

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

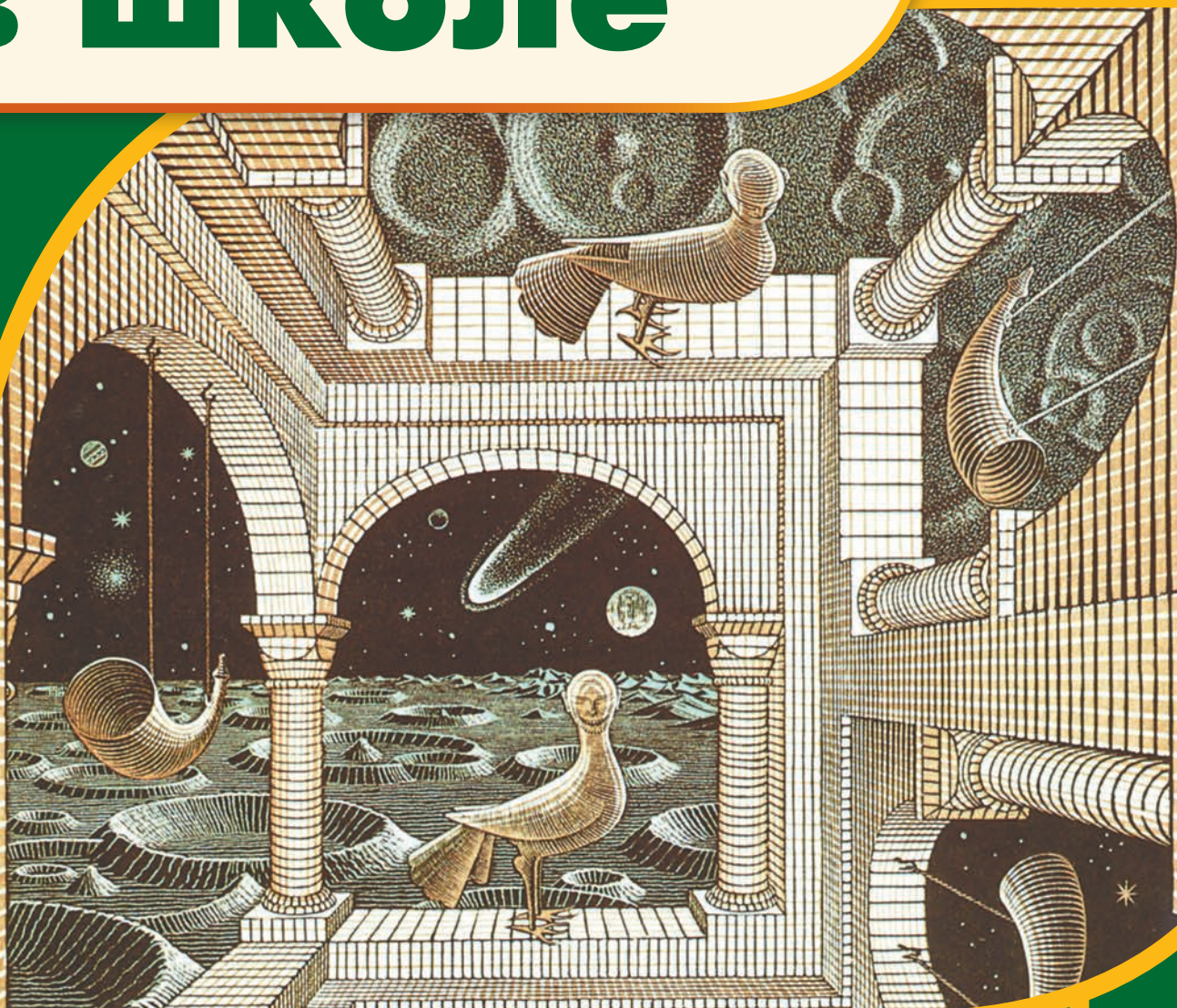


научно-теоретический и методический журнал

4 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

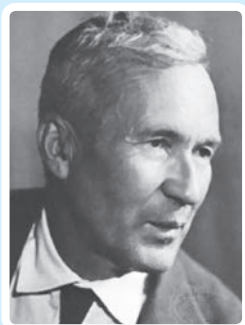


Стереометрия в профильном ЕГЭ по математике 2022 года

**Заключительный этап олимпиады «Физтех-2022»
по математике. Часть 1**

Олимпиада «Ломоносов – 2021-2022» по математике

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



КОЛМОГОРОВУ — 120

Нынешний год — год юбилея академика Андрея Николаевича Колмогорова, одного из величайших математиков XX века.

Масштаб личности этого гениального русского учёного и человека, его вклад в мировую науку образно описал другой крупнейший математик XX века Владимир Арнольд, который поставил в один ряд Колмогорова, Пуанкаре, Гаусса, Эйлера и Ньютона, отметив: «Всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки».

В связи с этой знаменательной датой в нашей стране и в мире проходят многочисленные памятные акции, встречи, конференции и даже... походы, пешие, лыжные, лодочные, которыми на протяжении всей своей долгой жизни был увлечён великий ученый. Конференции проходят в Математическом институте РАН им. Стеклова, в Сколтехе, в других научных центрах и, конечно, в Московском государственном университете, с которым связана вся его жизнь. Колмогоров был одним из активных участников становления механико-математического факультета МГУ, его профессором и деканом. До сих пор жива шутивая легенда, что лекции Колмогорова для школьников были понятны аспирантам, лекции для аспирантов — докторам наук, а выступления на научных семинарах вообще не понимал никто.

И тем не менее общепризнано, что масштаб личности академика А.Н. Колмогорова определяется ещё одной его ипостасью — педагогической. С его именем связана организация и развитие легендарной Школы-интерната МГУ, ныне — Специализированного учебно-научного центра (СУНЦ), который носит имя своего основателя. Колмогоровский интернат, куда съезжались одарённые ребята со всей страны, стал его любимым детищем. Он сам разрабатывал уникальные учебные программы, привлекал к чтению лекций других учёных. Стоит отметить, что в

специализированном физмат-интернате не ограничивались профильными предметами, читались лекции о живописи, музыке, поэзии, архитектуре, много внимания уделялось спорту.

Колмогоров считал необходимым обновить преподавание математики в средней школе, он был председателем Комиссии по математическому образованию Академии наук и Академии педагогических наук. Вокруг «колмогоровской реформы», в чём-то опередившей время, в чём-то оказавшейся неудачной, и по сей день идут дискуссии, но бесспорно одно — всемирно признанный учёный отдавался этому делу целиком, не жалея времени и сил. Когда ему было уже за 80 лет, он признавался своим ученикам, что хочет участвовать в реформе школы «самым энергичным образом и с юношеским задором».

Поразительная широта, масштаб деятельности великого учёного видны и в том, что в его наследии кроме основополагающих трудов по математике и естествознанию есть фундаментальные работы в гуманитарных областях — истории, филологии, поэтике, лингвистике, эстетике. Не случайно к юбилею учёного вышел объёмный том работ А.Н. Колмогорова «Об истории, филологии, кибернетике»

Кстати, о гуманитарных предметах. В школьном курсе литературы традиционно принято помимо изучения произведений знакомить школьника с биографией писателя, его вкладом в культуру. Юбилей Колмогорова — прекрасный повод рассказать на уроке математики об этой выдающейся личности, великом учёном и человеке. Например, при изучении вероятностно-статистической линии, ведь роль Колмогорова в развитии теории вероятностей и статистики — уникальна. Он был признанным главой этой науки во всём мире, к его самым известным достижениям в этой области относится именно аксиоматика теории вероятностей. Фактически Колмогоров стал для теории вероятностей тем, чем был Евклид для геометрии.

Евгений Бунимович

ЭКЗАМЕНЫ

- 3 Журавлева Н.А.
Стереометрия в профильном ЕГЭ по математике 2022 года

ОЛИМПИАДЫ

- 14 Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Голубев М.О.,
Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Королёв Н.Ю., Молчанов Е.Г., Останин П.А.,
Подлипский О.К., Саулин С.М., Скубачевский А.А., Терёшин Д.А.
Заключительный этап олимпиады «Физтех-2022» по математике. Часть 1
- 24 Асташова И.В., Будак Б.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Панфёров В.С.,
Разборов А.Г., Рогачев В.В., Сергеев И.Н., Шейпак И.А.
Олимпиада «Ломоносов – 2021-2022» по математике

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 35 Петлина Е.М., Зверева Л.Г.
Решение вероятностных задач по ключевым словам

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 39 Бежану Т.В., Тимошкина В.А.
**Преобразование геометрического чертежа с помощью дополнительных построений
в задачах на отношения отрезков**

ПОВЫШЕНИЕ КВАЛИФИКАЦИИ

- 45 Клековкин Г.А.
Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (огигающая)

МАТЕМАТИКА И ОБРАЗОВАНИЕ

- 58 Калинин С.И., Макарова Ю.И., Протасов Н.С.
Обобщение некоторых классических неравенств средствами p -выпуклых функций

ВНЕ УРОКА

- 63 Тонеева Е.С., Шабаетва Е.Н.
Интеллектуальная игра «Логарифмы – это скучно?»

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 69 Карпушина Н.М.
«Импортзамещение в образовании» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 73 Подаев М.В.
Геометрические неравенства

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 76 Акулич И.Ф.
Ещё четыре квадрата
- 79 Карпушина Н.М.
Красота и простота

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3767. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 4 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

СТЕРЕОМЕТРИЯ В ПРОФИЛЬНОМ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2022 ГОДА

STEREOMETRY IN THE PROFILE EXAM IN MATHEMATICS IN 2022

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_3

Н.А. Журавлева, канд. пед. наук,
КГПУ им. В.П. Астафьева (Красноярск),
zhuravlevanataly@mail.ru

N.A. Zhuravleva, PhD (Pedagogy)
SPU named after V.P. Astafiev (Krasnoyarsk),
zhuravlevanataly@mail.ru

Аннотация: в статье представлены авторские решения заданий с развёрнутым ответом по стереометрии ЕГЭ профильного уровня по математике 2022 г. Приведены рекомендации по подготовке обучающихся по стереометрии

Abstract: the article presents the author's solutions to tasks with an expanded answer on the stereometry of the USE of the profile level in mathematics in 2022. Recommendations for training students in stereometry are given

Ключевые слова: геометрия, стереометрия, КИМ ЕГЭ, решение

Keywords: geometry, stereometry, control-instrumentation materials of USE, solution

© Журавлева Н.А. 2023

С 2015 года структура заданий по стереометрии с развёрнутым ответом на ЕГЭ не менялась. В пункте а) необходимо доказать какой-либо факт, а в пункте б) найти некоторую величину. При этом раньше за правильное и обоснованное выполнение обоих пунктов задания можно было получить 2 балла, а для получения 1 балла было достаточно справиться хотя бы с одним из пунктов задания.

В 2022 году критерии оценки этого задания изменились (см. [3]). Верное доказательство утверждения а) и обоснованное получение верного ответа в пункте б) дают возможность получить уже 3 балла. Обоснованно полученный верный ответ в пункте б) – 2 балла. Также 2 балла ставятся, если имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. В 1 балл оценивается верное доказательство

утверждения пункта а), или обоснованное получение верного ответа в пункте б) с использованием утверждения из пункта а), при этом пункт а) не выполнен, или обоснованное решение пункта б) с неверным ответом из-за арифметической ошибки.

Сложность заданий из года в год колеблется. Например, в статьях [4–6] приведены решения заданий по стереометрии в Красноярском крае с 2015 по 2021 год и статистика их выполнения: самыми сложными были задания в 2016 и 2019 году.

Приведём решение заданий по стереометрии с развёрнутым ответом КИМ ЕГЭ 2022 года.

Задание 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O – середина отрезка CB_1 . (Прототип задания см. на <https://ege.sdamgia.ru/test?likes=630127>.)

а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .

б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{a}$.

Решение. а) Проведём отрезок AN (рис. 1). $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, следовательно, грань $BB_1 C_1 C$ – прямоугольник. Точка O – середина CB_1 , значит, она является точкой пересечения диагоналей $BB_1 C_1 C$ и серединой BC_1 . Сечение $BAD_1 C_1$ – прямоугольник, углы OBN и $AD_1 N$ равны как накрест лежащие при $AD_1 \parallel BC_1$ и секущей BD_1 , $\frac{BN}{ND} = \frac{BO}{D_1 A} = \frac{1}{2}$. Тогда треугольники BNO и $D_1 NA$ подобны, значит, их углы BNO и $D_1 NA$ равны. Следовательно, эти углы являются вертикальными, и точки A, N, O лежат на одной прямой.

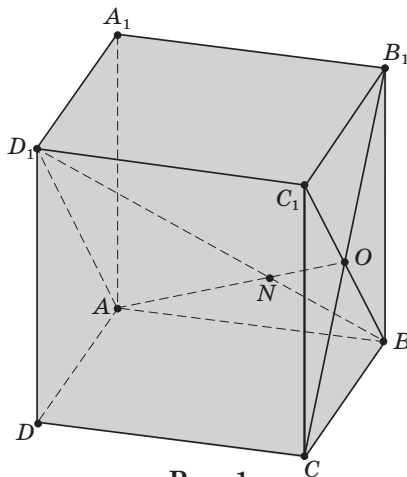


Рис. 1

б) Длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 , значит, NO – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и CB_1 , то есть $NO \perp CB_1$ и $NO \perp BD_1$. Так как точка A лежит на прямой NO , то $AO \perp CB_1$, следовательно, и BO – проекция AO на плоскость CBB_1 – по теореме о трёх перпендикулярах то-

же перпендикулярна CB_1 . Получаем, что $BB_1 C_1 C$ – квадрат. $NO \perp BD_1$, значит, BN является высотой в прямоугольном треугольнике ABO и

$$BN = \sqrt{NO \cdot AN} = \frac{AB \cdot BO}{AO}.$$

Из подобия треугольников BNO и $D_1 NA$ следует, что

$$\frac{NO}{AN} = \frac{1}{2}, \quad AN = 2NO = 2\sqrt{a},$$

$$AO = AN + NO = 3\sqrt{a},$$

$BN = \sqrt{NO \cdot AN} = \sqrt{2a}$. По теореме Пифагора $BO = \sqrt{NO^2 + BN^2} = \sqrt{3a}$, тогда

$$BN = \frac{AB \cdot BO}{AO},$$

$$AB = \frac{BN \cdot AO}{BO} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{6a}.$$

Найдём сторону квадрата $BB_1 C_1 C$:

$$BC = BO\sqrt{2} = \sqrt{6a},$$

значит, $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб,

$$V = (\sqrt{6a})^3 = 6a\sqrt{6a}.$$

$$\text{О т в е т: } V = 6a\sqrt{6a}.$$

Анализируя решение, видим, что в доказательстве мы опирались на свойства вертикальных углов и подобных треугольников в диагональном сечении прямоугольного параллелепипеда. При решении пункта б) задачи использовали метод ортогонального проектирования для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, теорему о трёх перпендикулярах и свойства высоты, опущенной на гипотенузу в прямоугольном треугольнике.

Задание 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N являются серединами рёбер AB и AD соответственно. (Прототип задания см. на <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=630217>.)

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1N = \frac{3a}{2}$.

Решение. а) BN есть проекция B_1N на плоскость ABC (рис. 2). Прямоугольные треугольники BAN и CBM равны. Пусть $\angle ABN = \angle BCM = \beta$, тогда $\angle ANB = \angle BMC = 90^\circ - \beta$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке O . В треугольнике MOB угол $\angle MBO = \beta$, а угол $\angle BMO = 90^\circ - \beta$, тогда угол $\angle BOM = 90^\circ$. То есть $BN \perp CM$, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B_1N \perp CM$.

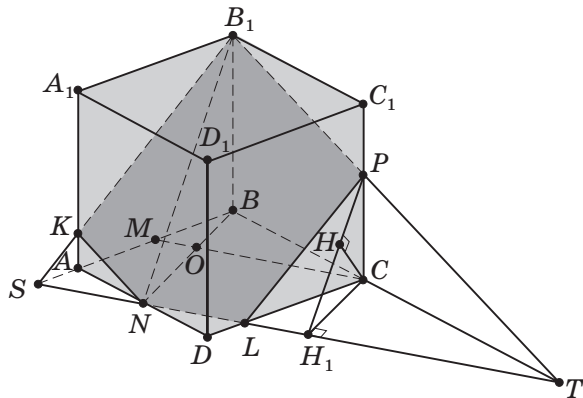


Рис. 2

б) Построим сечение плоскостью α : через точку N проведём прямую, параллельную прямой CM , пересекающую ребро CD в точке L . Прямая NL пересекает прямую BC в точке T и прямую AB в точке S . Прямая B_1T пересекает ребро CC_1 в точке P , прямая B_1S пересекает ребро AA_1 в точке K . Проведём отрезки KN , LP . Пятиугольник B_1KNLP – искомое сечение куба.

Проведём CH_1 перпендикулярно прямой ST . CH_1 – проекция PH_1 на плоскость ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $PH_1 \perp ST$, тогда плоскость CPH_1 перпендикулярна прямой ST . В прямоугольном треугольнике CPH_1 проведём высоту CH .

Имеем: $CH \perp PH_1$, $CH \perp ST$, следовательно, прямая CH перпендикулярна плоскости α , тогда расстояние от точки C до плоскости α определяется отрезком CH .

$$\begin{aligned} B_1N^2 &= BB_1^2 + AB^2 + AN^2 = \\ &= AB^2 + AB^2 + \frac{AB^2}{4} = \frac{9AB^2}{4}, \end{aligned}$$

$$AB = \frac{2B_1N}{3} = a.$$

$MC \parallel ST$, следовательно, прямоугольные треугольники MCB , SNA , LTC подобны ($\angle NAS = \angle CBM = \angle TCL = 90^\circ$, $\angle CTL = \angle BCM = \beta$ как соответственные при $MC \parallel ST$ и секущей TB , $\angle ANS = \angle CTL = \beta$ как соответственные при $CT \parallel AN$ и секущей ST). Тогда

$$\frac{MB}{CB} = \frac{SA}{NA} = \frac{LC}{TC} = \frac{1}{2}, \quad AN = \frac{1}{2}a, \quad SA = \frac{1}{4}a,$$

$$CL = \frac{3}{4}a, \quad TC = \frac{3}{2}a.$$

$$CH_1 = \frac{CL \cdot CT}{LT} = \frac{\frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{2}a}{\sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{9}{4}a^2}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}.$$

Треугольники B_1TB и PTC подобны ($\angle B_1BT = \angle PCT = 90^\circ$, $\angle B_1TB$ – общий), значит,

$$\frac{PC}{TC} = \frac{B_1B}{TB} = \frac{a}{a+1,5a} = \frac{2}{5}, \quad PC = \frac{2}{5}TC = \frac{3}{5}a,$$

$$\begin{aligned} CH &= \frac{CH_1 \cdot CP}{PH_1} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{5}}a \cdot \frac{3}{5}a}{\sqrt{\frac{9}{20}a^2 + \frac{9}{25}a^2}} = \\ &= \frac{9a^2}{\frac{10\sqrt{5}}{9a}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

В данном задании доказательство

перпендикулярности скрещивающихся прямых проведено с помощью теоремы о трёх перпендикулярах и предварительно найденного соотношения между углами прямоугольных треугольников в одной грани куба. Сечение куба построено методом следов.

Задание 3. Точка M – середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N лежит на ребре SB , $SN : NB = 1 : 2$. (Прототип задания см. на <https://ege.sdangia.ru/problem?id=630185>.)

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN , если все рёбра пирамиды равны $3a$.

Решение. Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN : проведём отрезки CN , NM (рис. 3). Прямая AB пересекает прямую MN в точке T , отрезок TC пересекает ребро AD в точке K . Построим отрезки MK и KC . Четырёхугольник $CNMK$ – искомое сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN .

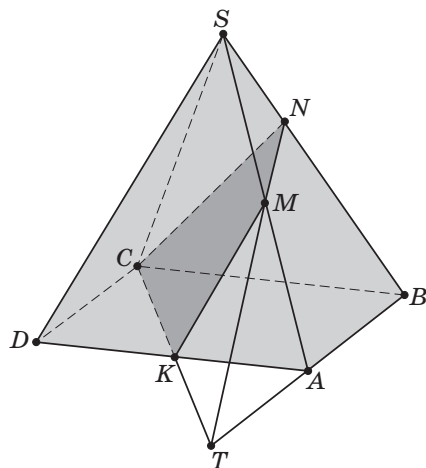


Рис. 3

а) Точки T , M и N лежат на одной прямой, тогда по теореме Менелая выполняется равенство

$$\frac{AM}{MS} \cdot \frac{SN}{NB} \cdot \frac{BT}{TA} = 1, \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{BT}{TA} = 1, \quad BT = 2TA,$$

следовательно, точка A – середина отрезка TB . В треугольнике CBT отрезок AK параллелен стороне BC , следовательно, AK – средняя линия, значит, K – середина стороны AD . Таким образом, отрезок KM – средняя линия в треугольнике SAD , следовательно, $KM \parallel SD$. Прямая KM лежит в плоскости CMN , значит, плоскость CMN параллельна прямой SD .

б) $AB = 3a$, по теореме Пифагора в треугольнике CDK :

$$\begin{aligned} CK &= \sqrt{CD^2 + DK^2} = \\ &= \sqrt{9a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{3a\sqrt{5}}{2} = KT, \\ CT &= 2CK = 3a\sqrt{5}. \end{aligned}$$

KM – средняя линия в треугольнике SAD ,

$$\text{следовательно, } KM = \frac{SD}{2} = \frac{3a}{2}.$$

По теореме косинусов в треугольнике BNT :

$$\begin{aligned} TN^2 &= BN^2 + BT^2 - 2BN \cdot BT \cos 60^\circ = \\ &= 4a^2 + 36a^2 - 12a^2 = 28a^2, \\ TN &= 2\sqrt{7}a. \end{aligned}$$

По теореме косинусов в треугольнике ATM :

$$\begin{aligned} TM^2 &= AM^2 + AT^2 - 2AM \cdot AT \cos 120^\circ = \\ &= \frac{9a^2}{4} + 9a^2 + \frac{9a^2}{2} = \frac{63a^2}{4}, \quad TM = \frac{3\sqrt{7}a}{2}. \end{aligned}$$

В треугольнике KTM :

$$\begin{aligned} \cos \angle KTM &= \frac{KM^2 + TK^2 - TM^2}{2TK \cdot TM} = \\ &= \frac{\frac{9a^2}{4} - \frac{45a^2}{4} - \frac{63a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}a}{2}} = \frac{-99}{18\sqrt{35}} = \frac{-11}{2\sqrt{35}}. \end{aligned}$$

$$\sin \angle KTM = \sqrt{1 - \cos^2 \angle KTM} = \sqrt{1 - \frac{121}{140}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}}.$$

$$S_{TCN} = \frac{1}{2} TC \cdot TN \cdot \sin \angle KTM =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3a\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{7}a \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}} = \frac{3a^2\sqrt{19}}{2}.$$

$$S_{TKM} = \frac{1}{2} TK \cdot TM \cdot \sin \angle KTM =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}a}{2} \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}} = \frac{9a^2\sqrt{19}}{16}.$$

$$S_{CNMK} = S_{TCN} - S_{TKM} =$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{19}}{2} - \frac{9a^2\sqrt{19}}{16} = \frac{15a^2\sqrt{19}}{16}.$$

О т в е т: $\frac{15a^2\sqrt{19}}{16}.$

В данном задании сечение вновь строится методом следов. Доказательство пункта а) проводится с помощью теоремы Менелая, свойств средней линии треугольника и признака параллельности прямой и плоскости. Площадь четырёхугольника находится как разность площадей треугольников с общим углом. В процессе вычисления сторон и углов треугольников применялись теоремы косинусов, Пифагора и основное тригонометрическое тождество.

Задание 4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO . (Прототип задания см. на <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=630120>.)

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = a + 2$, $BC = a$, $SO = b$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

Решение. Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α : соединим точки M и N . Поскольку плоскость α должна пройти параллельно прямой SO , то α должна пересечь плоскость SAC по прямой, параллельной SO . Пусть отрезок MN пересекает диагональ AC в точке P . В плоскости SAC проведём отрезок PK параллельно прямой SO до пересечения с боковым ребром SA . Отрезок MN пересекает диагональ BD в точке Q . В плоскости SBD проведём отрезок QL параллельно прямой SO до пересечения с боковым ребром SD . Построим отрезки NL , LK и KM . Четырёхугольник $NLKM$ – искомое сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α (рис. 4).

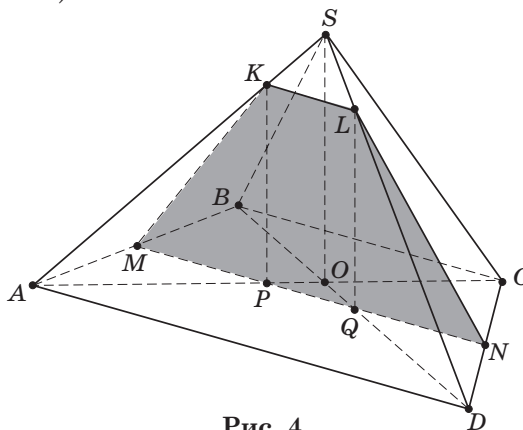


Рис. 4

а) MN – средняя линия трапеции $ABCD$, тогда $MN \parallel AD$, следовательно, $MN \parallel SAD$. Тогда плоскость MNL пересекает плоскость SAD по прямой KL , причём $KL \parallel AD$, значит, $KL \parallel MN$. По построению $PK \parallel SO$, $QL \parallel SO$, тогда $PK \parallel QL$. Следовательно, $PKLQ$ – параллелограмм, причём $KL = PQ \neq MN$.

Заметим, что MK и NL не параллельны. Действительно, если $MK \parallel NL$, то $MKLN$ – параллелограмм, а это противоречит тому, что $KL \neq MN$. Значит, четырёхугольник $MKLN$ – трапеция.

б) Имеем:

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = a + 1,$$

$$KL = PQ = \frac{AD - BC}{2} = 1.$$

Прямая SO перпендикулярна прямой AD , $MN \parallel AD$, $LQ \parallel SO$, следовательно, LQ перпендикулярна MN . Значит, LQ является высотой трапеции $NLKM$. $MN \parallel AD$, следовательно, треугольники AOD и POQ подобны ($\angle OPQ = \angle OAD$ как соответственные при $MN \parallel AD$ и секущей AO , угол AOD – общий), и верно равенство $\frac{QO}{DO} = \frac{PQ}{AD} = \frac{1}{a+2}$.

Поскольку $QL \parallel SO$, то по теореме Фалеса

$$\frac{LQ}{SO} = \frac{DQ}{DO} = \frac{DO - QO}{DO} = 1 - \frac{QO}{DO} = \frac{a+1}{a+2},$$

$$LQ = \frac{a+1}{a+2} \cdot SO = \frac{a+1}{a+2} \cdot b.$$

Получаем:

$$S_{MKLN} = \frac{MN + KL}{2} \cdot LQ = \frac{b(a+1)}{2}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{b(a+1)}{2}.$$

В этом задании сечение строится через прямую параллельно другой заданной прямой. При доказательстве утверждения а) нами использовались свойство прямой, параллельной плоскости, свойство средней линии трапеции, признак параллелограмма, а также определения параллелограмма и трапеции. Для решения пункта б) применялись свойства параллельных прямых, отношение сходственных сторон подобных треугольников, теорема Фалеса и формула площади трапеции.

Задание 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $BC = a$, $AA_1 = b$ ($a < b$).

(Прототип задания см. на https://www.youtube.com/watch?v=gVoHxLPvf_Y&t=1339s.)

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро $A_1 B_1$.

Решение. а) Рассмотрим сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью ABC_1 – прямоугольный треугольник $ABC_1 D_1$ со сторонами

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, $ABC_1 D_1$ – квадрат (рис. 5). Тогда $AC_1 \perp BD_1$ как диагонали квадрата.

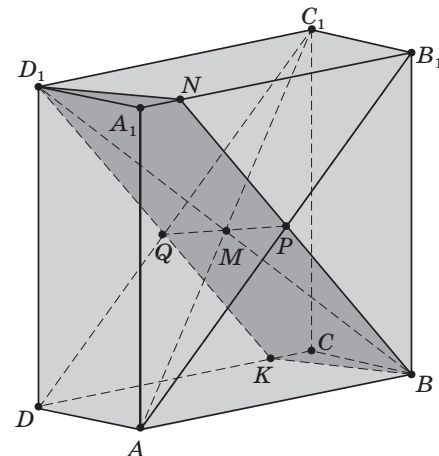


Рис. 5

Рассмотрим сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью $AB_1 C_1$: $AB_1 C_1 D$ – прямоугольный треугольник со сторонами $AD = a$ и

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{a^2 + 2b^2}.$$

Проведём прямую через точку M перпендикулярно прямой AC_1 , пересекающую прямую AB_1 в точке P и $C_1 D$ в точке Q . Таким образом, $AC_1 \perp BD_1$, $AC_1 \perp PQ$, значит, плоскость, проходящая через точки M , B , D_1 , P и Q перпендикулярна прямой AC_1 . Прямая BP пересекает ребро $A_1 B_1$ в точке N . Прямая $D_1 Q$ пересекает ребро CD в точке K . $BND_1 K$ – ис-

комое сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , следовательно, плоскость α содержит точку D_1 .

б) Треугольники AMP и AB_1C_1 подобны ($\angle AMP = \angle AB_1C_1 = 90^\circ$, $\angle C_1AB_1$ – общий), тогда $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AP}{AM}$.

