03.09.2015.

14. Время и судьбы: Воронные. – Н.В. Локоть. 03.09.2015.

15. П.Ф. Лесгафт – один из основоположников экспериментальной биомеханики в России. – И.И. Демидова. 01.10.2015.

16. Осип (Иосиф) Иванович Сомов: жизнь и творчество глазами его брата. – Н.С. Ермолаева. 20.10.2015.

17. О научной и педагогической деятельности И. И. Сомова. – И.Е. Лопатухина. 20.10.2015.

18. Работа О.И. Сомова в институте инженеров путей сообщения. – М.М. Воронина. 20.10.2015.

19. Давид Фомич Харазов (к 100-летию со дня рождения). – В.П. Одинец. 05.11.2015.

20. 200-летие Карла Вейерштрасса. – Г.И. Синкевич. 01.12.2015.

21. О математическом творчестве Карла Вейерштрасса. – В.М. Тихомиров. 01.12.2015.

22. Диофант и его алгебра. – J. Sesiano. 03.12.2015.

23. Ко је ко? Никола Салтиков. – Н.В. Локоть. 03.12.2015.

24. Жизнь и деятельность академика Б.Г. Галёркина. – И.И. Демидова. 22.12.2015.

25. О значении метода Галёркина для анализа дифференциальных уравнений. – С.И. Репин. 22.12.2015.

26. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской и развитие математики в Ростове-на-Дону. – Ю.С. Налбандян. 04.02.2016.

27. Рассказ об отце. Поляхов Николай Николаевич (17.12.1906–27.01.1987). – Н.Н. Поляхов. 04.02.2016.

28. Об инвариантах в ранней истории алгебраических поверхностей. Альфред Розенблатт (1880–1947) и его результаты. – D. Ciesielska. 07.04.2016.

29. Новое о Павле Некрасове: из истории развития статистики в России. Социальные проблемы в контексте математического творчества. – И.В. Исак. 07.04.2016.

30. Жан Лерон Д'Аламбер. К 300-летию со дня рождения. – Л.В. Коновалова. 05.01.2017.

31. Вулих Захар Борисович (1844–1897) – первый в династии известных математиков-педагогов. – В.П. Одинец. 05.01.2017.

32. Т.Ф. Осиповский – математик, механик, философ, астроном, писатель, педагог, переводчик. К 250-летию со дня рождения. – О.О. Барабанов. 02.02.2017.

33. Время и пространство Р.И. Пименова (1931–1990). – Р.Р. Пименов. 02.03.2017.

34. Основатель первой в СССР лаборатории фотоупругости Л.Э. Прокофьева-Михайловская. – И.И. Демидова. 06.04.2017.

35. Андерс Йохан Лексель (1740–1784) – финский математик и Российский академик. – J. Sten. 01.06.2017.

36. Александр Васильевич Васильев и математика в России в конце XIX – начале XX веков. – Ю.Ю. Царицанская. 05.10.2017.

37. Владимир Иванович Смирнов (1887–1974) – математик и просветитель. – А.И. Назаров. 02.11.2017.

38. Адольф Львович Фуксман (1937–1978) и развитие Вычислительного центра в Ростове-на-Дону. – Ю.С. Налбандян. 02.11.2017.

39. Зенон Иванович Борович (1922–1995). К 95-й годовщине со дня рождения. Взгляд из Польши. – В.П. Одинец. 07.12.2017.

40. Евграф Степанович Фёдоров – российский кристаллограф, минералог и математик. – И.В. Романовский. 01.02.2018.

41. Великий швейцарский математик Иоганн Бернулли (к 350-летию со дня рождения). – Л.В. Коновалова. 05.04.2018.

42. Профессор Д.А. Гудков (1918–1992) – выдающийся математик и исследователь биографии Н.И. Лобачевского (к 100-летию со дня рождения) – Г.М. Полотовский. 06.09.2018.

43. Георг Кантор. Дополнения к петербургскому периоду биографии. – Г.И. Синкевич. 04.10.2018.

44. Александр Гротендик. К 90-летию со дня рождения. – К.И. Пименов. 03.01.2019.

45. К 170-летию со дня рождения Готлоба Фреге. – Н.А. Перязев. 03.01.2019.

46. Бесконечность богослова и математика. К истории полемики отца Павла Флоренского и академика Н.Н. Лузина. – С.С. Демидов. 07.03.2019.

47. Необычный 1615 год в жизни Иоганна Кеплера. – J. Sesiano. 04.04.2019.

48. Основания геометрии в работах В.Ф. Кагана (1869–1953). – М.А. Подколзина. 02.05.2019.

49. Архимед и его зажигательные зеркала. – J. Sesiano. 03.10.2019.

50. Георгий Вороной – педагог и гражданин. Штрихи к портрету. – Н.В. Локоть. 07.11.2019.

51. Выдающийся воспитанник Московского университета Лев Васильевич Овсянников (1919–2014) и развитие теории околосвуковых течений газа. – А.Н. Богданов. 05.12.2019.

52. О трёх ленинградских геометрах, погибших в 1941–1942 годах. – В.П. Одинец. 02.01.2020.

53. Основатель иркутской научной школы алгебры, логики и кибернетики Али Иванович Кокорин (1929–1987).

К 90-летию со дня рождения. – Н.А. Перязев. 06.02.2020.

54. Андрей Николаевич Колмогоров. Универсальный гений. – Я.А. Бутко (Киндеркнехт). 05.03.2020.

55. Судьба двух математиков: отца и сына Якова и Михаила Перельманов. – В.П. Одинец. 01.10.2020.

56. Маргарита Бабкеновна Налбандян и её работы по истории математики в России. – Ю.С. Налбандян. 04.02.2021.

