

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

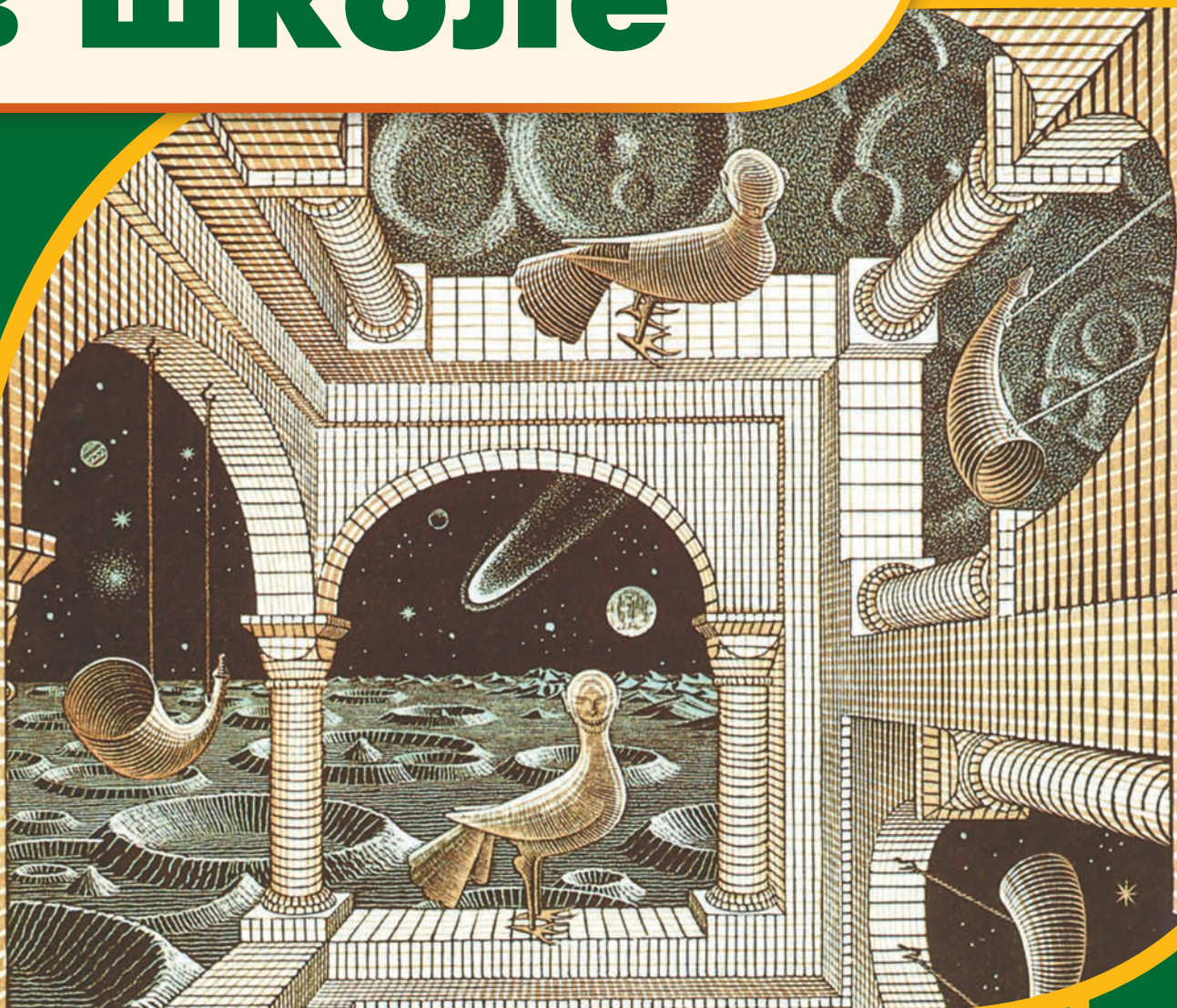


научно-теоретический и методический журнал

3 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА **В ШКОЛЕ**



**Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!»,
10–11 классы, 2021–2022**

**О подготовке учителей к квалификационной работе
проекта «Математическая Вертикаль»**

**О применении параметрического задания кривых
при изучении математики в средней школе**

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



ПРОФЕССОРУ СЕРГЕЮ ИВАНОВИЧУ КАЛИНИНУ — 70 ЛЕТ

Известный математик-методист, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, заместитель главного редактора журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников» профессор С.И. Калинин отмечает юбилей.

Сергей Иванович родился 22 апреля 1953 года в деревне Юфереvская Кумёнского района Кировской области. В 1970 году окончил Кумёнскую среднюю школу и поступил в Горьковский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, который с отличием окончил в 1975 году. По окончании университета был оставлен ассистентом на кафедре теории функций, затем — обучение в аспирантуре под руководством крупного советского и российского математика, профессора И.Ф. Красичкова-Терновского, защита кандидатской диссертации. В 1986 году С.И. Калинин был приглашён в Кировский государственный педагогический институт имени В.И. Ленина (КГПИ) на кафедру математического анализа и методики преподавания математики, которой заведовал с 1986 по 2002 год.

В 2010 году С.И. Калинин защитил докторскую диссертацию на тему «Методическая система обучения студентов педвуза дифференциальному и интегральному исчислению функций в контексте фундаментализации образования» в Москве в Институте содержания и методов обучения Российской академии образования.

Еще в 1994 году Сергей Иванович организовал исследовательский студенческий семинар по математическому анализу, которым руководил вплоть до 2020 года, когда семинар перерос в научно-методический семинар

«Математика и образование» для преподавателей, аспирантов и студентов факультета компьютерных и физико-математических наук.

Профессор Калинин — автор 290 публикаций, включая две монографии и 16 учебно-методических пособий, используемых в педагогической работе, он регулярно выступает с докладами на международных и всероссийских научно-методических и математических конференциях и семинарах.

С 2021 года С.И. Калинин — заместитель главного редактора журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников», в работу которых Сергей Иванович вносит много новых плодотворных идей, привлекая новых авторов, редакторов и рецензентов.

В настоящее время С.И. Калинин — профессор кафедры фундаментальной математики Вятского государственного университета (ВятГУ), соруководитель Кировской научно-методической школы по математическому образованию.

Сергей Иванович — профессор классического типа, внимательный и строгий преподаватель, вдумчивый наставник, ответственный и творческий человек, он является последовательным сторонником возрождения высшего профессионального предметного педагогического образования в нашей стране.

Сотрудники издательства «Школьная пресса», редакции журналов «Математика в школе» и «Математика для школьников», преподаватели, сотрудники и студенты факультета компьютерных и физико-математических наук ВятГУ желают юбиляру новых научных свершений, плодотворной работы педагога, наставника, учёного, долгих лет жизни во благо отечественного математического образования!

Евгений Бунимович

ОЛИМПИАДЫ

- 3 Будак Б.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Козко А.И.,
Панфёров В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Шейпак И.А.
Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!», 10–11 классы, 2021–2022

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 13 Андрианова Ю.В., Бегунц А.В.
**О подготовке учителей к квалификационной работе
проекта «Математическая Вертикаль»**

КОНСУЛЬТАЦИЯ

- 20 Богданова Е.А., Богданов П.С., Богданов С.Н.
**О применении параметрического задания кривых
при изучении математики в средней школе**

МУЛЬТИМЕДИА

- 33 Клековкин Г.А.
**Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов
(касательная, нормаль, особые точки кривой)**

ЭКСПЕРИМЕНТ

- 49 Ястребов А.В., Клюкин П.А.
Наклон колеса к дороге, циклоидальные кривые и феномен пробуксовки

ОТКРЫТЫЙ УРОК

- 57 Ботиров Г.И., Курбанов Н.Х.
Арифметико-геометрическая прогрессия

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 63 Тестов В.А., Шилова Г.Н.
К столетию учёного-методиста Сергея Григорьевича Губы

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 66** Карпушина Н.М.
Стандарт знаний и учительский рейтинг (новости образования)
и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ЗАДАЧИ

- 70** Подаев М.В.
Когда отрезок равен сумме двух других?
- 71** Иванова Е.Ю.
Решения задач из журнала «Математика в школе» № 1 / 2023
- 74** Дворянинов С.В.
Нехорошая задача

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

- 75** Акулич И.Ф.
Зная броду, суйся в воду (о весьма эффективном способе решать некоторые задачи)

СЕТЕМАТИКА

- 79** Карпушина Н.М.
Простота и красота

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3753. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 3 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!», 10–11 КЛАССЫ, 2021–2022

OLYMPIAD IN MATHEMATICS «CONQUER THE VOROBYOVY GORY!», GRADE 10–11, 2021–2022

Научная статья
УДК: 372.851

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_3

Б.А. Будак, Д.В. Горяшин, А.С. Зеленский, А.И. Козко, В.С. Панфёров, А.Г. Разборов, И.Н. Сергеев, И.А. Шейпак,
МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва),
asz1956@yandex.ru

B.A. Budak, D.V. Goryashin, A.S. Zelenskiy, A.I. Kozko, V.S. Panfyorov, A.G. Razborov, I.N. Sergeev, I.A. Sheipak,
Lomonosov MSU (Moscow),
asz1956@yandex.ru

Аннотация: приводятся задания, предлагавшиеся учащимся 10–11-х классов на олимпиаде «Покори Воробьёвы Горы!» по математике в 2021/2022 учебном году, с ответами и решениями

Abstract: there are problems offered to students of grades 10–11 on the Olympiad «Conquer the Vorobyovy Gory!» in mathematics, organized by Lomonosov Moscow State University in 2021/2022 academic year, with answers and solutions

Ключевые слова: олимпиада «Покори Воробьёвы Горы!», МГУ, математика

Keywords: olympiad «Conquer the Vorobyovy Gory!», Lomonosov Moscow State University, mathematics

© Будак Б.А., Горяшин Д.В., Зеленский А.С., Козко А.И., Панфёров В.С., Разборов А.Г., Сергеев И.Н., Шейпак И.А. 2023

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» в 2021/2022 учебном году состояла из двух этапов, каждый из которых проводился в онлайн формате. Отборочный этап (ноябрь – декабрь 2021 г.) длительностью 24 часа состоял из блиц-тура (6 задач, 3 часа) и творческой части (3 задачи, полное решение которых нужно было отправить в течение оставшегося времени). Победители и призёры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном этапе (март 2022 г.).

Отборочный этап. Блиц-тур

Каждый участник блиц-тура получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

Приводим типичный набор из шести задач блиц-тура.

1. Найдите количество целых решений неравенства

$$\frac{2\sqrt{x+24}-x-16}{x^2-14x+45} \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $A = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right]$, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

3. Найдите сумму квадратов всех высот треугольника, если известны два его угла α и β и площадь S . Если ответ будет не-

целым числом, округлите его до ближайшего целого. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, $S = 8$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 88, \\ x^2y + xy^2 = 48. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\frac{y_k}{x_k}$

для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

5. Машина проехала участок пути AB со скоростью v_1 , затем вдвое больший участок пути со скоростью v_2 и, наконец, третий участок пути, который в три раза больше AB , со скоростью v_3 . Найдите среднюю скорость автомобиля на всём маршруте. В ответе укажите, на сколько процентов найденная средняя скорость больше скорости v_1 , при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой. $v_1 = 40$, $v_2 = 50$, $v_3 = 60$.

6. Найдите все целые значения a , не превосходящие по абсолютной величине 15, при каждом из которых неравенство

$$2ax + 3a^2 - 24a + 48 > a^2 \cdot \sqrt{x-1}$$

выполняется при всех x из промежутка $[5; 10]$. В ответе укажите сумму всех таких a .

Отборочный этап.

Творческое задание

7. Найдите значение выражения $[10 \arcsin(\sin((2021^{2023} + 0,3)\pi))]$, где $[x]$ — целая часть числа x .

8. Высота треугольника равна 10. Какие значения может принимать его площадь, если тангенсы всех трёх углов треугольника выражаются целыми числами? В случае нескольких значений площади укажите в ответе их сумму. При необходимости округлите ответ до сотых.

9. Коридор имеет ширину 3 и длину 2022. Имеется паркетная плитка двух размеров: 1×2 и 2×2 . Найдите количество способов уложить паркет на пол в этом коридоре. В ответе укажите две последние цифры найденного числа (например, если получено число 1234567, то в ответе следует указать 67).