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AC_1}{AB_1},$$

$$AP = \frac{AM \cdot AC_1}{AB_1} = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2}},$$

$$PB_1 = AB_1 - AP = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}.$$

Треугольники APB и B_1PN подобны ($\angle APB = \angle B_1PN$ – это вертикальные углы, а $\angle BAP = \angle NB_1P$ – накрест лежащие углы при $AB \parallel NB_1$ и секущей AB_1), тогда

$$\frac{AB}{AP} = \frac{B_1N}{B_1P},$$

$$B_1N = \frac{AB \cdot B_1P}{AP} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$A_1 N = A_1 B_1 - B_1 N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

следовательно, $\frac{A_1 N}{NB_1} = \frac{\alpha^2}{b^2}$.

$$\text{O T B e T: } \frac{A_1 N}{NB_1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

В данной задаче для построения требуемой плоскости α рассмотрены два дополнительных сечения, в которых через точку M проведены прямые, перпендикулярные диагонали AC_1 . Одно из дополнительных сечений оказалось квадратом, откуда сделан вывод о перпендикулярности его диагоналей. С помощью признака перпендикулярности прямой и плоскости доказано, что построенная плоскость (проходящая через две пересекающиеся прямые) является искомой. В решении пункта б) использовалось отношение сход-

ственных сторон подобных треугольников
в различных плоскостях.

Задание 6. Точка M – середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA . (Прототип задания см. на <https://ege.sdamgia.ru/problem?id=630098>.)

а) Плоскость α пересекает ребро DS в точке L . Докажите, что $BN : NC = DL : LS$.

б) Пусть $BN : NC = a : b$. Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость α разбивает пирамиду ($a < b$).

Решение. Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α : соединим M и N . Плоскость α должна быть параллельна боковому ребру SA , тогда она должна пересечь плоскость ASC по прямой, параллельной SA . В треугольнике ASC прямая MO является средней линией, параллельной SA , следовательно, α содержит прямую MO . Прямая NO пересекает ребро AD в точке K . Прямая CD пересекает прямую NO в точке T , отрезок TM пересекает ребро SD в точке L . Построим отрезки NK , KL и LM . Четырёхугольник $NKLM$ – искомое сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α (рис. 6).

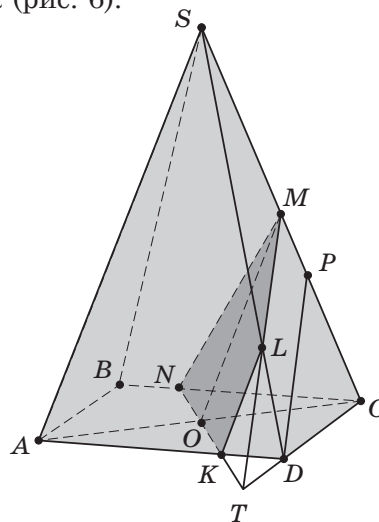


Рис. 6

а) $ABCD$ – квадрат, треугольники CON и AOK равны ($AO = OC$, углы NCO и KAO равны как накрест лежащие при $CN \parallel AK$ и секущей AC , углы CON и AOK равны как вертикальные), следовательно, $CN = AK$. $BN = BC - CN = AD - AK = KD$. Треугольники TNC и TKD подобны (углы NCT и KDT равны как соответственные при $CN \parallel DK$ и секущей CD , угол T – общий), тогда $\frac{TD}{TC} = \frac{KD}{NC} = \frac{NB}{NC}$.

По теореме Менелая точки L , M и T лежат на одной прямой, следовательно,

верно равенство $\frac{CM}{MS} \cdot \frac{SL}{LD} \cdot \frac{DT}{TC} = 1$. По-

скольку M – середина ребра SC , то

$$\frac{DL}{LS} = \frac{CM}{MS} \cdot \frac{DT}{TC} = 1 \cdot \frac{DT}{TC} = \frac{BN}{NC}.$$

б) По условию $\frac{BN}{NC} = \frac{a}{b}$, тогда

$$\frac{BC}{NC} = \frac{BN + NC}{NC} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a + b}{b},$$

$$NC = \frac{b}{a + b} BC,$$

$$KD = BN = BC - NC = BC - \frac{b}{a + b} BC = \frac{a}{a + b} BC = \frac{a}{a + b} CD,$$

$$NC = \frac{b}{a + b} CD,$$

$$\frac{TC}{TD} = \frac{NC}{NB} = \frac{b}{a}, \quad TC = \frac{b}{a} TD,$$

$$CD = TC - TD = \frac{b}{a} TD - TD = \frac{b - a}{a} TD,$$

$$TD = \frac{a}{b - a} CD, \quad TC = \frac{b}{b - a} CD.$$

Тогда

$$\frac{DL}{LS} = \frac{BN}{NC} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{DS}{DL} = \frac{DL + LS}{DL} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a + b}{a},$$

$$DL = \frac{a}{a + b} DS,$$

следовательно, высота, опущенная из точки L на плоскость ABC равна $\frac{a}{a + b} SO$.

Имеем:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot CD^2 \cdot SO,$$

$$V_{MNTC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{NC \cdot TC}{2} \cdot \frac{SO}{2} = \frac{1}{12} \frac{b^2}{b^2 - a^2} CD^2 \cdot SO,$$

$$V_{LKTD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{KD \cdot TD}{2} \cdot \frac{a}{a + b} SO =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3}{(b^2 - a^2)(a + b)} \cdot CD^2 \cdot SO,$$

$$V_{MLKNCD} = V_{MNTC} - V_{LKTD} =$$

$$= \frac{b^2(a + b) - 2a^3}{12(b^2 - a^2)(a + b)} \cdot CD^2 \cdot SO,$$

$$V_{SMLKABN} = V_{SABCD} - V_{MLKNCD} = \\ = \frac{4(b^2 - a^2)(a + b) - b^2(a + b) + 2a^3}{12(b^2 - a^2)(a + b)} \cdot CD^2 \cdot SO.$$

Найдём отношение объёмов:

$$\frac{V_{MLKNCD}}{V_{SMLKABN}} = \frac{b^2(a + b) - 2a^3}{4(b^2 - a^2)(a + b) - b^2(a + b) + 2a^3} \\ = \frac{ab^2 + b^3 - 2a^3}{3ab^2 + 3b^3 - 2a^3 - 4a^2b}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{V_{MLKNCD}}{V_{SMLKABN}} =$$

$$= \frac{ab^2 + b^3 - 2a^3}{3ab^2 + 3b^3 - 2a^3 - 4a^2b}.$$

Вновь проанализируем решение задачи. Сечение построено через данную прямую параллельно другой прямой методом следов. Для доказательства утверждения а) применялись признак равенства треугольников, отношение сходственных сторон подобных треугольников и теорема Менелая. В решении пункта б) использовались отношение пропорциональных от-

резков, формулы площадей прямоугольных треугольников и квадрата, а объём многогранника находился как разность объёмов треугольных пирамид с общей вершиной.

Задание 7. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными knb и $b + 1$ соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM : MD = m : n$, $BN : NC = 1 : b$. Плоскость AMN пересекает ребро SD в точке K . (Прототип задания см. на <https://www.youtube.com/watch?v=v2YcmDSVW6k>.)

а) Докажите, что $SK : KC = km : 1$.

б) Плоскость AMN делит $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

Решение. Построим сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью AMN . Проведём отрезки AM , AN . Прямая CD пересекает прямую AN в точке T , отрезок TM пересекает ребро SC в точке K . Построим отрезки NK и KM . Четырёхугольник $ANKM$ – искомое сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью AMN (рис. 7).

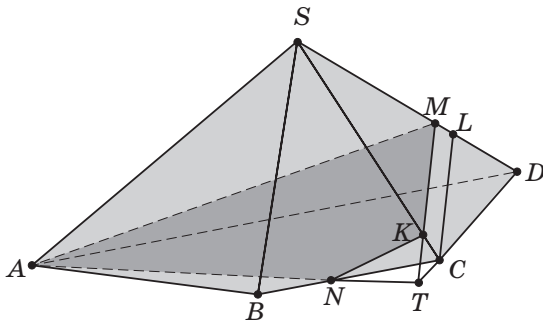


Рис. 7

а) По условию $BC = b + 1$, $BN : NC = 1 : b$, следовательно, $BN = 1$, $NC = b$.

Отрезки AD и BC – основания трапеции $ABCD$, значит, прямые AD и BC параллельны. Углы ADC и NCT равны как соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей

TD . Угол T – общий в треугольниках ATD и NTC , значит, эти треугольники подобны по двум углам, и выполняется отношение $\frac{TD}{TC} = \frac{AD}{NC} = \frac{knb}{b} = kn$.

В плоскости грани SCD проведём прямую CL параллельно прямой KM . По теореме Фалеса $\frac{MD}{ML} = \frac{TD}{TC} = kn$, $ML = \frac{MD}{kn}$ и

$$\frac{SK}{KC} = \frac{SM}{ML} = \frac{SM}{\frac{MD}{kn}} = kn \frac{m}{n} = \frac{km}{1}.$$

б) Пусть высота трапеции $ABCD$ равна d , высота треугольника NTC , проведённая из вершины T , равна d_1 , высота треугольника ATD , проведённая из вершины T , равна d_2 . Из подобия треугольников

$$ATD \text{ и } NTC \text{ следует, что } \frac{d_2}{d_1} = \frac{TD}{TC} = kn, \\ d_2 = kn d_1, d = d_2 - d_1 = (kn - 1)d_1, \text{ значит,} \\ d_1 = \frac{d}{kn - 1}, d_2 = \frac{kn d}{kn - 1}.$$

Пусть высота пирамиды $SABCD$, проведённая из вершины S , равна h , высота пирамиды $MATD$, проведённая из вершины M , равна h_2 , высота пирамиды $KNTC$, проведённая из вершины K , равна h_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_2} &= \frac{SD}{MD} = \frac{SM + MD}{MD} = \frac{SM}{MD} + 1 = \\ &= \frac{m}{n} + 1 = \frac{m + n}{n} \Rightarrow h_2 = \frac{nh}{m + n}. \\ \frac{h}{h_1} &= \frac{SC}{KC} = \frac{SK + KC}{KC} = \frac{SK}{KC} + 1 = \\ &= \frac{km}{1} + 1 = km + 1 \Rightarrow h_1 = \frac{h}{km + 1}. \end{aligned}$$

Будем иметь:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{knb + b + 1}{2} \cdot dh,$$

$$V_{MATD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{knb}{2} \cdot d_2 h_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{knb}{2} \cdot \frac{kn d}{kn - 1} \cdot \frac{nh}{m + n},$$

$$V_{KNTC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot d_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{d}{kn-1} \cdot \frac{h}{km+1}.$$

Тогда

$$V_{MKANCD} = V_{MATD} - V_{KNTC} = \frac{(k^2 n^3 (km+1) - (m+n))bdh}{6(kn-1)(m+n)(km+1)},$$

$$\begin{aligned} V_{SABNKM} &= V_{SABCD} - V_{MKANCD} = \\ &= \frac{(knb+b+1)(kn-1)(m+n)(km+1) - (k^2 n^3 (km+1) - (m+n))b}{6(kn-1)(m+n)(km+1)} dh. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{V_{MKANCD}}{V_{SABNKM}} = \frac{(k^2 n^3 (km+1) - (m+n))b}{(knb+b+1)(kn-1)(m+n)(km+1) - (k^2 n^3 (km+1) - (m+n))b}.$$

$$\text{О т в е т: } \frac{V_{MKANCD}}{V_{SABNKM}} = \frac{(k^2 n^3 (km+1) - (m+n))b}{(knb+b+1)(kn-1)(m+n)(km+1) - (k^2 n^3 (km+1) - (m+n))b}.$$

В данной задаче сечение построено методом следов. Для доказательства применялось отношение сходственных сторон подобных треугольников, а также теорема Фалеса. В решении пункта б) использовались отношение пропорциональных отрезков, формулы площадей треугольников и трапеции, а объём многогранника находился как разность объёмов треугольных пирамид с общей вершиной.

Таким образом, из семи представленных заданий три посвящены теме «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве», три – теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» и два – поиску расстояния между скрещивающимися прямыми. Нами использовались различные методы построения сечений многогранников, причём неоднократно применялся метод следов.

Отметим разнообразие тел, фигурирующих в задачах: куб, прямоугольный параллелепипед, правильная четырёхугольная пирамида или пирамида, в основании которой находится неравнобедренная трапеция. В ходе рассуждений мы устанавливали принадлежность точки прямой

или плоскости, параллельность прямой и плоскости, перпендикулярность скрещивающихся прямых, находили отношение отрезков на рёбрах многогранника, расстояние от точки до плоскости, площадь сечения, отношение объёмов многогранников, на которые плоскость разбивает тело.

При выполнении заданий также применялись сведения из планиметрии: свойства вертикальных углов и углов, полученных при пересечении параллельных прямых секущей, свойства средней линии треугольника и трапеции, признаки прямоугольника и квадрата, признаки равенства треугольников, признаки подобия треугольников, теоремы Фалеса и Пифагора, свойства высоты, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника, теорема косинусов и формулы для вычисления площади треугольника. В трёх заданиях описана ситуация, где применение теоремы Менелая значительно облегчало решение.

Таким образом, при подготовке обучающихся к выполнению задания по стереометрии профильного ЕГЭ по математике в 11 классе следует:

– обобщить и систематизировать материал, изученный в курсе планиметрии, обратив внимание на достаточно редкие теоремы Менелая [1, 2], Чебы [1], Птолемея [2] и др.

– повторить правила построения стереометрических чертежей, оформление выносной плоскости;

– систематизировать названия многогранников и их свойства;

– актуализировать основные сведения о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве, например, с помощью опорных конспектов [5].

– рассмотреть решение задач на доказательство перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей, перпендикулярности скрещивающихся прямых; на доказательство параллельности прямых в пространстве, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

– рассмотреть решение задач на поиск углов: между прямой и плоскостью, между плоскостями, между скрещивающимися прямыми;

– рассмотреть решение задач на поиск расстояний в пространстве: между двумя точками, между точкой и прямой, между точкой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми;

– обобщить принципы построения сечений по различным условиям: через три точки, через прямую параллельно другой заданной прямой, через точку параллельно плоскости, через точку перпендикулярно прямой, через две точки перпендикулярно плоскости и через точку параллельно двум скрещивающимся прямым, в том числе и методом следов;

– рассмотреть решение задач на определение фигуры, получившейся в сечении, и нахождение её площади;

– рассмотреть решение задач на нахож-

дение объёмов многогранников и тел вращения, а также на вычисление площадей их поверхностей.

Изложенные решения заданий по стереометрии ЕГЭ 2022 года по математике профильного уровня, а также представленные выводы и рекомендации по организации обучения могут быть использованы в ходе подготовки обучающихся 11 класса к ЕГЭ. Для получения серии однотипных заданий учителю достаточно будет заменить параметрические данные в задачах конкретными числовыми значениями.

Список источников

1. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутусов, С.Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2013. 255 с.

2. Геометрия: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. М.: Вентана-Граф, 2013. 208 с.

3. Демоверсии, спецификации, кодификаторы: Единый государственный экзамен по математике в 2022 г. URL: [https://fipi.ru/egje/demoversii-specifikacii-kodifikatory#/?tab/151883967-2](https://fipi.ru/egje/demoversii-specifikacii-kodifikatory#/) (дата обращения 17.08.2022).

4. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Стереометрия в школе: пора бить тревогу? (по результатам профильного ЕГЭ 2015–2019 гг.) // Математика в школе. 2020. № 1. С. 3–12.

5. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Стереометрия в школе: что изменилось за два года? (по результатам профильного ЕГЭ по математике 2020–2021 гг.) // Математика в школе. 2022. № 2. С. 8–16.

6. Журавлева Н.А., Шашкина М.Б. Экзамены. ЕГЭ–2017. Геометрические задачи с развёрнутым ответом // Математика в школе. 2017. № 8. Электронное приложение № 2.

Статья поступила в редакцию 30.08.2022.

Принята к публикации 29.11.2022.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ОЛИМПИАДЫ «ФИЗТЕХ-2022» ПО МАТЕМАТИКЕ. ЧАСТЬ 1

OLYMPIAD «PHYSTECH-2022» ON MATHEMATICS. THE FINAL. PART 1

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_14

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головки, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Е.Г. Молчанов, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин
(Московский физико-технический институт),
Москва, nazar_ag@mail.ru

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov, I.V. Glukhov, A.Yu. Golovko, M.O. Golubev, S.E. Gorodetskiy, V.Yu. Dubinskaya, N.Yu. Korolev, E.G. Molchanov, P.A. Ostanin, O.K. Podlipskii, S.M. Saulin, A.A. Skubachevskii, D.A. Tereshin
(Moscow Institute of Physics and Technology),
Moscow, nazar_ag@mail.ru

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) заключительного этапа олимпиады «Физтех» по математике 2022 года

Abstract: problems with solutions of the final stage of the Olympiad «Phystech» on mathematics held in 2022 are provided

Ключевые слова: Российские олимпиады школьников, математическая олимпиада, олимпиада «Физтех», олимпиадная задача

Keywords: Russian Olympiad for school students, mathematics Olympiad, Olympiad «Phystech», Olympiad problem

© Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, И.В. Глухов, А.Ю. Головки, М.О. Голубев, С.Е. Городецкий, В.Ю. Дубинская, Н.Ю. Королёв, Е.Г. Молчанов, П.А. Останин, О.К. Подлипский, С.М. Саулин, А.А. Скубачевский, Д.А. Терёшин 2023

Заключительный этап олимпиады «Физтех» по математике проводился в феврале 2022 года, и он прошёл в 59 городах России. В олимпиаде приняли участие более 7 тысяч учащихся 9–11 классов. В данной статье представлен один вариант заданий олимпиады для 11 класса, а также избранные задачи вариантов 9 и 10 классов.

Условия задач 11 класс

1. Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\tan \alpha$, если известно, что он определён, и что этих значений не меньше трёх.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей,

угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$.

7. Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединой всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

10 класс

8. Числа a , b , c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a , b , c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

9. Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

10. а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .

11. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке

$$\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right].$$

9 класс

12. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x - 3|}{2x^2 - 4x + |x| \cdot |x - 2|} \leq 0.$$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy}, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$$

14. Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

15. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

Решения задач

11 класс

1. Ответ: $0, -2, -\frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуя в левой части второго равенства сумму синусов в произведение, получаем

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{2}{5}.$$

Подставляем в это соотношение значение синуса из первого равенства:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что исходные равенства эквивалентны совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Из первой системы получаем:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Далее имеем

$$4\sin \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \alpha (\cos \alpha + 2 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0, \\ -\cos \alpha = 2 \sin \alpha. \end{cases}$$

В первом случае $\operatorname{tg} \alpha$ не существует, а во втором случае $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$.

Аналогично рассматриваем вторую систему:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin \alpha \cos \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= -(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha (2 \cos \alpha + \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ 2 \cos \alpha = -\sin \alpha. \end{cases}$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 0$ или $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Итак, возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$ – это 0, -2 и $-\frac{1}{2}$.

$$\text{2. Ответ: } (6; 2), \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Решение. Первое уравнение при условии $x - 2y \geq 0$ равносильно уравнению $(x - 2y)^2 = xy - x - 2y + 2$, откуда $x^2 + (1 - 5y)x + (4y^2 + 2y - 2) = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно переменной x , находим $D = (1 - 5y)^2 - 4(4y^2 + 2y - 2) = (3y - 3)^2$ и корни $x = 4y - 2$ или $x = y + 1$. Подставляем во второе уравнение исходной системы.

Если $x = 4y - 2$, то $25y^2 - 50y = 0$, и получаем две пары $y = 0$, $x = -2$ и $y = 2$, $x = 6$.

Если $x = y + 1$, то $10y^2 - 20y - 15 = 0$, откуда также имеем две пары $y = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$,

$$x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ и } y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только

две: $(6; 2)$, $\left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

3. Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

Решение. Областью допустимых значений неравенства будет множество $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$. Следовательно, $|x^2 + 18x| = x^2 + 18x$, а неравенство эквивалентно следующим:

$$\begin{aligned} 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) &\geq \\ &\geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} &\geq \\ &\geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} &\geq 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенство

$$\left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1.$$

Функция $h(y) = \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y$ — убывающая (как сумма убывающих функций). Несложно заметить, что $h(2) = 1$, поэтому если $y > 2$, то $h(y) < 1$, а если $y < 2$, то $h(y) > 1$. Таким образом, это неравенство выполнено при $y \leq 2$, а исходное неравенство эквивалентно неравенству $\log_{12}(x^2 + 18x) \leq 2$. Решив его, получим ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

4. Ответ: $R = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$,

$$\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17}, \quad S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}.$$

Решение. Обозначим $\angle ABC = \psi$, а радиусы Ω и ω через R и r соответственно. Пусть O и Q — центры окружностей Ω и ω соответственно; K — точка пересечения ω и AB , отличная от A (рис. 1).

Отметим, что $\angle BDQ = 90^\circ$ (касательная BD перпендикулярна радиусу DQ) и $\angle BCA = 90^\circ$ (угол вписан в окружность Ω

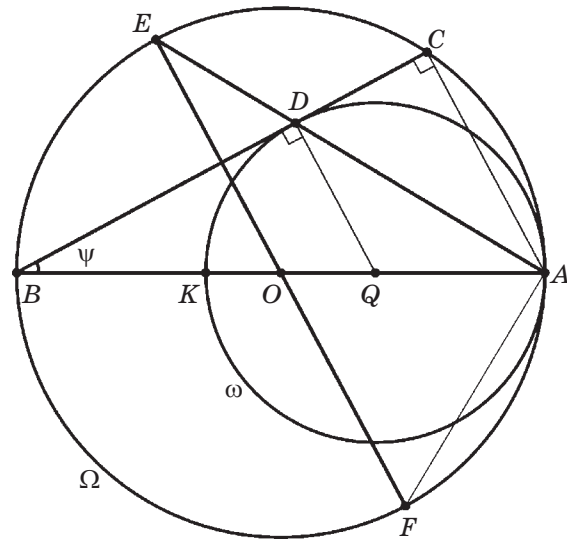


Рис. 1

и опирается на её диаметр). Значит, треугольники BDQ и BCA подобны (по двум углам). Отсюда $\frac{BD}{BQ} = \frac{BC}{BA}$, то есть $\frac{17}{2R-r} = \frac{25}{2R}$, а значит, $R = \frac{25r}{16}$. По теореме о касательной и секущей

$$\begin{aligned} BD^2 &= BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R = \\ &= \left(\frac{25r}{8} - 2r\right) \cdot \frac{25r}{8} = \frac{225r^2}{64}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$BD = \frac{15r}{8}, \quad r = \frac{8 \cdot BD}{15} = \frac{136}{15}, \quad R = \frac{25r}{16} = \frac{85}{6}.$$

Далее находим углы и дуги:

$$\widehat{AC} = 2\angle ABC = 2\psi;$$

$$\angle BDQ = 90^\circ - \angle QBD = 90^\circ - \psi;$$

$$\angle AQD = 180^\circ - \angle BQD = 90^\circ + \psi;$$

$$\angle QAD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AQD) = 45^\circ - \frac{\psi}{2};$$

$$\widehat{BE} = 2\angle BAC = 90^\circ - \psi;$$

$$\widehat{CE} = 180^\circ - \widehat{AC} - \widehat{BE} = 90^\circ - \psi.$$

Следовательно,

$$\angle AFE = \frac{1}{2} \widehat{AE} = 45^\circ + \frac{\psi}{2}. \quad \text{Угол } \psi \text{ известен,}$$

так как $\cos \psi = \frac{BC}{BA} = \frac{25}{85/3} = \frac{15}{17}$. Значит,
 $\angle AFE = 45^\circ + \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17}$.

Перейдём к нахождению площади. Поскольку было показано равенство дуг BE и CE , а по условию $EF \perp BC$, то EF — диаметр окружности Ω . Следовательно, треугольник AEF — прямоугольный и $FA = FE \cos \angle EFA$,

$$\begin{aligned} S_{\triangle AEF} &= \frac{1}{2} \cdot FA \cdot FE \cdot \sin \angle AFE = \\ &= \frac{1}{4} FE^2 \sin(2\angle AFE) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4R^2 \sin(90^\circ + \psi) = \\ &= R^2 \cos \psi = \left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{2125}{12}. \end{aligned}$$

5. Ответ: 198.

Решение. Подставляя $a = 1$ в равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, получаем $f(b) = f(1) + f(b)$, значит, $f(1) = 0$. Если же для произвольных натуральных x, y положить

$a = \frac{x}{y}$, $b = y$, то получаем

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y),$$

откуда

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

Таким образом, чтобы вычислить значение функции f в произвольной положительной рациональной точке нам достаточно знать значения функции f для любого натурального числа.

Для простых чисел и единицы значения функции мы уже знаем. Для составных чисел значения функции могут быть найдены, если их разложить на простые множители и воспользоваться равенством $f(ab) = f(a) + f(b)$, например, $f(15) = f(3 \cdot 5) = f(3) + f(5) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 0 + 1 = 1$.

Аналогичным образом вычисляем значения функции для $n \in [1; 24]$ и записываем их в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(n)$	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Поскольку $f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f(1) = 0$, то из $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ следует, что $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$. Таким образом, количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ совпадает с количеством пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$. Посчитаем количество пар $(x; y)$, при которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ввиду того, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, нужно найти количество пар $(x; y)$ из таблицы, для которых $f(x) = f(y)$. Рассмотрим несколько случаев:

- $f(x) = f(y) = 0$. В таблице есть 11 аргументов, при которых $f = 0$. Каждый аргумент пары можно выбрать 11 способами, а количество пар равно $11^2 = 121$.
- $f(x) = f(y) = 1$. Аналогично предыдущему пункту получаем $7^2 = 49$ пар.
- $f(x) = f(y) = 2$. Здесь 4 пары.
- $f(x) = f(y) = 4$. Здесь также 4 пары.
- Кроме того, есть по одной паре при $f(x) = f(y) = 3$ и $f(x) = f(y) = 5$.

Итого, есть $121 + 49 + 4 + 4 + 1 + 1 = 180$ пар натуральных чисел $(x; y)$, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Всего имеется $24^2 = 576$ пар, поэтому тех, для которых выполнено условие $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, будет $\frac{576 - 180}{2} = 198$.

6. Ответ: $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Обозначим $h(x) = -8x^2 - 30x - 17$. График этой функции – парабола с ветвями вниз. На концах данного в условии промежутка функция принимает такие значения: $h\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$, $h\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$. Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки $M\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $N\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или выше неё. Поэтому самое «высокое» расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Составим её уравнение: $y = -2x - \frac{1}{2}$ (назовём эту прямую l).

Рассмотрим теперь первое неравенство.

Обозначим $g(x) = \frac{12x + 11}{4x + 3}$.

Графиком $g(x)$ на промежутке $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$ будет ветвь гиперболы, выпуклая вверх. Заметим, что она касается прямой l в точке, принадлежащей промежутку $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. Действительно, уравнение

$\frac{12x + 11}{4x + 3} = -2x - \frac{1}{2}$ имеет единственное ре-

шение $x = -\frac{4}{5}$, и при этом

$g'(x) = -\frac{8}{(4x + 3)^2}$, $g'\left(-\frac{5}{4}\right) = -2$, то есть

угловой коэффициент прямой l совпадает с производной функции $y = g(x)$ в их общей точке. Следовательно, на данном промежутке прямая l находится выше гиперболы. Любая прямая, расположенная «ниже» прямой l пересекается с гиперболой, и потому не удовлетворяет условию.

Итак, l – единственная возможная пря-

мая, удовлетворяющая условию; следовательно, $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$.

7. Ответ: $BC = \sqrt{7}$, $R_{\min} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Решение. Пусть K, L, M, N, P – середины рёбер AB, BD, CD, AC, BC соответственно. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что $KLMN$ и $AKPN$ – параллелограммы. Они вписаны в окружности, являющиеся сечениями сферы плоскостями KLM и ABC , поэтому эти параллелограммы – прямоугольники. Угол BAC – прямой; прямые AD и BC перпендикулярны, так как $AD \parallel KL, KL \parallel LM, BC \parallel LM$.

Отметим в плоскости ABC точку D' такую, что $\triangle BCD = \triangle BCD'$, а точки A и D' лежат по разные стороны от прямой BC (треугольник BCD' может быть получен из треугольника BCD поворотом вокруг прямой BC). Из равенства треугольников BCD и BCD' следует, что основания их высот, опущенных на BC – это одна и та же точка (назовём её H). Плоскость $DD'H$ перпендикулярна BC (так как $DH \perp BC, D'H \perp BC$), поэтому $DD' \perp BC$. Поскольку $DD' \perp BC$ и $AD \perp BC$, то плоскость ADD' перпендикулярна BC и $AD' \perp BC$.

Значит, $ABD'C$ – четырёхугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями (H – точка их пересечения). По теореме Пифагора

$$AB^2 = AH^2 + BH^2, CD'^2 = CH^2 + D'H^2,$$

$$BD'^2 = BH^2 + D'H^2, AC^2 = AH^2 + CH^2,$$

следовательно,

$$AB^2 + CD'^2 = BD'^2 + AC^2,$$

откуда $AC = \sqrt{1^2 + 3^2 - 2^2} = \sqrt{6}$.

Из прямоугольного треугольника ABC находим $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{7}$.

Радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$, не меньше радиуса R окружности, описанной около грани

BCD . Пирамида, для которой достигается равенство, существует. Докажем это. Рассмотрим сферу радиуса R и окружность — её сечение, проходящее через центр сферы. Впишем в эту окружность треугольник BCD и через прямую BC проведём плоскость, перпендикулярную плоскости этого треугольника. В сечении сферы указанной плоскостью получится окружность с диаметром BC , в которую можно вписать прямоугольный треугольник ABC . Покажем, что для полученной пирамиды выполняется условие задачи про существование сферы, проходящей через середины пяти рёбер и вершину A . Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, значит, его можно вписать в окружность с хордой KN . Также прямоугольник $AKPN$ можно вписать в окружность с хордой KN . Сфера, сечения которой эти две окружности, — искомая.