57. Научно-педагогическая деятельность академика Б.Г. Галёркина в период с 1939 по 1945 год. – А.О. Юлина, Н.Л. Смирнова. 04.03.2021.

58. Борис Григорьевич Галёркин (1871–1945). К 150-летию со дня рождения. – И.И. Демидова. 04.03.2021.

59. Математика в жизни и трудах Л.Г. Лойцянского (к 120-летию со дня рождения). – Е.М. Смирнов. 15.04.2021.

60. Пафнутий Львович Чебышёв: человек науки на службе России (к 200-летию со дня рождения). – А.А. Тихонов. 06.05.2021.

61. К 150-летию Н.М. Гюнтера (1871–1941). – Г.И. Синкевич. 03.06.2021.

62. В.А. Якубович – основоположник кибернетики и искусственного интеллекта в Ленинграде – Санкт-Петербурге. – А.Л. Фрадков. 17.06.2021.

63. Жизнь и деятельность американского криптолога Уильяма Фридмана. – М. Вулис. 02.09.2021.

64. Некоторые факты и слухи о Стефане Банаше. – D. Ciesielska, K. Ciesielski. 07.10.2021.

65. Математик-прикладник Рихард фон Мизес (1883–1953) и его связи с Россией. – R. Siegmund-Schultze. 04.11.2021.

66. Профессор Марк Константинович Гавурин. К 110-летию со дня рождения. – В.Н. Малозёмов, В.М. Рябов. 03.03.2022.

67. К 100-летию со дня рождения выда-

ющегося математика Ольги Александровны Ладыженской. – Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров. 07.03.2022.

68. Ю.В. Сохоцкий – первый профессор математики Института гражданских инженеров. – Совместное заседание семинара по истории математики и кафедры математики СПбГАСУ. О.В. Соловьёва. 07.04.2022.

69. Михаил Захарович Соломяк (1931–2016), ленинградский математик, выдающийся исследователь в области функционального анализа и математической физики. – Г.В. Розенблюм. 05.05.2022.

70. Математические и логические труды Насиреддина Туси, научная новизна в этих работах. – А. А. Бабаев. 02.06.2022.

71. Г.К. Брауэр и В.Л. Францен – механики на службе Университета (к 300-летию создания Университета). – Г.А. Кутеева, Г.А. Синильщикова. 02.06.2022.

72. Владимир Иванович Крылов. К 120-летию со дня рождения (14.12.1902–31.08.1994). – В.М. Рябов. 06.10.2022.

73. Виденский Виктор Соломонович. К 100-летию со дня рождения (17.05.1922–03.02.2015). – И.В. Виденский. 03.11.2022.

74. Сотрудничество Б.Г. Галёркина и Л.В. Канторовича в 1929–1945 гг. – И.И. Демидова. 03.11.2022.

75. Е.С. Вентцель. Между математикой и литературой. – Г.Л. Эпштейн. 01.12.2022.

76. О раннем периоде научной биографии Н.А. Шанина. – С.В. Соловьёв. 05.01.2023.

77. Феликс Клейн и математики из России, с особым акцентом на прикладную математику. – R. Tobies. 05.01.2023.

78. Елена Петровна Ожигова (1923–1994). К 100-летию со дня рождения. – Ю.С. Налбандян, И.К. Зубова. 02.03.2023.

79. Об истории двух работ Колосова и Мухелишвили. – Н.Н. Поляхов. 01.09.2016.

История математики и математического образования в отдельно взятых странах и регионах

1. Математики первых петергофских гимназий (1880–1917). – Н.В. Локоть. 02.04.2015.

2. История математического образования в Иркутске в первой половине 20-го века. – Н.А. Перязев, Ю.В. Перязева. 06.10.2016.

3. Об истории математического образования в Оренбургском крае. – И.К. Зубова. 02.02.2017.

4. О некоторых причинах и последствиях реформирования математики с XIX в. по начало XX в. – Г.А. Зверкина. 03.05.2018.

5. О спорах вокруг истории китайской астрономии. – Г.И. Синкевич. 06.12.2018.

6. Математика и государство: послевоенное развитие вычислительной математики в США и СССР. – В.Б. Кирьянов. 06.12.2018.

7. П.Л. Чебышёв и образовательные реформы середины XIX века (по материалам сборника документов). – В.М. Бусев. 07.10.2021.

8. Обзор древнеиндийской математики. – S.G. Dani. 06.01.2022.

9 Математика Джайнов в древней и средневековой Индии. – S.G. Dani. 01.09.2022.

История математических артефактов

1. История коллекции Механического кабинета Санкт-Петербургского университета. – Г.А. Кутеева. 04.09.2014.

2. «Плакаты Сомова» в Санкт-Петербургском университете. – Г.А. Кутеева. 20.10.2015.

3. История и современность математических моделей из каталога Мартина Шиллинга. – Г.А. Кутеева. 04.05.2017.

4. История создания и воссоздания кабинета практической механики Санкт-Петербургского госуниверситета. – Г.А. Кутеева, Г.В. Павилайнен, Е.Н. Поляхова, Т.С. Шугайло. 07.12.2017.

5. О механизмах П.Л. Чебышёва. – Г.А. Кутеева. 03.12.2020.

Историография и методология истории математики

1. Социологический анализ античной науки. – Л.Я. Жмудь. 03.03.2016.

2. Презентация новой научно-биографической книги о Л. Эйлере американского историка математики Рональда Кэлинджера (Вашингтон, США) «Leonhard Euler. Mathematical Genius in the Enlightenment by Ronald S. Calinger» (Леонард Эйлер. Математический гений эпохи Просвещения). – Е.Н. Поляхова. 03.03.2016.