Заключительный этап.

Вариант 1

(11 класс)

10. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 6, 7, 8, 9, 10, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, ...)?

11. Решите неравенство

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x - 1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ}\right).$$

12. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $AB = BC = CD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности?

13. Последовательность a_n задана формулами

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n.$$

Найдётся ли натуральное число n такое, что $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

14. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости ABC . Сфера

радиусом, равным AC , с центром в точке S делит пирамиду на две части. Найдите объём большей из этих частей, если $SA = AB = 2$.

15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежутки длиной 1.

Вариант 2 (10 класс)

16. Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 12, 13, 14, 15, 16, 17, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $27 = 3^3$, ...)?

17. Решите неравенство

$$(8x^3 - 9x^2 - 2x + 1) \cdot \arccos(-2x - 1) \geq \arccos\left(\frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ}\right).$$

18. Найдите количество натуральных делителей наибольшего целого значения выражения $xuz + xy + yz + zx + 2023$, если сумма неотрицательных чисел x , y и z равна 2022.

19. Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $BC = CD = AD$ и все попарные расстояния между точками A , B , C и D выражаются целыми числами. Чему равна площадь этого четырёхугольника?

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$|x^3 + 2x^2 + x - a| + |x^3 - 2x^2 + x + a| < 4x^2 - 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежутки длиной 2.

Ответы и решения.

Отборочный этап. Блиц-тур

1. Ответ: 20.

Решение. Разложив на множители знаменатель, получаем неравенство

$$\frac{2\sqrt{x+24} - x - 16}{(x-5)(x-9)} \geq 0.$$

Так как

$$2\sqrt{x+24} \geq x+16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq x \leq -16, \\ 4x+96 \geq (x+16)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24 \leq x \leq -16, \\ -20 \leq x \leq -8, \end{cases}$$

то выражение в числителе неотрицательно при $x \in [-24; -8]$ и отрицательно при $x > -8$.

Выражение в знаменателе отрицательно при $5 < x < 9$ и неотрицательно при остальных значениях x .

Поэтому $x \in (5; 9) \cup [-24; -8]$, и целых решений будет $3 + 17 = 20$.

2. Ответ: $-2,36$ (точное значение: $-\frac{3\pi}{4}$).

Решение. Уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} 6 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x &= \\ &= 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$. Так

как $\frac{1}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$, то на заданный интервал попадает одна точка: $x = -\frac{3\pi}{4}$. Поэтому

ответ: $-\frac{3\pi}{4} \approx -2,356... \approx -2,36$.

3. Ответ: 46.

Решение. Проведём высоту h_b на сторону b . Тогда из прямоугольных треугольников найдём $c = \frac{h_b}{\sin \alpha}$, $a = \frac{h_b}{\sin \gamma}$. Так как

$S = \frac{ac}{2} \sin \beta$, то отсюда:

$$h_b^2 = \frac{2S \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Аналогично получаются формулы для двух других высот, и тогда:

$$\begin{aligned} h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 &= \\ &= \frac{2S \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{2S \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta} + \frac{2S \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \\ &= 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \right). \end{aligned}$$

Так как $S = 8$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, то $\gamma = \frac{\pi}{12}$, и поэтому

$$\begin{aligned} h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 &= 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \times \\ &\times \left(2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{2-\sqrt{3}} \right) = \\ &= 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \frac{34+12\sqrt{3}}{3} = \frac{4(33+\sqrt{3})}{3} \approx 46. \end{aligned}$$

4. Ответ: $-0,76$ (точное значение: $\frac{1-\sqrt{217}}{18}$).

Решение. Умножим первое уравнение на 6, второе – на (-11) и сложим:

$$6x^3 - 11x^2y - 11xy^2 + 18y^3 = 0.$$

Поделив обе части на x^3 и обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим уравнение:

$$\begin{aligned} 18t^3 - 11t^2 - 11t + 6 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2} \right) (9t^2 - t - 6) &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{217}}{18}.$$

Минимальное значение $\frac{y_k}{x_k}$ равно $\frac{1-\sqrt{217}}{18} \approx -0,76$.

5. Ответ: 30,43.

Решение. Пусть длина первого участка равна a , тогда длина второго участка равна $2a$, а третьего – $3a$. Время прохождения каждого из участков равно соответ-

ственно: $\frac{a}{v_1}$, $\frac{2a}{v_2}$, и $\frac{3a}{v_3}$. Поэтому средняя скорость на всём маршруте равна

$$\begin{aligned} \frac{a+2a+3a}{\frac{a}{v_1} + \frac{2a}{v_2} + \frac{3a}{v_3}} &= \frac{6}{\frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} + \frac{3}{v_3}} = \\ &= \frac{6}{\frac{1}{40} + \frac{2}{50} + \frac{3}{60}} = \frac{1200}{23}. \end{aligned}$$

Эта скорость больше, чем $v_1 = 40$, на

$$\left(\frac{1200}{23 \cdot 40} - 1 \right) \cdot 100\% = \frac{700\%}{23} \approx 30,43\%.$$

6. Ответ: -75 .

Решение. Обозначим $t = \sqrt{x-1}$. Тогда получаем, что неравенство $f(t) \equiv 2at^2 - a^2t + 3a^2 - 22a + 48 > 0$ должно выполняться при всех $t \in [2; 3]$.

Необходимым условием для этого является выполнение двух неравенств: $f(2) > 0$, $f(3) > 0$, откуда получаем:

$$f(2) = 8a - 2a^2 + 3a^2 - 22a + 48 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; 6) \cup (8; +\infty);$$

$$f(3) = 18a - 3a^2 + 3a^2 - 22a + 48 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; 12).$$

Таким образом, $a \in (-\infty; 6) \cup (8; 12)$. Выясним, является ли это условие достаточным.

Значения $a \in (-\infty; 0]$ подходят, так как тогда функция $f(t)$ либо линейна, либо выпукла вверх и поэтому положительна на всём интервале $t \in [2; 3]$.

При $a \in (0; 6) \cup (8; 12)$ графиком функции $f(t)$ является парабола с ветвями, направленными вверх. Абсцисса её вершины равна $t_0 = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$. Дискриминант равен

$$\begin{aligned} a^4 - 24a^3 + 176a^2 - 384a &= \\ &= a(a-4)(a-8)(a-12). \end{aligned}$$

Если $a \in (8; 12)$, то дискриминант отрицателен, и функция $f(t)$ положительна.

Если же $a \in (0; 6)$, то абсцисса вершины параболы лежит левее интервала $[2; 3]$.

Это гарантирует положительность функции на этом интервале.

Таким образом, все значения $a \in (-\infty; 6) \cup (8; 12)$ удовлетворяют условию. Условию $|a| \leq 15$ удовлетворяют $a \in (-15; 6) \cup (8; 12)$.

Сумма целых значений:

$$-15 - 14 - 13 - 12 - 8 - 7 - 6 = -75.$$

Отборочный этап. Творческое задание

7. Ответ: -10 .

Решение. Так как число 2021^{2023} – нечётное, то $2021^{2023} = 2k + 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 10 \arcsin(\sin((2021^{2023} + 0,3)\pi)) &= \\ &= 10 \arcsin(\sin(1,3\pi + 2\pi k)) = \\ &= 10(-0,3\pi) = -3\pi. \end{aligned}$$

Взяв целую часть, получаем ответ, равный -10 .

8. Ответ: $183,33$.

Решение. Обозначим углы треугольника $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда $\alpha \leq 60^\circ$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha$ является целым числом, то $\operatorname{tg} \alpha = 1$, а $\alpha = 45^\circ$. Тогда $\beta + \gamma = 135^\circ$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = -1,$$

то есть $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = -1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$. Поскольку $\operatorname{tg} \gamma \neq 1$, то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma + 1}{\operatorname{tg} \gamma - 1} = 1 + \frac{2}{\operatorname{tg} \gamma - 1}.$$

Так как $\operatorname{tg} \beta$ должен быть целым числом, то выражение $(\operatorname{tg} \gamma - 1)$ может принимать одно из значений: $\pm 1, \pm 2$.

А с учётом условия $0 \leq \operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \gamma$ получаются целые решения: $\operatorname{tg} \gamma = 3$, $\operatorname{tg} \beta = 2$, и треугольник имеет углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = \arctg 2$, $\gamma = \arctg 3$.

Сторона, к которой проведена известная высота $h = 10$, может быть равной или

$$h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \frac{3}{2}h,$$

или

$$h(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \frac{5}{6}h,$$

или

$$h(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) = \frac{4}{3}h.$$

Поэтому площадь треугольника может быть равной

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}h \cdot h = \frac{3}{4}h^2,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}h \cdot h = \frac{5}{12}h^2,$$

или

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}h \cdot h = \frac{2}{3}h^2.$$

Сумма возможных значений площади равна $\frac{11}{6}h^2$.

При $h = 10$ получаем

$$\frac{1100}{6} = \frac{550}{3} \approx 183,33.$$

9. Ответ: 45 .

Решение. Отметим, что укладка коридора нечётной длины невозможна из соображений чётности. Поэтому далее будем говорить о коридоре чётной длины. В нашем случае $n = 2022$.

Пусть $f(n)$ – количество вариантов укладки для коридора размера $3 \times n$ (эта величина определяется только для чётных n), а $g(n)$ – количество вариантов укладки полосы размера $3 \times n$, у которой вырезана одна угловая клетка (здесь, наоборот, n может быть только нечётным).

Тогда полоса $3 \times (n + 1)$ укладывается так, как показано в вариантах 2–6 на рисунке 1:

$$f(n + 1) = 2g(n) + 3f(n - 1). \quad (1)$$

Полоса без уголка может быть уложена так, как показано в вариантах 2–4 на рисунке 2:

$$g(n + 1) = f(n) + 2g(n - 1). \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что

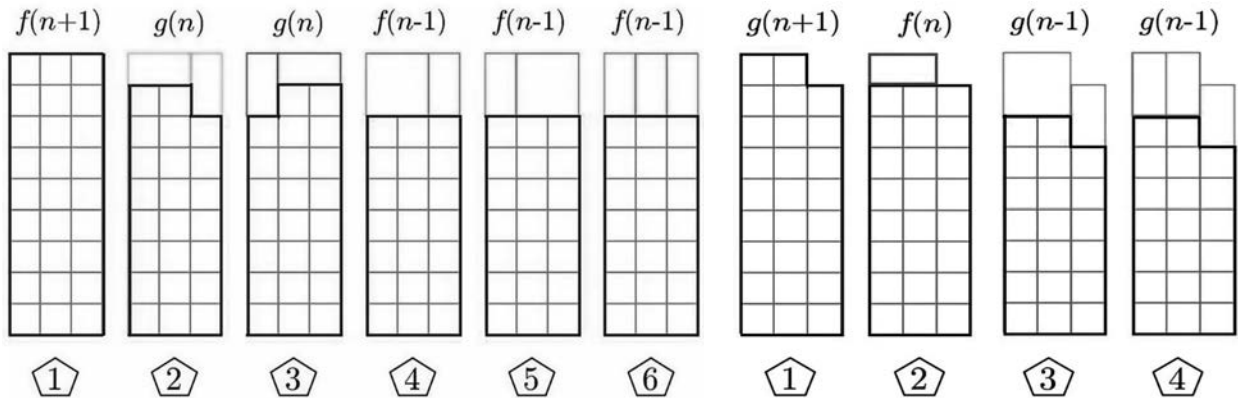


Рис. 1

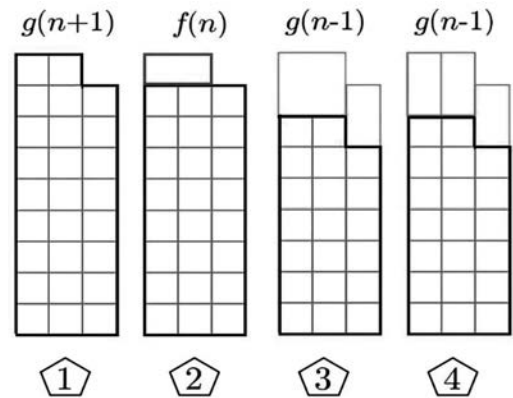


Рис. 2

$$f(n+2) = 2g(n+1) + 3f(n), \quad (3)$$

$$f(n) = 2g(n-1) + 3f(n-2). \quad (4)$$

Если к уравнению (3) прибавить удвоенное уравнение (2) и вычесть удвоенное уравнение (4), то получим

$$f(n+2) = 7f(n) - 6f(n-2). \quad (5)$$

Такого рода рекуррентные соотношения разрешаются с помощью так называемых характеристических уравнений. Соответствующие ссылки можно найти в литературе и в интернете, после чего желающие могут с этим ознакомиться более подробно. Здесь же мы укажем путь решения без особых подробностей.