По теореме косинусов из треугольника BCD находим, что

$$\begin{aligned}\cos \angle BDC &= \frac{CD^2 + BD^2 - BC^2}{2 \cdot CD \cdot BD} = \\ &= \frac{9 + 4 - 7}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad \angle BDC = 60^\circ.\end{aligned}$$

По теореме синусов

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

10 класс

8. Ответ: -1 .

Решение. Числа a , b , c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. При этом оказывается, что дискриминант квадратного уравнения равен нулю (уравнение, действительно, квадратное, так как по определению геометрической прогрессии $a \neq 0$), а четвёртый член прогрессии равен корню этого уравнения, то есть $b_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{qa}{a} = -q$, где q — знаме-

натель прогрессии. С другой стороны, $b_4 = aq^3$. Отсюда получаем значение третьего члена прогрессии: $b_3 = aq^2 = -1$.

9. Ответ: 99.

Решение. Пусть ABC — один из таких треугольников. Данные в условии биссектриса и медиана не могут выходить из одной вершины, в противном случае угол при этой вершине будет больше развёрнутого. Пусть его биссектриса AN и медиана BM пересекаются в точке O . В треугольнике ABM отрезок AO является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный, $AM = BM$. Следовательно, $AC = 2AB$. Отметим, что последнее условие является и достаточным для того, чтобы биссектриса угла A треугольника была перпендикулярна медиане, проведённой к стороне AC .

Обозначим $AB = y$, $y \in \mathbf{Z}$. Тогда $AC = 2y$.

По свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому если $BN = x$, то $CN = 2x$. Сумма сторон треугольника равна периметру, то есть $3(x + y) = 1200$, откуда $y = 400 - x$. Учтём неравенство треугольника:

$$\begin{cases} 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y, \Leftrightarrow x < y < 3x. \\ y < 2y + 3x, \end{cases}$$

Так как $y = 400 - x$, то $x < 400 - x < 3x \Leftrightarrow 100 < x < 200$. На этом интервале содержится 99 целых значений x .

Покажем, что никакая неупорядоченная тройка длин сторон треугольника (a, b, c) не была посчитана более одного раза. Из двойного неравенства $x < y < 3x$ заключаем, что из сторон треугольника y , $2y$ и $3x$ сторона y — наименьшая. Тогда по заданному значению y вся тройка (a, b, c) восстанавливается однозначно: наименьшее из этих чисел равно y , ещё одно равно $2y$, а третье равно $p - y - 2y$ (где p — периметр). Поэтому две различ-

ные неупорядоченные тройки длин сторон задаются различными значениями y .

10. Ответ: а) $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2}{5}$;

б) $S_{\triangle CDE} = \frac{6}{5}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle CDE = \angle BAC + \angle AED = 90^\circ + \alpha$, $\angle DCE = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - 45^\circ = 45^\circ - \alpha$. Пусть $AD = 3x$. Тогда $AC = 5x$, $CD = 2x$, $DE = AD \sin \alpha = 3x \sin \alpha$ (рис. 2). По теореме синусов для треугольника CDE получим уравнение

$$\frac{2x}{\sin 45^\circ} = \frac{3x \sin \alpha}{\sin(45^\circ - \alpha)}.$$

Следовательно,

$$3 \sin \alpha \sin 45^\circ = 2 \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha);$$

$$5 \sin \alpha = 2 \cos \alpha; \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}.$$

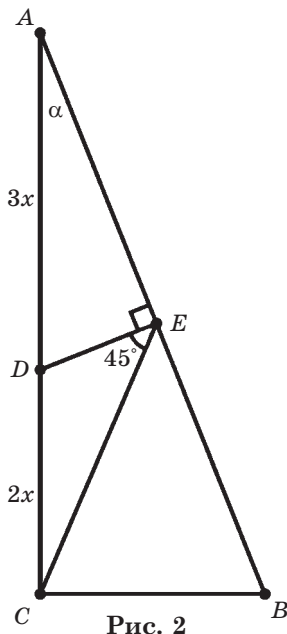


Рис. 2

Площадь треугольника CDE равна

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin \angle CDE = \\ & = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \sin \alpha \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = \frac{3}{2} x^2 \sin 2\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{29}{25} \cdot \frac{4/5}{1 + 4/25} = \frac{6}{5}.$$

11. Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Обозначим $h(x) = 2x^2 - x - 1$. График этой функции – парабола с ветвями вверх. На концах данного в условии промежутка выполнены равенства

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}, \quad h\left(\frac{3}{2}\right) = 2.$$

Так как неравенство должно выполняться на всём промежутке, то точки

$$M\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right) \text{ и } N\left(\frac{3}{2}; 2\right)$$

могут располагаться на прямой $y = ax + b$ или ниже неё. Поэтому самое «низкое» расположение этой прямой (на указанном промежутке) есть прямая MN . Составим её уравнение по двум точкам: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ (назовём эту прямую l).

Теперь рассмотрим второе неравенство. Обозначим $g(x) = x + |2x - 1|$.

Графиком этой функции будет «уголок»

с вершиной в точке $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и ветвями, направленными вверх. Заметим, что точка p лежит на прямой l , поэтому любая прямая, расположенная выше l пересекает график $y = g(x)$ на рассматриваемом промежутке, и неравенство выполняется не при всех x (оно не будет выполнено по крайней мере в точке $x = \frac{1}{2}$).

Итак, l – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условию; следовательно,

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

9 класс

12. Ответ: $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x^2-2x)+|x^2-2x|} \leq 0.$$

Знаменатель представляет собой выражение вида $2a + |a|$. Заметим, что знак этого выражения совпадает со знаком a при любых a . Действительно, если $a > 0$, то $2a + |a| = 3a > 0$, а если $a < 0$, то $2a + |a| = a < 0$. Кроме того, числитель дроби неотрицателен при всех значениях переменной. Следовательно, неравенство равносильно такому:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{x^2-2x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|-1=0, \\ x^2-2x \neq 0, \\ x^2-2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ или } x=4, \\ x \neq 0, x \neq 2, \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Итак, $x \in (0; 2) \cup \{4\}$.

13. Ответ: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, (4; 1).

Решение. Первое уравнение при условии $x - 2y \geq 0$ равносильно уравнению $(x - 2y)^2 = xy$, откуда $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x - 4y) = 0$, то есть $x = y$ или $x = 4y$. Подставляем найденные значения x во второе уравнение исходной системы.

Если $x = y$, то $y^2 + y - 5 = 0$, и получаем две пары решений:

$$y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

и

$$x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, \quad y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Если $x = 4y$, то $y^2 + 4y - 5 = 0$. В этом случае также имеем две пары решений:

$$y = 1, \quad x = 4 \text{ и } y = -5, \quad x = -20.$$

Из четырёх найденных пар чисел неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только

две из них: $\left(-\frac{1+\sqrt{21}}{2}; -\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, (4; 1).

14. Ответ: 4 : 3.

Решение. Пусть отрезки BO и AC пересекаются в точке N (рис. 3). Так как треугольник ABC равнобедренный, а BO является биссектрисой угла B то биссектриса BN треугольника ABC является также его медианой и высотой. Пусть $\angle OAN = \alpha$. Поскольку $OA \parallel CH$, то $\angle ACN = \alpha$. Отметим, что этот угол вписан в окружность и опирается на дугу AD , поэтому $\widehat{AD} = 2\alpha$. По теореме об угле между касательной и секущей

$$\angle DAH = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \alpha.$$

Кроме того,

$$\angle ABO = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

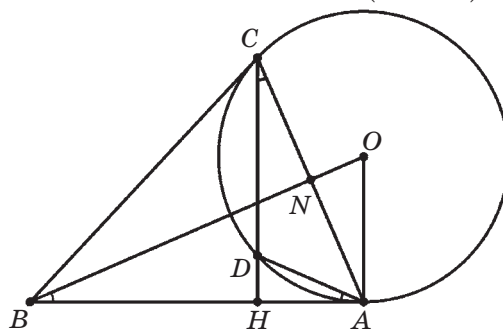


Рис. 3

Далее имеем:

$$AB = AO \operatorname{ctg} \alpha = 4 \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$AN = AO \cos \alpha = 4 \cos \alpha, \quad AC = 2AN = 8 \cos \alpha;$$

$$AH = AC \sin \alpha = 8 \cos \alpha \sin \alpha;$$

$$DH = AH \operatorname{tg} \alpha = 8 \sin \alpha;$$

$$CH = AC \cos \alpha = 8 \cos \alpha;$$

$$AB : CH = 4 \operatorname{ctg} \alpha : (8 \cos^2 \alpha) = 1 : (2 \sin \alpha \cos \alpha);$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot 4 \operatorname{ctg} \alpha \cdot 8 \sin^2 \alpha = 16 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Так как по условию площадь треугольника ABD равна 6, то получаем равенство

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}, \quad \text{и искомое отношение}$$

$AB : CH$ равно 4 : 3.

15. Ответ: $5\pi - 4$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. Если обозначить $2x = a$, $y = b$, $4 - 2x - y = c$, то неравенство принимает вид $|a| + |b| + |c| > a + b + c$. Это неравенство не выполнено тогда и только тогда, когда все три числа a , b , c неотрицательны. Действительно, $|p| \geq p$ при всех p причём при $p \geq 0$ выполняется равенство, а при $p < 0$ – строгое неравенство. Значит, первое неравенство системы **не** выполнено при $x \geq 0, y \geq 0$ и $4 - 2x - y \geq 0$. Эти три неравенства определяют прямоугольный треугольник с вершинами в точках $A(2; 0)$, $B(0; 4)$, $O(0; 0)$ (рис. 4).

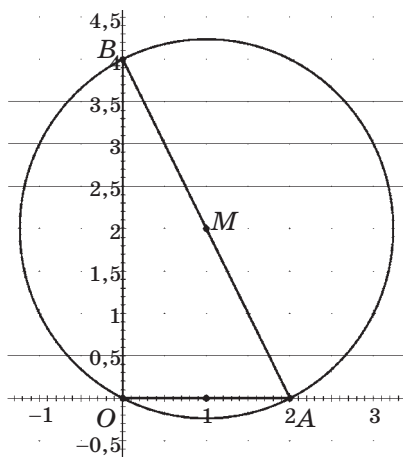


Рис. 4

Второе неравенство может быть записано в виде $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 5$ – оно задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке $M(1; 2)$. Заметим, что точка M является серединой гипотенузы AB треугольника AOB , а радиус круга равен половине гипотенузы. Это означает, что круг описан около треугольника AOB . Пересечением двух множеств является круг с центром M радиуса $\sqrt{5}$ с вырезанным из него треугольником ABO . Площадь этой фигуры равна $\pi(\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 5\pi - 4$.

Список источников

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кожеевников П.А., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ». МАТЕМАТИКА (задачи 2015–2020 гг.) – М.: Физматкнига, 2022 – 344 с.

2. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 1. // Математика в школе. 2018. № 6. С. 8–5.

3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2018» по математике. Часть 2. // Математика в школе. 2018. № 7. С. 22–28.

4. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 1. // Математика в школе. 2019. № 8. С. 11–22.

5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2019» по математике. Часть 2. // 1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 1. // Математика в школе. 2020. № 6. С. 21–29.

6. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Глухов И.В., Головкин А.Ю., Городецкий С.Е., Дубинская В.Ю., Кузьменко Ю.В., Молчанов Е.Г., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Заключительный этап олимпиады «Физтех-2020» по математике. Часть 2. // Математика в школе. 2020. № 7. С. 16–25.

Статья поступила в редакцию

26.08.2022.

Принята к публикации

27.11.2022.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ – 2021-2022» ПО МАТЕМАТИКЕ

OLYMPIAD «LOMONOSOV – 2021-2022» IN MATHEMATICS

Научная статья 5.8.2

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_24

И.В. Асташова, Б.А. Будаков, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, В.С. Панфёров, А.Г. Разборов, В.В. Рогачев, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак,
МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва),
asz1956@yandex.ru

I.V. Astashova, B.A. Budakov, D.V. Goryashin, A.S. Zelenskiy, V.S. Panfyorov, A.G. Razborov, V.V. Rogachev, I.N. Sergeev, I.A. Sheipak,
Lomonosov MSU (Moscow),
asz1956@yandex.ru

Аннотация: приводятся задания, предлагавшиеся учащимся выпускных классов на олимпиаде «Ломоносов» по математике в 2021/2022 учебном году, с ответами и решениями

Abstract: there are problems offered to high school graduates at the Mathematical Olympiad «Lomonosov», organized by Lomonosov Moscow State University in academic year 2021/2022, with answers and solutions

Ключевые слова: олимпиада «Ломоносов», МГУ, математика

Keywords: Olympiad «Lomonosov», Lomonosov Moscow State University, mathematics

© И.В. Асташова, Б.А. Будаков, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, В.С. Панфёров, А.Г. Разборов, В.В. Рогачев, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак 2023

В соответствии с порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов» проводилась в 2021/2022 учебном году в два этапа. Отборочный этап проводился в октябре 2021 г. в дистанционной форме на портале олимпиады olympr.msu.ru. Каждому участнику предлагался индивидуальный набор из 10 задач, в каждой из которых требовалось дать только ответ.

К участию в заключительном этапе в марте 2022 г. допускались победители и призёры отборочного этапа, а также победители и призёры заключительного этапа прошлого учебного года, продолжающие освоение общеобразовательных программ среднего общего образования. В связи с эпидемиологической обстановкой заключительный этап также прово-

дился в дистанционной форме на портале олимпиады с использованием технологий прокторинга.

Приведём примеры вариантов отборочного этапа, а также варианты заключительного этапа олимпиады, предлагавшиеся учащимся 11 классов.

Отборочный этап

1. В выражении

$$A = 81^{0.5 \cdot \log_9 7}$$

на месте знака * может стоять любой из знаков четырёх арифметических действий (+, −, :, ×). Найдите отношение наибольшего возможного значения A к наименьшему, при необходимости округлив ответ до сотых.

2. Точки A , B , C и D расположены в указанном порядке на окружности таким

образом, что длины дуг AD и CD равны 4, отношение длин дуг AB и BC равно $3/7$, а также равны длины отрезков AD и CL , где L – точка пересечения отрезков AC и BD . Найдите длину дуги AB

3.1. Монета искривлена так, что вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна вероятности выпадения ровно 2-х орлов в серии из 4-х бросков. Найдите вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 3-х орлов. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

3.2. Андрей наугад выбирает трёхзначное число в десятичной системе счисления. После этого он переводит это число в систему счисления по основанию 9, а потом в систему счисления по основанию 11. Найдите вероятность того, что в обоих случаях он получит тоже трёхзначное число. Ответ при необходимости округлите до сотых.

4.1. Найдите максимальное значение функции $f(x) = \sin^4 x + 2\cos^3 x$ на отрезке $\left[\arccos \frac{3}{4}; \arccos \left(-\frac{1}{4}\right)\right]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

4.2. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 7} + \log_5 2 \cdot \log_5 7 > 2 \log_5 x.$$

В ответе укажите наибольшее натуральное значение n , при котором не все числа, принадлежащие отрезку $[n-1; n]$, являются решениями неравенства.

5. Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней этого куба равно 8.

6.1. Фабрика производит $n > 15\,000$ ёлочных игрушек в месяц и является убыточной. Известно, что при изготовлении n ёлочных игрушек в месяц расходы фабрики на производство одной игрушки состав-

ляют не менее $\frac{126000}{n} + 9 - \left| 3 - \frac{54000}{n} \right|$ рублей, а цена реализации каждой игрушки при этом не превосходит $18 - \frac{1}{4000}n$ рублей. Определите ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

6.2. Завод производит $n > 300$ автомобилей в месяц. Издержки зависят от объёма производства как $\lg \frac{n^2 - 20000}{n - 300}$.

Сколько автомобилей в месяц должен выпускать завод, чтобы издержки были минимальными?

7. Найдите сумму всех целых a , при которых неравенство

$$(2-a)4^{\cos 2x} + 2(a-5)\frac{1}{4^{\sin^2 x}} + 1 < 0$$

выполнено для всех значений x .

8. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса $\angle BAD$, пересекающая прямую BC в точке K . В треугольник ABK вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности сторон AB и BK , если $AB = 4$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. При необходимости округлите

ответ до двух знаков после запятой.

9. Решите систему

$$\begin{cases} 6^{y+1} \cdot 5^{|2+x-x^2|+1+\log_5 6} = 5, \\ 3\sqrt{2-y} \leq 6 - |y+2|. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение, которое может принимать сумма $x + y$, если x и y являются решениями системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

10.1. Пусть $\hat{x}$ – наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Найдите

остаток от деления целой части числа $\hat{x}^{2021}$ на 17. Целая часть числа a — это наибольшее целое число, не превосходящее a .

10.2. Найдите сумму всех корней уравнения

$$8\cos^3 x + 1 = 2\sqrt[3]{4\cos x} - 1,$$

принадлежащих отрезку $[0; \pi]$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Заключительный этап

1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{87}{(43 \cdot 44)^2} + \frac{89}{(44 \cdot 45)^2}$$

или

$$B = \frac{\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

2. Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

3. Функция задана равенством

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1 - x^5}}.$$

Вычислите $f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))) \dots$), где функция f применяется 1303 раза.

4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60° . Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогую возрастанию, получив тройку $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, то число x_2 будем называть *средним* из чисел a, b, c .

Найдите все значения t , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$a = t^3 - 100t$; $b = 2^t - 16$; $c = \sin t - \frac{1}{2}$ положительно.

6. При каких значениях параметра $a \in \mathbf{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (2 - a - a^2) \operatorname{tg}^2 x + (a^2 - 2a - 2) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

7. Высота BD остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке H . Точка K лежит на отрезке AC так, что величина угла BKH максимальна. Найдите DK , если $AD = 2$, $DC = 3$.

Ответы и решения Отборочный этап

1. Ответ: 2401.

Решение. Для каждого из знаков находим

$$A_+ = 81^{0.5 + \log_9 7} = 9 \cdot 7^2 = 9 \cdot 49;$$

$$A_- = 81^{0.5 - \log_9 7} = 9 : 7^2 = 9 : 49;$$

$$A_{\times} = 81^{0.5 \log_9 7} = 9^{2 \cdot 0.5 \log_9 7} = 7;$$

$$A_{\div} = 81^{0.5 : \log_9 7} = 9^{\log_7 9}.$$

Так как $9 = 9^{\log_7 7} < 9^{\log_7 9} < 9^{\log_7 49} = 9^2$, то величина $A_{\div}$ лежит в промежутке от 9 до 81. Значит, искомая величина равна

$$\frac{A_+}{A_-} = 49^2 = 2401.$$

2. Ответ: 3.

Решение. Обозначим длины дуг AD и CD через a , и отношение длин дуг AB и BC через k . Из условия задачи следует, что треугольники ACD и CDL равнобедренные (рис. 1). Обозначим $\angle CAD = \angle ACD = 2\alpha$, тогда $\angle CDL = \angle CLD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle ADL = \pi/2 - 3\alpha$. Поскольку длина дуги пропорциональна величине опирающего

ся на неё вписанного угла, получаем равенство:

$$\frac{|\widehat{AB}|}{|\widehat{BC}|} = \frac{\pi/2 - 3\alpha}{\pi/2 - \alpha} = k \Rightarrow \alpha = \frac{(1-k)\pi}{6-2k}.$$

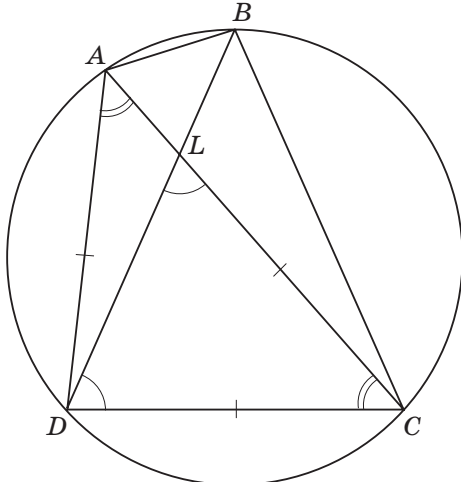


Рис. 1

Рассуждая аналогично, получим равенство

$$\frac{|\widehat{AB}|}{|\widehat{AD}|} = \frac{\pi/2 - 3\alpha}{2\alpha} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow |\widehat{AB}| = \frac{k}{1-k} \alpha.$$

Для данных числовых значений $\alpha = 4$, $k = 3/7$ получаем $|\widehat{AB}| = 3$.

3.1. Ответ: 0,82.

Решение. Пусть вероятность выпадения орла при одном броске равна p . Тогда вероятность выпадения ровно 3-х орлов в серии из 5-ти бросков равна

$$C_5^3 p^3 (1-p)^2 = 10p^3 (1-p)^2,$$

а вероятность выпадения ровно двух орлов в серии из 4-х бросков равна

$$C_4^2 \cdot p^2 (1-p)^2 = 6p^2 (1-p)^2.$$

По условию $10p^3 (1-p)^2 = 6p^2 (1-p)^2$, откуда $p = \frac{3}{5}$.

Тогда искомая вероятность того, что в серии из 6-ти бросков выпадет не менее 3-х орлов, равна

$$C_6^3 p^3 (1-p)^3 + C_6^4 p^4 (1-p)^2 +$$

$$+ C_6^5 p^5 (1-p) + C_6^6 p^6 = \frac{513}{625} \approx 0,82.$$

3.2. Ответ: 0,68.

Решение. Наименьшее трёхзначное число в одиннадцатеричной системе счисления есть $100_{11} = 121_{10}$. Наименьшее трёхзначное число в девятеричной системе счисления очевидно будет меньше, чем 121. Наибольшее трёхзначное число в девятеричной системе счисления есть $888_9 = 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0 = 728_{10}$. Наибольшее трёхзначное число в одиннадцатеричной системе счисления больше, чем 728. Поэтому условию подойдут натуральные числа от 121 до 728. Таких чисел $728 - 120 = 608$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{608}{900} = \frac{152}{225} \approx 0,68$.

4.1. Ответ: $f_{\max} = \frac{265}{256} \approx 1,04$.

Решение. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin^3 x \cos x - 6 \cos^2 x \sin x = \\ &= \sin 2x (2 \sin^2 x - 3 \cos x) = \\ &= -\sin 2x (\cos x + 2)(2 \cos x - 1). \end{aligned}$$

На указанном в условии отрезке производная обращается в нуль в точках $x = \pi/3$ (точка минимума) и $x = \pi/2$ (точка максимума). Вычислим значения функции в этих точках и в концах отрезка:

$$\begin{aligned} f\left(\arccos \frac{3}{4}\right) &= \frac{265}{256}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{13}{16}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ f\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) &= \frac{217}{256}. \end{aligned}$$

Наибольшим значением является число $\frac{265}{256} \approx 1,04$.

4.2. Ответ: 3.

Решение. Элементарными преобразованиями это неравенство приводится к эквивалентной системе

$$\begin{cases} (\log_5 x - \log_5 2 \cdot \log_5 7)^2 > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

откуда получаем решение неравенства:

$$x \in (0; 1) \cup (1; 2^{\log_5 7}) \cup (2^{\log_5 7}; +\infty).$$

Поскольку

$$2 < 2^{\log_5 7} < 2^{\log_5 5\sqrt{5}} = 2^{3/2} = \sqrt{8} < 3,$$

то при $x \geq 3$ неравенство выполняется, а на отрезке $[2; 3]$ оно не выполнено в точке $2^{\log_5 7}$. Следовательно, искомым значением будет $n = 3$.

5. Ответ: 1152.

Решение. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб с ребром a ; d – расстояние между прямыми AD_1 и $A_1 B$; π_1, π_2 – плоскости $A_1 B C_1$ и $A C D_1$ соответственно. Поскольку $BC_1 \parallel AD_1$ и $A_1 B \parallel D_1 C$, плоскости π_1 и π_2 параллельны, поэтому d равно расстоянию между плоскостями π_1 и π_2 .

Покажем, что диагональ DB_1 куба перпендикулярна плоскостям π_1 и π_2 , и точками пересечения с этими плоскостями делится на три равные части.

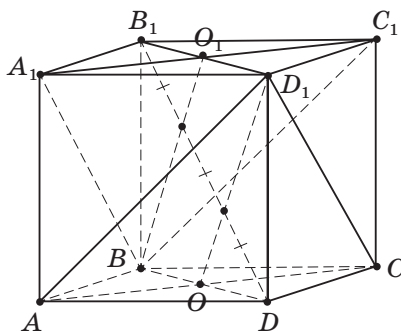


Рис. 2

Поскольку $A_1 C_1 \perp B_1 D_1$ и $A_1 C_1 \perp DD_1$, то прямая $A_1 C_1$ перпендикулярна плоскости $BB_1 D_1 D$, а, стало быть, и прямой DB_1 , лежащей в этой плоскости. Аналогично доказывается, что $A_1 B \perp DB_1$. Следовательно, $DB_1 \perp \pi_1$.

Пусть O и O_1 – центры граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно (рис. 2). Тогда в сечении куба $BB_1 D_1 D$ получаем $BO_1 \parallel D_1 O$, $B_1 O_1 = O_1 D_1 = BO = OD$. Поэтому по теореме Фалеса DB_1 делится отрез-

ками BO_1 и $D_1 O$ на три равные части.

Таким образом, $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = d\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности куба равна $S = 6a^2 = 18d^2 = 18 \cdot 8^2 = 1152$.

6.1. Ответ: 24000.

Решение. Обозначим расходы на производство n игрушек в месяц через $f(n)$. По условию:

$$f(n) \geq g(n) = n \left(\frac{126000}{n} + 9 - \left| 3 - \frac{54000}{n} \right| - 18 + \frac{1}{4000} n \right),$$

то есть

$$f(n) \geq g(n) = \frac{n^2}{4000} - 9n - |3n - 54000| + 126000.$$

Пусть $n \geq 18000$. Тогда

$$g(n) = \frac{n^2}{4000} - 12n + 180000 \geq g(n_0),$$

где

$$n_0 = \frac{12}{1/2000} = 24000.$$

При этом $g(24000) = 36000$.

Пусть $0 < n < 18000$. Тогда

$$g(n) = \frac{n^2}{4000} - 6n + 72000 \geq g(n_0),$$

где

$$n_0 = \frac{6}{1/2000} = 12000.$$

При этом $g(12000) = 36000$.

Таким образом, наименьшее значение расходов в месяц равно 36000 руб. и достигается оно при $n = 24000$ или $n = 12000$ (последнее значение не удовлетворяет условию $n > 15000$).

6.2. Ответ: 565.

Решение. Пусть $f(x) = \frac{x^2 - 20000}{x - 300}$.

Так как $x > 300$, то по неравенству о средних

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 300 + \frac{70000}{x - 300} = \\ &= x - 300 + \frac{70000}{x - 300} + 600 \geq 2\sqrt{70000} + 600. \end{aligned}$$

Это наименьшее значение достигается

при $x - 300 = \frac{70000}{x - 300}$, то есть при

$$(x - 300)^2 = 70000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 300 + 100\sqrt{7} \in (564; 565).$$

Так как при $x < 300 + 100\sqrt{7}$ функция $f(x)$ убывает, а при $x > 300 + 100\sqrt{7}$ — возрастает, то при целых x её минимум достигается в одной из точек: 564 или 565. Поскольку десятичный логарифм — монотонно возрастающая функция, то же самое верно и для функции $g(x) = \lg f(x)$. Убедившись, что $f(564) > f(565)$, приходим к выводу, что $g(564) > g(565)$ и наименьшие издержки завод понесёт, выпуская по 565 автомобилей в месяц.

7. Ответ: 6.

Решение. После замены $4^{\cos^2 x} = t$ получаем неравенство $f(t) = (2 - a)t^2 + 2(a - 5)t + 4 < 0$, которое по условию должно выполняться при всех значениях $t \in [1; 4]$.

При $a = 2$ получаем $t > \frac{2}{3}$, то есть на отрезке $[1; 4]$ неравенство выполнено.

При остальных a необходимым условием выполнения неравенства на всём отрезке $[1; 4]$ будет выполнение системы

$$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - a + 2(a - 5) + 4 < 0 \\ 16(2 - a) + 8(a - 5) + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right).$$

Если $a < 2$, то функция $f(t)$ выпукла вниз и необходимое условие является и достаточным. При $a > 2$ квадратичная функция будет монотонно убывающей на отрезке $[1; 4]$, так как абсцисса вершины параболы $\frac{a - 5}{a - 2} = 1 - \frac{3}{a - 2}$ меньше 1. Поэтому здесь также необходимое условие является достаточным.

Таким образом, функция $f(t)$ будет от-

рицательной на отрезке $[1; 4]$, если

$a \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right)$. Сумма целых значений равна $0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

8. Ответ: 0,93.

Решение. Обозначим через N, L, M точки касания окружности соответственно со сторонами AB, BK, AK треугольника ABK . Так как $\angle BAK = \angle KAD = \angle BKA$, то $\triangle ABK$ — равнобедренный. Равнобедренным будет и $\triangle NBL$ (так как $NB = BL$). Но тогда треугольники ABK и NBL будут подобными (у них одинаковый угол при вершине B). Отрезок BM будет высотой, медианой и биссектрисой треугольника ABK .

$$\text{Тогда } AN = AM = AB \cos \frac{\angle BAD}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$NB = AB - AN = 4 - 2\sqrt{3},$$

$$NL = AK \cdot \frac{NB}{AB} = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \\ = 2(2\sqrt{3} - 3) \approx 0,93.$$

9. Ответ: -3.