3. Был ли Дедекинд логицистом? – О.А. Антонова. 05.05.2016.

4. Воспоминания об историках математики. – Г.П. Матвиевская. 02.06. 2016.

5. Методы реконструкции в истории математики. – С.Н. Бычков. 02.06. 2016.

6. Развитие отечественной истории математики до 1917 года. – Н.В. Локоть. 03.11.2016.

7. Историко-математические исследования в Москве в XX столетии. – С.С. Демидов. 01.12.2016.

8. Теория доказательств и математика: Аристотель vs Гильберт. – О.А. Антонова. 01.06.2017.

9. Историография истории математики. Ранний этап развития Historia Matheseos. – Г.И. Синкевич. 07.09.2017.

10. Развитие истории математики в Ленинграде второй половины XX века. –

Л.И. Брылевская. 07.06.2018.

11. П.Л. Лавров – автор первого в России курса лекций по истории математики. К 200-летию со дня рождения. – Г.И. Синкевич. 04.05. 2023.

История математических событий (документов, конференций, съездов, олимпиад)

1. Первая Международная топологическая конференция. Москва, 1935 г. – Г.С. Смирнова. 07.06.2018.

2. Ленинград, 1934. Первая городская математическая олимпиада: новые факты, новые вопросы. – Д.В. Фомин. 04.02.2021.

3. О возможных источниках первой отечественной историко-математической статьи. – Д.И. Пронин. 16.09.2021.

4. Первые математические олимпиады в России / СССР. Часть II. – Д.В. Фомин. 01.12.2022.

История математики в научных и учебных заведениях

1. К 110-летию открытия Высших женских политехнических курсов. – Н.М. Репникова. 07.01.2016.

2. К истории математики и механики в Политехническом институте в первой половине 20-го века. – Смирнов Е.М. 04.04.2019.

3. История применения интегральных уравнений Вольтерра в Ленинградском государственном университете. – И.И. Демидова. 05.09.2019.

4. Краткая история кафедры теории упругости в ЛГУ (СПбГУ). – И.И. Демидова. 01.10.2020.

5. ЛОМИ, 1960–1980-е гг., «Строгий» математический конструктивизм и другие направления математики и естественных наук на семинаре по математической логике. – С.В. Соловьёв. 03.02.2022.

6. Воронежская математическая школа по дифференциальным уравнениям. – С.М. Ситник. 03.03.2022.

История книг, манускриптов, издательств и персоналии издателей

1. Книги по математике издательства «Матезис» (Одесса, 1904–1925). – Н.А. Перязев. 01.02.2018.

2. К 250-летию публикации книги Л. Эйлера «Письма к немецкой принцессе» (1768–1772). – Е.Н. Поляхова. 05.09.2019.

3. И.В. Мещерский и его сборник задач. – Г.А. Кутеева. 03.2019.

4. Книги, рукописи, переписка – взгляд историка математики из XXI века. – С.С. Демидов. 25.02.2021.

5. О втором мемуаре последнего письма Эвариста Галуа. – С.Ф. Адлай. 01.09.2022.

6. Копия трактата по геометрии и астрономии «Комментарий к Альмагесту» Насира ад-Дина ат-Туси в библиотеке османского султана Фатиха Султана Мехмеда. – Я.Н. Алиев. 01.06.2023.

Социальная история математического сообщества

1. Бестужевки-математики – ученицы Д. Гильберта. – З.С. Галанова, Н.М. Репникова. 04.09.2014.

2. Петербургские математики и реформирование Академии наук в послереволюционное время. – Л.И. Брылевская. 05.11.2015.

3. Репрессии в отношении ленинградских учёных в блокадные 1941–1942 гг. – С.Б. Шевелёв. 07.01.2016.

4. Об иммиграции математиков в Советский Союз в период 1929–1941 гг. – В.П. Одинец. 01.11.2018.

5. Блуждания освобождённого разума: о научной революции начала Нового вре-

мени. – И.С. Дмитриев. 07.02.2019.

6. Русское математическое зарубежье первой половины XX века: люди и судьбы. – М.Ю. Сорокина. 07.03.2019.

7. О физиках, приехавших и приезжавших в СССР в 30-е годы. – В.П. Одинец. 02.05.2019.

8. КУБУ – Комиссия по улучшению быта учёных и петроградские математики в первые годы советской власти. – Н.А. Малышева. 05.03.2020.

9. Математики Петербургской стороны. – Г.И. Синкевич. 05.2020.

10. Коммунистическая академия и «революция» в Московском математическом обществе в 1930 г. – Г.С. Смирнова. 07.01.2021.

Я намеренно не резюмирую ни один доклад – Вы можете выбрать его по своим интересам, увидеть количество просмотров, скачать презентацию, посмотреть видеозапись.

В семинаре участвуют математики-исследователи, вузовские преподаватели математики, исследователи истории математики, аспиранты, магистранты и студенты. Научной молодежи около 30%. Уже состоялось около 200 докладов. Видеозаписи докладов и прикрепленных к

страничке доклада статей и презентаций просматривает большое количество людей ЗДЕСЬ и ТАМ. В годы карантина мы перешли на дистанционный режим (zoom), это расширило состав и географию нашей аудитории, позволило приглашать докладчиков издалека. Наибольший интерес вызывают доклады, связанные с историей идей, а также юбилейные темы. В последние годы выделилась тенденция к изучению историко-математических исследований, как персональных, так и в составе историко-математических школ.

Каждый доклад рассчитан на 45 минут, на заседании заслушивается два доклада, семинар проходит по первым четвергам месяца. Если Вы хотите принять участие в работе семинара в реальном времени, напишите мне.