Будем искать решение уравнения (5) в виде $f(n) = a \cdot x^n + b$, где a и b – константы. Тогда рекуррентное соотношение $f(n+2) = 7f(n) - 6f(n-2)$ можно записать в виде $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$, откуда $x^2 = 1$ или $x^2 = 6$. Из четырёх полученных корней подходит $x = \sqrt{6}$.

Таким образом, $f(n) = a \cdot 6^{n/2} + b$, где a и b – неопределенные пока константы. Учитывая начальные условия $f(0) = 1$ (так как несуществующий коридор можно уложить единственным способом – никаким), $f(2) = 5$ (получается простым перебором случаев), находим $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$.

Значит, для чётных n получили соот-

ношение $f(n) = \frac{4 \cdot 6^{n/2} + 1}{5}$. Других решений нет, так как эта формула верно задаёт $f(0)$ и $f(2)$, а по двум начальным условиям решение рекуррентного соотношения задаётся однозначно.

Определим две последние цифры числа $f(n) = \frac{4 \cdot 6^{n/2} + 1}{5} = \frac{4 \cdot 6^s + 1}{5}$, где $n = 2s$.

Две последние цифры числа – это остаток от деления числа на 100. Поэтому

$$\begin{aligned} f(2s) &= \frac{4 \cdot (1+5)^s + 1}{5} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{5} \left(4 \left(1 + 5s + \frac{s(s-1)}{2} \cdot 5^2 \right) + 1 \right) \pmod{100} \equiv \\ &\equiv (1 + 4s + s(s-1) \cdot 10) \pmod{100} \equiv \\ &\equiv (10s^2 - 6s + 1) \pmod{100}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } n = 2022 \text{ получаем } s = 1011, \text{ поэтому остаток от деления на } 100 \text{ равен} \\ (10s^2 - 6s + 1) \pmod{100} \equiv \\ \equiv (10 \cdot 1011^2 - 6 \cdot 1011 + 1) \pmod{100} \equiv \\ \equiv (10 \cdot 1 - 6 \cdot 11 + 1) \pmod{100} \equiv \\ \equiv (-55) \pmod{100} = 45. \end{aligned}$$

Заключительный этап.

Вариант 1

10. Ответ: 2079.

Решение. Среди чисел 1, 2, 3, 4, ..., N будет $[\sqrt{N}]$ чисел, которые являются

полными квадратами, $[\sqrt[3]{N}]$ чисел, являющихся полными кубами, и $[\sqrt[6]{N}]$ чисел, из которых извлекается корень как второй, так и третьей степени (то есть шестой степени).

Поэтому количество чисел в последовательности 1, 2, 3, 4, ..., N без полных квадратов и кубов выражается формулой: $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}]$. Так как в последовательности 6, 7, 8, ..., N таких чисел будет на 3 меньше (это числа 2, 3 и 5), то решаем уравнение

$$N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] - 3 = 2022.$$

Левая часть этого уравнения – неубывающая функция, поэтому его решением является или одно целое число, или несколько последовательных чисел.

а) Если $N < 2025 = 45^2$, то

$$N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] \leq N < 2025.$$

б) Если $45^2 = 2025 \leq N < 2116 = 46^2$, то $2197 = 13^3 > N > 12^3 = 1728$ и $4096 = 4^6 > N > 3^6 = 729$.

Значит, $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] = N - 45 - 12 + 3 = N - 54$. Тогда из уравнения $N - 54 = 2025$ получаем ответ $N = 2079$.

в) $N \geq 2116$. Рассматривать такие числа, очевидно, нет необходимости, так как уже при $N = 2080$ левая часть уравнения больше правой.

$$11. \text{ О т в е т: } x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}.$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} &= \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} = \\ &= \frac{\sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 40^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \\ &= \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos(10^\circ)}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = 1, \end{aligned}$$

то получается неравенство

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x - 1) \leq 0.$$

Левая его часть определена при $|x - 1| \leq 1$, поэтому $x \in [0; 2]$. На этом отрезке первый сомножитель

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) = (2x + 1)(2x - 3)(2x + 3)$$

неотрицателен при $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ и отрицателен при $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right)$. Второй сомножитель

всегда неотрицателен и равен нулю при $x = 2$.

$$\text{Поэтому } x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}.$$

$$12. \text{ О т в е т: } \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Решение. Так как хорды AB и CD равны, то равны и дуги AB и CD , а значит, равны вписанные углы CAD и BCA . Это означает, что $BC \parallel AD$, и $ABCD$ – трапеция с равными боковыми сторонами AB и CD . Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = b$, $AC = BD = c$. Высоту $h = BH$ выразим по

теореме Пифагора $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, после чего

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \\ &= a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab. \end{aligned}$$

Заметим, что это же можно было получить с помощью теоремы Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Leftrightarrow a^2 + ab = c^2$.

Таким образом, $c^2 = a(a + b)$, где a, b, c – натуральные числа. Кроме того, $3a > b$, то есть $b \leq 3a - 1$.

Если $a = 1$, то $b \in [1; 2]$, и уравнение $c^2 = 1(1 + b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 2$, то $b \in [1; 5]$, и уравнение $c^2 = 2(2 + b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 3$, то $b \in [1; 8]$, и уравнение $c^2 = 3(3 + b)$ целых решений не имеет.

Если $a = 4$, то $b \in [1; 11]$, и уравнение $c^2 = 4(4 + b)$ имеет единственное целое

решение $b = 5$, $c = 6$. Тогда периметр равен $3a + b = 17$.

При $a \geq 5$ периметр будет больше 17, так как если $3a + b \leq 17$, то $a = 5$. Но тогда или $b = 1$, $c^2 = 30$, или $b = 2$, $c^2 = 35$ – и то, и другое невозможно при целых c .

Итак, $AB = BC = CD = 4$, $AD = 5$, $AC = BD = 6$, периметр равен 17. Тогда высота трапеции равна

$$\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2},$$

синус угла при основании равен

$$\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{2 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

а искомый радиус находится по теореме

$$\text{синусов } 2R = \frac{BD}{\sin A} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

13. Ответ: да.

Решение. Переписав данную в условии формулу в виде $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$, находим, что если $a_n = 1 + \varepsilon$, то $a_{n+1} = 1 + \varepsilon^3$. В предложенной задаче

$$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022},$$

поэтому

$$a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3, \dots, a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} a_n \leq \frac{2022}{2021} &\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

Это неравенство при достаточно больших n выполняется (свойство показательной функции с основанием, меньшим единицы).

$$\mathbf{14. Ответ:} \quad \frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9}.$$

Решение. Из условия задачи вытекает, что ребро SA пирамиды перпендикулярно основанию ABC .

Обозначим $SA = AB = a$. Пирамида

$SABC$ является $1/48$ частью изображённого на рисунке 3 куба с ребром $2a$.

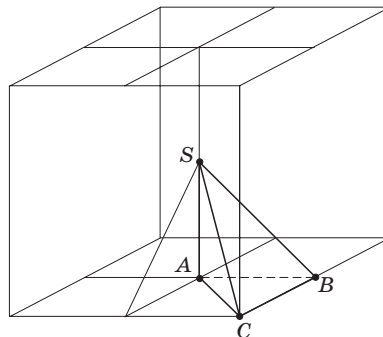


Рис. 3

Поэтому из соображений симметрии искомый объём есть $1/48$ часть объёма тела, представляющего собой пересечение шара радиуса $R = \sqrt{2}a$ и данного куба. Это пересечение есть шар без шести шаровых сегментов с высотой шарового сегмента $h = (\sqrt{2} - 1)a$ (рис. 4).

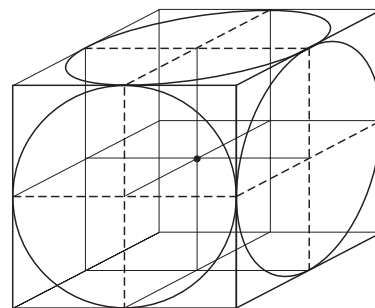


Рис. 4

Объём этого тела равен:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}a^3 - 6\pi(\sqrt{2}-1)^2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)a^3 = \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3 - 2(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)\pi a^3 = \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3(4\sqrt{2} - 3(4\sqrt{2}-5)) = \frac{2}{3}\pi a^3(15-8\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Значит, искомый объём равен

$$\frac{2}{3 \cdot 48} \cdot \pi a^3 (15 - 8\sqrt{2}) = \frac{\pi a^3 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \\ = \frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9}.$$

Отметим, что объём всей пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (или, что то же самое, $\frac{4^3}{48} = \frac{4}{3}$). Найденный объём части пирамиды больше, чем $1/2$ объёма всей пирамиды, так как

$$\frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9} > \frac{3 \cdot (15 - 8 \cdot 1,5)}{9} = 1 > \frac{2}{3}.$$

Это подтверждает, что мы нашли именно объём большей части пирамиды.

15. Ответ: $a = -24$, $a = 8$.

Решение. В силу того, что

$$|u| + |v| = \max |u \pm v| =$$

$$= \max \{u + v, -u - v, u - v, -u + v\},$$

исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x \\ 4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x \\ -4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0 \\ x(x^2+2x+5) > 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x+1)^2 + a - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x > \frac{a}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}.$$

А. Если $a > 1$, то $1 - a < 0$ и третье неравенство выполнено, а требуемое условие выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{4} = 2 \Leftrightarrow a = 8 (> 1).$$

Б. Если $a \leq 1$, то $\frac{a}{4} < 2$, и требуемое условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\frac{1-a}{4}} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow a = -24 (\leq 1).$$

Вариант 2

16. Ответ: 2083.

См. решение задачи № 10 для 11 класса.

17. Ответ: $x \in \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

См. решение задачи № 11 для 11 класса.

18. Ответ: 70.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} &xyz + xy + yz + zx + 2023 = \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) - x - y - z - 1 + 2023 = \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) - 2022 - 1 + 2023 = \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) \leq \\ &\leq \left(\frac{x+1+y+1+z+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2022+3}{3}\right)^3 = 675^3, \end{aligned}$$

причём равенство достигается при

$$x = y = z = \frac{2022}{3} = 674,$$

то наибольшее целое значение выражения равно $675^3 = 3^9 \cdot 5^6$ и имеет

$$(9+1)(6+1) = 70$$

натуральных делителей.

19. Ответ: $\frac{27\sqrt{7}}{4}$.

См. решение задачи № 12 для 11 класса.

20. Ответ: $a = -4$, $a = 8$.

См. решение задачи № 15 для 11 класса.

Задачи и решения данной олимпиады прошлых лет печатались в журнале ранее ([1]–[5]). Все задачи олимпиад 2013–2018 гг. опубликованы в книге [6].

Работа Д.В. Горяшина, В.С. Панфёрова и И.Н. Сергеева выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14192.

Список источников

1. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2020–2021 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2022. – № 2. С. 17–25.
2. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2019–2020 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2021. – № 1. С. 28–39.
3. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2018–2019 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2020. – № 4. С. 11–23.
4. Олимпиада по математике «Покори

Воробьёвы горы!» – 2017–2018 / Б.А. Будаков и др. // Математика в школе. – 2018. – № 5. С. 20–32.

5. Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2016–2017 / Д.В. Горяшин и др. // Математика в школе. – 2017. – № 8. С. 31–40.

6. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике (2013–2018) / А.С. Зеленский и др. – М.: МЦНМО, 2019. – 192 с.

Статья поступила в редакцию 07.09.2022.

Принята к публикации 07.12.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Магический квадрат и число π

Американец Т. Лобек составил такой магический квадрат.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Теперь посмотрим на знаки числа π :

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643\dots$$

Для каждого числа n из квадрата Лобека возьмём n -й знак π и запишем его в клетку магического квадрата вместо числа n . Для числа 17 возьмём 17-й знак π , то есть цифру 2, для числа 24 – 24-й знак π , то есть цифру 4, и так далее. Получим новый квадрат. Запишем на полях суммы чисел в его строках и столбцах.