Решение. Преобразовав уравнение к виду $6^{y+2} \cdot 5^{|2+x-x^2|} = 1$, заметим, что из него следует, что $y + 2 \leq 0$ (иначе первый сомножитель больше 1, а это невозможно, так как второй сомножитель не меньше 1).

Тогда неравенство системы равносильно неравенству $3\sqrt{2-y} \leq y + 8$, которое при условии $y \in [-8; -2]$ равносильно неравенству:

$$9(2-y) \leq (y+8)^2 \Leftrightarrow y^2 + 25y + 46 \geq 0, \\ \text{откуда } y = -2.$$

Тогда уравнение системы примет вид: $5^{|2+x-x^2|} = 1$. Следовательно, $x = -1$ или $x = 2$.

Минимальное значение суммы $x + y$ равно -3.

10.1. Ответ: 10.

Решение. Заметим, что

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) < 0, f(0) > 0, f\left(\frac{3}{5}\right) > 0, \\ f(1) < 0, f(2) < 0, f(3) > 0.$$

Следовательно, кубический многочлен $f(x)$ имеет три действительных корня $x_1 < x_2 < x_3$, причём $x_1 \in \left(-\frac{3}{5}; 0\right)$, $x_2 \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$, $x_3 \in (2; 3)$ и $x_3 = \hat{x}$.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = -1. \end{cases}$$

Обозначим через $S(n)$ сумму

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n.$$

Подсчитаем значения:

$$\begin{aligned} S(0) &= 3, S(1) = 3, \\ S(2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9. \end{aligned}$$

Так как

$$x_1^{n+3} = 3x_1^{n+2} - x_1^n, \quad x_2^{n+3} = 3x_2^{n+2} - x_2^n,$$

то

$$x_3^{n+3} = 3x_3^{n+2} - x_3^n,$$

$$S(n+3) = 3 \cdot S(n+2) - S(n).$$

Тем самым подтверждаем, что все указанные суммы $S(n)$ – целые числа. И далее по последней формуле получаем остатки от деления соответствующих сумм на 17:

$$\begin{aligned} S(3) &\equiv 24 \equiv 7 \pmod{17}, S(4) \equiv 1 \pmod{17}, \\ S(5) &\equiv 11 \pmod{17}, S(6) \equiv 9 \pmod{17}, \\ S(7) &\equiv 9 \pmod{17}, S(8) \equiv -1 \equiv 16 \pmod{17}, \\ S(9) &\equiv 5 \pmod{17}, S(10) \equiv 6 \pmod{17}, \\ S(11) &\equiv 2 \pmod{17}, S(12) \equiv 1 \pmod{17}, \\ S(13) &\equiv -3 \equiv 14 \pmod{17}, S(14) \equiv 6 \pmod{17}, \\ S(15) &\equiv 0 \pmod{17}, S(16) \equiv 3 \pmod{17}, \\ S(17) &\equiv 3 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Далее последовательность будет циклически повторяться, то есть

$$S(n+16) \equiv S(n).$$

Так как $2021 = 16 \cdot 126 + 5$, то

$$S(2021) \equiv S(5) \equiv 11 \pmod{17}.$$

Таким образом,

$$x_1^{2021} + x_2^{2021} + x_3^{2021} \equiv 11 \pmod{17}.$$

Это число целое. Так как

$$0 < |x_1| < \frac{3}{5} < |x_2| < 1, \text{ то } |x_1|^{2021} < |x_2|^{2021}$$

$$\text{и } 0 < x_1^{2021} + x_2^{2021} < x_2^{2021} < 1. \text{ Поэтому}$$

$$[x_3^{2021}] \equiv 11 - 1 \equiv 10 \pmod{17}.$$

10.2. Ответ: 4,82.

Решение. Замена $t = 2 \cos x$ приводит уравнение к виду

$$t^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2t-1} \Leftrightarrow \left(\frac{t^3+1}{2}\right)^3 = 2t-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(f(t)) = t, \text{ где } f(t) = \frac{t^3+1}{2}.$$

Покажем, что уравнение $f(f(t)) = t$ равносильно уравнению $f(t) = t$, если функция $f(t)$ строго монотонно возрастает (в нашем случае это выполняется). Пусть t^* – корень уравнения $f(f(t)) = t$ и пусть $f(t^*) = t_0$. Предположим, что $t^* > t_0$. Тогда $t^* > t_0 = f(t^*) > f(t_0) = f(f(t^*)) = t^*$. Получили противоречие. Аналогично доказывается, что невозможно и неравенство $t^* < t_0$. Следовательно, $t^* = t_0$ и t^* – корень уравнения $f(t) = t$. Если же t^* – корень уравнения $f(t) = t$, то, очевидно, он является и корнем уравнения $f(f(t)) = t$.

Тогда

$$f(f(t)) = t \Leftrightarrow f(t) = t \Leftrightarrow t^3 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1, \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, и корни уравнения будут такими:

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{4},$$

$$x = \pi - \arccos \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Можно доказать, что $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Тогда $\arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$, и сумма корней равна $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{23\pi}{15} \approx 4,82$.

Заключительный этап

1. Ответ: B .

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \text{то} \quad \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}, \\ A &= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{43^2} - \frac{1}{44^2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{44^2} - \frac{1}{45^2}\right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{45^2} < 1. \end{aligned}$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \\ &= \frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3-1}}{\sqrt[3]{2}} = 1, \end{aligned}$$

получаем $A < B$.

2. Ответ: 6 или 8.

Решение. Двухзначные числа, делящиеся на 19, — это 19, 38, 57, 76, 95. Двухзначные числа, делящиеся на 23, — это 23, 46, 69, 92. Так как первая цифра — 4, то вторая цифра — 6, третья — 9, а четвёртая — 2 или 5. Если четвёртая цифра — 2, то продолжение: 2 — 3 — 8, а дальше продолжения нет. Значит, четвёртая цифра — 5, и продолжение: 5 — 7 — 6 — 9 — 5 — 7 — 6 и так далее. Тогда мы получаем почти периодическую последовательность: 4 — 6 — 9 — 5 — 7 — 6 — 9 — 5 — 7 — ..., в которой период равен 4. Тогда на 2022 месте будет стоять цифра 6, так как $2022 = 1 + 4 \cdot 505 + 1$. Выше было показано, что цифра 2 встретиться в начальных позициях загаданного числа не может. Но при этом она может быть первой, второй или третьей с конца. Поэтому возможна ситуация, когда в предыдущей последова-

тельности после последней цифры 9 стоят цифры 2 — 3 — 8. Тогда последняя цифра числа — 8.

3. Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}$.

Решение. Для нечётных n

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \\ f(f(x)) &= \frac{1}{\sqrt[n]{1-\frac{1}{1-x^n}}} = \sqrt[n]{1-\frac{1}{x^n}}, \\ f(f(f(x))) &= \sqrt[n]{1-(1-x^n)} = x, \\ f(f(f(f(x)))) &= f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, значения функции периодически повторяются с периодом, равным 3.

Так как остаток от деления 1303 на 3 равен 1, то

$$\begin{aligned} f(f(f(f(f(...f(2022)))))) &= \\ = f(2022) &= \frac{1}{\sqrt[5]{1-2022^5}}. \end{aligned}$$

4. Ответ: $\frac{3}{\sin \frac{\pi}{11}} - \sqrt{3}$.

Решение. Решим задачу с условием в общем виде.

Около (или внутри) конуса с углом при вершине в осевом сечении, равном 2α , расположены n шаров радиуса r , каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Пусть O — центр окружности основания конуса радиуса R , Q_1 — центр одного из шаров радиуса r , H_1 — точка касания этого шара с плоскостью основания (шар либо внутри, либо вне конуса, см. рис. 3), H_2 — точка касания соседнего шара с плоскостью основания конуса (см. рис. 4). Значит, для внешнего касания

$$AH_1 = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)},$$

а для внутреннего –

$$AH_1 = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

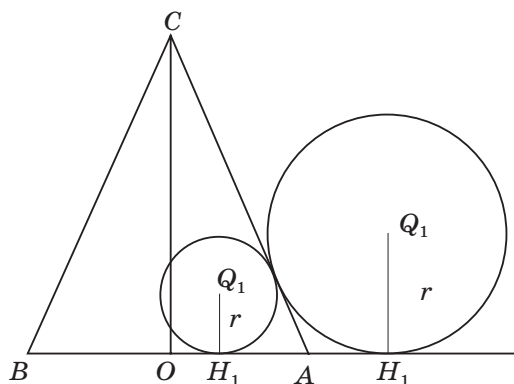


Рис. 3

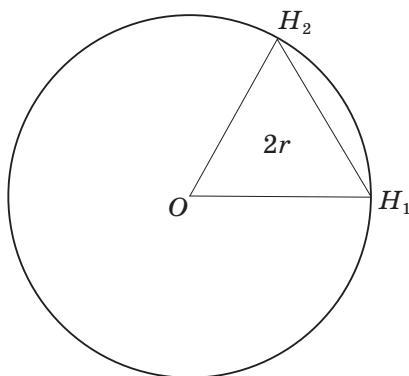


Рис. 4

Так как каждый шар касается двух соседних, то точки касания этих шаров с плоскостью основания конуса расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность с центром в точке O , радиуса OH_1 и стороной, равной $2r$.

Поэтому $r = OH_1 \sin \frac{\pi}{n}$, где $OH_1 = R + AH_1$ (при внешнем касании) или $OH_1 = R - AH_1$ (при внутреннем касании).

В случае внешнего касания

или

$$R = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} \right)$$

$$R = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \right) -$$

в случае внутреннего касания.

5. Ответ:

$$\left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) \cup (10; +\infty).$$

Решение. Напрямую значения a , b , c сравнивать сложно. Однако, чтобы среднее из трёх чисел было положительным, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере два числа из них были положительными.

$$a = t^3 - 100t = t(t - 10)(t + 10) > 0$$

при $t \in (-10; 0) \cup (10; +\infty)$.

$$b = 2^t - 16 > 0$$

при $t > 4$.

$$c = \sin t - \frac{1}{2} > 0$$

при $t \in \left(2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{5\pi}{6}\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Нужно, чтобы хотя бы два из трёх чисел были положительными.

$$a > 0 \text{ и } b > 0 \text{ при } t > 10.$$

Значит, область $(10; +\infty)$ идёт в ответ.

$a \leq 0$ и $b \leq 0$ при $t \in (-\infty; -10] \cup [0; 4]$, поэтому этой области в ответе быть не может.

На оставшейся области $(-10; 0) \cup (4; 10]$ положительно только одно из чисел a , b . Значит, в ответ пойдут те её части, где $c > 0$. Посмотрим, как пересекаются множества $(-10; 0) \cup (4; 10]$ и $\left(2\pi n + \frac{\pi}{6}; 2\pi n + \frac{5\pi}{6}\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

При $n = 0$ получим интервал

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right).$$

Он с областью $(-10; 0) \cup (4; 10]$ не пересекается, ведь $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} < 4$.

При $n = 1$ получим интервал

$$\left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right).$$

Он лежит в области целиком, ведь $4 < 2\pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{5\pi}{6} < 10$.

При $n = -1$ получим интервал

$$\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right).$$

Он тоже лежит в области целиком, ведь $-10 < -2\pi + \frac{\pi}{6} < -2\pi + \frac{5\pi}{6} < 0$.

При $n = -2$ получим интервал

$$\left(-4\pi + \frac{\pi}{6}; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right).$$

Поскольку $-4\pi + \frac{\pi}{6} < -10 < -4\pi + \frac{5\pi}{6}$, то этот интервал пересекается с областью $(-10; 0) \cup (4; 10]$, пересечение – это множество $\left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$, которое пойдёт в ответ.

При остальных n интервалы заведомо лежат либо далеко левее -10 , либо правее 10 , и на ответ не повлияют.

В итоге ответ складывается из объединения множеств

$$(10; +\infty), \left(2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}; -2\pi + \frac{5\pi}{6}\right), \left(-10; -4\pi + \frac{5\pi}{6}\right).$$

6. Ответ: $\frac{\pi}{4}$ при $a = 0$.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - a)(a \operatorname{tg} x + 2) = 0,$$

откуда при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ либо $\operatorname{tg} x = 1$ и тог-

да $x = \frac{\pi}{4}$, либо $\operatorname{tg} x = a$ и тогда $x = \operatorname{arctg} a$, либо (при $a \neq 0$) $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{a}$ и тогда $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{a}$. Таким образом, данное уравнение имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ два или три различных корня.

Рассмотрим три случая:

1) $a = 0$. Остаются корни $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = 0$, которые отличаются на $\frac{\pi}{4}$;

2) $a > 0$. Разность между корнями $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{a} < 0$ будет больше, чем $\frac{\pi}{4}$;

3) $a < 0$. Разность между корнями $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \operatorname{arctg} a < 0$ снова оказывается больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

7. Ответ: $\sqrt{6}$.

Решение. Так как треугольник ABC остроугольный, точка пересечения высот лежит внутри него. Поэтому угол BKH будет острым. Чем больше острый угол, тем больше его тангенс. Поэтому условие максимальности угла BKH можно заменить на условие максимальности его тангенса. По формуле тангенса разности имеем

$$\operatorname{tg} \angle BKH = \operatorname{tg}(\angle BKD - \angle DKH) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \angle BKD - \operatorname{tg} \angle DKH}{1 + \operatorname{tg} \angle BKD \cdot \operatorname{tg} \angle DKH} =$$

$$= \frac{\frac{BD}{DK} - \frac{DH}{DK}}{1 + \frac{BD}{DK} \cdot \frac{DH}{DK}} = \frac{(BD - DH) \cdot DK}{DK^2 + BD \cdot DH}.$$

Максимум этого выражения достигается при том же значении $DK = x$, что и минимум выражения

$$y = \frac{x^2 + BD \cdot DH}{x} = x + \frac{BD \cdot DH}{x}.$$

Производная y' равна $1 - \frac{BD \cdot DH}{x^2}$ и обращается в нуль при $x = \sqrt{BD \cdot DH}$ (нас интересуют только положительные значения x). Нетрудно проверить, что эта точка будет точкой минимума.

Заметим, что $DH : AD = \operatorname{tg} \angle HAD = \operatorname{ctg} \angle BCD = DC : BD$, откуда $AD \cdot DC = DH \cdot BD$. Таким образом, $x = \sqrt{AD \cdot DC} = \sqrt{6}$.

Задачи и решения олимпиады «Ломоносов» по математике прошлых лет печатались в журнале ранее [1]–[5]. Все задачи заключительных этапов олимпиады с 2005 по 2019 годы и большинство задач отборочных этапов опубликованы в книге [6].

Работа Д.В. Горяшина, В.С. Панфёрова и И.Н. Сергеева выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14192.

Список источников

1. Олимпиада «Ломоносов – 2020–2021» по

математике для 10–11 классов / И.В. Астахова и др. // Математика в школе. – 2022. – № 3. С. 9–19.

2. Олимпиада «Ломоносов – 2019–2020» по математике для 10–11 классов / И.В. Астахова и др. // Математика в школе. – 2021. – № 2. С. 13–20.

3. Олимпиада «Ломоносов – 2018–2019» по математике для 10–11 классов / И.В. Астахова и др. // Математика в школе. – 2020. – № 2. С. 14–25.

4. Олимпиада «Ломоносов – 2017–2018» по математике для 1–11 классов / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2018. – № 4. С. 33–45.

5. Олимпиада «Ломоносов – 2016–2017» по математике для 10–11 классов / Д.В. Горяшин и др. // Математика в школе. – 2017. – № 6. С. 22–33.

6. Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005 – 2019) / А.В. Бегунц и др. – М.: МЦНМО, 2020. – 232 с.

Статья поступила в редакцию 26.12.2022.

Принята к публикации 22.03.2023.

В новой российской системе высшее образование разделят на три ступени — базовое, специализированное и аспирантура, следует из презентации, которую показал глава Минобрнауки России Валерий Фальков

«Базовое (основное) высшее образование (срок обучения от четырех до шести лет). Специализированное высшее образование: магистратура (один-два года), ординатура, ассистентура-стажировка. Аспирантура (адъюнктура)», — указывается на слайдах, которые министр показал во время своего доклада на расширенном заседании Российского союза ректоров в Московском государственном университете.

Согласно материалам, базовый (основной) уровень будет соответствовать бакалавриату или специалитету. Он должен «обеспечить междисциплинарный, практико-ориентированный подход к подготовке кадров», а точные сроки обучения будут устанавливаться исходя из потребности рынка труда.

Специализированное высшее образование обеспечит углубленную подготовку, но только для тех, кто закончил первую ступень.

Аспирантура, как ранее заявлял министр, будет выделена в отдельный уровень образования, направленный на подготовку научных и научно-практических кадров. Поступить в аспирантуру смогут те, кто окончил базовую ступень со сроком обучения не менее пяти лет или получил специализированное высшее образование.

Источник: ria.ru

РЕШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ ПО КЛЮЧЕВЫМ СЛОВАМ

SOLVING PROBABILISTIC PROBLEMS BY KEYWORDS

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_35

Е.М. Петлина, канд. физ.-мат. наук, доцент,
356620@gmail.com;

Л.Г. Зверева, канд. эконом. наук, доцент,
bdeh@mail.ru

Ставропольский государственный педагогический институт (г. Ставрополь)

E.M. Petlina, PhD (Phys&Math), Associate Professor,
356620@gmail.com;

L.G. Zvereva, PhD (Economics), Associate Professor,
bdeh@mail.ru

Stavropol State Pedagogical Institute (Stavropol)

Аннотация: в статье описана методика решения вероятностных задач, которая предполагает при решении задач применять основные правила путём сведения их к некоторым ключевым словам. Решение задач по теории вероятностей включает анализ условия и выявление ключевых слов. Приведены примеры решения задач

Abstract: the article describes a method for solving probabilistic problems, which involves reducing them to some keywords when studying the basic rules. Solving problems in probability theory involves analyzing the condition and identifying keywords. Examples of problem solving are given

Ключевые слова: вероятность, ключевое слово, рассуждение, анализ, сумма вероятностей, произведение вероятностей

Keywords: probability, keyword, reasoning, analysis, sum of probabilities, product of probabilities

© Е.М. Петлина, Л.Г. Зверева 2023

Теория вероятностей вошла в школьный курс сравнительно недавно. Однако вероятностно-стохастическая линия включена во все школьные программы. Кроме того, в комплектах ОГЭ и ЕГЭ присутствуют задания из этого раздела математики. Особенно актуально встал вопрос изучения вероятностных задач после введения с сентября 2022 года нового Федерального государственного образовательного стандарта, который предусматривает введение учебного курса «Вероятность и статистика» [5, 6].

Вводная часть вероятностно-стохастической линии проблем у обучающихся не вызывает [1, 2, 3]. Они успешно применяют формулы классической, статисти-

ческой или геометрической вероятности. Зачастую у обучающихся возникают сложности с применением формул теории вероятностей в случаях, когда необходимо вычислить вероятность сложного события. В этой статье рассмотрим методику по применению формул для расчёта вероятностей составных событий на основе ключевых слов.

Для решения вероятностных задач необходимы гибкость и адаптивность мышления, динамизм, способность действовать в условиях неопределённости и неоднозначности. Эти характеристики обеспечивают способность обучающегося порождать алгоритмы шаблонных идей, выявлять типичные черты задач, свой-

ства, выделять компоненты, составляющие внутреннюю структуру и определяющие выбор применяемых формул.

Следуя рассуждениям, изложенным в работе [4], будем считать, что операция «сложение» применяется при ключевом слове «ИЛИ», а операция «умножение» – при слове «И». Кроме того, при выборе расчётной формулы необходимо учитывать тип событий. Тогда выбор формул для решения вероятностной задачи можно представить в виде следующего алгоритма, указанного на рисунке 1.

Продemonстрируем этот подход при решении задач, размещённых в демонстрационных вариантах ОГЭ и ЕГЭ [7].

Рассмотрим задачи, направленные на применение правил умножения вероятностей.

Задача 1. В магазине работает три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найти вероятность, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно. Считать, что клиенты заходят в магазин независимо друг от друга.

Решение. Введём события, о которых говорится в задаче.

Пусть событие A означает, что занят первый продавец, B – занят второй, C – занят третий.

Нам необходимо найти занятость и первого, и второго, и третьего продавцов. Мы употребили ключевое слово «И», поэтому будем использовать правило умножения. Так как клиенты приходят независимо друг от друга, используем формулу умножения для независимых событий:

$$p = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027.$$

Таким образом, вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно, равна 0,027.

Рассмотрим другой случай.

Задача 2. В связке имеется 5 ключей, из которых только один подходит к двери. Найти вероятность, что на открывание двери потребуется три попытки, при условии, что использованный ключ в последующем не участвует.

Решение. Чтобы открыть дверь, у нас есть и первая, и вторая, и третья попытки.

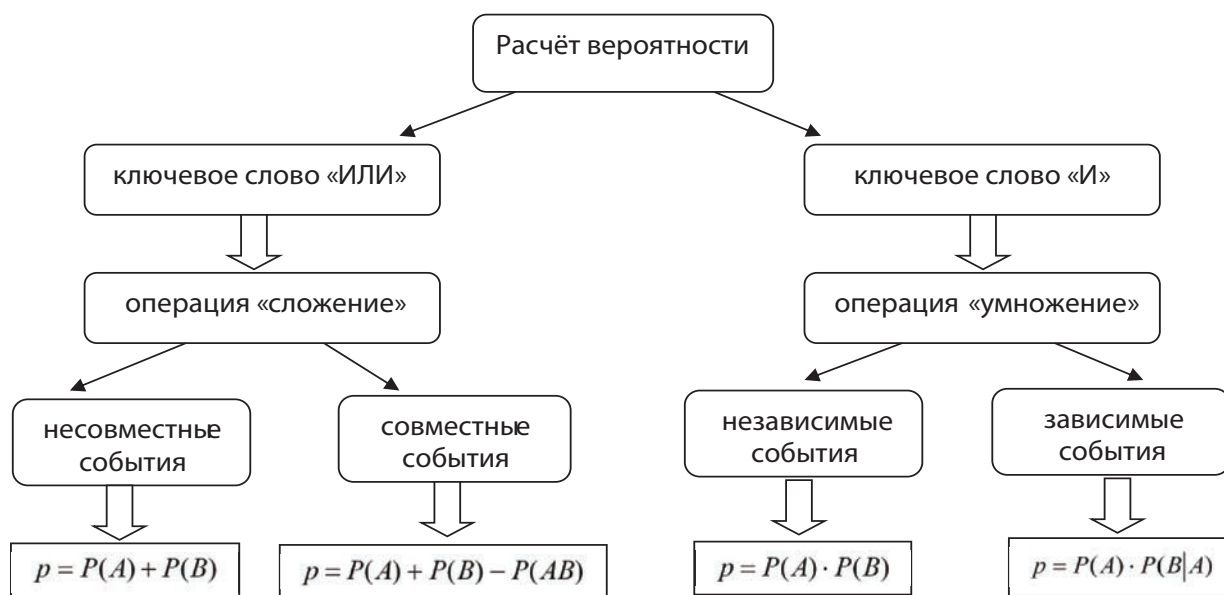


Рис. 1. Алгоритм расчёта вероятности

Использовано ключевое слово «И», поэтому будем применять формулу умножения. Поскольку ключи на одной связке и использованный ключ в дальнейших попытках не участвует, то применяем формулу для зависимых событий.

Обозначим через A событие, означающее, что первый ключ подошёл, тогда $\bar{A}$ – событие, означающее, что первый ключ не подошёл. Событие B , состоящее в том, что второй ключ подошёл, определяется при условии, что первый ключ не подошёл, то есть рассматриваем условную вероятность $P(B|\bar{A})$. Тогда вероятность, что второй ключ не подошёл, определяется формулой:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - P(B|\bar{A}).$$

Аналогично вводим вероятность для события C , состоящего в том, что третий ключ подойдёт. Вероятность этого события вычисляем при условии, что первый и второй ключи не подошли: $P(C|\bar{A} \cdot \bar{B})$. Тогда искомая формула, позволяющая найти требуемую в задаче вероятность, примет вид:

$$p = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) \cdot P(C|\bar{A} \cdot \bar{B}). \quad (1)$$

Рассчитаем каждую вероятность отдельно.

Используя классическое определение вероятности, получаем, что вероятность того, что дверь откроется с первого раза, определяется по классической формуле и равна $P(A) = \frac{1}{5}$ (число благоприятствующих исходов $m = 1$, а число всех исходов $n = 5$). Тогда вероятность противоположного события, состоящего в том, что первый ключ не подойдёт, находится по формуле:

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{5},$$

то есть вероятность события, противоположного к A , определяется соответствующим

числом благоприятствующих исходов: $m = 4$ ключа не подходят к замку (число всех исходов $n = 5$).

Чтобы найти условную вероятность, что второй ключ не подойдёт, необходимо уменьшить общее количество ключей до четырёх ввиду того, что первый ключ уже использовали, и он не подошёл. Тогда по классическому определению вероятности:

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4},$$

следовательно, вероятность противоположного события, что второй ключ не подойдёт, можно найти по формуле:

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

Аналогично по классическому определению находим вероятность, что подойдёт третий ключ, учитывая, что первый и второй не подошли. Число благоприятствующих исходов $m = 1$, а общее число исходов

$$n = 3: P(C|\bar{A} \cdot \bar{B}) = \frac{1}{3}.$$

Подставляем в формулу (1), получаем:

$$P = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Таким образом, вероятность того, что на открывание двери потребуется три попытки, равна 0,2.

Далее рассмотрим задачи, демонстрирующие правило суммы вероятностей.

Задача 3. Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более одного года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более двух лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более одного года, но не более двух лет?

Решение. Обозначим события, которые указаны в задаче.

Пусть A – событие, состоящее в том, что мотор холодильника прослужит больше одного года, но не более двух лет, B – событие, означающее, что мотор холодильника прослужит больше двух лет.

По условию нам известна вероятность, что мотор холодильника прослужит больше года. Эта вероятность включает в себя два события: мотор холодильника прослужит больше года, но не более двух лет, или, что мотор холодильника прослужит больше двух лет. Мы использовали ключевое слово «ИЛИ», следовательно, для расчёта вероятностей будем использовать формулу суммы. Поскольку рассматриваемые события несовместны, то используем следующее равенство:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

По условию нам известны вероятности $P(A + B) = 0,8$ и $P(B) = 0,6$. Тогда

$$P(A) = P(A + B) - P(B) = 0,8 - 0,6 = 0,2.$$

Таким образом, вероятность того, что мотор прослужит более одного года, но не более двух лет, равна 0,2.

Рассмотрим второй случай применения правила суммы вероятностей.

Задача 4. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть исправен с вероятностью 0,95 независимо от другого автомата. Найти вероятность, что хотя бы один автомат исправен.

Решение. Пусть A – событие, что исправен первый платёжный автомат, а B – событие, что исправен второй платёжный автомат.

Нам необходимо найти вероятность, что исправен или первый платёжный автомат, или второй. Используется ключевое слово «ИЛИ», поэтому будем применять операцию «сложение». Рассматриваемые события – это совместные независимые события, поэтому используем формулу:

$$p = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,95 + 0,95 - 0,95 \cdot 0,95 = 0,9975.$$

Следовательно, вероятность, что хотя бы один автомат исправен, равна 0,9975.

Таким образом, рассмотренные варианты применения формул для расчёта вероятности составного события демон-

стрируют алгоритм рассуждений, который предполагает использование ключевых слов для обоснования применения основных правил вычисления вероятностей.

Список источников

1. Гулыгина Е.В., Бондарева К.В. Применение деятельностного подхода к обучению решения комбинаторных и вероятностных задач в основной школе // Актуальные тенденции и инновации в развитии российской науки: сборник научных статей. М., 2021. С. 13–18.

2. Зверева Л.Г., Власова А.Н. Методика преподавания элементов теории вероятностей в школьном курсе математики // Проблемы и тенденции развития информационных и производственных систем: сборник научных статей по материалам Международной научно-практической конференции. Ставрополь, 2019. С. 232–236.

3. Патронова Н.Н., Троицкая О.Н., Шабанова М.В. Вероятностно-статистический стиль мышления и его развитие при обучении математике. Архангельск, 2011. 78 с.

4. Петлина Е.М. Решение комбинаторных задач по ключевым словам // Математика в школе. 2022. № 2. С. 26–30.

5. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».

6. Приказ Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования».

7. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». Демоверсии, спецификации, кодификаторы [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory>.

Статья поступила в редакцию 12.07.2022.

Принята к публикации 27.10.2022.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЧЕРТЕЖА С ПОМОЩЬЮ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ В ЗАДАЧАХ НА ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ

TRANSFORMATION OF A GEOMETRIC DRAWING WITH THE HELP OF ADDITIONAL CONSTRUCTIONS IN PROBLEMS ON RELATIONS OF LINES

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_39

Т.В. Бежану, канд. пед. наук, доцент,
Петрозаводский государственный университет
(Петрозаводск), bezhanu@petrsu.ru;

В.А. Тимошкина, учитель математики
МБОУ «Средняя школа № 34» (Петрозаводск),
veronika0372@yandex.ru

T.V. Bezhanu, PhD (Pedagogy), associate Prof.,
Petrozavodsk State University (Petrozavodsk),
bezhanu@petrsu.ru;

V.A. Timoshkina, mathematics teacher
MEBI «Secondary school № 34» (Petrozavodsk),
veronika0372@yandex.ru

Аннотация: в статье рассматриваются геометрические задачи на отыскание отношений отрезков, для решения которых требуется выполнить преобразование исходного чертежа с помощью дополнительных построений. Предлагается последовательность действий по построению вспомогательной прямой. Обсуждаются вопросы методики обучения решению задач на отношения отрезков

Abstract: the article deals with geometric problems for finding the ratio of segments, for the solution of which it is necessary to perform the transformation of the original drawing with the help of additional constructions. A sequence of actions for constructing an auxiliary line is proposed. Questions of teaching methodology for solving problems on the ratios of segments are discussed

Ключевые слова: отношение отрезков, геометрический чертёж, дополнительные построения, признаки подобия треугольников, теорема о пропорциональных отрезках, паспортная прямая

Keywords: segment relations, geometric drawing, additional constructions, signs of similarity of triangles, proportional segment theorem, passport line

© Т.В. Бежану, В.А. Тимошкина 2023

На страницах журнала «Математика в школе» есть ряд публикаций, посвящённых задачам на отыскание отношений отрезков (см., напр., [5]–[8]). Такие задачи нередко можно встретить среди конкурсных задач (ЕГЭ по математике профильного уровня, математические олимпиады и т.п.). Способы их решения различны. Для отыскания некоторого отношения отрезков, как правило, применяются признаки подобия треуголь-

ников и теорема о пропорциональных отрезках (обобщённая теорема Фалеса). В настоящей работе авторы акцентируют внимание на задачах, для решения которых необходимо выполнить преобразование исходного геометрического чертежа. В таких случаях ввиду отсутствия на первоначальном чертеже подобных треугольников или угла, стороны которого пересечены параллельными прямыми, выполняется дополнительное

построение прямой, параллельной одной из имеющихся на чертеже.