Я выражаю свою признательность редакторам Общероссийского портала Math-Net.Ru и особенно заведующему информационно-издательским сектором Дмитрию Евгеньевичу Чебукову, благодаря которому наши материалы появляются на сайте.

Статья поступила в редакцию

18.03.2023.

Принята к публикации

21.03.2023.

Сибирский учёный удостоен медали имени Леонарда Эйлера

На Общем собрании РАН в Москве состоялось награждение медалями имени выдающихся учёных. Среди лауреатов — академик Сергей Константинович Годунов.

Сергей Годунов работает в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, он международно признанный специалист по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, вычислительной математике, механике сплошных сред, линейной алгебре. Лауреат высшей в СССР Ленинской премии (в области военной науки и военной техники, 1959 г.) по результатам работ в атомном проекте. Почётный профессор Мичиганского университета (США).

Источник: mathcentr.kpfu.ru

Барометр ЕГЭ

В ОЖИДАНИИ НЕИЗБЕЖНОГО

(кто такие «внезапные родители» и чем тешатся чиновники?)

* В этом году каждый десятый выпускник собирается сдавать ЕГЭ по 10 предметам, показал опрос Рособнадзора. Большинство выпускников сообщило, что будут сдавать четыре экзамена. Заявления на участие в ЕГЭ подали свыше 700 тысяч человек из 88 субъектов РФ, более 620 тысяч – это выпускники текущего года. Самыми популярными предметами по выбору стали обществознание, информатика и биология. Их планируют сдавать 46%, 20% и 19%



участников ЕГЭ-2023. В свою очередь глава Минпросвещения отметил, что у школьников растёт интерес к естественно-научному образованию, информатике и физике.

* Чем ближе к госэкзаменам – тем больше спрос на услуги преподавателей. Ажиотаж на профильных сайтах начинается ещё в феврале, каждый четвёртый запрос так или иначе связан с репетиторами. Чаще всего в авральном режиме пытаются подтянуть математику и русский язык. Число тех, кто за пару месяцев до начала экзаменов вдруг обнаруживает «неучтённый» предмет, с годами не уменьшается. Таких «внезапных родителей», как их прозвали эксперты в области ЕГЭ, насчитывается 10–15%. Иные припозднившиеся опробуют нетрадиционные методы подготовки и пытаются прибегнуть к услугам нейропсихологов, готовых «настроить на ЕГЭ», или даже гипнотизёров, готовящих к экзамену во сне. Предложений такого рода тоже хватает.

* Столичная мэрия загодя опубликовала ролики с советами психологов в МЭШ (Московская электронная школа). «По просьбе детей, – заявила вице-мэр А. Ракова, – мы дали им инструменты для психологического комфорта и спокойствия». На этом чиновники не остановились. Чтобы поддержать выпускников московских школ на финишной прямой подготовки к экзаменам, помочь им настроиться на успех и справиться со стрессом, ребятам пообещали, что в период «с 15 мая по 4 июня на крупных городских площадках, таких как “Зарядье” и “Винзавод”, пройдут четыре лекции, где лучшие эксперты-психологи, блогеры и артисты пообщаются с одиннадцатиклассниками». Так, нейробиолог профессор биофака МГУ Вячеслав Дубынин выступит с лекцией на тему «Мозг всемогущий! Инструкция к применению», на которой познакомит слушателей с особенностями работы мозга в стрессовых ситуациях и порекомендует, как справиться с этим состоянием и успокоиться одной силой мысли.

Подробности: obrnadzor.gov.ru, ria.ru, mk, mos.ru.

Перспективы далёкие и близкие

СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ПРОТИВ ВЫСШЕГО

(когда желания не совпадают с возможностями, а «цифры» растут)

* Высшее образование в представлении россиян – не только право, но и социальная норма. По данным прошлогоднего исследования НИУ ВШЭ, 77% родителей в России хотят, чтобы их дети получили высшее образование (40% считают, что ребятам будет достаточно диплома бакалавра или специалиста, 25% хотели бы, чтобы ребёнок закончил магистратуру, об аспирантуре задумываются 4%, о двух высших образованиях – 8%), только 16% опрошенных родителей хотели бы видеть у своих детей среднее профессиональное образование. При этом 65% россиян смотрят на высшее образование сквозь «зарплатную призму», а мотивация, связанная с общекультурной (бескорыстной) ценностью обучения в университете, проявляется намного реже.

* Большинство родителей хотят, чтобы их дети получили диплом вуза, но далеко не все могут себе это позволить. Система высшего образования невольно поддерживает социально-экономическое неравенство, говорят эксперты. В общественном сознании сохранилось представление о том, что высшее образование должно быть общедоступным, но государство сейчас не способно обеспечить этот массовый запрос, а коммерческий сегмент в последние годы постоянно сокращается. На этом фоне отмечается расширение приёма на программы среднего профессионального образования (СПО). В апреле министр просвещения Сергей Кравцов сообщил о буме развития СПО. Он заявил, что 63% школьников после девятого класса выбирают поступление в колледжи. Между тем, по данным НИУ ВШЭ, среди выпускников колледжей и техникумов 2017–2021 годов только половина официально устроена на работу (среди выпускников вузов этот показатель составляет 69% для бакалавров и 76% для магистров).

* Тем временем готовится пилотный проект по реформе высшего образования в России. Планируется запустить его уже в сентябре. В новой системе вместо магистратуры и бакалавриата предусмотрены три уровня образования: базовое высшее, специалитет и аспирантура. Проект запланирован на 2023/24 и 2025/26 учебные годы, в нём примут участие шесть российских вузов разного профиля, в том числе педагогический – МПГУ.