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

Удивительно, но каждая сумма в столбце встречается среди сумм чисел в строках. Это похоже на фокус, но в мире математики никакая магия не действует. Как же это возможно? Загадка.

По книге: Хоакин Наварро. Секреты числа π .

Почему неразрешима задача о квадратуре круга (М.: Де Агостини, 2014).

О ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЕЙ К КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ ПРОЕКТА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ»

ON THE PREPARATION OF TEACHERS FOR THE QUALIFICATION WORK OF THE PROJECT «MATHEMATICAL VERTICAL»

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_13

Ю.В. Андрианова, старший преподаватель, МГУ имени М.В. Ломоносова, yulia.andrianova@math.msu.ru;

А.В. Бегунц, канд. физ.-мат. наук, доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, alexander.begunts@math.msu.ru

Yu.V. Andrianova, Senior Lecturer, Lomonosov Moscow State University, yulia.andrianova@math.msu.ru;

A.V. Begunts, PhD (Phys&Math), Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, alexander.begunts@math.msu.ru

Аннотация: в настоящей статье описывается структура квалификационной работы для учителей математики, планирующих преподавать в классах проекта «Математическая вертикаль», предлагается построенный на основе принципа дидактической спирали возможный план подготовки к квалификационной работе, а также рассматриваются наиболее характерные примеры заданий

Abstract: the article describes the structure of the qualification work for mathematics teachers who plan to teach in the classes of the Mathematical Vertical Project. A possible plan of preparation for qualification work, built on the basis of the didactic spiral principle, is proposed, and the most typical examples of tasks are considered

Ключевые слова: «Математическая вертикаль», повышение квалификации учителей, дидактическая спираль

Keywords: Mathematical Vertical Project, professional development of teachers, didactic spiral

© Андрианова Ю.В., Бегунц А.В. 2023

В настоящей статье мы опишем структуру квалификационной работы для учителей математики, планирующих преподавать в классах проекта «Математическая вертикаль», предложим возможный план подготовки к ней, используя принцип дидактической спирали, а также рассмотрим наиболее характерные примеры заданий.

Необходимость проведения квалификационной работы обусловлена повышенными требованиями к качеству математического образования школьников, обучающихся в классах проекта, обеспе-

чить которое можно лишь при соответствующем уровне предметной подготовки педагогических кадров.

Первую квалификационную работу (она называлась «тестированием учителей математики») в рамках проекта «Математическая вертикаль», которая состоялась 30 ноября 2017 года в МГУ имени М.В. Ломоносова, выполняли 249 учителей. В дальнейшем было проведено множество диагностических работ, при этом выработался определённый стиль заданий и формат самой работы, а количество учителей, принимающих в них участие,

возросло до 1000 человек. Первое тестирование состояло из 10 задач, на решение которых отводилось 60 минут. В дальнейшем количество задач увеличилось на 2, при этом продолжительность выполнения работы увеличилась более чем в два раза. Таким образом, влияние временного фактора было минимизировано, а выделяемое на работу время теперь позволяет участникам полностью продемонстрировать свои профессиональные умения.

С августа 2019 года работа состоит из 12 заданий: первые десять из них предполагают написание полного обоснованного решения, а последние два – отыскание ошибок в предложенных решениях и описание способов их исправления для получения верного решения. Работа рассчитана не более чем на 150 минут. Каждое задание оценивается исходя из двух баллов, которые ставятся за верно выполненное задание. Один балл выставляется, если решение доведено до ответа, но допущена одна негрубая ошибка, или если в решении имеются значительные продвижения, которые могут привести к правильному ответу. Таким образом, максимально возможный балл за всю работу равен 24. Обычно работа считается выполненной успешно, если за неё выставлено 16 и более баллов.

Задания диагностических работ составляют сотрудники Центра математического творчества МГУ. Некоторые задачи – оригинальные, но большинство взяты из открытых источников и при необходимости надлежащим образом модифицированы.

Традиционно квалификационная работа содержит 7–8 заданий по алгебре, 3–4 задания по геометрии и 1–2 задания по теории вероятностей и статистике. В целом, работа составляется так, чтобы охватить все основные темы курса математики 7–9 классов и, возможно, некоторые понятия

курса алгебры 10 класса. Задания могут носить как практический (нахождение значений тех или иных величин), так и теоретический (доказательство утверждений) характер.

Остановимся более подробно на типах заданий и разделах курса математики, выносимых на диагностическую работу.

К алгебраическим заданиям относятся задачи на преобразование и вычисление значений алгебраических выражений, а также уравнения, неравенства, текстовые задачи, задачи с целочисленными переменными (элементы теории чисел), а также задачи с параметрами.

Задания по геометрии проверяют знание основных тем курса планиметрии, стереометрические сюжеты в квалификационную работу не включаются.

Задания по теории вероятностей и статистике (ТВиС) традиционно носят комбинаторный характер или связаны с понятием вероятности.

Задания с 1 по 10 располагаются по возрастанию уровня сложности (в соответствии с оценкой составителей). Начинаться работа может как с задания на вычисление, так и с уравнения или простой текстовой задачи. В разных работах задания не повторяются, при этом отсутствует закрепление темы за данной позицией в комплекте задач. Но по сложившейся традиции первый блок из 10 заданий всегда завершается задачей с параметром. Цель составителей заключается в том, чтобы исключить возможность натаскивания на конкретные виды задач и, тем самым, проверить реальный уровень подготовки педагогов.

Одним из основных направлений работы ресурсных центров проекта «Математическая вертикаль» является работа с учителями математики, которые планируют вести или ведут занятия в

классах проекта. Проводимые Центром математического творчества МГУ семинары по подготовке к квалификационной работе вызывают у учителей особый интерес.

Опишем основанные на нашем опыте работы принципы, позволяющие наиболее эффективно осуществить самостоятельную подготовку. Для оценки текущего уровня рекомендуется выполнить тренировочную работу (см. [1]), затем ознакомиться с её видеоразбором и проанализировать успешность выполнения каждого задания, а также оптимальность выбранного метода решения. На основании проведённого анализа следует определить темы, которые нуждаются в более глубоком изучении или повторении.

По каждой из тем рекомендуется в начале усвоить основные понятия и научиться решать базовые задачи. Затем перейти к заданиям среднего уровня сложности и, наконец, завершить подготовку решением заданий высокого уровня сложности.

Подготовку рекомендуется проводить, используя принцип дидактической спирали (см., например, [2]): изучать не тему за темой, а сначала рассмотреть все темы на некотором стартовом уровне (чтобы не осталось «белых пятен» в виде тем, по которым уровень подготовки явно неудовлетворителен) и затем увеличивать сложность заданий, снова возвращаясь ко всем проблемным темам на более высоком уровне, одновременно не забывая и о заданиях по остальным темам.

Эффективность предложенного подхода основана на том, что многие задания диагностической работы (как и задания математических олимпиад) носят комплексный характер и затрагивают сразу несколько тем. Примерам таких заданий могут быть приводимые далее задачи 4 и 6.

Наконец, следование принципу спирали позволяет не допустить ситуации, когда та или иная тема не будет изучена или повторена учителем вовсе (например, ввиду недостатка времени), так как все проблемные темы будут затронуты уже на этапе знакомства с основными понятиями.

Теоретический и практический материал для подготовки можно брать из пособий, по которым ведутся занятия в классах проекта «Математическая вертикаль».

Отметим темы, которые зачастую вызывают затруднения при выполнении квалификационной работы, – это элементарная теория чисел и задачи с параметрами. Делимость, деление с остатком, основная теорема арифметики, решение диофантовых уравнений хоть и затрагиваются в школьной программе, но их изучение носит фрагментарный характер. Для решения задач с параметрами необходимо комплексное владение материалом: знание основных свойств функций, умение решать различные типы уравнений и неравенств, а также знание разных методов решения задач с параметрами. На эти проблемные темы Центр математического творчества МГУ регулярно проводит семинары и интенсивы для учителей.

Завершающим этапом подготовки является самостоятельное выполнение полных квалификационных работ последних лет (см. [1]). При новом выявлении проблемных тем следует снова возвращаться к учебным пособиям и доводить владение материалом до необходимого уровня.

Перейдём к конкретным примерам и рассмотрим 10 задач, формирующих достаточно полное представление о тематике и уровне сложности заданий квалификационной работы.

Задача 1 (КР 30.11.2017). Найдите все целые значения дроби

$$\frac{n^2 - 8n + 17}{n - 5}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решение. Обозначим дробь через $f(n)$ и выделим целую часть:

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n^2 - 8n + 17}{n - 5} = \frac{(n - 5)(n - 3) + 2}{n - 5} = \\ &= n - 3 + \frac{2}{n - 5}. \end{aligned}$$

Если $n \in \mathbf{Z}$, то $n - 3 \in \mathbf{Z}$, а значит, $f(n)$ принимает целые значения тогда и только тогда, когда дробь $\frac{2}{n - 5}$ является целым числом. Это возможно, только если $n - 5 = \pm 1, \pm 2$, то есть $n = 3, 4, 6, 7$, поэтому искомые значения дроби таковы: $f(3) = f(4) = -1$, $f(6) = f(7) = 5$.

О т в е т: $-1, 5$.

Задача 2 (КР 01.03.2018). Вычислите

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

Решение. Упростим произведения двух пар множителей под знаком корня, пользуясь формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 1}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{4}, \\ &\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{2\sqrt{6} - 4}{4}. \end{aligned}$$

Значит, исходное выражение равно

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{6} + 4}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6} - 4}{4}} = \sqrt{\frac{24 - 16}{4}} = \sqrt{2}.$$

О т в е т: $\sqrt{2}$.

Задача 3 (КР 18.04.2019). Решите неравенство

$$\frac{7}{\sqrt{x-1}+5} < 1 + \frac{2}{5-\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Введём новую переменную $t = \sqrt{x-1}$ и заметим, что $t \geq 0$. Полученное неравенство $\frac{7}{t+5} < 1 + \frac{2}{5-t}$ умножим на $t+5$ (знак неравенства сохранится, так как $t+5 > 0$), перенесём все выражения в правую часть и приведём к общему знаменателю. Тогда неравенство примет вид $\frac{t(t-9)}{t-5} > 0$, что равносильно совокупности

$$\begin{cases} 0 < t < 5, \\ t > 9. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходной переменной и возводя в квадрат, получим

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 25, \\ x - 1 > 81. \end{cases}$$

О т в е т: $(1; 26) \cup (82; +\infty)$.

Задача 4 (КР 26.08.2019). За 2017 год число книг в фонде библиотеки посёлка увеличилось на 0,4%, а за 2018 год – на 0,8%, оставаясь при этом всегда меньше 60 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки посёлка за 2018 год?

Решение. Пусть n – исходное количество книг в фонде библиотеки. Тогда за 2017 год количество книг увеличилось на $0,004n$ книг и составило $1,004n$, а за 2018 год – на $0,008 \cdot 1,004n$ книг и составило $1,008 \cdot 1,004n$.

Значения обоих выражений

$$0,004n = \frac{n}{250} \quad \text{и} \quad 0,008 \cdot 1,004n = \frac{251n}{250 \cdot 125}$$

являются натуральными числами. Числа 250 и 251 взаимно просты, поэтому таковы и числа 125 и 251, а значит, n должно быть кратно $250 \cdot 125 = 31250$. Общее ограничение на фонд библиотеки имеет вид $1,008 \cdot 1,004n < 60\,000$. Следовательно-

но, значение n определено единственным образом: $n = 31250$. Заключаем, что за 2018 год фонд библиотеки увеличился на 251 книгу.

О т в е т: на 251 книгу.

Задача 5 (КР 13.12.2018). Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых все цифры расположены в порядке возрастания?

Р е ш е н и е. Запись натурального числа с нуля начинаться не может, поэтому рассматриваемые числа не содержат цифры 0. Выпишем цифры от 1 до 9 в ряд в порядке возрастания. Чтобы получить шестизначное число, в записи которого все цифры расположены в порядке возрастания, необходимо из этого ряда вычеркнуть три цифры. Количество способов вычеркнуть первую цифру равно 9, вторую – 8, третью – 7. Таким образом, существует $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ способа вычеркнуть 3 цифры, а значит, и ровно столько же рассматриваемых шестизначных чисел.

О т в е т: 504.