В качестве примера рассмотрим задачу ЕГЭ по математике профильного уровня 2020 года.

Задача 1. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 21 : 10$, $BA_1 : A_1C = 2 : 3$, $AB_1 : B_1C = 2 : 5$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 63$, $BC = 25$.

Уделим внимание только пункту а) данной задачи, так как именно в этой её части требуется установить отношение отрезков.

Решение, представленное разработчиками ЕГЭ, основывается на выполнении дополнительного построения и дальнейшего использования образованных на чертеже вспомогательных подобных треугольников.

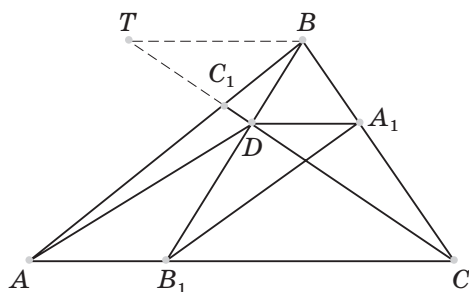


Рис. 1

Для получения подобных треугольников через вершину B проводится прямая, параллельная стороне AC исходного треугольника; прямая CC_1 продолжается до взаимного пересечения с новой линией в точке T (рис. 1). Далее рассматриваются пары подобных треугольников ACC_1 и BTC_1 , B_1DC и BDT , устанавливается ра-

венство отношений $\frac{BD}{DB_1}$ и $\frac{BA_1}{A_1C}$, что по теореме, обратной обобщённой теореме Фалеса, определяет параллельность прямых A_1D и CB_1 . Дальнейшее рассмотрение подобных треугольников DBA_1 и B_1BC , а также использование исходного отношения $AB_1 : B_1C$ позволяет установить равенство отрезков A_1D и AB_1 и, окончательно, требуемое задачи.

Обратимся к обсуждению вопроса преобразования геометрического чертежа с помощью дополнительного построения прямой, параллельной одной из имеющихся на чертеже, и рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Если в условии задачи присутствует параллельность некоторых прямых, то её необходимо использовать в решении, не усложняя конструктивно чертёж путём построения новых параллельных прямых. Приведём пример.

Задача 2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M принадлежит стороне BC , точка N – стороне CD . Известно, что $BM : MC = 1 : 3$ и $CN : ND = 2 : 5$. Отрезок DM пересекает AN в точке K . Определите $AK : KN$.

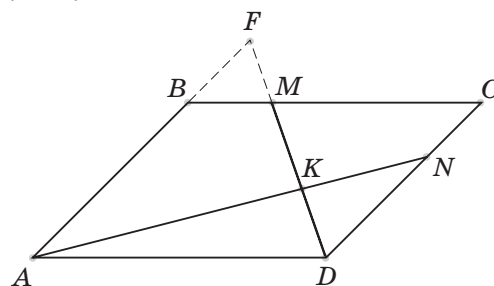


Рис. 2

С целью получения подобных треугольников, отсутствующих изначально, можно преобразовать исходный чертёж, продолжив отрезки AB и DM до взаимного пересечения (рис. 2). В результате на чертеже образуются две пары подобных треуголь-

ников: *BFM* и *CDM*, *AFK* и *NDK*, рассмотрение которых позволит найти требуемое отношение отрезков.

Можно ли решить задачу 2, выполняя всё-таки построение параллельных прямых? Можно. Но исходный чертёж, конечно же, будет конструктивно усложнён.

Случай 2. Несколько иначе обстоит дело в ситуации отсутствия заданной параллельности. В таком случае новую прямую, параллельную одному из отрезков на чертеже, необходимо построить (чтобы на чертеже появились подобные треугольники или угол, стороны которого пересечены параллельными прямыми). Реализовать такое построение можно по-разному.

На чертеже зачастую имеется ряд точек, через которые можно провести новую прямую, и ряд отрезков, параллельно которым можно построить вспомогательную линию. В частности, в решении задачи 1 можно провести прямую, параллельную CC_1 через точку B_1 (или через точку B). Или через точку C провести прямую, параллельную BB_1 , и отрезок AB продолжить до взаимного пересечения с новой прямой и т.д.

Аспекты решения задач на отыскание отношений отрезков с помощью различного выполнения дополнительного построения прямой, параллельной одной из имеющихся на чертеже, отражены в публикациях [3, 4].

Полагаем, что именно многообразие способов реализации дополнительного построения вызывает больше всего трудностей у школьников на первоначальном этапе решения обсуждаемых задач. К слову сказать, использование дополнительных построений при решении геометрических задач у учащихся в целом затруднено.

В методике обучения геометрии накоплен опыт по снижению обозначенных

трудностей, который заключается в реализации соответствующей подготовительной работы. В ходе неё целесообразно выполнять решение следующих задач:

1) на чтение геометрического чертежа («найдите на чертеже подобные треугольники», «найдите на чертеже угол, стороны которого пересечены параллельными прямыми») с предъявлением различных геометрических конструкций (см. [7]);

2) на построение вспомогательных подобных треугольников с помощью параллельных прямых (использование циркуля не предполагается, см. [2]). Например, в рамках решения задачи 1: постройте треугольник, подобный треугольнику ACC_1 (или треугольнику ABB_1 и т.д.). При этом выполняется варьирование исходной фигуры (треугольник, параллелограмм, трапеция) с целью получения необходимых фигур либо путём явного построения параллельных прямых, либо путём использования заданной параллельности.

Можно «усилить» требование: постройте подобные треугольники таким образом, чтобы некоторые отрезки стали их сходственными сторонами. Например, в рамках решения задачи 1: постройте треугольник, подобный треугольнику ACC_1 таким образом, чтобы отрезки AC_1 и C_1B являлись сходственными сторонами в подобных треугольниках. В таком случае уместно, на наш взгляд, использование методического приёма «бантик» (см. [4]). Этот приём непосредственно полезен и в решении задач на отношения отрезков, когда обучающиеся приходят к выводу, что на чертеже необходимо иметь подобные треугольники, которых изначально нет. Мысленно заключив один из отрезков искомого отношения в некоторый треугольник, подобный ему треугольник несложно построить «бантиком».

Выполняя такую подготовительную работу до решения задач на отношения отрезков, можно снизить трудности обучающихся при выполнении преобразования чертежа.

Тем не менее, предпримем попытку конкретизировать действия учащихся по реализации дополнительного построения прямой, параллельной одной из имеющихся на чертеже. Через какую именно точку и параллельно какому именно отрезку провести вспомогательную линию в случае, если на чертеже имеется несколько точек и отрезков, и при этом заданной по условию параллельности не наблюдается? Для ответа на эти вопросы обратимся к так называемому методу паспортной прямой.

Данный метод решения геометрических задач находит отражение в работах различных авторов (см., напр., [1], [3]). Продemonстрируем его при решении задачи 1 в той части, где определяется отношение отрезков BD и DB_1 .

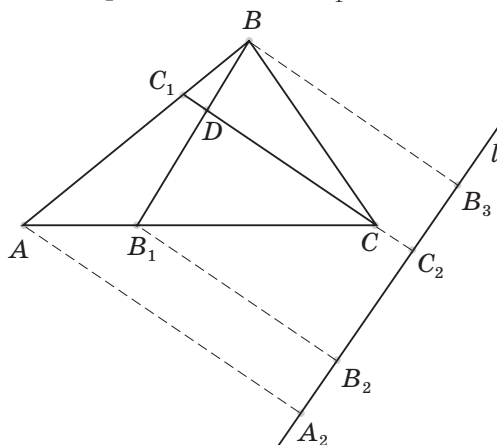


Рис. 3

Проведём паспортную прямую l (рис. 3). В направлении прямой CC_1 спроектируем все точки чертежа на прямую l . Согласно обобщённой теореме Фалеса $\frac{A_2C_2}{C_2B_3} = \frac{21}{10}$, $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{2}{5}$. Используя коэффи-

циенты пропорциональности, получаем: $\frac{B_3C_2}{C_2B_2} = \frac{2}{3}$, следовательно, и $\frac{BD}{DB_1} = \frac{2}{3}$.

Последовательность действий при решении геометрических задач с помощью паспортной прямой представлена в работе [1]. Акцентируем здесь внимание на выборе направления проектирования (то есть того отрезка на чертеже, параллельно которому выстраиваются новые линии).

В качестве направляющей проектирования выбираем отрезок, который не содержит в себе ни исходных, ни искомых отношений. В противном случае на паспортную прямую «переходит» информация, которая неизвестна по условию, и в то же время «не переходит» информация (возможно, её часть), диктуемая условием и требованием задачи. Решение задачи в такой ситуации будет невозможно либо сильно затруднено.

В рамках решения задачи 1 имеет место единственный отрезок, который не содержит в себе исходных и искомых отношений. Это отрезок CC_1 . В случае выбора между разными неизвестными отрезками (предположим, в задаче 1 в условии нет никакой информации также об отрезке BC) в качестве направления проектирования выбирается отрезок, на котором больше неизвестных данных (в предположении изменённого условия задачи 1 таковым отрезком всё равно выступает отрезок CC_1 , так как на нём два неизвестных отрезка, а на BC – один). Если отрезки «равнозначны» по этому критерию, то в качестве направления проектирования можно выбрать любой из них.

Обратим внимание на то, что в решении задачи на отношения отрезков как с помощью дополнительных построений, так и с помощью паспортной прямой выполняется схожая деятельность – построение параллельных прямых.

Заметим, что зачастую не нужно выстраивать отдельную паспортную прямую, проще использовать в качестве «готовой» паспортной прямой одну из уже имеющих на чертеже. Самое естественное — ту, что содержит отрезок, про который мы «что-то знаем» по условию задачи. Именно на него в дальнейшем будет «перенесена» вся информация, диктуемая задачей ситуацией. «Готовая» паспортная прямая может содержать и отрезок, на котором располагается требуемое отношение.

Параллельно какому отрезку на чертеже построить новую прямую? Параллельно отрезку, про который в задаче ничего не известно.

Вернёмся к решению задачи 1. В качестве «готовой» паспортной прямой можно выбрать прямую AB , AC или BB_1 . Вспомогательную прямую будем строить параллельно отрезку CC_1 , проводя её либо через точку B_1 (рис. 4а), либо через точку B (рис. 4б), либо через точку A (рис. 4в). Далее в решении следует использовать вспомогательные подобные треугольники или теорему о пропорциональных отрезках.

Полагаем, что учащиеся в решении задачи будут реализовывать первый из предложенных вариантов (рис. 4а), поскольку практика показывает, что выполнять преобразование чертежа внутри фигуры решающему несколько комфортнее, чем за её пределами.

Идея использования паспортной прямой в задачах, традиционно решаемых с помощью дополнительных построений, возникла у авторов неслучайно. Метод паспортной прямой даёт очень красивые решения задач, в которых требуется установить некоторое отношение отрезков как итоговый результат, а не как промежуточный шаг в решении. И учащиеся это ценят, о чём свидетельствует опыт авторов.

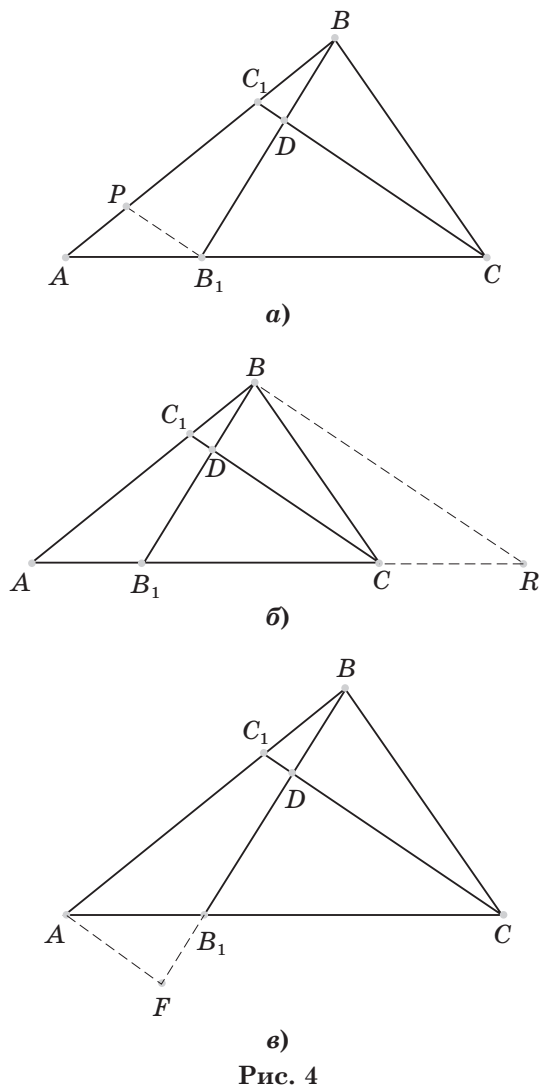


Рис. 4

Однако красота метода несколько тускнеет, если после нахождения отношения отрезков необходимо вернуться в исходный чертёж и продолжить решение задачи, используя свойства фигур. Например, в задаче 1 необходимое отношение отрезков устанавливается на паспортной прямой за пределами чертежа (рис. 3), для завершения же решения нужно вернуться в исходную геометрическую конструкцию. При использовании «готовой» паспортной прямой такой ситуации не возникает.

Итак, при решении задач на отноше-

ния отрезков для реализации дополнительного построения прямой, параллельной одной из имеющихся на чертеже, с целью получения вспомогательных подобных треугольников (или угла, стороны которого пересекаются параллельными прямыми) можно выделить следующую последовательность действий:

1) выбрать отрезок 1, параллельно которому будем строить новую прямую (тот, который не содержит исходных или искомых отношений);

2) выбрать отрезок 2, на котором располагаются известные (либо искомые) отрезки;

3) через точку, не принадлежащую отрезку 2, построить прямую, параллельную отрезку 1.

Это позволит конкретизировать действия учащегося. Деятельность по преобразованию исходного чертежа станет более определённой.

Следует сказать, что в решении задач на отыскание отношений отрезков возможно использование теоремы Менелая. Например, в задаче 1 данный геометрический факт позволяет получить более рациональное решение, не предполагающее преобразование геометрического чертежа. Однако в школьном курсе геометрии знакомство с теоремами Менелая и Чебы реализуются не всегда.

Более того, есть задачи, в решении которых более рационально использовать дополнительные построения, а не теорему Менелая. Одной из таких задач является задача 2. Если продолжить до взаимного пересечения отрезки AB и DM , AN и BC , то на чертеже будет представлено 7 различных конструкций Менелая. Но ни одна из них не позволит быстро определить искомое отношение отрезков.

В заключение отметим, что получение последовательности действий по преобразованию геометрического чертежа с помо-

щью дополнительных построений в решении задач на отношения отрезков можно реализовать вместе с обучающимися. Например, в рамках элективного курса по геометрии после решения задач с применением дополнительных построений и метода паспортной прямой, выполнив сравнительный анализ способов решения и их обобщение.

Список источников

1. Басова Л.А., Бежану Т.В., Зубова П.И. Паспортная прямая в решении задач на отыскание отношений отрезков // Журнал научных публикаций «Вопросы педагогики», 2020. № 5–1. С. 60–64.
2. Бежану Т.В. Вспомогательные подобные треугольники как метод решения геометрических задач // Журнал научных публикаций «Вопросы педагогики», 2019. № 4–2. С. 40–43.
3. Бежану Т.В., Маркова С.И., Соболева И.В. О методах решения задач на отношения отрезков // Федеральный научно-методический журнал «Мастер-класс», 2021. № 9. С. 28–35.
4. Воронин В.В. Отношения отрезков и площадей: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2016. 40 с.
5. Генкин Г.З. О решении задач на отношение длин отрезков сторон треугольника и его чевиан // Математика в школе, 2006. № 4. С. 74–75.
6. Иванов К.А. О пропорциональных отрезках в треугольнике // Математика в школе, 2004. № 8. С. 20–25.
7. Крачковский С.М. Изменяем визуальный образ геометрических объектов // Математика в школе, 2015. № 8. С. 48–58.
8. Пантелеев В.Н. Пропорциональные отрезки и то, что за ними // Математика в школе, 2004. № 8. С. 25–31.

Статья поступила в редакцию	28.10.2022.
Принята к публикации	17.01.2023.

ПЛОСКИЕ ЛИНИИ КАК ПРЕДМЕТ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ (ОГИБАЮЩАЯ)

PLANE LINES AS A SUBJECT OF EDUCATIONAL RESEARCH PROJECTS (ENVELOPE)

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_45

Г.А. Клековкин, канд. физ.-мат. н., доц., МГПУ, Самара, klekovkin_ga@mail.ru

G.A. Klekovkin, PhD (Phys&Math), Associate Professor, MGPU, Samara, klekovkin_ga@mail.ru

Аннотация: в статье рассматривается моделирование в среде интерактивной математической системы GeoGebra **однопараметрических семейств** плоских кривых, имеющих огибающую

Abstract: the article considers modelling of one-parameter classes of plane curves having an envelope, in the interactive mathematical system GeoGebra environment

Ключевые слова: плоские линии, огибающая, каустика, эволюта, интерактивная математическая система GeoGebra, **циклоидальные кривые**

Keywords: flat lines, envelope, caustic, evolute, interactive mathematical system GeoGebra, cycloidal curves

© Г.А. Клековкин 2023

1. Огибающая семейства кривых.

Продолжим знакомство с моделированием плоских кривых и их свойств в среде GeoGebra (см. [5]–[6], [7]). Данная статья будет посвящена моделированию однопараметрических семейств кривых, имеющих огибающую.

Пусть имеется уравнение

$$F(x, y, a) = 0, \quad (*)$$

содержащее кроме переменных x, y переменную a , принимающую значения в некотором числовом промежутке I . Придавая a различные значения из I , с помощью уравнения $(*)$ в системе координат Oxy можно задать бесконечное множество плоских кривых. В общем случае кривые могут отличаться друг от друга расположением относительно системы координат, формой и видом.

Нас будут интересовать такие семейства, для которых существует кривая, ка-

сающаяся в каждой своей точке некоторой кривой рассматриваемого семейства. Эта кривая называется *огибающей* данного семейства кривых.

Для отыскания уравнения огибающей семейства кривых, заданного уравнением $(*)$, находят производную

$$F'_a(x, y, a) = 0 \quad (**)$$

от F по a , а затем из уравнений $(*)$, $(**)$ исключают параметр a . Полученное после этого уравнение будет связывать только переменные x, y и определять кривую, которую называют *дискриминантной кривой* семейства. Огибающая семейства, если она существует, либо совпадает с дискриминантной кривой, либо является её частью. Обоснование описанного способа нахождения уравнения огибающей можно найти в брошюре [2] В.Г. Болтянского либо в его статье [1].

Понятие огибающей семейства кривых

открывает широкие возможности для введения новых видов кривых и отыскания новых способов образования и определения уже известных кривых. Решая эти задачи, сначала обычно на одном рисунке изображают достаточно большое число кривых рассматриваемого семейства. Полученный рисунок, как правило, даёт хорошее визуальное представление о форме огибающей семейства и помогает строить предположения о её виде. Затем эти предположения доказываются либо опровергаются математическими методами. Для того чтобы показать читателю большое эвристическое значение подобных рисунков, авторы пособия [3] включают в него специальный пункт, названный ими «Геометрический практикум», в котором, в частности, содержатся задания на изображение на больших листах бумаги различных семейств прямых и окружностей.

Выполнение рисунков с изображением семейства кривых «от руки» или с помощью реальных чертёжных инструментов требует аккуратности и больших временных затрат (даже в тех случаях, когда семейство образовано прямыми или окружностями). С помощью же инструментов системы GeoGebra такие рисунки, причём высокого качества, выполняются легко и быстро. При этом появляется возможность наблюдать процесс вычерчивания кривых семейства и управлять этим процессом.

Для получения рисунка необходимо сначала создать ползунок для параметра a , от которого зависит рассматриваемое семейство кривых. Затем в соответствии с условиями задачи задать текущую кривую семейства. Если после этого у текущей кривой семейства активировать опцию *Оставлять след*, то после анимации параметра a на полотне будут автоматически появляться изображения кривых семейства, соответствующих различным

значениям параметра a .

Частота появления изображаемых текущих кривых семейства определяется шагом изменения параметра a . Шаг следует подобрать так, чтобы картинка, полученная в результате анимации, не была перегружена отдельными кривыми семейства, но при этом давала хорошее визуальное представление как о самом семействе, так и о его огибающей (если она существует).

Пример 1. Длина отрезка касательной к астроиде, отсекаемого её осями, постоянна и равна радиусу $R = 4r$ неподвижной окружности Ω [7, Пример 2]. Пусть O – центр окружности Ω . Если рассмотреть прямоугольник $OANB$, вершины A и B которого лежат на осях астроида, и деформировать его так, чтобы диагональ AB сохраняла свою длину, то астроида определяется как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из N на AB [7, Задание 4 для самостоятельного решения]. Обозначим буквой O_1 точку пересечения диагоналей прямоугольника и рассмотрим окружность ω радиуса $2r$ с центром в точке O_1 . Вершина N прямоугольника будет точкой соприкосновения окружностей ω и Ω . При непрерывной деформации прямоугольника, сохраняющей длины его диагоналей, точка O_1 будет перемещаться по окружности радиуса $2r$ с центром в точке O , а окружность ω катиться без скольжения по окружности Ω . Отрезок AB , касающийся астроида и являющийся диаметром окружности ω , будет при этом вращаться вокруг точки O_1 вместе с окружностью ω (рис. 1).

На основании сказанного можно рассмотреть два способа моделирования семейства отрезков постоянной длины с концами на двух взаимно перпендикулярных прямых, огибающей которого является астроида.

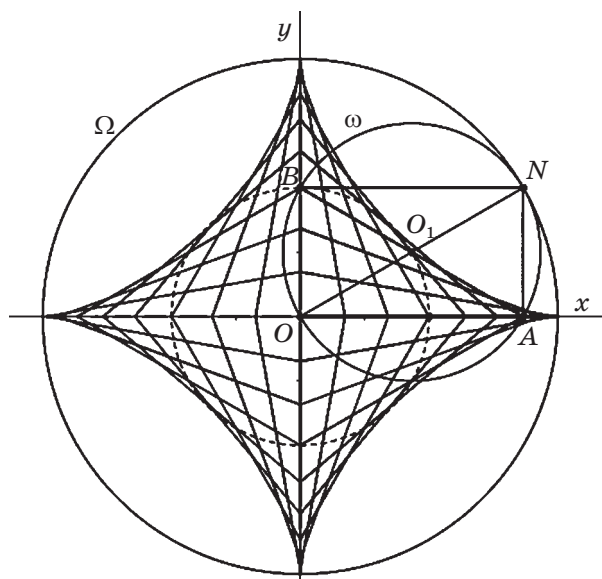


Рис. 1

Способ 1. Будем считать, что взаимно перпендикулярными прямыми являются оси координат системы Oxy . Создадим ползунки для r и t (для создания второго ползунка используем опцию *Угол*). После этого выполним следующие построения.

1. Строим окружность Ω радиуса $4r$ с центром в начале координат O .

2. Задаём на окружности Ω точку $N(4r \cos t; 4r \sin t)$, опускаем перпендикуляры NA и NB на оси координат.

3. Проводим диагональ AB прямоугольника $OANB$, сразу активируем у неё опцию *Оставлять след*. После анимации параметра t GeoGebra будет вычерчивать отрезки рассматриваемого семейства.

Способ 2. Создаём модель, демонстрирующую качение окружности ω радиуса $2r$ по неподвижной окружности Ω радиуса $4r$ с её внутренней стороны. Дополнительно построим диаметр окружности ω , который в начальный момент лежит на оси Ox . Активируем у него опцию *Оставлять след*. После анимации параметра t диаметр будет катиться вместе с окружностью ω , а через установленный интервал изме-

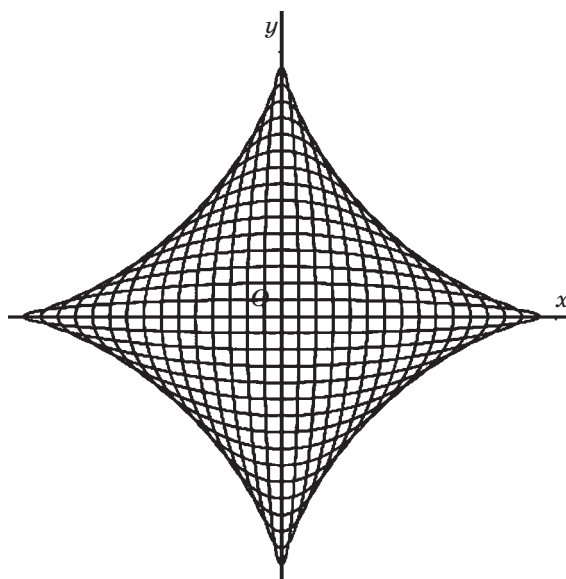


Рис. 2

нения параметра t будет вычерчиваться то же самое семейство отрезков.

Результат вычерчивания искомого однопараметрического семейства отрезков этими способами представлен на рисунке 1.

Рассмотрим теперь задание текущей кривой семейства уравнением в строке ввода.

Пример 2. Известно, что астроида является огибающей семейства эллипсов, имеющих общие оси и заданную сумму полуосей. Этот факт следует из следующих рассуждений.

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy эллипс с полуосями a и b определяется каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию $a + b = R = \text{const}$. Поэтому, считая a параметром рассматриваемого семейства эллипсов, это семейство можно задать уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(R-a)^2} = 1$. Перепишем его в виде

$$x^2 + \left(\frac{a}{R-a}\right)^2 y^2 - a^2 = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя левую часть уравнения (1) по параметру a , получим:

$$2\left(\frac{a}{R-a}\right)\left(\frac{R-a+a}{(R-a)^2}\right)y^2 - 2a = 0,$$

или

$$\frac{R}{(R-a)^3}y^2 - 1 = 0.$$

Откуда имеем

$$y^2 = \frac{(R-a)^3}{R}$$

и, следовательно,

$$(R-a)^2 = R^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}.$$

Из (1) имеем:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 - \left(\frac{a}{R-a}\right)^2 y^2 = \\ &= a^2 - \frac{a^2}{(R-a)^2} \frac{(R-a)^3}{R} = \frac{a^3}{R}. \end{aligned}$$

Отсюда $a = R^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ и, значит, $a^2 = R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$.

Теперь, переписав уравнение семейства эллипсов в виде

$$(R-a)^2x^2 + a^2y^2 - a^2(R-a)^2 = 0, \quad (2)$$

исключим из него параметр a :

$$R^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}x^2 + R^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}y^2 - R^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}R^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = 0,$$

или

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, огибающей семейства эллипсов (1) является астроида.

Для конструирования динамической модели, демонстрирующей полученный результат, создадим ползунки для R и параметра семейства a ($0 \leq a \leq R$). Уравнением (2) зададим семейство эллипсов в строке ввода. После нажатия на клавишу *Enter* на графическом полотне появится эллипс, соответствующий значению параметра a , установленному на ползунке, а после анимации параметра a на графическом полотне будут автоматически вычерчиваться эллипсы семейства (рис. 2).

Достаточно часто удаётся найти параметрические уравнения огибающей.

Пример 3. Рассмотрим движение по окружности радиуса R точек M_1 и M_2 , отношение угловых скоростей которых равно k ($k \neq -1, 0, 1$). Построим семейство прямых M_1M_2 и найдём его огибающую.

Создадим ползунки для R , k и t (для создания t используем опцию *Угол*). Построим окружность радиуса R с центром в начале координат, зададим на ней точки $M_1(R \cos t; R \sin t)$ и $M_2(R \cos kt; R \sin kt)$. Проведём прямую M_1M_2 и активируем у неё опцию *Оставлять след*. Для вычерчивания семейства остаётся анимировать параметр t . Заметим, что в начальный момент точки M_1 и M_2 будут совпадать, при $k > 0$ – двигаться по окружности в одном направлении, а при $k < 0$ – в противоположных.

На рисунке 3 представлено изображение семейства рассматриваемых прямых при $k = 3$, а на рисунке 4 – при $k = -3$. На основании этих рисунков можно предположить, что огибающей первого семейства является нефроида, а огибающей второго – астроида, осями которой являются прямые $y = x$ и $y = -x$. Можно продолжить эмпирическое исследование семейства при различных значениях параметра k . Эксперимент покажет, что для любого $k > 0$, отличного от 1, огибающей семейства прямых M_1M_2 будет некоторая эпициклоида, а при $k < 0$, отличном от -1 , – гипоциклоида.