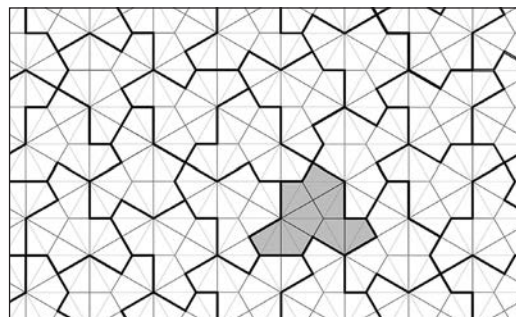
Подробности: tass.ru, hse.ru, ng.ru, vedomosti.ru.

Из жизни учёных

МОЗАИКА ИЗ ПОЛИДЕЛЬТОИДОВ

(найден многоугольник для апериодического паркета)

Замостить плоскость многоугольниками можно несколькими способами. Во-первых, выложить периодический паркет из выпуклых многоугольников с одинаковым числом сторон, а именно 3, 4, 5 либо 6. Если сдвинуть его в определённом направлении на нужное расстояние, он наложится на себя. Во-вторых, сконструировать апериодический паркет из элементов разного типа вроде мозаики Пен-



роуза из ромбов двух видов. Недавно группа американских математиков нашла ещё один апериодический паркет. Его исходный элемент представляет собой невыпуклый 13-угольник, составленный из восьми равных дельтоидов – четырёхугольников, у которых попарно равны соседние стороны: две длинные и две короткие. Из рисунка видно, что за основу был взят паркет из правильных шестиугольников. Учёные также показали, что найденный элемент – лишь один из представителей целого класса многоугольников, которыми можно замостить плоскость апериодически. Непрерывно изменяя его контур (длины сторон многоугольника), можно получить множество различных апериодических плиток. Подробности: nplus1.ru.

Портрет педагога

НЕЙРОСЕТЬ ЗАМЕНИТ УЧИТЕЛЯ?

(как повлияет на учительскую профессию искусственный интеллект)

Российские компании из сферы EdTech начали применять искусственный интеллект (ИИ) с целью улучшить коммуникацию с учениками и вывести обучение на новый уровень. Одна из онлайн-школ английского языка разработала усовершенствованную версию чат-бота на основе GPT-4. Нейросеть научилась свободно общаться с учениками, она имитирует живой диалог, анализирует ответы и сразу даёт обратную связь, указывая ошибки. Виртуальный собеседник обеспечит учащимся разговорную практику в любое время, и они самостоятельно смогут улучшить знание иностранного языка. Таким образом создаётся «некий экзоскелет учителя», снабжённый всеми данными для построения персонального образовательного трека, говорят разработчики.

Всё чаще звучит вопрос: заменит ли нейросеть учителя? Мнения экспертов разнятся. Одни считают, что она станет незаменимым помощником учителей, другие прогнозируют, что, когда ИИ достигнет серьёзного уровня развития, профессия учителя вполне может быть заменена программой. Кто-то уверен, что преподавание можно автоматизировать, если свести функцию учителя к объяснению материала и исправлению ошибок, но заменить учителя как наставника, равно как и научить ИИ эмпатии, невозможно. Есть и те, кто не исключает: частичная или полная замена преподавателей цифровыми двойниками может коснуться «плохих преподавателей».

Эксперты сходятся в том, что нейросеть имеет огромный потенциал в образовании, в будущем профессия учителя трансформируется, его главной функцией станет направлять ученика, а не передавать знания. Каждый педагог станет активно использовать средства на базе нейросетей, на его плечи ляжет грамотная интеграция ИИ в образовательный процесс. Главное, чтобы сами учителя были готовы к вхождению ИИ в школу. Более реалистично настроенные эксперты уже оценивают риски его введения в школу.

Подробности: iz.ru.

Житейские истории

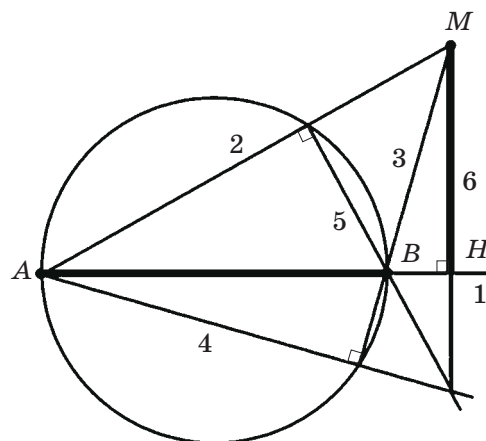
ПРЕМЬЕР-МИНИСТР ВНОВЬ ОЗАДАЧИЛ ШКОЛЬНИКОВ

(пополняем коллекцию головоломок «от Михаила Мишустина»)

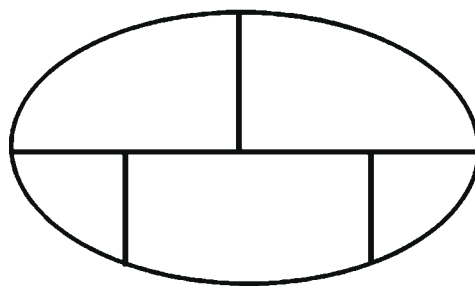
Мы уже рассказывали, как в 2021 году премьер-министр России Михаил Мишустин посетил в День знаний физтех-лицей в Долгопрудном и задал ученикам 11 класса задачу на

построение перпендикуляра к диаметру окружности с помощью одной линейки, которую тут же окрестили «задачей Мишустина». Тогда она вызвала бурное, но малосодержательное обсуждение в интернете. Позже в журнале «Математика для школьников» вышла статья с разбором полётов, обзором частных случаев (один показан на рисунке вверху) и биографией этой красивой задачи, а её впервые рассмотрел почти 200 лет назад Якоб Штейнер. Недавно история повторилась. В этот раз премьер задал школьникам из Тюмени две классические занимательные задачи: про муху на стакане (вариация на тему задачи Дьюдени о пауке и мухе) и на проверку уникальности фигуры (см. рисунок внизу). Начертить такую фигуру – дело нехитрое, сложнее объяснить, почему придётся отрывать карандаш от бумаги трижды.