Заметим, что некоторые комбинаторные задачи допускают решение перебором, но для квалификационной работы они подбираются таким образом, чтобы перебор был затруднителен, например, как в рассмотренной задаче. Основной упор в комбинаторных задачах делается на проверке владения такими понятиями, как перестановки, размещения и сочетания, а также правилами суммы и произведения.

Задача 6 (КР 28.08.2021). Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в 60° . От двух причалов A и B , расположенных на разных реках, одновременно вышли байдарка и лодка, собственные скорости которых равны 10 км/ч и 3 км/ч соответственно. Байдарка достиг-

ла озера через 2 часа, а лодка – через 4 часа. Найдите скорость течения рек, если $AB = 28$ км.

Р е ш е н и е. Пусть C – точка впадения рек в озеро, а x км/ч – скорость течения рек. Тогда байдарка прошла расстояние $AC = 2(10 + x)$ км, а лодка – $BC = 4(3 + x)$ км.

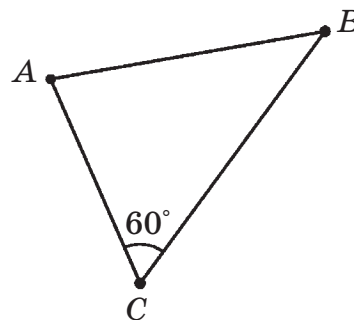


Рис. 1

По теореме косинусов для треугольника ABC получаем

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$,
а значит,

$$784 = 4(10 + x)^2 + 16(3 + x)^2 - 8(10 + x)(3 + x) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 40 = 0.$$

Корни квадратного уравнения можно найти, пользуясь теоремой Виета: $-10 + 4 = -6$ и $-10 \cdot 4 = -40$. Заключаем, что $x = 4$, так как значение $x = -10$ не подходит по смыслу задачи.

О т в е т: 4 км/ч.

Задача 7 (КР 30.11.2017). Найдите все a , при которых неравенство

$$(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$$

выполняется для всех $x \in [1; 3]$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x) = (x - 3a)(x + 2a + 1)$. Решением неравенства $f(x) < 0$ является интервал $(x_1; x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $f(x) = 0$, то есть $3a$ и $-2a - 1$. Неравенство $(x - 3a)(x + 2a + 1) < 0$ выполняется для всех $x \in [1; 3]$, только если $[1; 3] \subset (x_1; x_2)$. Для этого достаточно потребовать (рис. 2),

чтобы значения функции $f(x)$ в точках 1 и 3 были отрицательными:

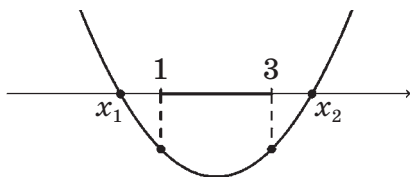


Рис. 2

$$\begin{cases} (1-3a)(2a+2) < 0, \\ (3-3a)(2a+4) < 0. \end{cases}$$

Множеством решений первого неравенства системы является множество

$$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right),$$

второго — $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Пересекая эти множества, получаем ответ.

Приведём также возможный аналитический способ решения данной задачи.

Множеством решений неравенства $(x-3a)(x+2a+1) < 0$ является интервал с концами $3a$ и $-2a-1$. Рассмотрим различные случаи расположения этих чисел на прямой.

Случай 1. $3a < -2a-1$, то есть $a < -\frac{1}{5}$.

Чтобы выполнялось условие задачи, отрезок $[1; 3]$ должен лежать внутри полученного интервала $(3a; -2a-1)$, то есть должно выполняться неравенство $3a < 1 < -2a-1$. Решая систему $\begin{cases} 3a < 1, \\ 3 < -2a-1, \end{cases}$ получаем луч $(-\infty; -2)$.

Случай 2. $-2a-1 < 3a$, то есть $a > -\frac{1}{5}$.

Чтобы выполнялось условие задачи, отрезок $[1; 3]$ должен лежать внутри полученного интервала $(-2a-1; 3a)$, то есть должно выполняться неравенство $-2a-1 < 1 < 3 < 3a$. Решая систему $\begin{cases} -2a-1 < 1, \\ 3 < 3a, \end{cases}$ получаем луч $(1; +\infty)$.

Заметим, что если $3a = -2a-1$, то неравенство решений не имеет и, следовательно, содержать никакой отрезок не может.

Объединяя интервалы, полученные при рассмотрении случаев 1 и 2, запишем ответ.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Задача 8 (КР 28.05.2018). Дан треугольник ABC . На стороне AC взята точка N так, что $3CN = AC$. Точка K лежит на стороне AB , причём $AK : KB = 2 : 3$. В каком отношении прямая CK делит отрезок BN ?

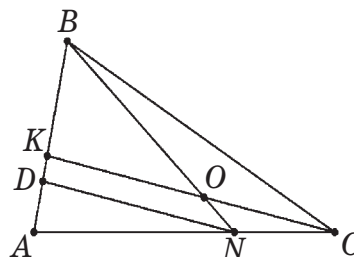


Рис. 3

Решение. Точка N лежит на стороне AC и $3CN = AC$, поэтому $AN : NC = 2 : 1$. Пусть $O = BN \cap CK$. Проведём через точку N прямую, параллельную CK , и обозначим через D точку, в которой она пересекает сторону AB . По теореме о пропорциональных отрезках выполнены равенства $\frac{AD}{DK} = \frac{AN}{NC} = 2$. Обозначим $KD = x$, тогда $AD = 2x$ и $BK = \frac{3}{2}AK = \frac{3}{2} \cdot 3x = \frac{9}{2}x$. Снова применив теорему о пропорциональных

отрезках, получим $\frac{BO}{ON} = \frac{BD}{KD} = \frac{\frac{9}{2}x}{x} = \frac{9}{2}$.

Заметим, что данную задачу можно было решить быстрее, применив теорему Менелая для треугольника ABN :

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BO}{ON} \cdot \frac{CN}{AC} = 1.$$

Ответ: $9 : 2$.

Задача 9 (КР 28.05.2018). В треугольнике ABC известно, что $AB = 10$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите медиану AM и ради-

ус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = \\ &= 100 + 16 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 76, \end{aligned}$$

откуда $BC = 2\sqrt{19}$. Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = 10\sqrt{3},$$

значит, радиус вписанной окружности равен

$$r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{7 + \sqrt{19}}.$$

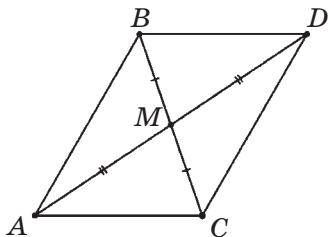


Рис. 4

Воспользуемся методом удвоения медианы: на продолжении прямой AM за точку M отложим отрезок $MD = AM$. Точка M является серединой отрезков AD и BC , следовательно, четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (по признаку). Таким образом, по свойствам параллелограмма имеем $CD = AB$ и $\angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$. По теореме косинусов для треугольника ACD находим AD (рис. 4):

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos ACD = \\ &= 100 + 16 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 156. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } AM = \frac{AD}{2} = \sqrt{39}.$$

$$\text{О т в е т: } \sqrt{39}; \frac{10\sqrt{3}}{7 + \sqrt{19}}.$$

Задача 10 (КР 26.08.2019). Найдите все такие натуральные числа n , что значение выражения $n^4 + 4$ является простым числом.

Решение. Дополним $n^4 + 4$ до квадрата суммы и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (n^4 + 4 + 4n^2) - 4n^2 = \\ &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2). \end{aligned}$$

Полученное произведение является простым числом тогда и только тогда, когда меньший множитель $n^2 - 2n + 2$ равен 1, а второй множитель $n^2 + 2n + 2$ является простым числом. Уравнение $n^2 - 2n + 2 = 1$ имеет единственное решение $n = 1$, а при этом значение второго множителя $1 + 2 + 2 = 5$ – простое число. Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственное значение: $n = 1$.

О т в е т: 1.

Список источников

1. Раздел «Материалы» официального сайта РЦ МГУ имени М.В. Ломоносова: <http://vertical.math.msu.ru/materialy>

2. Бегуны А.В., Соловьёва О.С. О применении дидактической спирали при построении учебных программ // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2021, № 4. С. 15–36.

Статья поступила в редакцию

04.10.2022.

Принята к публикации

16.12.2022.



О ПРИМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ КРИВЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

ON THE APPLICATION OF PARAMETRIC CURVES FOR STUDYING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOL

Научная статья
УДК 372.851

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_20

Е.А. Богданова, канд. пед. наук, доцент, bogdanovaea2014@gmail.com,
П.С. Богданов, канд. физ.-мат. наук, доцент, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королёва, poulsmb@rambler.ru,
С.Н. Богданов, канд. физ.-мат. наук, доцент, Самарский филиал ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», bogdanovsan@rambler.ru

E.A. Bogdanova, Ph.D., associate Prof., bogdanovaea2014@gmail.com,
P.S. Bogdanov, Ph.D., associate Prof., Samara national research University named after academician S.P. Korolev, poulsmb@rambler.ru,
S.N. Bogdanov, Ph.D., associate Prof., «Moscow city pedagogical University», Samara branch, bogdanovsan@rambler.ru

Аннотация: в работе рассматривается параметрическое задание плоских и пространственных кривых. Приводятся примеры использования параметрического представления кривых при решении задач школьного курса математики и при организации научно-исследовательской деятельности учащихся

Abstract: the paper considers the parametric representation of planar and spatial curves. Examples of the use of the parametric representation of curves in the school mathematics course are given. Methods for constructing curves on a circular cylindrical surface and on a plane are described. These methods make it possible to obtain the parametric equations of these curves. Some areas of research activities of students are presented in which the described methods of constructing curves are used

Ключевые слова: параметрическое задание кривой, кривые на круговой цилиндрической поверхности, плоские кривые, проектирование, бордюры, научно-исследовательская деятельность учащихся

Keywords: parametric representation of curve, cylindrical surface curves, flat curves, projecting, frieze, student research activities

© Богданова Е.А., Богданов П.С., Богданов С.Н. 2023

При изучении высшей математики в курсах математического анализа, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии часто встречаются задачи либо с параметрическим заданием функции, либо с параметрическим заданием кривой. Для средней школы параметриче-

ские уравнения не являются привычным способом задания функции или линии, но знакомство учащихся старших классов с таким их представлением может быть полезно как для пропедевтики изучения высшей математики, так и для применения к решению задач школьной математики

и организации научно-исследовательской деятельности школьников.

Параметрическое задание плоских линий

В декартовой системе координат Oxy параметрические уравнения плоской линии γ имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I.$$

Здесь I – некоторый числовой промежуток. Смысл параметрического задания плоской кривой состоит в следующем. Если в параметрические уравнения линии γ вместо параметра t подставить некоторое его значение из промежутка I , то получим два конкретных числа x и y , которые в заданной на плоскости прямоугольной системе координат являются координатами точки, принадлежащей кривой γ . Обратно, если точка $M(x; y)$ принадлежит линии γ , то подставляя её координаты в параметрические уравнения и решая составленную из них систему, получаем значение параметра t , соответствующее данной точке.

Линия γ может параметризоваться различными способами, при этом параметру t обычно удаётся придать конкретный геометрический смысл.

1. Например, для прямой l , заданной в прямоугольной системе координат на плоскости уравнением $y = 2 + 0,75x$, в качестве параметра можно взять координату x текущей точки прямой. Тогда параметрические уравнения этой прямой принимают вид

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 0,75t, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Рассмотрим теперь в качестве параметра расстояние s от произвольной точки $B(x; y)$ прямой l до некоторой фиксированной точки A этой прямой. Пусть $A(0; 2)$ –

точка пересечения прямой с осью Oy (рис. 1). Тогда $AB = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$. Учитывая, что координаты точки $B(x, y)$ удовлетворяют уравнению $y = 2 + 0,75x$ прямой l , находим $AB = \sqrt{x^2 + (0,75x)^2} = 1,25|x| = s$. Если $x \geq 0$, то из последнего равенства получаем $x = 0,8s$ и приходим к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x = 0,8s \\ y = 2 + 0,6s, \end{cases} \quad s \geq 0.$$

Поскольку $x \geq 0$, то это параметрические уравнения луча AC . Используя в качестве параметра s длину отрезка AB , говорят о естественной параметризации прямой l .