Найдём уравнение огибающей семейства прямых M_1M_2 . Уравнение прямой этого семейства можно записать как уравнение прямой, проходящей через две данные точки M_1 и M_2 :

$$\frac{x - R \cos t}{R \cos kt - R \cos t} = \frac{y - R \sin t}{R \sin kt - R \sin t}.$$

После преобразований уравнение приводится к виду

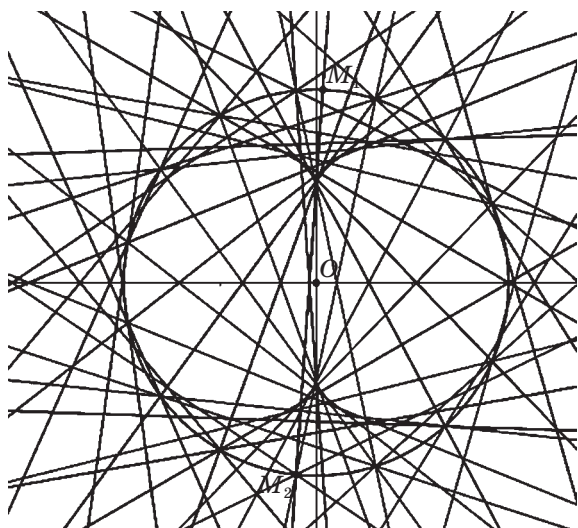


Рис. 3

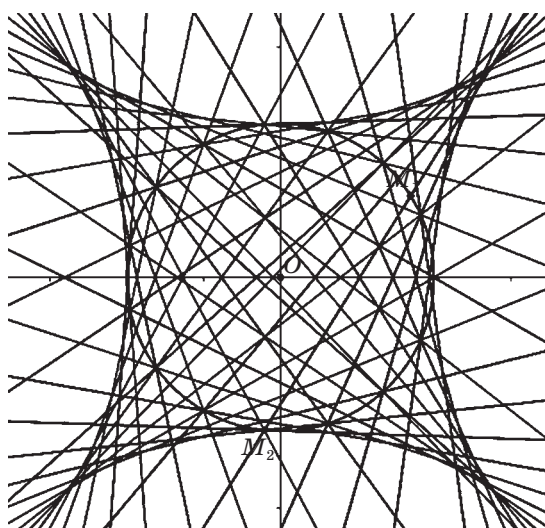


Рис. 4

$$x \cos \frac{(k+1)t}{2} + y \sin \frac{(k+1)t}{2} - R \cos \frac{(k-1)t}{2} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (3) по t , получим:

$$x(k+1) \sin \frac{(k+1)t}{2} - y(k+1) \cos \frac{(k+1)t}{2} - (k-1)R \sin \frac{(k-1)t}{2} = 0. \quad (4)$$

Разрешая систему уравнений (3), (4) относительно x и y , найдём параметрические уравнения огибающей:

$$x = \frac{kR}{k+1} \cos t + \frac{R}{k+1} \cos kt, \quad (5)$$

$$y = \frac{kR}{k+1} \sin t + \frac{R}{k+1} \sin kt.$$

Чтобы проверить правильность полученного результата, можно задать на построенной модели найденную кривую её уравнениями (5).

Следует отметить, что уравнения (5) отличаются от уравнений гипоциклоид (9) и эписциклоид (11) статьи [6]. Циклоидальные кривые, определяемые уравнениями (5), как можно было убедиться на основании экспериментов, получаются из соответствующих кривых, определяемых

уравнениями (9), (11), в результате поворота последних на угол $\frac{\pi}{k-1}$ относительно начала координат. Чтобы привести уравнения (5) к виду (9) либо (11), нужно воспользоваться формулами преобразования координат при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой, которые в школе не рассматриваются. Поэтому рассмотрение данного примера можно завершить визуальной проверкой того, что кривая (5) действительно является огибающей семейства прямых M_1M_2 .

2. Катакаустики. В различных разделах математики и их приложениях встречаются геометрические места точек, называемые каустиками. Данное название, первоначально появившееся в геометрической оптике, охватывает большой класс линий и поверхностей, являющихся огибающими семейства прямых (лучей), не сходящихся в одной точке. В частности, в этот класс входят так называемые плоские *катакаустики* – огибающие лучей, отражаемых данной плоской кривой γ . Катакаустика кривой представляет

собой множество точек, в которых происходит своеобразное фокусирование отражённых световых лучей. В оптике прежде всего рассматриваются падающие лучи, исходящие из точечного светового источника, и лучи, параллельные некоторому направлению (в этом случае световой источник считается бесконечно удалённым). Из курса физики известно, что в любой точке кривой γ падающий и отражённый лучи образуют равные углы с нормалью кривой в этой точке и расположены от неё по разные стороны.

Пример 4. Автор справочника [10] предлагает читателю самостоятельно убедиться в том, что астроида является катакаустикой кривой Штейнера (дельтоиды) [10, с. 282]. При этом предполагается, хотя и специально не оговаривается, что падающие лучи, порождающие катакаустуку, параллельны оси симметрии дельтоида. Создадим модель-анимацию, визуализирующую указанную взаимосвязь дельтоиды и астроида.

Напомним, что дельтоида является гипоциклоидой с модулем $m = \frac{1}{3}$, то есть траекторией точки M , расположенной на окружности ω производящего круга радиуса r , который катится без скольжения по окружности Ω радиуса $3r$ с её внутренней стороны. В прямоугольной декартовой системе координат Ox у дельтоида может быть задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}, \\ y &= 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае ось абсцисс служит одной из её осей симметрии. Будем считать, что падающие на дельтоиду лучи параллельны оси Ox .

Для создания модели выполним следующие операции:

1. Используя инструмент **Кривая**, строим дельтоиду по её уравнениям (6) (рис. 5).

2. Создаём ползунки для r и для параметра t ($0^\circ \leq t \leq 3 \cdot 360^\circ = 1080^\circ$). Чтобы не перегружать будущее изображение излишними деталями, установим шаг изменения параметра, равным 36° . В строке ввода задаём точку

$$M \left(2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}; 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3} \right),$$

принадлежащую дельтоиде.

3. Инструментом **Касательная** строим касательную l дельтоиды в точке M , инструментом **Перпендикулярная прямая** — нормаль n кривой в этой точке.

4. С помощью инструмента **Параллельная прямая** строим прямую m , проходящую через точку M параллельно оси Ox (на рисунке 5 изображена штриховой линией). Задаём на m точку H и строим луч $h = MH$.

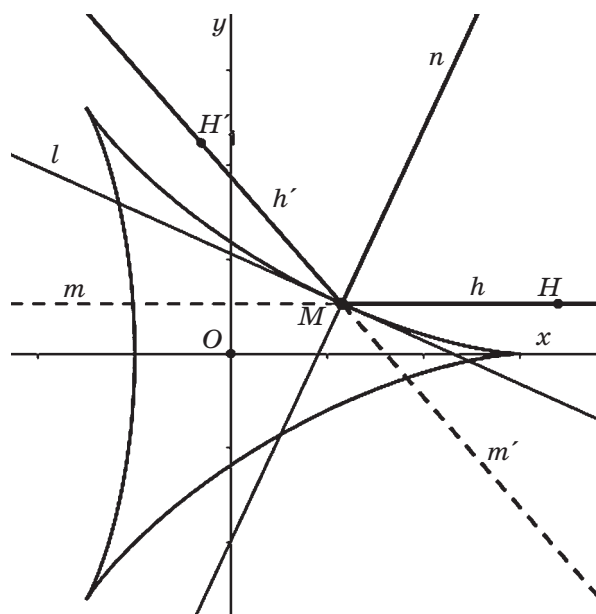


Рис. 5

Найдём угол, образованный прямой, содержащей луч h' , с осью Ox . Точки пересечения этой прямой с прямой $x = -r$ и осью Ox обозначим буквами B и A соответственно, точку пересечения нормали n с осью Ox — буквой F .

Из кинематического определения дельтоиды следует, что $\angle NOA = \frac{t}{3}$, $\angle NO_1M = t$. Углы при основании равнобедренного треугольника MO_1N равны $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, $\angle AFN = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{6}$ (как внешний угол треугольника ONF). По теореме о пересечении параллельных прямых секущей $\angle AFN = \angle HMN$. Следовательно, AMF — равнобедренный треугольник с основанием MF , отсюда находим:

$$\angle FAM = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{6}\right) = \frac{t}{3}.$$

Точку пересечения прямой $x = -r$ с осью Ox обозначим через C . В прямоугольном треугольнике ACB катет $CA = CO + OE + EA$, где E — ортогональная проекция точки M на ось Ox . Поскольку

$$CO = r, OE = 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3},$$

$$EA = EM \operatorname{ctg} \frac{t}{3} = \left(2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}\right) \operatorname{ctg} \frac{t}{3} =$$

$$= 2r \cos \frac{t}{3} - 2r \cos^2 \frac{t}{3},$$

то

$$CA = r + 2r \cos \frac{t}{3} + 2r \cos \frac{2t}{3} + 2r \cos \frac{t}{3} - 2r \cos^2 \frac{t}{3} =$$

$$= 4r \cos \frac{t}{3} + r + r \cos^2 \frac{t}{3} - r \sin^2 \frac{t}{3} - 2r \cos^2 \frac{t}{3} =$$

$$= 4r \cos \frac{t}{3} + r - r = 4r \cos \frac{t}{3}.$$

$$\text{Гипотенуза } AB = \frac{CA}{\cos \frac{t}{3}} = 4r \text{ и, следова-}$$

тельно, не зависит от t . Отсюда следует, что при анимации параметра t огибаю-

щей отрезков AB является астроида, вписанная в окружность радиуса $4r$.

Теперь полезно предложить учащимся продолжить исследование и выяснить, является ли в задаче требование параллельности падающих лучей оси симметрии дельтоиды существенным (см. задание 4). Кроме того, задача интересна тем, что она может стать источником вполне правдоподобных, но неверных гипотез. В частности, может появиться предположение, что катакаустикой самой астероиды является гипоциклоида с модулем $m = \frac{1}{5}$. Создание

соответствующей модели поможет наглядно убедиться в ложности этой гипотезы.

Пример 5. Модель для точечного светового источника строится аналогично, только теперь все падающие лучи исходят из точки, являющейся этим источником. Так, на рисунке 9 показан результат вычерчивания с помощью подобной модели семейства лучей, отражаемых кардиоидой (точечный световой источник находится в её точке возврата). Опираясь на этот рисунок, сразу можно предположить, что огибающей отраженных лучей является нефроида.

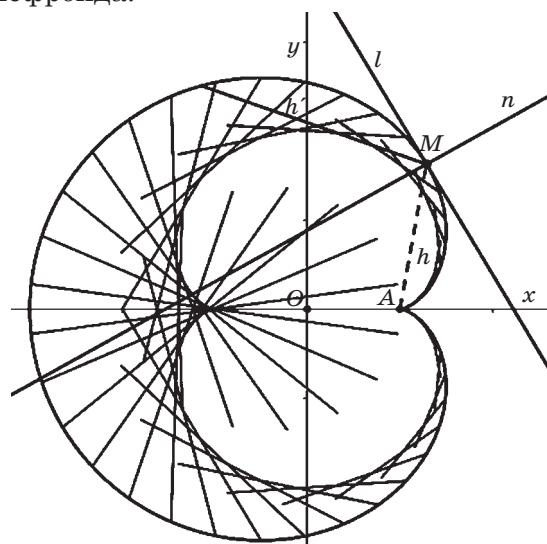


Рис. 9

3. Эволюта. Представим теперь кривую γ , из всех точек которой одновременно исходят световые лучи и распространяются по нормальным кривой в этих точках. В приложениях такую кривую обычно называют исходным волновым фронтом, а её каустику, то есть множество точек «фокусировки» световых лучей, определяют как огибающую нормалей кривой. В математике огибающую нормалей данной кривой γ принято называть *эволютой*, а саму данную кривую по отношению к своей эволюте – *эвольвентой*.

Для плоской кривой её нормали лежат в плоскости этой кривой, а нормали к эвольвенте являются касательными к эволюте, то есть эвольвента является ортогональной траекторией касательных к эволюте.

Пример 6. Создадим модель для вычерчивания однопараметрического семейства нормалей астроида, позволяющую по итоговой картинке сделать предположение о кривой, являющейся эволютой астроида.

Для этого достаточно с помощью команды **Кривая** задать астроида γ её параме-

трическими уравнениями в строке ввода, например уравнениями

$$x = R \cos^3 t, y = R \sin^3 t, \quad (7)$$

создать ползунок для параметра t и отметить на астройде её текущую точку $M(R \cos^3 t; R \sin^3 t)$. Затем построить касательную l и нормаль n кривой γ в точке M ; активировать у нормали опцию *Оставлять след*. Результат, полученный после анимации параметра t , показан на рисунке 10. Кроме того, на рисунке изображена окружность, описанная около астроида γ .

По полученной картинке можно предположить, что эволюта астроида γ также является некоторой астройдой γ_1 . При этом вершины астроида γ_1 лежат на прямых $y = x$, $y = -x$, а окружность, описанная около астроида γ , является вписанной окружностью астроида γ_1 . Это означает, что астроида γ_1 можно получить в результате композиции поворота астроида γ вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ и гомотетии с коэффициентом 2.

Докажем эту гипотезу. Отметим точки пересечения нормали n астроида в точке

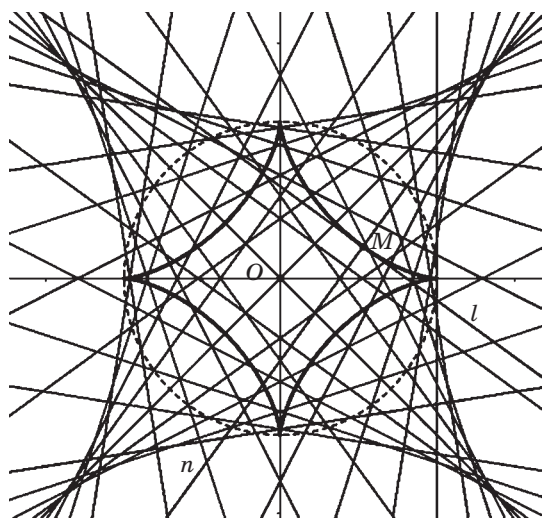


Рис. 10

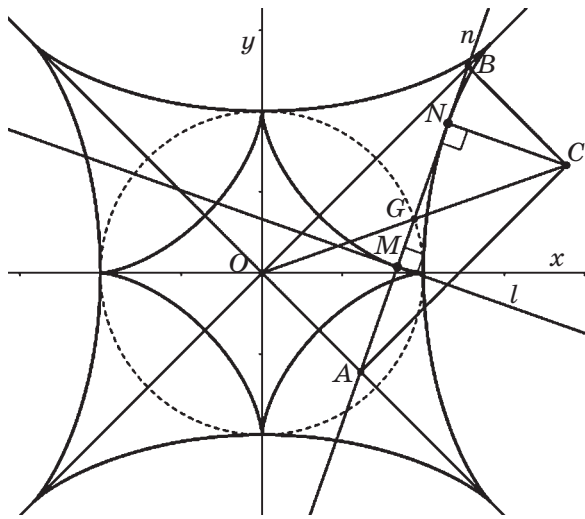


Рис. 11

M с прямыми $y = -x$, $y = x$ буквами A и B соответственно (рис. 11). Построим треугольник AOB до прямоугольника $AOBC$, проведём его диагональ OC . По свойству нормали астроида точка G пересечения диагоналей AB и OC прямоугольника принадлежит окружности, описанной около астроида [7]. Следовательно, $OG = R$, а в силу свойств диагоналей прямоугольника $OC = AB = 2R$. При перемещении точки M по астроиде отрезок AB будет скользить своими концами по прямым $y = -x$, $y = x$ и сохранять при этом свою длину. Поэтому огибающей этих отрезков является астроида, вписанная в окружность радиуса $2R$, с вершинами на прямых, содержащих биссектрисы координатных четвертей. Заметим, что точка N касания нормали n и эволюты γ_1 является основанием перпендикуляра, опущенного из вершины C прямоугольника $AOBC$ на его диагональ AB .

При построении эволюты на рисунке 11 было найдено и использовано её уравнение в системе координат Oxy . Для этого уравнение

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha - R \cos 2\alpha = 0 \quad (8)$$

однопараметрического семейства нормалей астроида (7) (уравнение нормали в текущей точке кривой) продифференцировано по параметру α :

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha - 2R \sin 2\alpha = 0. \quad (9)$$

Затем путём разрешения системы уравнений (8), (9) относительно x и y найдены параметрические уравнения астроида-эволюты:

$$\begin{aligned} x &= R(\cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha), \\ y &= R(\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

4. Задания для самостоятельного решения

1. Даны окружность θ и её диаметр AB . Докажите, что огибающей семейства окружностей, центры которых лежат на

окружности θ и которые касаются прямой AB , является нефроида. Создайте модель-анимацию, вычерчивающую указанное семейство окружностей.

2. Даны окружность θ и точка A на ней. Докажите, что огибающей семейства окружностей, проходящих через точку A , центры которых лежат на окружности θ , является кардиоида. Создайте модель-анимацию, вычерчивающую указанное семейство окружностей.

3. Даны треугольник ABC и описанная около него окружность θ . Известно, что если из любой точки M окружности θ опустить перпендикуляры на прямые AB , BC и CA , то их основания будут лежать на одной прямой. Эту прямую называют *прямой Симпсона*. Докажите, что огибающей всех прямых Симпсона данного треугольника ABC является дельтоида. Создайте модель-анимацию, вычерчивающую указанное семейство прямых Симпсона.

4. В **Примере 4** была рассмотрена катаустика дельтоиды. При этом предполагалось, что порождающие её падающие лучи (прямые) параллельны оси симметрии дельтоиды. Создайте модель, позволяющую менять направление пучка падающих лучей (прямых), и выясните, что при этом происходит с огибающей отражённых лучей (прямых).

5. В учебных материалах, знакомящих читателя с понятием каустики, обычно в качестве одного из первых примеров рассматривается отражение пучка параллельных световых лучей от зеркала, имеющего форму полуокружности. Если на такое зеркало падает пучок лучей, перпендикулярных диаметру, соединяющему концы полуокружности, то отражённые лучи касаются половины нефроиды. Докажите это утверждение и создайте модель-анимацию для его визуальной демонстрации.

6. Реконструируйте модель, с помощью которой выполнен рисунок 9, и докажите, что огибающая рассматриваемых в **Примере 5** отражённых лучей является кардиоидой.

7. Свойство астроида, рассмотренное в **Примере 6**, является спецификацией общего свойства циклоидальных кривых. Доказано, что эволюта эпициклоиды (гипоциклоиды) с модулем m также является эпициклоидой (гипоциклоидой), подобной данной, с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{1+2m}$, и повернутой по отношению к данной кривой на угол, равный $m\pi$ [10, с. 115]. Создайте модель для демонстрации этого свойства для а) эпициклоид с рациональным модулем m , б) гипоциклоид с рациональным модулем $m < 1$. Испытайте первую модель на примере нефроиды и кардиоиды, вторую на примере дельтоиды и астроида.

5. Выводы и перспективы. В данной статье и в статьях [5]–[6], [7], посвящённых различным способам визуализации плоских кривых в среде GeoGebra, на примере циклоидальных кривых было рассмотрено:

- создание моделей-анимаций, которые реализуют геометрические и кинематические определения кривых и позволяют тем самым наблюдать процесс их вычерчивания;
- изображение кривых, заданных уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат;
- задание текущих точек кривой;
- построение касательной и нормали в заданной точке кривой;
- вычерчивание однопараметрических семейств кривых;
- задание некоторых видов кривых, порождаемых данной кривой, и их вычерчивание с помощью модели-анимации.

В ходе этих построений описаны основные виды моделей, используемых для изображения и вычерчивания кривых, для визуальной демонстрации общих и специальных свойств циклоидальных кривых. Даны примеры проведения с помощью моделей экспериментальных исследований кривых путём изменения числовых значений коэффициентов в уравнениях кривой и ручного или автоматического перемещения связанных с ней точек.

Инструментальные возможности интерактивной математической системы GeoGebra позволяют изображать не только плоские, но и пространственные кривые, рассматривать их в разных ракурсах, формируя тем самым наглядные представления о форме кривых, а также моделировать, наблюдать и исследовать свойства пространственных кривых. В этом читатель может убедиться, обратившись к опубликованной на страницах журнала статье А.В. Ястребова [11], посвящённой пространственным аналогам циклоидальных кривых. В адресованной школьникам и учителям математики статье [8]–[9], можно найти примеры использования инструментов системы GeoGebra при изображении различных видов пространственных спиралей и изучении их свойств. Таким образом, тематика учебно-исследовательских проектов, предметом которых являются плоские кривые и их свойства, может быть дополнена проектами по изучению пространственных кривых.

У учащегося, обладающего навыками работы с кривыми в среде GeoGebra, отпадает желание и необходимость заимствовать при выполнении проекта готовые чертежи. Школьник начинает совсем иначе воспринимать размещённые в сети интернет анимационные ролики, демонстрирующие процессы вычерчивания

ния кривых, для него «открываются секреты» их создания, более того, он сам может конструировать подобные модели анимации. Наблюдение же на модели, «созданной собственными руками», того же процесса вычерчивания кривой или какого-то свойства кривой, как правило, сопровождается радостью и чувством удовлетворения от проделанной работы. Поэтому включение в проекты задач на построение в среде интерактивных математических систем изображений кривых и на создание моделей для их вычерчивания и исследования позволяет качественно изменить содержание познавательной деятельности учащихся при выполнении проектов, придать ей личностный смысл и положительную эмоциональную окраску.

Применение в работе над проектом различных видов интерактивных моделей выступает эффективным средством формирования и развития у учащегося познавательного интереса к математике и её изучению. Важную роль в этом развитии может сыграть выполнение школьником с помощью моделей собственных экспериментальных исследований. В ходе их проведения он будет получать опыт самостоятельного выдвижения и опровержения гипотез, постановки собственных познавательных целей и т.д. Относительно легко конструируемые модели для экспериментального исследования свойств кривых дают возможность обеспечить переход познавательного интереса со стадии простого любопытства (что будет, если ...) на стадию устойчивого познавательного отношения к математике, характеризующуюся внутренней потребностью к логическим обоснованиям наблюдаемых фактов и стремлением углубиться в сущность познаваемого.

Как было отмечено в [5], инструменты

системы GeoGebra позволяют также изображать и вычерчивать плоские кривые, заданные уравнениями в полярной системе координат. Кроме того, в арсенал системы входят команды: **Кривизна**, предназначенная для вычисления кривизны кривой в заданной точке кривой; **Круг-Кривизны**, строящая соприкасающуюся окружность кривой в заданной на ней точке; **ВекторКривизны**, позволяющая строить центр соприкасающейся окружности. С помощью команды **Интеграл** (<Функция>, <Начальное значение>, <Конечное значение>) можно находить длину дуги заданной кривой и площадь области, ограниченной заданными кривыми. Понятия длины дуги кривой, кривизны кривой и соприкасающейся окружности в школьном курсе математики не изучаются, введение же этих понятий ради того, чтобы познакомить школьников с использованием перечисленных команд, вряд ли методически оправдано.

В полном объёме возможности инструментов интерактивных математических систем, предназначенных для работы с кривыми, могут быть использованы при обучении будущих учителей математики. С их помощью, например, преподаватель курса дифференциальной геометрии сможет обеспечить качественно новый, более высокий уровень преподавания и наглядного сопровождения процесса обучения. (Перспективы и направления внедрения системы GeoGebra при изучении пространственных кривых в этом курсе обсуждаются в статье [4]). Компьютерное моделирование свойств кривых и экспериментирование с созданными моделями может стать продуктивной основой для организации учебно-исследовательской деятельности студентов, позволит обновить тематику курсовых и выпускных квалификационных работ.

Список источников

1. *Болтянский В.Г.* Огибающая // Квант. № 3. 1987. С. 2–7.
2. *Болтянский В.Г.* Огибающая. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 76 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 36).
3. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л.* Прямые и кривые. 6-е изд. М.: МЦНМО, 2006. 128 с.
4. *Клековкин Г.А.* Использование интерактивной математической системы GeoGebra при обучении дифференциальной геометрии. Пространственные кривые // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. 2019. № 4 (32). С. 257–284.
5. *Клековкин Г.А.* Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (изображение и моделирование). Часть 1 // Математика в школе. № 3. 2022. С. 39–51.
6. *Клековкин Г.А.* Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов

(изображение и моделирование). Часть 2 // Математика в школе. № 4. 2022. С. 24–31.

7. *Клековкин Г.А.* Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (касательная, нормаль, особые точки) // Математика в школе. № 3. 2023. С. 33–48.

8. *Клековкин Г.А.* Пространственные спирали // Математическое образование. № 2(90). 2019. С. 20–30.

9. *Клековкин Г.А.* Пространственные спирали (окончание) // Математическое образование. № 3(91). 2019. С. 7–17.

10. *Савелов А.А.* Плоские кривые: Систематика, свойства, применения: Справочное руководство. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 296 с. (Физико-математическое наследие: математика).

11. *Ястребов А.В.* Циклоидальные кривые в пространстве и буксующие колёса // Математика в школе. № 4. 2022. С. 32–38.

Статья поступила в редакцию

28.08.2022.

Принята к публикации

26.11.2022.

Искусственный интеллект вышел на новый уровень

2022 год ознаменовался важным достижением в сфере искусственного интеллекта: нейросети научились генерировать поражающие воображение картинки по текстовому запросу пользователей. Но это лишь видимая часть по-настоящему тектонических сдвигов в этой области технологий.

Журнал Science включил «креативность ИИ» в список прорывов года. «Искусственный интеллект проникает в области, которые считались исключительно человеческими, включая художественное самовыражение и научные открытия», — пишут авторы статьи. По их словам, «вторжение машин» сначала шло медленно, но теперь приобрело лавинообразный характер.

Соцсети пестрят высококачественными картинками, сгенерированными кодом. Работают так называемые модели преобразования текста в изображение. С помощью машинного обучения нейросеть анализирует текст и визуальные материалы, выявляя шаблоны, на основе которых затем создаёт собственные произведения.

Источник: ria.ru

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ СРЕДСТВАМИ P -ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL INEQUALITIES BY MEANS OF P -CONVEX FUNCTIONS

Научная статья 5.8.7

УДК: 372.851+517.162

Scientific article 5.8.7

DOI: 10.47639/01300-9358_2023_4_58

С.И. Калинин, д. п. н., канд. физ-мат. наук, профессор;

Ю.И. Макарова, магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук;

Н.С. Протасов, магистрант факультета компьютерных и физико-математических наук; Вятский государственный университет (г. Киров); kalinin_gu@mail.ru

S.I. Kalinin, DShi (Pedagogy), PhD (Phys&Math), Professor;

Y.I. Makarova, graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences;

N.S. Protasov, graduate student of the Faculty of Computer and Physical and Mathematical Sciences; Vyatka State University (Kirov); kalinin_gu@mail.ru

Аннотация: в статье формулируется неравенство Иенсена для p -выпуклых / p -вогнутых функций и на его основе доказываются обобщения хорошо известных классических неравенств Коши, Коши–Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана

Abstract: the article formulates the Jensen inequality for p -convex / p -concave functions and proves generalizations of the well-known classical inequalities of Cauchy, Cauchy–Bunyakovsky, Huygens, Ky Fan on its basis

Ключевые слова: выпуклая функция, p -выпуклая функция, неравенство Иенсена, неравенства Коши, Коши–Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана

Keywords: convex function, p -convex function, Jensen inequality, Cauchy, Cauchy–Bunyakovsky, Huygens, Ky Fan inequalities

© С.И. Калинин, Ю.И. Макарова, Н.С. Протасов 2023

Обращаясь к работе [1], читатель может познакомиться с понятиями p -выпуклой и p -вогнутой функций, которые обобщают хорошо известные понятия выпуклой и вогнутой функций в обычном смысле. В ней, в частности, рассмотрен вопрос о возможности использования таких функций при решении уравнений. В настоящей статье мы намерены обсудить другой вопрос – вопрос, связанный с обобщением ряда классических неравенств средствами p -выпуклых и p -вогнутых функций.

Вспроизведём сначала необходимые определения и факты из [1].

Функцию $f : I \subset (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ называем

p -выпуклой ($p \neq 0$) на промежутке I , если для любых чисел a и b из I и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f([\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p]^{1/p}) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

Если при этом для любых различных чисел a и b из I и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f([\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p]^{1/p}) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (2)$$

то функцию f называем строго p -выпуклой на промежутке I .

Очевидно, строго p -выпуклая функция является p -выпуклой. Кроме того, при $p = 1$ p -выпуклость порождает обычную выпуклость функции. Изменение знаков неравенств в соотношениях (1)–(2) на про-

тивоположные приводит к определениям понятий p -вогнутой и строго p -вогнутой функций.

Достаточные условия строгой p -выпуклости и строгой p -вогнутости дважды дифференцируемой функции описывает следующая

Теорема А [1]. Пусть $f: l \rightarrow \mathbf{R}$ – функция, непрерывная на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ числовой прямой Ox , дважды дифференцируемая внутри данного промежутка, и $\Delta_f^p(x) = xf''(x) - (p-1)f'(x)$, $p \neq 0$. Если для внутренних точек x из l выполняется условие $\Delta_f^p(x) > 0$, то f – строго p -выпуклая на промежутке l функция. Если же для таких точек выполняется условие $\Delta_f^p(x) < 0$, то f – строго p -вогнутая на рассматриваемом промежутке функция.

Замечание 1. Теорема А может быть переформулирована так.