Подробности: Карпушина Н.М. О чём умолчал премьер. Математика для школьников, № 3 за 2022 год.



Построение перпендикуляра к AB



Нарисуй фигуру, трижды оторвав карандаш от бумаги

Нетривиальные суждения

Математика – широкое поприще идей, и её история знакомит нас с некоторыми из благороднейших помыслов неисчислимых поколений.

Мы должны всегда помнить, что математические понятия – не произвольные творения ума, а отражение реального, объективного мира, пусть часто в весьма абстрактном виде.

В подлинниках Евклида и Гаусса содержится такая же живительная сила, как и в подлинниках Шекспира; у Архимеда, у Ферми, у Якоби можно найти столь же великолепные места, как у Горация или Эмерсона.

История математики – не только история развития понятий, но одна из частей истории человеческой деятельности, в которой отражается борьба человека с природой, притом не абстрактного человека, а человека как члена общества.

Такой гений, как Ньютон, может прокладывать новые пути в математике и механике только тогда, когда есть в обществе классы, готовые поддерживать и ободрять его, готовые создать ему условия для работы и для того, чтобы быть услышанным.

Д.Я. Стройк, голландский математик и историк науки

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

Научная статья: 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article: 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_5_77

Квадратный трёхчлен – довольно часто используемый в школьной программе объект. Покажем, какие нестандартные ситуации можно создать вокруг них.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Поддаеву Михаилу Валерьевичу по адресу: rodaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя. Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Задачи

для самостоятельного решения

1. Алёша написал на доске пять целых чисел – коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, –5. Восстановите стёртое число.

Френкин Б.Р.

2. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Жуков Г.

3. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

Емельянов Л.А.

4. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет два действительных корня. Каждый из трёх его коэффициентов увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня

трёхчлена также увеличились на 1?

Евдокимов М.А.

5. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

Бородин П.А.

Решение заданий из № 4 2023.

Геометрическое неравенство

1. Треугольник ABC такой, что $AB = BC$. На стороне BC лежит точка D , причём $CD = AC$. Точка E лежит на луче DA , причём $DE = AC$. Сравните длины отрезков EC и AC .

И. Рубанов

Решение. Если треугольник ABC равносторонний, отрезки AC и EC равны. Рассмотрим случай, когда треугольник ABC не равносторонний. Так как $BC > CD = AC$, AC – наименьшая сторона равнобедренного треугольника ABC , и лежащий против нее угол ABC – наименьший угол треугольника ABC . Значит, $\angle ABC < 60^\circ$, $\angle ACB > 60^\circ$. Тогда из треуголь-

ника ACD имеем $\angle ADC = (180^\circ - \angle ACB)/2 < 60^\circ$, а из треугольника CDE : $\angle DEC = (180^\circ - \angle CDE)/2 = (180^\circ - \angle CDA)/2 > 60^\circ$. То есть в треугольнике CDE : $\angle DEC > 60^\circ > \angle EDC = \angle ADC$, $AC = CD > CE$.

2. BE – высоте в треугольнике ABC , m – серединный перпендикуляр к отрезку AB . При этом $BE = EC$, прямая m пересекает BC . Докажите, что угол $C < 36$ градусов.

И. Рубанов

Решение. Пусть $\angle ABC = 2\beta$, а прямая m пересекает сторону BC в точке D . По свойству серединного перпендикуляра $DA = DB$, откуда $\angle DAB = \angle ABD = 2\beta$. Значит, по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ADC = \angle DAB + \angle ABD = 4\beta$. Также, так как $BE = EC$, $\angle C = \angle DBE = \beta$. Из треугольника ADC имеем $180^\circ = \angle DAC + \angle ADC + \angle C = \angle DAC + 4\beta + \beta$, $\angle C = \beta = (180^\circ - \angle DAC)/5 < 36^\circ$.

3. $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC , $AD > CD$. Биссектриса угла D пересекает сторону AB в K . Докажите, что $AK > KB$.

С. Берлов, И. Рубанов

Решение. Пусть M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Отметим на основании AD такую точку E , что $DE = CD$. В равнобедренном треугольнике CDE биссектриса угла D является медианой. Следовательно, точка F её пересечения с отрезком CE лежит на средней линии MN трапеции $ABCD$. Поэтому точка K лежит на стороне BM трапеции $MBCN$, откуда $AK > AM = BM > BK$.

4. Дан треугольник ABC . На стороне AC лежит точка P , на отрезке CP – точка Q , причём $2AP = AB$, $2QC = BC$. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше половины периметра треугольника ABC .

А. Кузнецов

Решение. Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Требуется доказать, что $BP + BQ + PQ > 1 = (a + b + c)/2$. Так как

$PQ = AC - AP - CQ = b - (a + c)/2$, надо доказать, что $BP + BQ > (a + b + c)/2 - b + (a + c)/2 = a + c - b/2$.

Пусть M и N – середины сторон AB и BC соответственно, а R и S такие точки на лучах AC и CA соответственно, что $AR = AB$, $CS = CB$. Заметим, что $BP = RM$ как медианы из вершин основания равнобедренного треугольника BAR . Аналогично, $BQ = SN$. Осталось заметить, что сумма $SN + RM$ диагоналей трапеции $RNMS$ больше суммы её оснований $SR + MN = (AR + CS - AC) + AC/2 = (c + a - b) - b/2 = a + c - b/2$.