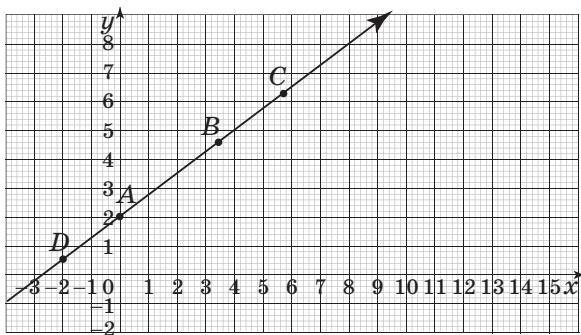


Рис. 1

Заметим, что если $x < 0$, то $s = AB = -1,25x$ и $x = -0,8s$. Поэтому в естественной параметризации уравнения луча AD имеют вид

$$\begin{cases} x = -0,8s \\ y = 2 - 0,6s, \end{cases} \quad s \geq 0.$$

Видим, что естественная параметризация не всегда удобна. Иногда предпочтительнее иметь одни и те же параметрические уравнения для всей прямой. Например, можно для точек луча AC в качестве параметра взять $t = s = AB = 1,25x$, а для точек луча AD – $t = -s = -AB = 1,25x$. В этом случае вся прямая l задается уравнениями

$$\begin{cases} x = 0,8t \\ y = 2 + 0,6t, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Если прямую l рассматривать как числовую прямую с началом отсчета в точке A , то каждой точке B этой прямой в качестве параметра соответствует число t , изображаемое точкой B данной прямой. В этом заключается геометрический смысл параметра в последних уравнениях прямой l .

2. В прямоугольной системе координат на плоскости окружность ω с центром в начале координат и радиусом, равным 1, задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$. С другой стороны, из тригонометрии известно, что для координат точки $M(x; y)$ такой окружности справедливы равенства

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$$

где t – радианная мера угла поворота вокруг точки O , переводящего луч OA в луч OM (рис. 2). Если $t \in [0; 2\pi)$, то каждой точке окружности ω соответствует ровно одно значение t из данного промежутка, и, наоборот, каждому $t \in [0; 2\pi)$ сопоставляется ровно одна точка окружности ω . Поэтому уравнения

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi),$$

являются параметрическими уравнениями окружности ω . Такая параметризация также считается естественной, так как t равняется длине дуги AM .

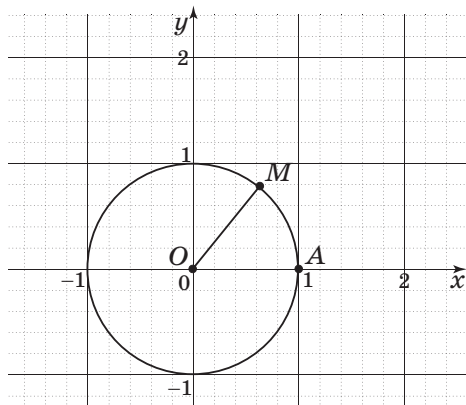


Рис. 2

Рассмотрим теперь для окружности ω в качестве параметра, соответствующего точке $M(x; y)$, площадь сектора AOM . Поскольку радиус окружности равен 1, то площадь этого сектора равна

$$s = \frac{\pi}{2\pi} t = \frac{t}{2},$$

где t – по-прежнему радианная мера центрального угла AOM и $t \in [0; 2\pi)$. Если величину s принять за новый параметр, то параметрические уравнения окружности ω примут вид

$$\begin{cases} x = \cos 2s \\ y = \sin 2s, \end{cases} \quad s \in [0; \pi).$$

Легко убедиться в том, что окружность с центром в начале координат и радиусом, равным R , задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi).$$

3. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy . Рассмотрим окружность ω с центром в точке $F(0; a)$ и радиусом a , которая, очевидно, касается оси абсцисс в начале координат. Предположим, что эта окружность катится без скольжения по оси абсцисс. Тогда точка A окружности, совпадающая в начальный момент движения с началом координат O , описывает линию γ , называемую циклоидой (рис. 3).

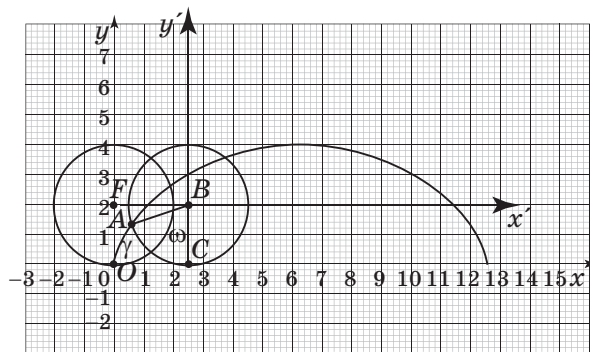


Рис. 3

Пусть $t = \widehat{CBA}$ – величина угла поворота окружности ω вокруг своего центра. Тогда в системе координат $Bx'y'$ точка A имеет координаты $A(-a \sin t; -a \cos t)$. Поскольку окружность катится по оси Ox без скольжения, длина её дуги AC равна длине отрезка OC , то есть $OC = \frac{2\pi a}{2\pi}t = at$.

Поэтому точка B в системе координат Oxy задается координатами $B(at; a)$.

Известно, что при переносе начала координат O в точку B с координатами $B(x_0; y_0)$ в системе Oxy координаты произвольной точки M преобразуются по формулам

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0, \end{cases}$$

где $M(x; y)_{Oxy}$, $M(x'; y')_{Bx'y'}$. Применяя их к координатам точки A , получим

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Это и есть параметрические уравнения циклоиды, причём, если $t \in [0; 2\pi)$, то эти уравнения определяют одну арку циклоиды, представленную на рисунке 3. Если же $t \in (-\infty; +\infty)$, то полученные уравнения задают всю циклоиду (рис. 4).

В рамках изучения математики в школе учащиеся могут использовать параметрическое задание линий, например при решении задач с параметром.

Задача 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{5} \cos a| + \sqrt{5} \sin a \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

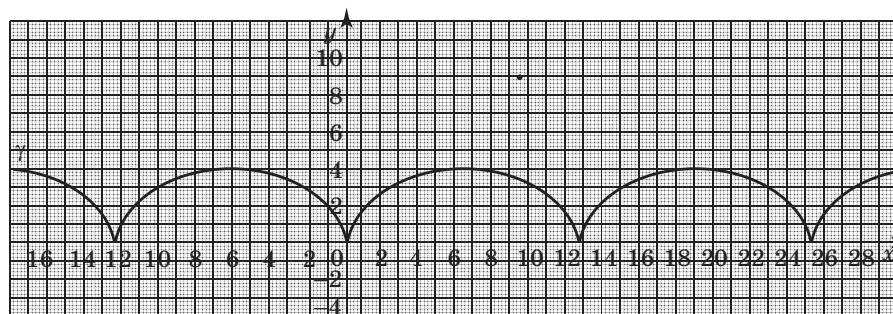


Рис. 4

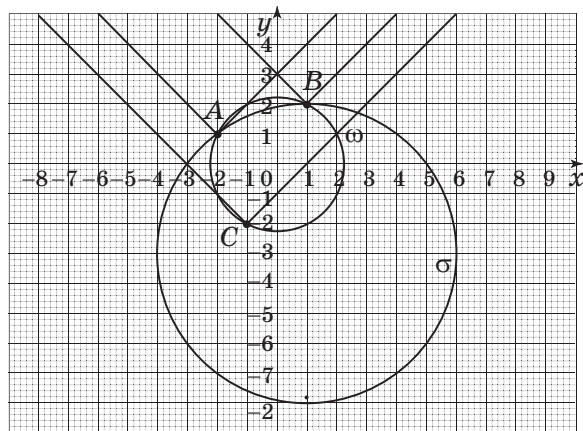


Рис. 5

Решение. Линия, определяемая первым уравнением системы, представляет собой известный график функции $y = |x|$, вершина которого сдвинута в точку C с координатами $C(\sqrt{5} \cos \alpha; \sqrt{5} \sin \alpha)$. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \alpha \\ y = \sqrt{5} \sin \alpha \end{cases}$$

задают окружность ω радиуса $\sqrt{5}$ с центром в начале координат (рис. 5). Поэтому вершина графика функции

$$y = |x - \sqrt{5} \cos \alpha| + \sqrt{5} \sin \alpha$$

с изменением параметра α перемещается по окружности $\omega: x^2 + y^2 = 5$.

Второе уравнение системы определяет окружность σ , центр которой имеет координаты $(1; -3)$, а радиус равен 5. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25, \end{cases}$$

находим координаты точек пересечения окружностей σ и ω : $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$. Исходная система будет иметь одно решение тогда и только тогда, когда точка C совпадет либо с A , либо с B . Значит, координаты точки C должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{5} \cos \alpha = -2 \\ \sqrt{5} \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} \sqrt{5} \cos \alpha = 1 \\ \sqrt{5} \sin \alpha = 2, \end{cases}$$

решениями которой являются следующие значения параметра α :

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Параметрическое задание линий в пространстве

В декартовой системе координат $Oxyz$ параметрические уравнения пространственной линии γ имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases}$$

где $t \in I$, I – некоторый числовой промежуток. Эти уравнения так же, как параметрические уравнения плоской линии, задают координаты произвольной точки линии как функции параметра t . Поэтому параметрическое задание кривых является более естественным и удобным с точки зрения преемственности при последовательном изучении способов задания кривой на плоскости и в пространстве. Действительно, в школьном курсе математики кривая обычно задается уравнением вида $y = f(x)$ либо $F(x, y) = 0$, которое связывает координаты x и y каждой точки, принадлежащей данной кривой. В пространстве же – одно уравнение вида $z = f(x, y)$ либо $F(x, y, z) = 0$, связывающее три координаты x , y и z , определяет поверхность. Кривая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух поверхностей и задана системой

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

где $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ – уравнения этих поверхностей. Чтобы работать с таким заданием кривой, например при выполнении научно-исследовательской работы, ученику необходимо дополнительно изучить некоторый специальный математический аппарат, позволяющий работать с данным определением кривой.

Рассмотрим примеры параметрического задания линий в пространстве.

1. Прямую l в пространстве, как и на

плоскости, можно задать её точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{a}$. Пусть точка и направляющий вектор прямой заданы своими координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$: $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$. Произвольная точка $M(x; y; z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, то есть существует такое число t , что $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$. Записывая это равенство в координатах и выражая x , y , z , получаем параметрические уравнения прямой l :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \cdot t \\ y = y_0 + a_2 \cdot t \\ z = z_0 + a_3 \cdot t, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

2. Пусть в пространстве задана прямая l . Некоторая точка M , не лежащая на прямой l , одновременно вращается вокруг этой прямой и совершает поступательное движение вдоль неё. При этом скорости вращения и поступательного движения постоянны. Тогда траектория, которую описывает точка M , называется обыкновенной винтовой линией, а прямая l – её осью (рис. 6).

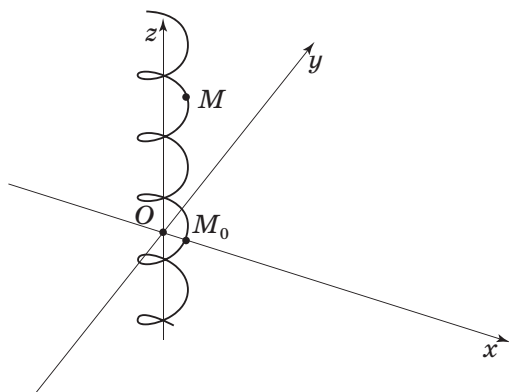


Рис. 6

Зададим в пространстве правую прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы координатная ось Oz совпадала с

прямой l , а её направление – с направлением поступательного движения точки M . Кроме того, пусть выполнены ещё два условия: а) вращение точки M вокруг оси l осуществляется против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz ; б) ось Ox пересекает винтовую линию в точке M_0 . Тогда легко получить параметрические уравнения винтовой линии

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt, \end{cases}$$

где t – радианная мера угла поворота точки M вокруг оси l ($t \in (-\infty; +\infty)$), отсчитываемая от точки M_0 , $a = OM_0$, b – положительное число, прямо пропорциональное скорости поступательного движения точки M вдоль оси l .