Если в перечисленных условиях для внутренних точек x промежутка l выполняется неравенство $\Delta_f^p(x) \geq 0$, то f – p -выпуклая на промежутке l функция; выполнение же для таких точек неравенства $\Delta_f^p(x) \leq 0$ обеспечивает вывод о p -вогнутости функции f на рассматриваемом промежутке.

Неравенство Иенсена для p -выпуклой функции

На страницах образовательных журналов авторы неоднократно обращались (см., напр., [2]–[6]) к рассмотрению неравенства Иенсена для выпуклых функций. Это есть неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (3)$$

$$(x_k \in l; k = 1, \dots, n),$$

где f – выпуклая на промежутке l функция, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – положительные числа,

удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Если при этом f – строго выпуклая функция, то (3) может обращаться в равенство только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Для вогнутой на промежутке l функции f будет выполняться неравенство Иенсена, отличающееся от (3) противоположным знаком.

Обоснуем теперь аналог неравенства (3) для p -выпуклой функции. Докажем следующую теорему.

Теорема Б. Всякая p -выпуклая на промежутке l функция f удовлетворяет неравенству

$$f\left(\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right]^{1/p}\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad (4)$$

$$x_1, \dots, x_n \in l; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Если при этом функция f – строго p -выпуклая, то равенство в (4) может достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Неравенство (4) назовём *неравенством Иенсена* для p -выпуклой функции.

Доказательство. Применим метод полной математической индукции по n . База индукции (выполнение неравенства (4) при $n = 2$) обеспечивается определением p -выпуклости функции f на промежутке l , а также условиями достижения равенства в соотношении (2) для случая строгой p -выпуклости данной функции.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $n = m$, $m \geq 2$, при этом если функция f – строго p -выпуклая, то равенство в соотношении Иенсена достигается только при условии $x_1 = \dots = x_m$.

Убедимся в том, что теорема будет верна и при $n = m + 1$.

Пусть числа $x_1, \dots, x_{m+1}$ принадлежат промежутку l , $\lambda_k > 0$ для всех $k = 1, \dots, m + 1$ и $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k = 1$. Рассмотрим величину

$\tilde{x}_m = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} x_m^p + \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} x_{m+1}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ – взвешенное среднее степенное порядка p чисел x_m, x_{m+1} с весами $\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}}, \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}}$. Ясно, что точка $\tilde{x}_m$ принадлежит l . В силу индукционного предположения и базы индукции имеем:

$$f \left(\left(\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = f \left(\left(\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k x_k^p + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \tilde{x}_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leq \quad (5)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k f(x_k) + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) f(\tilde{x}_m) \leq \quad (6)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k f(x_k) + (\lambda_m + \lambda_{m+1}) \times \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} f(x_m) + \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m + \lambda_{m+1}} f(x_{m+1}) \right) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k f(x_k).$$

Таким образом, заключаем: неравенство (4) выполняется и при $n = m + 1$.

Выясним вопрос о достижении равенства в нём при условии, когда f – строго p -выпуклая на рассматриваемом промежутке функция. Упомянутое равенство, легко видеть, будет достигаться только тогда, когда обратятся в равенства неравенства (5) и (6). В (5) будем иметь равенство только при условии $x_1 = \dots = x_{m-1} = \tilde{x}_m$, а в (6) – только при условии $x_m = x_{m+1}$. Из последнего соотношения следует условие $x_m = x_{m+1} = \tilde{x}_m$, значит, при $n = m + 1$ в случае строгой p -выпуклости f неравенство (4) обращается в равенство лишь тогда, когда $x_1 = \dots = x_{m+1}$.

Теорема Б доказана.

Очевидно, p -вогнутая на промежутке l функция f будет удовлетворять неравенству

$$f \left(\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right]^{1/p} \right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad (7)$$

$$x_1, \dots, x_n \in l; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1,$$

при этом в случае её строгой p -вогнутости равенство в (7) может достигаться лишь при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Некоторые применения неравенства Иенсена для p -выпуклых / p -вогнутых функций

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Так как для неё величина $\Delta_f^p(x)$ есть $-\frac{p}{x}$, то, очевидно, она является строго p -выпуклой при отрицательных значениях p и строго p -вогнутой – при положительных p . Применяя к ней неравенства (4) и (7), будем соответственно иметь:

$$\ln \left(\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right]^{\frac{1}{p}} \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln x_k \quad (p < 0), \quad (8)$$

$$\ln \left(\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right]^{\frac{1}{p}} \right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln x_k \quad (p > 0), \quad (9)$$

или

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k} \geq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p < 0), \quad (10)$$

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k} \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p > 0), \quad (11)$$

$$x_1, \dots, x_n \in (0; +\infty);$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

При $p = 1$ неравенство (11) есть весовое неравенство Коши для среднего арифметического и среднего геометрического по-

ложительных чисел $x_1, \dots, x_n$, а при $p = -1$ неравенство (10) порождает обобщённое неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим данных чисел.

Отметим, что неравенства (10) и (11) могут обращаться в равенства только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

2. В статье [1] показано, что функция $f(x) = x^2$, $x > 0$, является строго p -выпуклой при $p < 2$ и строго p -вогнутой при $p > 2$. Запишем для неё неравенство (4), полагая

$$x_k = \frac{a_k}{b_k}, \quad \lambda_k = \frac{b_k^2}{b_1^2 + \dots + b_n^2},$$

где $a_k > 0$, $b_k > 0$; $k = 1, \dots, n$. Будем иметь:

$$\left(\left[\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{b_1^2 + \dots + b_n^2} \cdot \frac{a_k^p}{b_k^p} \right]^{\frac{1}{p}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{b_1^2 + \dots + b_n^2} \left(\frac{a_k}{b_k} \right)^2, \quad p < 2,$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^p b_k^{2-p} \right)^{\frac{2}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{2}{p}-1}, \quad p < 2. \quad (12)$$

Очевидно, равенство в (12) будет достигаться, только если числовые наборы $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ будут пропорциональны, то есть $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

При $p = 1$ неравенство (12) порождает неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

хорошо известное в тематике неравенств. Это есть неравенство Коши–Буняковского. Следовательно, неравенство (12) есть обобщение классического неравенства Коши–Буняковского для положительных чисел.

Предлагаем читателю сформулировать неравенство типа (12), используя рассмотренную схему рассуждений, p -вогнутость функции $f(x) = x^2$, $x > 0$, при $p > 2$ и неравенство (7).

3. Рассмотрим сейчас функцию

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{x}, \quad x \in \left(0; \frac{1}{2} \right].$$

Найдём для неё величину $\Delta_f^p(x)$ ($p \neq 0$):

$$\Delta_f^p(x) = \frac{(1-2x)x}{x^2(1-x)^2} + \frac{p-1}{x(1-x)}.$$

Отсюда заключаем, что при $p > 1$ f – строго p -выпуклая на указанном промежутке функция. Для неё неравенство (4) примет вид

$$\ln \frac{1 - \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \ln \frac{1-x_k}{x_k},$$

или

$$\frac{\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k}}{\prod_{k=1}^n (1-x_k)^{\lambda_k}} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}}{1 - \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \quad (14)$$

при этом равенство в соотношении (14) будет достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Неравенство (14) есть обобщение весового неравенства Ки Фана (см., напр., [4]), которое получается из (14) при $p = 1$:

$$\frac{\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k}}{\prod_{k=1}^n (1-x_k)^{\lambda_k}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k (1-x_k)}.$$

4. Обратимся, наконец, к функции $y = \ln(1 + e^x)$, $x > 0$. Для неё величина $\Delta_f^p(x)$ есть выражение

$$\frac{xe^x}{(1+e^x)^2} - (p-1)\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Следовательно, при $p \leq 1$ ($p \neq 0$) эта функция является строго p -выпуклой.

Применив к ней неравенство Иенсена (4), получим неравенство

$$1 + e^{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \prod_{k=1}^n (1 + e^{x_k})^{\lambda_k}, \quad (15)$$

$$x_1, \dots, x_n \in (0; +\infty);$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Равенство в (15) будет достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Неравенство (15) обобщает весовое неравенство Гюйгенса (см., напр., [7, с. 71])

$$1 + a_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\lambda_n} \leq (1 + a_1)^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot (1 + a_n)^{\lambda_n}, \quad (16)$$

$$a_k \geq 0, k = 1, \dots, n;$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1,$$

правда, в случае, когда $a_k \geq 1, k = 1, \dots, n$. Сказанное следует из того, если в (15) положить $p = 1$ и $e^{x_k} = a_k, k = 1, \dots, n$.

Равенство в (16), очевидно, достигается лишь только тогда, когда $a_1 = \dots = a_n$.

Список источников

1. Калинин С. И. p -Выпуклые функции и уравнения // Математика в школе. 2022. № 5. С. 26–32.
2. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена // Квант. 1990. № 4. С. 57–62.
3. Сорокин Г.А. Выпуклые функции и неравенства // Математика в школе. 1994. № 5. С. 55–59.
4. Калинин С.И. Неравенство Ки Фана // Математика в школе. 2004. № 8. С. 69–72.
5. Чучаев И. И., Денисова Т. В. Выпуклые функции и уравнения // Математика в школе. 2005. № 5. С. 41–47.
6. Калинин С.И. Логарифмически выпуклые функции, их свойства и некоторые применения // Математика в школе. 2007. № 7. С. 41–50, 76.
7. Калинин С.И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. Москва: Изд-во «Московский Лицей», 2013. 112 с.

Статья поступила в редакцию

28.01.2023.

Принята к публикации

03.02.2023.

1 апреля — День математика: история и традиции праздника

В России 1 апреля отмечают День математика — праздник специалистов технической специальности, чья деятельность тесно связана с расчётами и формулами.

Идея о создании праздника родилась в 1990-х годах. По одной из версий, инициатива принадлежала учащимся математического факультета Новосибирского гуманитарного университета. Новую традицию быстро подхватили в студенческих кругах, и с тех пор многие представители технических специальностей считают первый день апреля профессиональным праздником.

День математика остаётся популярным в учебных учреждениях технической направленности и на профильных факультетах. К дате торжества зачастую приурочены математические викторины, конкурсы и даже школьные олимпиады. Даже самых маленьких учеников приобщают к задачкам на счёт. Учащимся предлагают найти нестандартные решения логических задач, креативно использовать формулы и вспоминать малоизвестные методы.

Нередко профессиональный праздник становится поводом для научных мероприятий — конгрессов, круглых столов, лекций с приглашением выдающихся специалистов.

Источник: iz.ru

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ИГРА «ЛОГАРИФМЫ – ЭТО СКУЧНО?»

INTELLECTUAL GAME «LOGARITHMS – IS IT BORING?»

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_63

Е.С. Тонеева, Е.Н. Шабаета,

МБОУ Многопрофильный лицей имени Р.Р. Ибрагимова (Димитровград, Ульяновская обл.),
ekaterina.toneeva@yandex.ru,
Elena_krasa74@mail.ru

E.S. Toneeva, E.N. Shabaeva,

MBEI Multidisciplinary Lyceum named after
R.R. Ibragimov (Dimitrovgrad, Ulyanovsk reg.),
ekaterina.toneeva@yandex.ru,
Elena_krasa74@mail.ru

Аннотация: в статье представлена разработка внеклассного мероприятия (в форме игры) по теме «Логарифмы»

Abstract: the article presents the development of an extracurricular event (in the form of a game) on the topic «Logarithms»

Ключевые слова: логарифм, логарифмическая спираль, софизм

Keywords: logarithm, logarithmic spiral, sophism

© Е.С. Тонеева, Е.Н. Шабаета 2023

Предмет математики настолько серьёзен, что надо не упускать случая сделать его занимательным.

Блез Паскаль

Цели мероприятия: пробудить у учащихся познавательный интерес к логарифмам и сферам их применения, стремление совершенствовать свои знания. **Задачи мероприятия:** образовательная – расширить кругозор учащихся; развивающая – создать условия для развития у школьников умений анализировать, сопоставлять, сравнивать, обобщать и делать выводы; воспитательная – способствовать формированию умения работать в команде.

Подготовка к мероприятию

В игре принимают участие две команды учащихся по пять или по шесть человек в каждой. Остальные ученики класса будут зрителями. Заранее формируется жюри. Команды выбирают капитана, при-

думывают название и девиз. Также они получают домашнее задание подготовить мини-проект по одной из тем: «Логарифмы в химии», «Логарифмы в физике».

Игру проводят два учителя-предметника. Мебель в классе расставляется так, чтобы команды видели друг друга и экран. В качестве оборудования используются компьютер и проектор. На экран выводятся слайды презентации с иллюстрациями, конкурсными заданиями и ответами. Заранее готовится ведомость игры (заполняет жюри), карточки с заданиями и бланки ответов (для команд), см. раздел «Приложения».

Ход игры

Приветствие

Учитель 1. Здравствуйте, ребята!

Сколько раз мы слышали от вас: «Логарифмы – это неинтересно», «Где они нам пригодятся в жизни?», «Да нигде они не используются...». А некоторые из вас считают, что изучать логарифмы скучно.

Учитель 2. А вот шотландский математик-любитель Джон Непер в своём сочинении «Описание удивительного канона логарифмов» (1614) писал: «Осознав, что в математике нет ничего более скучного и утомительного, чем умножение, деление, извлечение квадратных и кубических корней, и что названные операции являются... неиссякаемым источником неуловимых ошибок, я решил найти простое и надёжное средство, чтобы избавиться от них [этих трудностей]». Джон Непер нашёл гениальное решение: придумал логарифмы. Сегодня мы с вами убедимся, что знакомство с логарифмами может быть полезно и увлекательно.

Капитаны представляют участников команд. Учителя представляют жюри и объявляют начало игры.

Конкурс 1. Верите ли вы, что...

Учитель 1. Проверим ваши знания и интуицию. На каждый из предложенных вопросов вы должны ответить «да» или «нет», занести ответы в специальный бланк и сдать его на проверку жюри.

Вопросы

1. Верите ли вы, что фраза «изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь» принадлежит немецкому учёному Иоганну Кеплеру?

2. Верите ли вы, что десятичный логарифм иначе называют логарифмом Непера?

3. Верите ли вы, что натуральный логарифм называют также логарифмом Бриггса?

4. Верите ли вы, что первым обозначение логарифма – $\log$ – ввёл Иоганн Кеплер?

5. Верите ли вы, что логарифмическую линейку изобрёл не Джон Непер?

Команды сдают бланки с ответами. Жюри подводит итоги первого конкурса и заносит результат в ведомость игры. Учителя озвучивают правильные ответы.

Ответы¹

1. Нет. Французский учёный Пьер-Симон Лаплас говорил: «Изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивает жизнь астрономов».

2. Нет. Под неперовым логарифмом, как правило, понимают натуральный логарифм. Однако сам Джон Непер рассматривал логарифмы по основанию, отличному от числа e .

3. Нет. Бриггсов логарифм – то же, что и десятичный логарифм, то есть логарифм по основанию 10. Назван так по имени английского математика Генри Бриггса, создателя первых таблиц десятичных логарифмов.

4. Да. Кеплер ввёл этот символ в 1624 году. Понятие основания логарифма ввёл Бриггс, а само слово «основание» было заимствовано из теории степеней и перенесено в теорию логарифмов Эйлером.

5. Да. Английский астроном Эдмунд Гюнтер предложил нанести на линейку логарифмическую шкалу и с помощью двух циркулей выполнять операции с логарифмами. Изобретателем логарифмической линейки считается английский математик Уильям Отред. Он использовал две логарифмических шкалы, одна из которых могла смещаться относительно другой, неподвижной, и предложил линейки двух видов: прямоугольную и

¹ См. *Александрова Н.В.* История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник (М., Изд-во ЛКИ, 2008; изд. 3-е, испр.). – *Прим. ред.*

круговую (рис. 1; модель изготовлена на основе описания Отреда).

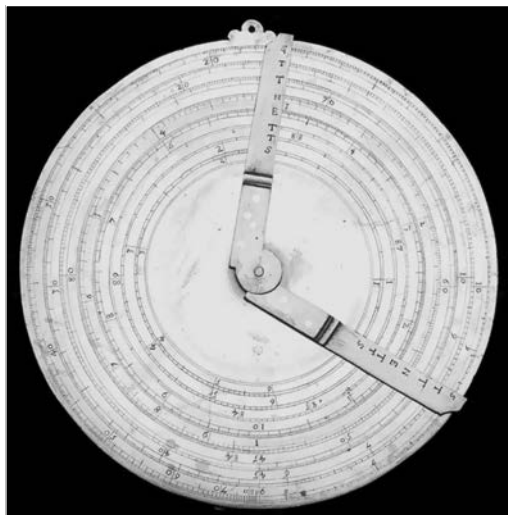


Рис. 1

Логарифмическая линейка – счётный прибор, широко применявшийся до появления калькуляторов и компьютеров. С помощью неё можно было с достаточно высокой точностью складывать и умножать числа, вычислять квадраты и кубы, находить корни и др.

Конкурс 2. Разгадай ребус

Учитель 2. На экране будут появляться картинки, на каждой из которых зашифровано слово. Ваша задача отгадать все слова и занести ответы в бланк.

Слайды с ребусами (рис. 2–5) выводятся на экран. На разгадывание каждого слова даётся полминуты.

Команды сдают бланки с ответами. Пока жюри проверяет их, учителя озвучивают правильные ответы.

Ответы

Ребус 1 – логарифм.

Ребус 2 – степень.

Ребус 3 – показатель.

Ребус 4 – основание.

Ребус 5 – тождество.



Рис. 2

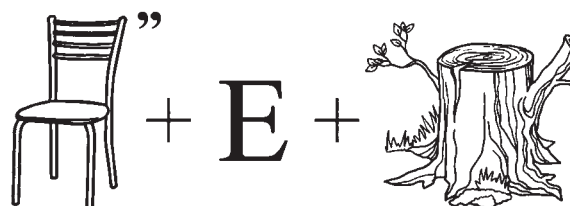


Рис. 3



Рис. 4



Рис. 5



Рис. 6

Учитель 1. Мы с вами вспомнили основные термины, относящиеся к логарифмам. А где же используются логарифмы? Посмотрите на экран. Ряд природных явлений иллюстрирует логарифмическую зависимость. В живой и в неживой природе часто встречается логарифмическая спираль. Представление о ней дают, например, раковины улиток и моллюсков, рога животных, атмосферные вихри – циклоны (рис. 7) и рукава галактик (рис. 8)².



Рис. 7



Рис. 8

Конкурс 3. Восстанови текст

Учитель 2. Следующий конкурс посвящается логарифмической спирали. На экране вы видите сведения об этой

² Источники фото:

visibleearth.nasa.gov/images/68992/low-off-iceland,
apod.nasa.gov/apod/ap050428.html. – Прим. ред.

линии и некоторых её свойствах. Некий злоумышленник решил запутать вас и заменил некоторые слова в тексте словами с противоположным смыслом. Ваша задача восстановить текст.

Текст на экране

Спираль – это прямая линия, однократно обходящая любую точку в пространстве. Эта точка называется экватором спирали. Логарифмическая спираль имеет конечное число витков, с каждым новым оборотом расстояние между соседними витками остаётся неизменным. Произвольный луч, выходящий из экватора, пересекает витки логарифмической спирали под разными углами. Отсюда её второе название – разнотугольная.

Жюри подводит итоги конкурса. Правильный ответ обсуждает с классом.

Ответ

Спираль – это *кривая, многократно обходящая некоторую точку на плоскости*. Эта точка называется *полюсом* спирали. Логарифмическая спираль имеет *бесконечное* число витков, с каждым новым оборотом расстояние между соседними витками *изменяется* (рис. 9). Произвольный луч, выходящий из *полюса*, пересекает витки логарифмической спирали под *одним и тем же углом*. Отсюда её второе название – *равнотугольная*.

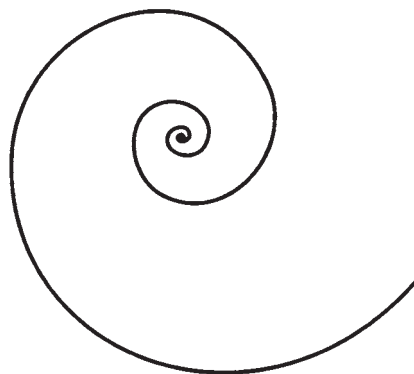


Рис. 9

Конкурс 4. Найди ошибку

Учитель 1. Нерадивый ученик, преобразуя неравенства, пришёл к неожиданному результату. Он «доказал», что $2 > 3$ (рис. 10). Найдите ошибку в его рассуждениях и исправьте её.

Софизм

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} > 3 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$2 > 3$$

Рис. 10

Ответ³

Ошибка допущена в конце рассуждений. Так как $\lg 0,5 < 0$, то обе части предпоследнего неравенства делятся на одно и то же отрицательное число, поэтому знак неравенства должен измениться на противоположный, тогда получится верное равенство $2 < 3$.

Жюри оценивает ответы команд. Решение обсуждается с классом.

Конкурс 5. Проект

На последнем этапе каждая команда выступает с мини-проектом на выбранную тему: «Логарифмы в физике», «Логарифмы в химии».

Жюри оценивает работы, подводит окончательные итоги и объявляет победителей игры.

³ См. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям (М., Просвещение, 2003). – *Прим. ред*

Приложения

Бланк ответов (для конкурсов 2 и 3)

Ответы	
1.	_____
2.	_____
3.	_____
4.	_____
5.	_____

Ведомость игры «Логарифмы – это скучно?»

№	Название конкурса	Команда _____	Команда _____
1	Верите ли вы, что...		
2	Разгадай ребус		
3	Восстанови текст		
4	Найди ошибку		
5	Проект		

Оценивание конкурсов

№	Название конкурса	Критерии оценки	Баллы
1	Верите ли вы, что...	1. Дан правильный ответ	1
		2. Дан правильный ответ	1
		3. Дан правильный ответ	1
		4. Дан правильный ответ	1
		5. Дан правильный ответ	1
2	Разгадай ребус	1. Ребус разгадан	1
		2. Ребус разгадан	1
		3. Ребус разгадан	1
		4. Ребус разгадан	1
		5. Ребус разгадан	1
3	Восстанови текст	Оценивается каждое верно исправленное слово	1–10
4	Найди ошибку	Ошибка исправлена	3
		Ответ грамотно обоснован	2
5	Проект	Актуальность	1
		Новизна	1
		Креативность	1
		Культура речи	1
		Наглядность	1

Список источников

1. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций (базовый и углубл. уровни). – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2018.
2. Занимательная математика.

См. <https://www.sites.google.com/view/matematika>.

3. Википедия. Логарифмическая спираль. См. https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral.

Статья поступила в редакцию 01.12.2022.
Принята к публикации 21.02.2023.



Барометр ЕГЭ

ЕСТЬ ЗАПРОС? ПРИДЁТСЯ НА НЕГО ОТВЕЧАТЬ

(отменяют ли Единый госэкзамен?)

* Выход России из Болонской системы вновь актуализировал вопрос о Едином госэкзамене. Речь о его отмене пока не идёт. Отвечая на вопросы депутатов Госдумы после доклада о работе кабмина в 2022 году, Михаил Мишустин отметил, что этот вопрос «требует очень серьёзного обсуждения», «если есть какие-то альтернативные предложения, нужно системно их рассматривать и предлагать». Председатель Госдумы Вячеслав Володин сообщил, что среди 20 000 обращений, поступивших перед отчётом премьера, вопрос о ЕГЭ вошёл в пятёрку наиболее часто задаваемых. «...Совершенно очевидно, что если есть запрос общества, надо отвечать на этот запрос», – добавил он.

* Проведённое в марте исследование портала SuperJob показало, что в необходимости отмены ЕГЭ убеждены два из трёх россиян (66%), всего 16% опрошенных считают его достойной заменой традиционной форме аттестации. Среди учителей сторонником ЕГЭ является каждый третий педагог. Долгое время, с 2009 по 2022 год, популярность ЕГЭ снижалась и достигла минимума в 2021 году.

* Минпросвещения предложило изменить порядок проведения ЕГЭ. Планируется, в частности, разрешить школьникам менять уровень ЕГЭ по математике (с профильного на базовый или наоборот) не менее чем за две недели до экзамена. Раньше это не оговаривалось, изменение уровня считалось заменой экзамена. Документ должен вступить в силу с 1 сентября 2023 года и действовать в течение шести лет.

* Главное изменение ЕГЭ-2023 по математике касается КИМов и затрагивает даже не содержание, а порядок вопросов. В ФИПИ уверены, что внесённые структурные изменения позволят участнику экзамена «более эффективно организовать работу над заданиями за счёт перегруппировки заданий по тематическим блокам». Так, КИМы по математике базового уровня открывают практико-ориентированные задания, затем следуют блоки заданий по геометрии, алгебре и началам математического анализа.

Подробности: rbc.ru, superjob.ru, rg.ru, fipi.ru.

Портрет педагога

В ПОИСКАХ УЧИТЕЛЯ

(какой специалист в сфере образования самый востребованный?)

По данным «Авито. Работа», в 2022 году на 20% вырос спрос на педагогов разных специальностей по сравнению с 2021 годом. Самой востребованной стала профессия учителя: на неё пришлось 30% всех вакансий в сфере образования. По мнению экспертов, потребность в преподавателях увеличилась на фоне развития новых подходов к обучению и роста числа онлайн-школ и дистанционных курсов. Спрос на учителей, свободно владеющих онлайн-инструментами и цифровыми компетенциями, и дальше будет расти. Тем временем Роструд назвал самых востребованных учителей-предметников. Анализ данных портала

«Работа России» показал, что сегодня школы больше всего нуждаются в учителях математики. На них приходится 9% от числа вакансий для педагогических работников по стране.

В целом, по официальным данным, вакантными остаются 2% учительских ставок (22 тысячи), а учителей моложе 30 лет насчитывается менее 14% (только 150 тысяч). Если же смотреть не «в целом», а по регионам, картина совсем не утешительная. Вот как, например, выглядит портрет татарстанского учителя: немолодая усталая женщина, которая работает как минимум на полторы ставки и стремительно движется «на выход» из школы. На смену старшему поколению идёт вчетверо меньше педагогов; если ничего не менять, через 15 лет в большинстве школ Татарстана некому будет преподавать основные предметы, прежде всего русский язык и математику. На селе картина ещё более удручающая, чем в городе...

Подробности: ria.ru, news.rambler.ru, rostrud.gov.ru, m.realnoevremya.ru.



Перспективы далёкие и близкие

ИМПОРТОЗАМЕЩЕНИЕ В ОБРАЗОВАНИИ

(прощайте, TIMSS и PISA... здравствуй, профориентация!)

* Россия отказалась от международного исследования качества знаний школьников TIMSS-2023. В прошлом году ОЭСР приостановила участие нашей страны в исследованиях PISA и TALIS. В Рособрнадзоре сообщили, что вместе с Минпросвещения, опираясь на накопленный опыт, они уже «реализовали возможность оценки подготовки учащихся “по модели PISA” с 2022 года без участия ОЭСР». Вероятно, будет разработан и некий «вариант импортозамещения» TIMSS.

* С 1 сентября в школах внедрят новую модель профориентации. Она охватит учеников 6–11 классов и будет включать три уровня: базовый, основной и продвинутый (рассчитаны на 40, 60 и 80 ч в год соответственно). Предусмотрено семь направлений профориентации: предподготовка, урочная и внеурочная деятельность, воспитательная работа, дополнительное образование, профобразование и взаимодействие с родителями.

Подробности: vedomosti.ru, gazeta-pedagogov.ru.

Из жизни учёных

ЗУБЫ, КОГТИ, РОГА И... МАТЕМАТИКА

(биологи описали универсальную модель роста в природе)

Австралийские учёные открыли закон роста, определяющий форму и эволюцию заострённых биологических структур у животных и растений: зубов, рогов, когтей, клювов, шипов и колючек. Вообще, универсальные модели роста встречаются редко. Одной из них является логарифмическая спираль, но эта модель описывает только путь структуры в пространстве.

Ещё в XVII веке английский математик и архитектор Кристофер Рен предположил, что раковины растут в виде конуса, «расширяющегося» вдоль логарифмической спирали. Сто лет назад шотландский биолог и математик Дарси Томпсон пришёл к выводу, что зубы растут в форме конуса. Новая модель создаёт третью форму, названную «силовым конусом», носит универсальный характер и тоже описывается на языке математики. В основе её лежит степенной закон, связывающий радиус биологической структуры и её длину. Это открытие позволит не только определять возраст животных по форме их зубов, но и предсказывать эволюционные процессы, считают исследователи.

Подробности: naukatv.ru, bmcbiol.biomedcentral.com.

ИЗ ВУНДЕРКИНДА В ВЕЛИКОГО МЫСЛИТЕЛЯ И УЧЁНОГО

(к юбилею Блез Паскаля)

400 лет назад родился Блез Паскаль, блестящий французский математик, физик, изобретатель, философ и публицист XVII века. Таланты проявились у него рано. В 11 лет Блез написал небольшой трактат о звуках, в 12 – сам вывел и доказал теорему о сумме углов треугольника, в 13 – начал посещать научный кружок Марена Мерсенна, а в 16 – опубликовал свою первую научную работу «Опыт о конических сечениях». В историю математики Блез Паскаль вошёл как один из основателей проективной геометрии и теории вероятностей, автор трактата «Об арифметическом треугольнике» (последний был назван его именем) и исследователь свойств циклоиды. Самое известное изобретение Паскаля – вычислительная машина, создать которую, по его словам, позволили те знания в геометрии и механике, что он приобрёл в отроческие годы.



Паскаль общался лично и вёл переписку со многими именитыми учёными. Куда реже вспоминают о его контактах с известными философами и богословами, аристократами и правителями, а это не менее интересная страница его биографии. Что связывало Паскаля с «великим Арно», французским теологом и логиком Антуаном Арно? О чём он беседовал с гуманистом Леметром де Саси, своим духовником? Какой подарок сделал шведской королеве Кристине, покровительнице европейских учёных и литераторов? И на кого из русских классиков повлиял сам как писатель и мыслитель?