5. $ABCD$ – четырёхугольник, описанный около некоторой окружности. Докажите, что диаметр этой окружности не больше длины отрезка, соединяющего середины BC и AD .

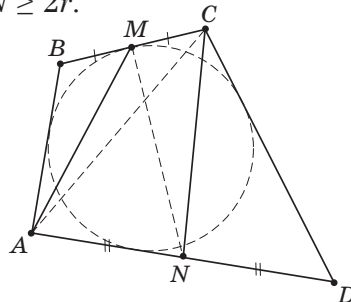
О. Южаков

Решение. Имеем $S_{ABCD} = pr$, где p – полупериметр четырёхугольника, r – радиус окружности. Из описанности следует $AB + CD = BC + DA$, поэтому $S_{ABCD} = (BC + AD) \cdot r(1)$.

С другой стороны, если M и N – середины сторон BC и AD соответственно (см. рисунок), имеем

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (S_{ABM} + S_{ACM}) + (S_{ACN} + S_{DCN}) = \\ &= 2S_{ACM} + 2S_{ACN} = 2 \cdot S_{AMCN} = \\ &= 2S_{AMN} + 2S_{CMN} \leq MN \cdot AN + MN \cdot CM = \\ &= MN \cdot (AN + CM) = 1/2 MN \cdot (AD + BC). \end{aligned}$$

Сравнивая с (1), после деления на $(AD + BC)/2$ получим требуемое неравенство $MN \geq 2r$.



Задачи подготовил *Поддаев М.В.*

ТАКОЙ УДОБНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Самый известный треугольник в истории – *египетский*, со сторонами 3, 4 и 5. Знаменит он прежде всего тем, что издревле применялся на практике – в строительстве и землемерии: для построения прямых углов и проверки перпендикулярности прямых линий.

Римский архитектор и инженер Витрувий (I век до н.э.) указал и другие полезные его применения, в частности в архитектуре и плотницком деле.

Среди собратьев эта фигура выделяется любопытными числовыми свойствами. Так, длины её сторон – члены арифметической прогрессии, а площадь относится к периметру как 1 : 2 и равна 6, в натуральном ряду 6 следует сразу за тройкой 3, 4, 5. Поскольку и длины сторон, и площадь египетского треугольника выражаются целыми числами, он является также *героновым треугольником*, причём примитивным (числа 3, 4 и 5 взаимно просты) и простейшим (не существует геронов треугольник со стороной 1 или 2).

Историки математики упоминают ещё один замечательный треугольник с такими же или очень похожими свойствами. Только он не прямоугольный, а остроугольный. Это *геронов треугольник* со сторонами 13, 14, 15 [1]. У древних геометров эта фигура пользовалась особой популярностью, когда дело доходило до вычисления площадей. С формулой Герона она ассоциируется так же стойко, как египетский треугольник – с теоремой Пифагора.

В своей «Метрике» Герон Александрийский (I век) с помощью вписанного круга

доказал формулу площади S треугольника со сторонами a , b , c –

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$p = (a + b + c) : 2$, названную его именем и известную ещё Архимеду, разъяснил её на примере указанного треугольника, учтя, что он разносторонний, а числа 13, 14 и 15 невелики и удобны для расчётов. Выбор удачный ещё и потому, что Герон писал для практиков: мастеров-ремесленников, инженеров, архитекторов, его работы – не научные труды, а доступные справочники и сборники задач по прикладной математике. Само разъяснение пошагово воспроизводило процесс вычислений.

Так вот, эта формула встречается у разных народов и во все времена, начиная с древних греков. В Средние века она досталась арабам от индийцев, а европейцам – от арабов. В эпоху Возрождения формула Герона приводилась почти во всех сочинениях по геометрии. И в качестве численного примера её повсюду сопровождал треугольник со сторонами 13, 14 и 15.

Для иллюстрации другой, более древней и простой формулы, где площадь выражалась через сторону треугольника и проведённую к ней высоту, подбирался разносторонний геронов треугольник с высотой, длина которой – целое число. Решение этой задачи сводится к поиску двух прямоугольных треугольников с подходящими целочисленными сторонами и которые имеют по равному катету. И не надо быть великим геометром, чтобы понять: поиски следует вести среди пифагоровых

треугольников¹, а из всех допустимых их пар наиболее предпочтительна та, что составляют фигуры со сторонами как можно меньшей длины.

Подобрать такую пару несложно. На эту роль идеально подходят треугольники со сторонами 5, 12, 13 и 9, 12, 15 (по сути, тот же египетский треугольник, с соотношением сторон 3 : 4 : 5). Из них можно составить геронов треугольник с высотой, равной 12, причём двумя способами: либо соединив фигуры вместе, либо наложив одну на другую. В первом случае получится остроугольный треугольник [2], а во втором тупоугольный [3]. Стало быть, задача имеет два решения, и они равноценны. Однако математики всегда выбирали треугольник со сторонами 13, 14, 15 как более удобный для своих разъяснений, что часто сводились к вычислениям². Тот редкий случай, когда с них не стоит брать пример и ограничивать поле деятельности. Да и сама задача прямо просится на урок геометрии.

Иногда этот геронов треугольник упоминался непосредственно в задачах. Так, в XI веке «отец алгебры» Ал-Хорезми определял его площадь «при помощи высоты и места падения камня»³. Тут, конечно, не обошлось без уравнений. Сперва на основе теоремы Пифагора была найдена высота, проведённая к стороне, равной 14, а затем уже площадь. Лука Пачоли в конце XV столетия на примере того же треугольника рассмотрел известную задачу на вы-

числение высоты и отрезков, на которые она делит сторону треугольника [2].