Параметрические уравнения прямой можно использовать в решении некоторых стереометрических задач координатным методом, например при подготовке к профильному ЕГЭ по математике. Рассмотрим следующую задачу из сборника для подготовки к ЕГЭ под редакцией И.В. Ященко [2, с. 90].

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K – середина ребра $C_1 D_1$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK , пересекает отрезок $A_1 K$.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 7. В этой системе координат: $A(0; 0; 0)$, $B(16; 0; 0)$, $A_1(0; 0; 7)$, $K(8; 6; 7)$ и $\overrightarrow{AK}(8; 6; 7)$, $\overrightarrow{A_1 K}(8; 6; 0)$. Запишем уравнение плоскости α , проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK :

$8(x - 16) + 6y + 7z = 0$, а также параметрические уравнения прямой A_1K :

$$\begin{cases} x = 8 \cdot t \\ y = 6 \cdot t \\ z = 7. \end{cases}$$

Решая систему из уравнений прямой A_1K и плоскости α , находим координаты точки их пересечения: $E(6,32; 4,74; 7)$. Поскольку $0 < 6,32 < 8$, то точка E прямой A_1K расположена между точками A_1 и K . Это означает, что плоскость α пересекает отрезок A_1K .

б) Вектор $\overrightarrow{AK}(8; 6; 7)$ является вектором нормали плоскости α , а вектор $\overrightarrow{AA_1}(0; 0; 7)$ – вектором нормали плоскости ABC . Потому угол φ между плоскостями α и ABC равен углу A_1AK . Учитывая, что $AA_1 = 7$, $A_1K = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, из прямоугольного треугольника A_1AK получаем: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{10}{7}$.

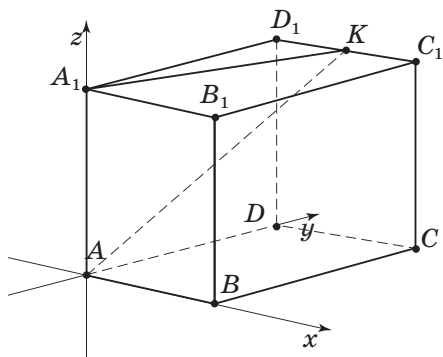


Рис. 7

Параметрическое задание линий круговой цилиндрической поверхности

Винтовая линия расположена на так называемой круговой цилиндрической поверхности F с осью l (далее цилиндре), которая получается вращением вокруг l прямой, параллельной l и проходящей через точку M . Прямые, параллельные

оси l и лежащие на цилиндрической поверхности F , называются образующими этой поверхности, а расстояние от оси до любой из образующих – радиусом цилиндра F .

Существует достаточно простой способ получения различных кривых на круговой цилиндрической поверхности F , позволяющий кроме всего прочего легко записывать параметрические уравнения этих кривых. Для реализации этого способа вся плоскость «наматывается» на круговую цилиндрическую поверхность подобно тому, как в тригонометрии вся числовая прямая «наматывается» на единичную окружность. В частности, винтовая линия представляет собой «намотку» прямой на цилиндр.

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и цилиндр F радиуса 1 с осью Oz (рис. 8). Координатная плоскость Oxy пересекает цилиндр по окружности ω с центром в точке O радиуса 1. Рассмотрим плоскость σ с уравнением $x = 1$, которая касается цилиндра вдоль его образующей. Обозначим через P точку пересечения плоскости σ с осью Ox . На плоскости σ зададим прямоугольную систему координат Ptu так, чтобы ось Pt была сонаправлена с осью Oy , а ось Pu – с осью Oz .

При наматывании плоскости σ на цилиндр F кривая γ , лежащая в плоскости σ и заданная уравнением $u = f(t)$ в системе координат Ptu , образует кривую γ_1 на цилиндрической поверхности. Ось Pt при этом наматывается на окружность ω . Координаты x и y произвольной точки M линии γ_1 равны координатам её проекции M_0 на плоскость Oxy , которая, очевидно, лежит на окружности ω , поэтому $x = \cos t$, $y = \sin t$. Координата z точки M совпадает с координатой u соответствующей точки линии γ , то есть $z = f(t)$. Таким образом,

параметрические уравнения линии γ_1 имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = f(t). \end{cases}$$

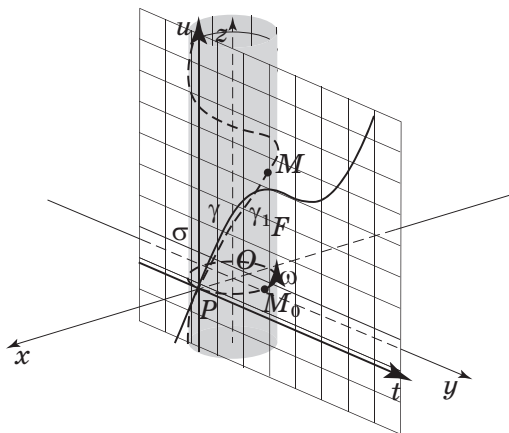


Рис. 8

Рассмотрим примеры линий на цилиндрической поверхности, которые строятся описанным выше способом.

1. Пусть кривая γ , лежащая в плоскости σ , задана уравнением $u = t + \sin t$ в системе координат Ptu . Тогда параметрические уравнения линии γ_1 (рис. 9) имеют

$$\text{вид } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t + \sin t \end{cases}.$$

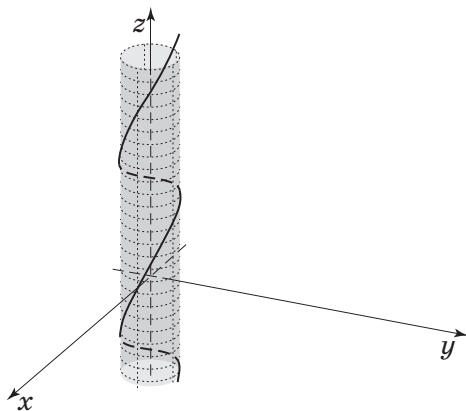


Рис. 9

2. Пусть кривая γ , лежащая в плоскости σ , задана уравнением $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $-\pi < t < \pi$, в системе координат Ptu . Тогда параметрические уравнения линии γ_1 (рис. 10) имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \end{cases} \quad -\pi < t < \pi.$$

Поскольку на плоскости σ прямые с уравнениями $t = -\pi$ и $t = \pi$ являются вертикальными асимптотами графика функции $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, то при наматывании на цилиндр они совпадают и образуют единственную асимптоту линии γ_1 .

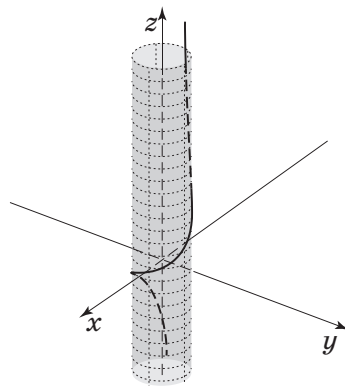


Рис. 10

Конструирование плоских кривых путём проектирования линий цилиндрической поверхности

Учитывая, что координаты x и z произвольной точки M линии γ_1 , лежащей на круговой цилиндрической поверхности F , равны координатам её проекции на координатную плоскость Oxz , получаем, что ортогональная проекция кривой γ_1

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = f(t) \end{cases}$$

на координатную плоскость Oxz определяется уравнениями $\begin{cases} x = \cos t \\ z = f(t). \end{cases}$ Аналогично находим, что ортогональная проекция кривой γ_1 на координатную плоскость Oyz определяется уравнениями $\begin{cases} y = \sin t \\ z = f(t). \end{cases}$

Такой подход позволяет строить разнообразные плоские кривые и получать их параметрические уравнения.

Ясно, что если функция $z = f(t)$ на всей её области определения только возрастает либо только убывает, то проекции кривой γ_1 на координатные плоскости Oxz и Oyz можно рассматривать в качестве графиков некоторых функций, причём аргументом в таких функциях является переменная z . Поэтому в дальнейшем системы координат на соответствующих координатных плоскостях будем обозначать Ozx и Ozy . Более того, поскольку в школе обычно рассматривается правая прямоугольная система координат, то при изображении проекций направления осей будем выбирать так, чтобы системы Ozx и Ozy были правыми.

Рассмотрим примеры.

1. Ортогональные проекции винтовой линии, как на координатную плоскость Ozx , так и на координатную плоскость Ozy , представляют собой синусоиды [1].

2. Ортогональная проекция γ_2 кривой γ_1

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t + \sin t \end{cases}$$

на координатную плоскость Ozx имеет параметрические уравнения $\begin{cases} x = \cos t \\ z = t + \sin t \end{cases}$ (рис. 11). Можно убедиться в том, что γ_2 представляет собой обычную циклоиду, образованную движением окружности радиуса 1, только смещённую на π вдоль оси Oz и на -1 — вдоль оси Ox .

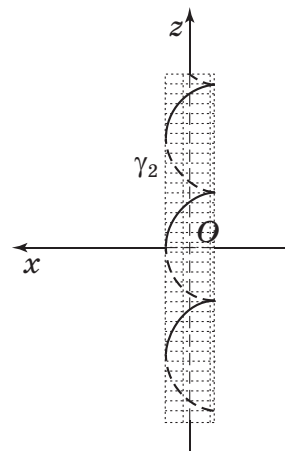


Рис. 11

3. Ортогональная проекция γ_3 (рис. 12) кривой γ_1 из предыдущего примера на координатную плоскость Ozy задаётся уравнениями $\begin{cases} y = \sin t \\ z = t + \sin t. \end{cases}$

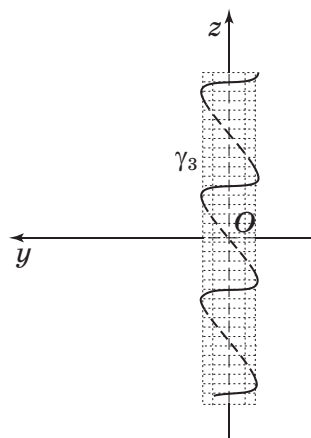


Рис. 12

4. Ортогональная проекция γ_2 кривой γ_1

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t & -\pi < t < \pi \\ z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \end{cases}$$

на координатную плоскость Ozx имеет

вид, представленный на рисунке 13, и

определяется уравнениями
$$\begin{cases} x = \cos t \\ z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}. \end{cases}$$

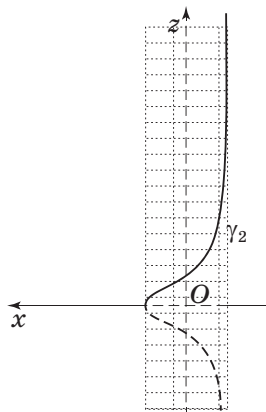


Рис. 13

Применяя известное тождество

$$\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}},$$

видим, что полученная кривая является графиком функции $x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$. График этой функции имеет асимптоту $x = -1$ и максимум в точке $z = 0$ со значением функции 1. Эти выводы следуют из построения данной кривой.

Некоторые направления научно-исследовательской работы учащихся

Очевидно, что «наматывание» плоской кривой на цилиндр и проектирование кривых цилиндрической поверхности на координатные плоскости являются простыми и действенными способами построения пространственных и плоских кривых. Современный уровень развития информационных технологий позволяет обеспечить наглядность в осуществлении

данного направления построения кривых, используя для этого системы динамической математики, например, программу GeoGebra. Опираясь на описанные способы построения кривых на круговой цилиндрической поверхности и на плоскости, можно реализовать ряд научно-исследовательских работ учащихся старших классов. Отметим некоторые возможные направления таких работ.

1. *Конструирование функций с заданными свойствами.*

Продemonстрируем это направление научно-исследовательской деятельности на примере построения функций с заданным числом точек экстремума.

Пусть кривая цилиндрической поверхности получается наматыванием графика функции $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2n}$, $-\pi n < t < \pi n$, на цилиндр, где n – натуральное число. Тогда ортогональные проекции такой кривой на координатные плоскости Ozx и Ozy представляют собой кривые с асимптотой и известным количеством точек экстремума. Например, для $n = 2$ кривые приведены на рисунках 14 и 15. Функция $x = x(z)$ (рис. 14) имеет три ($2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$) точки экстремума, а функция $y = y(z)$ (рис. 15) – четыре ($2n = 2 \cdot 2 = 4$) точки экстремума.