Подробности: Тарасов Б.Н. Паскаль (М., Молодая гвардия, 2006; изд. 3-е, испр. и доп.).

Житейские истории

КТО НА СВЕТЕ ВСЕХ УМНЕЕ?

(нейросеть намерена помочь студентам)

Студент РГГУ успешно защитил диплом, написанный ChatGPT – чат-ботом с искусственным интеллектом (работает в режиме диалога, сам обучается, исправляет свои ошибки и

самосовершенствуется). С помощью него можно создавать контент, по качеству не уступающий тексту, написанному нанятым для этого копирайтером. «Вышло ненапряжно и прикольно!» – делился впечатлениями в соцсети студент. Поскольку самому выполнять работу было лень, молодой человек обратился к нейросети: «Я просил её на английском, она давала ответы достаточно быстро, а затем я прогонял их через переводчик – и всё. Я просил ChatGPT вести себя как студент и просто повышать оригинальность текста. Когда понимал, что что-то корявое [выходит] – просто просил: перепиши». На подготовку диплома ушло 23 часа (15 часов – на генерирование текста и ещё 8 часов – на доработку и редактирование), уникальность текста – 82%. В итоге студент защитил диплом: комиссия ничего не заподозрила и поставила ему оценку «удовлетворительно».



История получила широкую огласку. РГГУ предложил ограничить доступ к ChatGPT. «Российские и зарубежные эксперты высказывают опасения по поводу возникшей проблемы, и найти достойный выход – главная задача научного сообщества», – добавили в пресс-службе вуза. Национальная комиссия по этике в сфере искусственного интеллекта (появилась в России в 2022 году) в свою очередь направила в Минобрнауки письмо с просьбой регламентировать использование нейросетей в учебном процессе. Журналисты попросили прокомментировать ситуацию сам чат-бот. ChatGPT считает, что нейросети можно использовать в работе со студентам: «Они могут быть использованы для анализа больших объёмов данных, а также для генерации сложных моделей и распознавания изображений», но не следует прибегать к ним для решения вопросов, требующих человеческого мышления, оценки произведений искусства, процессов обучения и принятия решений. Выпускника РГГУ, написавшего диплом с помощью ChatGPT, взяли на работу в М.Видео на должность нейросетолога – готовить статьи для бренд-медиа компании в соавторстве с чат-ботом.

История получила широкую огласку. РГГУ предложил ограничить доступ к ChatGPT. «Российские и зарубежные эксперты высказывают опасения по поводу возникшей проблемы, и найти достойный выход – главная задача научного сообщества», – добавили в пресс-службе вуза. Национальная комиссия по этике в сфере искусственного интеллекта (появилась в России в 2022 году) в свою очередь направила в Минобрнауки письмо с просьбой регламентировать использование нейросетей в учебном процессе. Журналисты попросили прокомментировать ситуацию сам чат-бот. ChatGPT считает, что нейросети можно использовать в работе со студентам: «Они могут быть использованы для анализа больших объёмов данных, а также для генерации сложных моделей и распознавания изображений», но не следует прибегать к ним для решения вопросов, требующих человеческого мышления, оценки произведений искусства, процессов обучения и принятия решений. Выпускника РГГУ, написавшего диплом с помощью ChatGPT, взяли на работу в М.Видео на должность нейросетолога – готовить статьи для бренд-медиа компании в соавторстве с чат-ботом.

Подробности: baza.io, vedomosti.ru.

Нетривиальные суждения

Почему же Пифагор и его ученики так много занимались математикой? Почему потом Платон, многое перенявший от пифагорейцев, написал на дверях своей школы: «Не знающим геометрии вход воспрещён»? Потому что знание математики более всего приближает человека к богам. Чем? Тем, что даже бог не может сделать, например, чтобы дважды два не равнялось четырём, а сумма квадратов катетов – квадрату гипотенузы. Если есть в мире законы, которым повинуются всё на свете – и люди, и боги, то это прежде всего законы математические. Кто знает математику, тот знает то, что выше бога.

М.Л. Гаспаров, советский и российский литературовед и филолог

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Научная статья 5.8.2

Scientific article 5.8.2

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_4_73

Одними из часто встречающихся задач являются задачи, в которых необходимо рассматривать длины отрезков, сравнивать величины периметров и так далее – так называемые геометрические неравенства. Перед вами – подборка задач на данную тему.

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Подаеву Михаилу Валерьевичу по адресу rodaev86@gmail.com в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать: для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт); для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь. Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя. Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

1. Треугольник ABC такой, что $AB = BC$. На стороне BC лежит точка D , причём $CB = AC$. Точка E лежит на луче DA , причём $DE = AC$. Сравните длины отрезков EC и AC .

И. Рубанов

2. BE – высоте в треугольнике ABC , m – срединный перпендикуляр к отрезку AB . При этом $BE = EC$, прямая m пересекает BC . Докажите, что угол $C < 36$ градусов.

И. Рубанов

3. $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC , $AD > CD$. Биссектриса угла D пересекает сторону AB в K . Докажите, что $AK > KB$.

С. Берлов, И. Рубанов

4. Дан треугольник ABC . На стороне AC лежит точка P , на отрезке CP – точка Q , причём $2AP = AB$, $2QC = BC$. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше половины периметра треугольника ABC .

А. Кузнецов

5. $ABCD$ – четырёхугольник, описанный около некоторой окружности. Дока-

жите, что диаметр этой окружности не больше длины отрезка, соединяющего середины BC и AD .

О. Южаков

Решение заданий из № 3-2023.

Когда отрезок равен сумме двух других?

1. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC . На сторонах AC , AB , BC лежат, соответственно, точки D , E , F , причём $DE = DF$, $\angle BAC = \angle FDE$. Докажите, что $AT + FC = AC$.

Фольклор

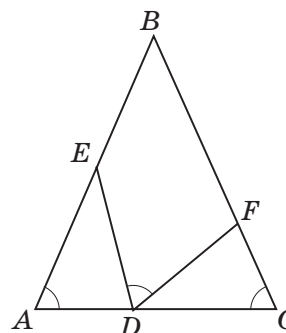


Рис. 1

Решение. Обозначим $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle ADE = \beta$. Треугольники AED и CDF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, так как $DE = DF$, $\angle DAE = \angle DCF$, $\angle AED = 180^\circ - \alpha - \beta$, поэтому $AE = CD$ и $AD = CF$. Следовательно, $AE + FC = CD + AD = AC$.

2. AL – биссектриса в треугольнике ABC . Точка D лежит на AL . Известно, что $\angle BAC : \angle ADC : \angle ACB = 2 : 3 : 4$. Докажите, что $BC + DC = BA$.

А. Кузнецов

Решение. Пусть $\angle BAC = 2\alpha$.

На продолжении отрезка BC за точку C выберем точку E так, что $CD = CE$. Тогда $\angle ACD = 180^\circ - \angle DAC - \angle ADC = 180^\circ - 4\alpha = \angle ACE$. Треугольники ACD и ACE равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AEC = \angle ADC = 3\alpha$ и $\angle CAE = \angle CAD = \alpha$. Заметим, что $\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = 3\alpha = \angle AEB$. Таким образом, треугольник ABE равнобедренный и $AB = BE = BC + CE = BC + CD$.

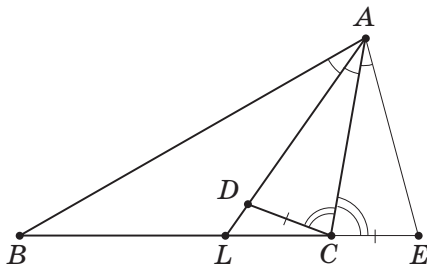


Рис. 2

3. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC . Точка M выбрана внутри треугольника так, что $\angle AMC = 2\angle ABC$. Точка K выбрана на отрезке AM так, что $\angle BKM = \angle ABC$. Докажите, что $BK = KM + MC$.

С. Берлов

Решение. Продлим отрезок CM до пересечения с BK в точке L . По теореме

о внешнем угле треугольника $\angle KLM = \angle AMC - \angle BKM = \angle B$, откуда $MK = ML$.

$$\begin{aligned}\angle LCB &= \angle KLM - \angle LBC = \\ &= \angle B - \angle KBC = \angle ABK, \\ \angle BAK &= \angle BKM - \angle ABK = \\ &= \angle KLM - \angle LCB = \angle LBC,\end{aligned}$$

поэтому треугольники ABK и BCL равны. Значит, $BK = CL = CM + ML = CM + MK$.

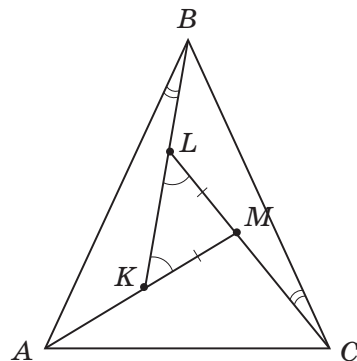


Рис. 3

4. $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, причём сумма углов CAD и BCA равна 180° , $AB = BC + AD$. Докажите, что сумма углов BAC и ACD равна углу CDA .

Фольклор

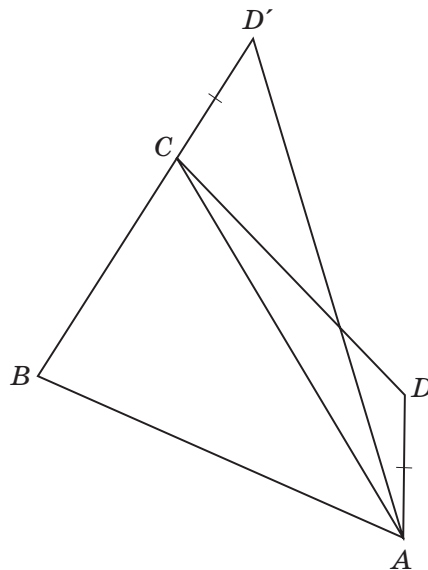


Рис. 4

На продолжении стороны BC за точку C отложим отрезок CD' , равный AD . Тогда $\angle ACD' = 180^\circ - \angle BCA = \angle CAD$, $BD' = BC + CD' = BC + AD = AB$.

Треугольники ACD' и CDA равны по двум сторонам и углу между ними (сторона AC – общая). Поэтому $\angle CAD' = \angle ACD$. Поскольку треугольник ABD' – равнобедренный, $\angle BAC + \angle ACD = \angle BAC + \angle CAD' = \angle BAD' = \angle BD'A = \angle CDA$.

5. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, $\angle A = 2\angle B$. CE – биссектриса угла C , причём точка E лежит на стороне AB . Докажите, что $AD + AE = BE$.

А. Кузнецов

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку F так, что $AD = AF$. Тогда треугольник AFD равнобедренный, и его углы при основании равны. Так как $\angle FAD = 180^\circ - 2\alpha$, то $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

Поскольку $ABCD$ – вписанный, то $\angle ADC = 180^\circ - \angle \alpha = 180^\circ - \angle ADF$. Тогда точки C, D, F лежат на одной прямой. Отсюда имеем: $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, поэтому треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой. То есть, $BE = EF = AD + AE$, что и требовалось доказать.

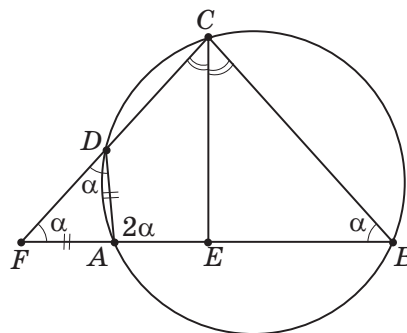


Рис. 5

Ведущий рубрики
Поддаев М.В.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

«Сделаться великим человеком»

Знаменитый советский математик Андрей Колмогоров не только оставил большой след в науке, но и внёс весомый вклад в реформу профильного физико-математического образования в СССР.

В 1943 году математик Андрей Колмогоров набросал в дневнике план под названием «Как сделаться великим человеком, если на это хватит охоты и усердия». В нём он подробно перечислил всё, что ему следует успеть за следующие сорок лет. Математический склад ума не подвёл ученого: в итоге он полностью реализовал свой план, не успев только написать воспоминания «о прожитой жизни». Этот пробел уже несколько десятилетий заполняют его биографы.

Источник: mathcenter.kpfu.ru

ЕЩЁ ЧЕТЫРЕ КВАДРАТА

Научно-популярная статья 5.8.1

УДК: 372.851

Scientific-popular article 5.8.1

DOI: 10.47639/0130-9358_2023-4_76

В 2016 году И. Иткин и И. Семушин на страницах журнала «Квантик» (№ 4) представили вот такую шуточную задачу:

На обложке книги Чарльза Манна об Америке до Колумба можно увидеть четыре небольших квадрата. Как называется эта книга?

Варианты ответа:

- 1) 1492;
- 2) 1491;
- 3) 1375;
- 4) 1234;
- 5) 999.

Правильный ответ – 1491, поскольку в этом числе каждая из четырёх цифр представляет собой квадрат целого числа. Впрочем, с немалой степенью вероятности можно было бы нащупать ответ и без привлечения математики. Достаточно выяснить в энциклопедии, что Колумб впервые ступил на американскую землю в 1492 году, и потому последний год Америки до Колумба – 1491-й.

А теперь позвольте предложить другую внешне схожую задачу:

Название некоего романа представляет собой четырёхзначное число. Представьте себе, что на его обложке тоже нарисованы четыре квадрата. Как же называется роман? Вот пять вариантов ответов, один из которых – верный:

- 1) 1498;
- 2) 1984;
- 3) 4918;

4) 8419;

5) 9814.

Здесь среди цифр вклинилась восьмёрка, которая никак не является квадратом, так что прежний подход, очевидно, непригоден. Попробуйте найти другой подход. Лагранж и Лежандр вам в помощь!

Решение

Пожалуй, сопутствующие исторические события будут поинтереснее, чем данная конкретная задача, которую можно считать лишь «затравкой». Но начнём-таки с неё. Конечно, французский математик Жозеф Луи Лагранж здесь упоминается неспроста, потому что именно он в 1770 году доказал такую теорему: **любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем четырёх квадратов натуральных чисел**. При этом далеко не для всех чисел требуется использование *непрерывно* четырёх квадратов – зачастую можно обойтись и меньшим количеством, например: $10 = 1^2 + 3^2$, а число 25 – само по себе квадрат! Результат Лагранжа примерно через три десятилетия уточнил его соотечественник Адриен Мари Лежандр, доказавший, что только для чисел вида $4^m(8n + 7)$, где m и n – целые неотрицательные числа, нельзя обойтись менее чем четырьмя квадратами. Среди пяти данных в условии чисел лишь одно, а именно $1984 = 4^3(8 \cdot 3 + 7)$, имеет такой вид, и потому только для него требуется

четыре слагаемых – не меньше! Вот один из симпатичных вариантов такого представления: $1984 = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 44^2$ (а всего их три – попробуйте найти остальные). Так что верный ответ – «1984» (кстати сказать, реально существующий роман-антиутопия Джорджа Оруэлла).

Прочие предложенные в задаче числа раскладываются в сумму не более чем трёх квадратов. Но интересно: а вдруг для какого-то из них и меньшим количеством можно обойтись – двумя или вообще одним? Впрочем, одним – это чересчур, ведь для этого число просто-напросто должно быть само по себе точным квадратом, чего, очевидно, не наблюдается. А насчёт двух квадратов – тут как сказать...

К счастью, ответ на данный вопрос давно получен (иногда его называют «теоремой Ферма-Эйлера»). Оказывается, если число не является точным квадратом, то для выяснения истины его надо прежде всего разложить на простые множители. Затем выделить из них те, которые при делении на 4 дают остаток 3. И если окажется, что *все* такие простые сомножители входят в разложение данного числа в *чётной* степени, то число можно представить как сумму двух квадратов. Ну, а если хотя бы один сомножитель такого вида входит в разложение в нечётной степени, то меньше чем тремя квадратами не обойтись.

Что ж, посмотрим. Начнём с $1498 = 2 \cdot 7 \cdot 107$. Как видим, сомножитель 7 как раз даёт остаток 3 при делении на 4, и эта самая семёрка входит в разложение в нечётной степени (первой). Так что здесь нужны три квадрата. Какие именно – поищите сами. Успех гарантирован!

Далее, $4918 = 2 \cdot 2459$, причём $2459 = 4 \cdot 614 + 3$. Та же история.

Продолжим: 8419 – само по себе простое число, причём $8419 = 4 \cdot 2104 + 3$. И

здесь нужны три квадрата.

Последняя надежда: $9814 = 2 \cdot 7 \cdot 701$. Тоже всё ясно.

Итак, для представления числа 1984 требуется четыре квадрата, для остальных – три (и не меньше!).

Что здесь можно добавить? Впервые теорема Лагранжа встречается (без доказательства) ещё в «Арифметике» древнегреческого мудреца Диофанта Александрийского, и, как выяснилось позже, является частным случаем одновременно *двух* очень красивых теорем.

Одна из них связана с так называемыми *многоугольными* числами, то есть такими числами, которые можно «нарисовать» в виде многоугольников. Для примера на рисунках 1, 2 и 3 изображены такие «схемы» для треугольных, четырёхугольных и пятиугольных чисел соответственно, а само число есть количество «жирных точек» на рисунке.

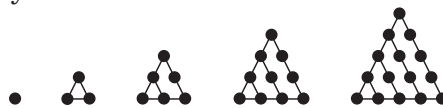


Рис. 1

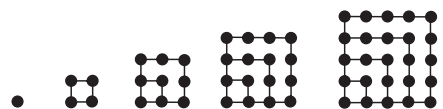


Рис. 2



Рис. 3

Существует общая формула для k -го по порядку n -угольного числа – оно равно $\frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}$. Теорема, сформулированная ещё в XVII веке французским математиком Пьером Ферма и доказанная уже в XIX веке тоже французом Огюсте-

ном Коши (и независимо от него немецким «королём математиков» Карлом Фридрихом Гауссом) гласит, что **любое натуральное число может быть представлено в виде суммы n -угольных чисел, количество которых не превышает n** . А поскольку четырёхугольные числа (см. формулу при $n = 4$, а также рисунок 2) есть не что иное как квадраты натуральных чисел, то, очевидно, теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Ферма-Коши-Гаусса для $n = 4$.

Вторая теорема была сформулирована в 1770 англичанином Эдуардом Варингом, а доказана в 1909 году немецким математиком Давидом Гильбертом. Она утверждает, что **для каждого натурального n существует такое натуральное $g(n)$, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем $g(n)$ n -х степеней натуральных чисел**. И потому теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Варинга, причём здесь $g(2) = 4$. Правда, теорема Варинга не указывает конкретных значений $g(n)$ для каждого n — эти значения определялись на основе

других исследований. Например, $g(3) = 9$, то есть каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем девяти кубов натуральных чисел. Надо сказать, что *ровно* девять кубов требуется лишь для представления чисел 23 и 239, а остальные числа не требуют столь большого количества слагаемых.

Вот значения $g(n)$ для первых n : 1, 4, 9, 19, 37, 73, 143, 279, 548, 1079. Рост, как видим, довольно быстрый. Иоганн Эйлер (сын великого швейцарско-немецко-русского учёного Леонарда Эйлера) высказал гипотезу, что $g(n) = 2^n + [1,5^n] - 2$ (квадратные скобки означают целую часть числа). Она пока не доказана, но и не опровергнута.

Подумать только, в какие дебри можно забраться, стартовав от невиннейшей фразы «четыре квадрата». Математика, понимаешь...

И.Ф. Акулич
(г. Минск, Беларусь)

Статья поступила в редакцию

28.06.2022.

Принята к публикации

20.09.2022.

В «Сириусе» подвели итоги финального этапа ВсОШ по математике

В заключительном туре приняли участие почти 500 школьников.

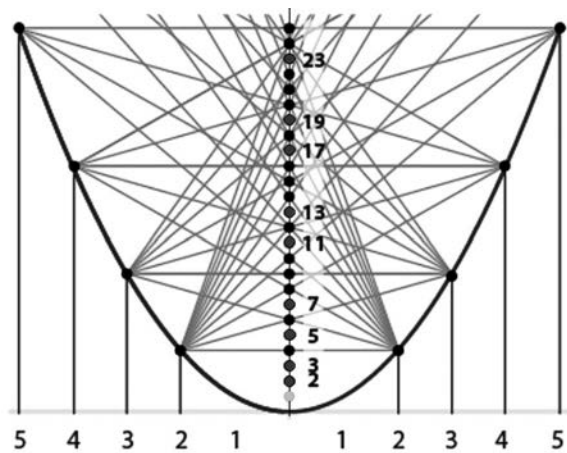
На федеральной территории «Сириус» состоялась торжественная церемония закрытия финала всероссийской олимпиады школьников по математике. Он проходил с 21 по 27 апреля. Этот финал стал самым массовым — в интеллектуальных испытаниях приняли участие 487 школьников из разных регионов страны, а в общей сложности в олимпиаду включились около 2,5 миллиона подростков из 78 регионов, в том числе из Луганской и Донецкой народных республик.

Победителями олимпиады стали 34 школьника, призёрами — 182. Примечательно, что в этом году в финале ВсОШ приняли участие восемь детей, которые младше других участников. Например, призёром в программе девятых классов стал 12-летний Георгий Шкурихин из Санкт-Петербурга, а победителем в программе десятых классов — семиклассник из Москвы Петр Ким.

Источник: mathcenter.kpfu.ru

КРАСОТА И ПРОСТОТА

Продолжаем знакомиться с оригинальными визуализациями простых чисел¹. Вот графическая версия решета Эратосфена, являющаяся одно из приложений параболы. Она иллюстрирует малоизвестный способ просеивания натурального ряда: его не найти ни в учебниках и справочниках по математике, ни даже во всезнающей Википедии. Речь идёт о решете Матиясевича – Стечкина, или визуальном сите для простых чисел². Рассмотрим модель, в которой строится парабола $y = x^2$ и на осях координат указываются целые положительные числа. При этом просеиваемый натуральный ряд размещается на оси ординат.



Решето Матиясевича – Стечкина

Отметим на графике точки с целочис-

¹ См. также: Карпушина Н. Простота и красота (Математика в школе, № 3, 2023).

² Это авторское название. Юрий Матиясевич (род. 1947) и Борис Стечкин (род. 1950) – советские и российские математики.

ленными координатами и соединим их отрезками: каждую точку одной ветви параболы со всеми точками другой ветви. Получим множество хорд с концами

$(a; a^2)$ и $(b; b^2)$, где $a, b = 2, 3, 4, \dots$

Любая из них пересекает ось ординат в точке $(0; ab)$. Ясно, что произведение ab – составное число. Если провести все такие отрезки, то из натурального ряда будут «вычеркнуты» составные числа и останутся только простые.

На первый взгляд рисунок перегружен линиями, но как раз на них не стоит обращать внимания. Нужно искать на оси ординат невычеркнутые числа. В общем-то, достаточно провести через каждую точку $(0; ab)$ при $a \neq b$ один отрезок вместо двух. Но это пойдёт в ущерб эстетике: симметричная сетка из хорд здорово поддерживает образ сита.

Примечательно, что эта модель возникла на основе другой, напрямую с ней не связанной. Юрий Матиясевич использовал указанное свойство параболы для построения номограммы умножения, а идею применить её для визуализации простых чисел высказал Борис Стечкин. Конструкция из параболы $y = x^2$ и её хорд может послужить не только графической моделью таблицы умножения. Потенциально она более информативна. Подойдёт и для демонстрации переместительного свойства умножения, и для построения последовательности квадратов чисел, и даже для разъяснения выражения «растёт в геометрической прогрессии».

Наглядно и красиво можно представить также высказывания о простых числах. Взяв, к примеру, гипотезу, выдвинутую в 1958 году американским математиком Норманом Гильбрайтом. Выпишем подряд простые числа, а под ними в первой строке – их разности, во второй – абсолютные величины разностей чисел из первой строки и т. д. Тогда в каждой строке первым числом будет 1. Вот как выглядит иллюстрация гипотезы для простых чисел от 2 до 41.

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4		
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2			
1	2	0	0	0	0	0	2	0	2				
1	2	0	0	0	0	2	2	2					
1	2	0	0	0	2	0	0						
1	2	0	0	2	2	0							
1	2	0	2	0	2								
1	2	2	2	2									
1	0	0	0										
1	0	0											
1	0												
1													

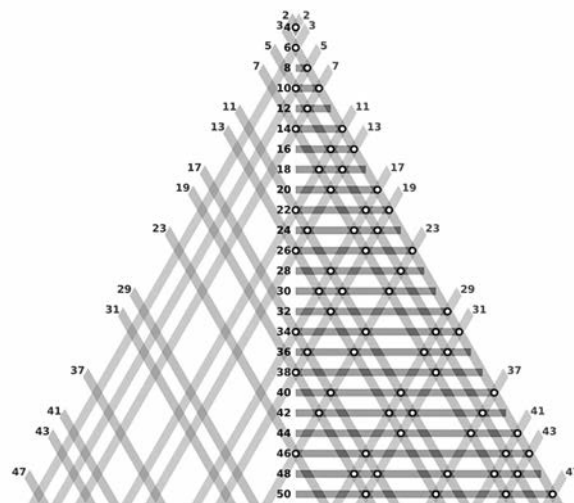
Визуализация гипотезы Гильбрайта

Закономерность в буквальном смысле слова налицо. Казалось бы, куда уж проще? Это же почти очевидно! Но математики по-прежнему довольствуются её непосредственной проверкой. Многие склонны считать, что предположение Гильбрайта верно, но обосновать его в обозримом будущем вряд ли удастся. Так, в своё время Пол Эрдёш заметил, что поиски доказательства могут продлиться лет двести. Это не первая и не последняя задача из области теории чисел с обманчиво простой формулировкой.

Ещё пример: гипотеза Гольдбаха, одна из наиболее старых открытых проблем в математике. В 1742 году Христиан Гольдбах, немецкий матема-

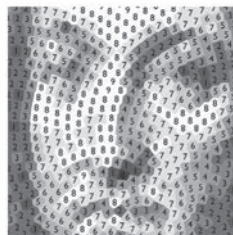
тик, полжизни проживший в России, в переписке с Леонардом Эйлером высказал предположение: каждое чётное число есть сумма двух простых чисел. «...Я считаю [это] верной теоремой, хотя и не могу доказать», – ответил Эйлер. В отличие от нынешних математиков Гольдбах считал 1 простым числом, поэтому в современной формулировке идёт речь о числах, больших 2.

Изящную визуализацию знаменитой гипотезы предложили в 2012 году Адам Каннингем и Джон Рингленд. В ней каждое число, будь то слагаемое или сумма, условно обозначено полосой: простое – наклонной, а чётное – горизонтальной. Кружки на пересечениях трёх полос заменяют знак «+» и отмечают все возможные пары слагаемых (порядок коих в паре неважен).



Разбиения Гольдбаха

Модель позволяет проверить гипотезу Гольдбаха для малых чисел, не прибегая к вычислениям. Например, 8 – сумма 3 и 5, 22 – сумма 11 и 11, 5 и 17, 3 и 19. А ещё подметить общую нестрогую закономерность: чем больше чётное число, тем больше способов представить его в виде суммы двух простых чисел.



Закари Абель. Портреты Мерсенна и Ферма из простых чисел, 2016

«Почему математики тратят столько времени на решение таких задач, как Великая теорема Ферма или проблема Гольдбаха? Ведь в этом нет практического смысла, из их решения нельзя извлечь никакой выгоды. – Таким вопросом задавался американский физик и популяризатор науки Джеймс Трефил и сам на него ответил: – Это очень древний и очень свойственный человеческой природе вид деятельности – поиск самоочевидной, бесспорной истины». А разве ясное наглядное представление неочевидных идей, правил, связей или закономерностей не есть самый простой и доступный способ помочь узреть эту истину даже тем, кто далёк от математики? Недаром к нему прибегали ещё греки.

Отдельный вид искусства визуализации – генерирование картин из чисел. Не без помощи компьютера, разумеется. Тут уже на первый план выходят красота и точность изображения. Так, американский математик-исследователь и преподаватель MIT Закари Абель мастерски превращает в узнаваемые портреты боль-

шие простые числа. Покрывает плотно сеткой, тем самым разбивая его на мелкие фрагменты, заполняет ячейки цифрами и закрашивает каждую одним из десяти цветов: с цифрой 0 – чёрным цветом, с 9 – белым и т. д. Сама картина выглядит как собранный пазл.

Взглянем на две работы Закари. Это портреты Марена Мерсенна и Пьера Ферма, внёсших свой вклад в изучение простых чисел. «Главное – правильно смотреть на них!» – говорит автор. Изображение Мерсенна размером 127×127 ячеек скрывает в себе 16129-значное простое число. Ещё более эффектно выглядит портрет Ферма. В нём прячется 5000-значное простое число. Все его цифры идут по порядку и распределены по спирали Ферма, начиная с центра. В чём секрет такой филигранной работы? В умении отыскивать подходящие числа. Как Абель решает эту задачу? А это уже совсем другая история.

Наталья Карпушина

Иллюстрации: qedcat.com, ru.wikipedia.org,
Wikimedia Commons, The Bridges Archive.

ПОДПИСКА 2023. II ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

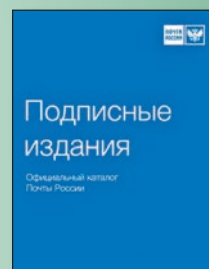
«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

- В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**
- На сайте «Почта России»:
<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



- Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>
- На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

- Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
 - Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека
- Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru

ISSN 0130-9358



Математика в школе, 2023, № 4, 1–80