Подобно тому как египетский треугольник ловко «укрылся» в героновом — со сторонами 13, 14 и 15, последний не менее удачно «встроился» во вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями. Для этого оказалось достаточно увеличить его стороны в четыре раза [4]. Вся фигура составлена из четырёх попарно подобных пифагоровых треугольников, имеет целочисленные стороны, диагонали и площадь. Такие четырёхугольники изучал ещё Брахмагупта и привёл для них формулу площади, аналогичную формуле Герона.

Если же мы пройдемся по школьным учебникам, пособиям и задачникам по геометрии, скажем, начиная с конца XIX века и до наших дней, то увидим, что этот геронов треугольник упоминают едва ли не все авторы и составители — как сам по себе, так и в сочетании с различными фигурами и телами, а многие задачи колют из одной книги в другую. Пополним свою учительскую копилку подходящими примерами.

1. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найдите площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник его медианами.

2. Найдите высоты треугольник со сторонами 13, 14 и 15.

3. Найдите радиусы вписанной, описанной и внеписанных окружностей треугольника со сторонами 13, 14 и 15 см.

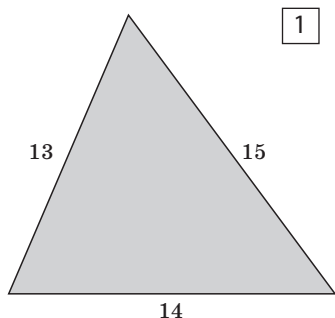
4. Дан треугольник со сторонами, равными 13, 14 и 15. Найдите отношение площадей кругов, ограниченных описанной и вписанной в него окружностями.

5. В треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см вписан полукруг, центр которого лежит на большей стороне треугольника. Найдите площадь полукруга.

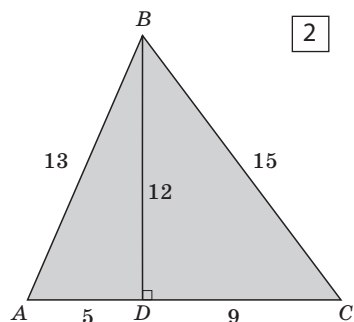
¹ Треугольник, длины сторон которого образуют пифагорову тройку.

² Примечательно, что это единственный треугольник, у которого длины сторон и одной из высот — последовательные натуральные числа от 12 до 15.

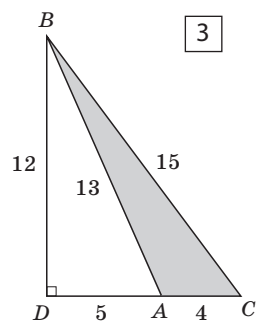
³ Точка, совпадающая с основанием высоты, проведённой к стороне треугольника.



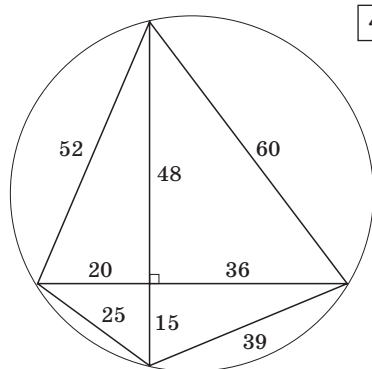
1



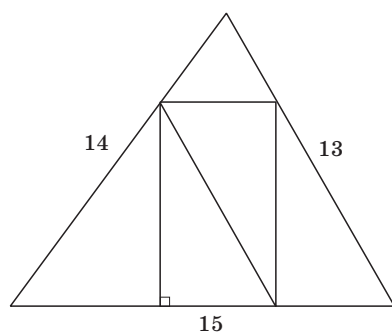
2



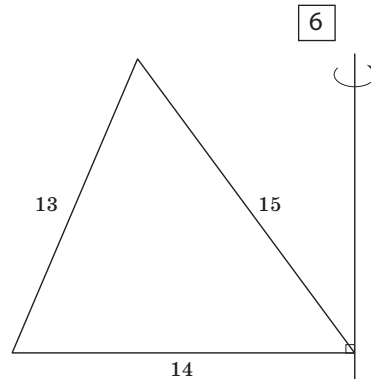
3



4



5



6

6. Вершины треугольника со сторонами 13, 14 и 15 являются центрами трёх окружностей, пересекающихся в одной точке. Образующиеся при этом общие хорды окружностей равны. Найдите их длины.

7. В треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см вписан прямоугольник. Одна из его диагоналей параллельна меньшей стороне, а одна из сторон параллельна большей стороне треугольника [5]. Найдите стороны прямоугольника.

8. Длины сторон основания прямой треугольной призмы равны 13, 14 и 15 см, высота призмы 5 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через среднюю по длине сторону нижнего основания и противоположащую ей вершину верхнего основания призмы.

9. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см.

Боковое ребро, противолежащее средней по длине стороне основания, перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

10. Все стороны треугольника со сторонами 13, 14 и 15 см касаются сферы радиусом 5 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости этого треугольника.

11. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см вращается вокруг его средней стороны. Найдите объём тела вращения.

12. Треугольник со сторонами 13, 14 и 15 вращается около оси, проходящей через вершину меньшего угла перпендикулярно стороне, равной 14 [6]. Найдите площадь поверхности и объём тела вращения.

Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2024. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



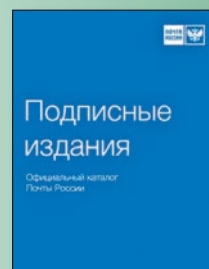
Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 5, 1–80