Функция, график которой изображен на рисунке 14, параметрически задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t \\ z = \operatorname{tg} \frac{t}{4}. \end{cases}$$

Применяя известные тригонометрические тождества

$$\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{4}},$$

получаем явное задание функции

$$x = x(z) = \frac{z^4 - 6z^2 + 1}{(1 + z^2)^2}.$$

Аналогичным образом можно получить и явное задание функции $y = y(z)$, график которой представлен на рисунке 15.

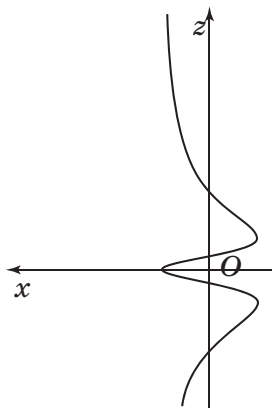


Рис. 14

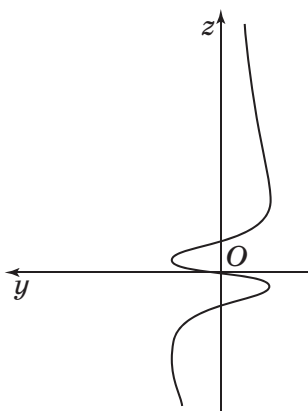


Рис. 15

2. Конструирование замощений цилиндрической поверхности и плоских бордюров.

С помощью кривых цилиндрической поверхности можно получить её замощение, то есть покрытие её одной или несколькими повторяющимися фигурами. На рисунке 16 такое замощение осуществляется с помощью четырёх винтовых линий.

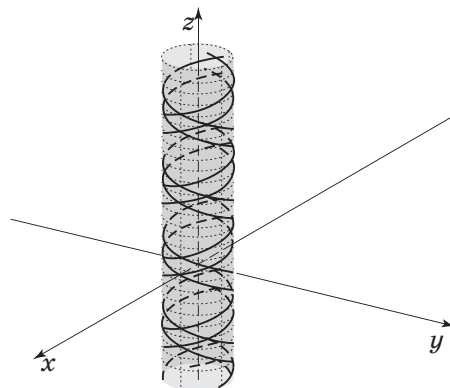


Рис. 16

Проекции полученного замощения на плоскости, параллельные оси цилиндра, представляют собой бордюры, или орнаменты. На рисунке 17 изображен бордюр, который является проекцией рассмотренного выше замощения цилиндрической поверхности на координатную плоскость Ozy (для наглядности оси на рисунке не представлены и ось Oz – горизонтальная).

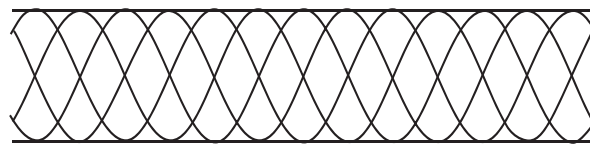


Рис. 17

Поскольку проекцией винтовой линии на плоскость Ozy является синусоида, то продемонстрированный выше бордюр может быть получен на плоскости из четырех синусоид.

На рисунке 18 изображены кривые цилиндрической поверхности, полученные из плоских кривых с уравнениями $u = \sin t + t$, $u = -\sin t + t$, $u = \sin t + t + \pi$, $u = -\sin t + t + \pi$.

На рисунках 19 и 20 представлены бордюры, которые получены с помощью проекций этих кривых на координатные плоскости Ozy и Ozx соответственно.

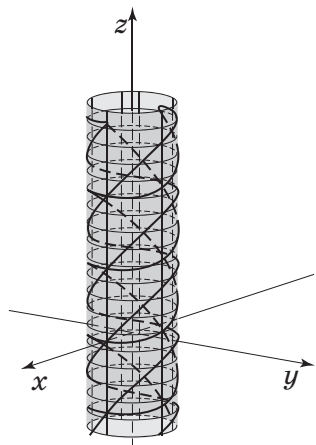


Рис. 18

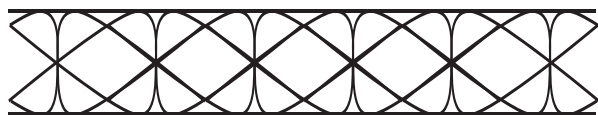


Рис. 19

В частности, на рисунке 20 бордюр составлен из четырёх равных циклоид.

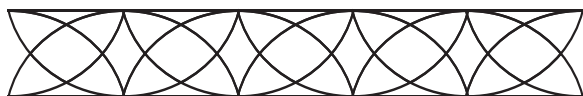


Рис. 20

Поскольку построение бордюров осуществляется за счёт проектирования кривых цилиндрической поверхности, то все линии на плоскости, с помощью которых образуются рассмотренные бордюры, задаются параметрическими уравнениями. Меняя в этих уравнениях некоторые коэффициенты, можно получать другие бордюры.

3. *Конструирование замкнутых кривых цилиндрической поверхности и плоских замкнутых кривых.*

Рассмотрим, например, кривую γ_1 цилиндрической поверхности, полученную наматыванием плоской кривой γ , задан-

ной уравнением $u = \cos \frac{n \cdot t}{2}$, $n \in N$, $-2\pi \leq t < 2\pi$. Легко убедиться в том, что кривая γ_1 является замкнутой и при чётных значениях n не имеет точек самопересечения, а при нечётных – имеет. На рисунке 21 линия γ_1 представлена для случая $n = 8$, а на рисунке 22 – для случая $n = 7$.

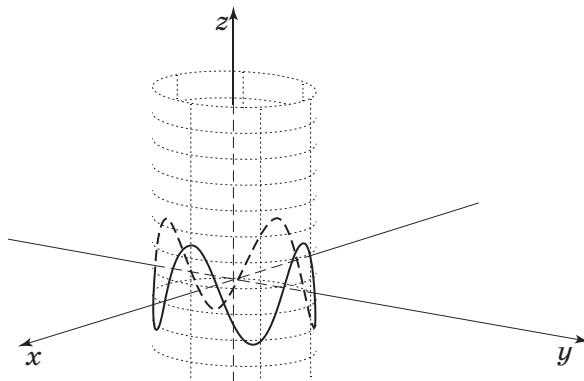


Рис. 21

Если рассматривать параллельное проектирование этих кривых на координатные плоскости, то можно построить плоские замкнутые кривые. Например, проектируя кривую, представленную на рисунке 21, в направлении вектора $\vec{p}(-1, 0, -1)$ на координатную плоскость Ozy , получаем линию, изображенную на рисунке 23.

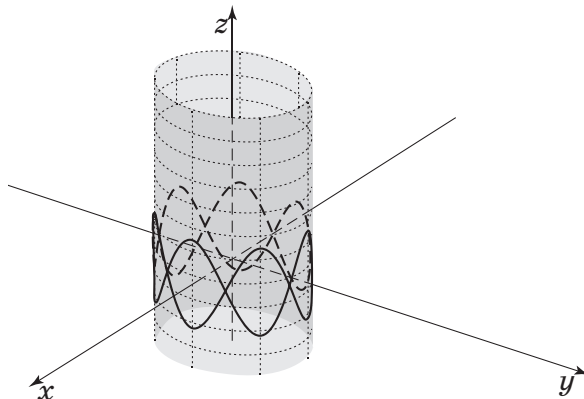


Рис. 22

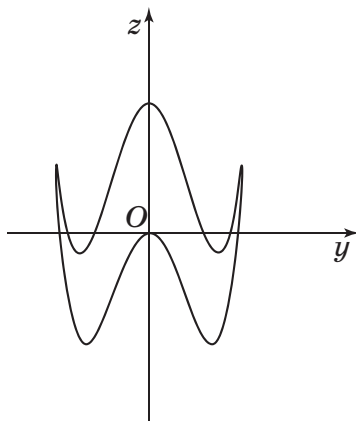


Рис. 23

Заключение

В современной школе должны быть созданы условия для удовлетворения индивидуальных потребностей учащихся. Педагогами наработаны приёмы, способы, формы учебной деятельности, позволяющие индивидуализировать обучение, в частности, значительное внимание уделяется научно-исследовательской работе школьников. Педагоги-практики призна-

ют необходимость такой работы, но выбор темы исследования часто является проблематичным.

Авторы данной статьи надеются, что её содержание поможет учителям математики в организации эффективной научно-исследовательской деятельности учащихся старших классов.

Список источников

1. Богданова Е.А., Богданов П.С., Богданов С.Н. Проектирование как инструмент пространственного изучения элементов тригонометрии. – Математика в школе. – 2019. – № 3. – С. 13–26.
2. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Яценко, М.А. Волчкевич, О.А. Ворончагина и др.; под ред. И.В. Яценко. – М.: Издательство «Экзамен», 2022. – 231 с.

Статья поступила в редакцию	18.09.2022.
Принята к публикации	28.10.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Уважительная причина

Забавную историю о Тони Блэре рассказал учитель математики из Chorister School, где учился будущий британский политик. В ответе к задаче о прямоугольных треугольниках юный Блэр почему-то упомянул слово «носорог». Он признался, что причина была уважительная: «Я бы написал слово “гипшопотам”, но не был уверен, как именно оно пишется, поэтому не захотел огорчать учителя и написал первое более или менее похожее слово, которое пришло в голову». Блэр никак не мог вспомнить слово «гипотенуза». Путаница между словами «гипшопотам» (англ. hippopotamus) и «гипотенуза» (англ. hypotenuse) стала классической темой математических анекдотов.

По книге: Хоакин Наварро. Тайная жизнь чисел. Любопытные разделы математики (М.: Де Агостини, 2014).

ПЛОСКИЕ ЛИНИИ КАК ПРЕДМЕТ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ПРОЕКТОВ (КАСАТЕЛЬНАЯ, НОРМАЛЬ, ОСОБЫЕ ТОЧКИ КРИВОЙ)

PLANE LINES AS A SUBJECT OF EDUCATIONAL RESEARCH PROJECTS (TANGENT, NORMAL, SINGULAR POINTS OF A CURVE)

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_33

Г.А. Клековкин, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Самара, klekovkin_ga@mail.ru

G.A. Klekovkin, PhD (Phys&Math), Associate Pro-
fessor, Samara, klekovkin_ga@mail.ru

Аннотация: в статье рассматривается изобра-
жение касательной и нормали плоской кривой
в среде интерактивной математической системы
GeoGebra. Приводятся примеры моделирования
свойств касательных и нормалей циклоидальных
кривых

Abstract: the paper considers the depiction of a
tangent and a normal of a plane curve in the en-
vironment of the interactive mathema-tical system
GeoGebra. Examples of modelling the properties
of tangents and normals of cycloidal curves
are given

Ключевые слова: плоские линии, касательная,
нормаль, особые точки, подера, интерактивная
математическая система GeoGebra, циклоидаль-
ные кривые

Keywords: flat lines, tangent, normal, singular
points, pedal, interactive mathematical system
GeoGebra, cycloidal curves

© Клековкин Г.А. 2023

Продолжим начатое в статье [3]–[4]
знакомство с инструментами интерак-
тивной математической системы (ИМС)
GeoGebra, которые могут быть полез-
ны при изучении плоских кривых и их
свойств.

1. Прямые, связанные с кривой.
Важную роль при описании формы кривой и изучении её свойств играют прямые, инвариантно связанные с этой кривой.

Пусть M_0 , M_1 – две различные точки кривой γ , прямую M_0M_1 называют *секущей* кривой γ . Когда точка M_1 двигается по кривой к точке M_0 , секущая M_0M_1 вращается вокруг точки M_0 . Предельное положение секущей M_0M_1 при неограниченном приближении точки M_1 по кривой к

точке M_0 называют *касательной к кривой γ в точке M_0* .

Пусть кривая γ в прямоугольной декартовой системе координат Oxy задана явным уравнением

$$y = f(x), \quad (1)$$

$M_0(x_0, y_0)$ – точка этой кривой. Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней производную. Тогда угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ касательной к кривой γ в точке M_0 равен значению производной $f'(x)$ в этой точке. Поэтому уравнение касательной к кривой γ в точке M_0 можно записать в виде:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

В том случае, когда кривая γ определяется параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (3)$$

условимся считать, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют производные и для первой из них существует обратная функция $t = \theta(x)$, которая также имеет производную. Тогда y можно представить в виде функции от x : $y = \psi(\theta(x))$. Поэтому

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отсюда следует, что уравнение касательной к кривой (3) в её точке M_0 , соответствующей значению параметра t_0 , можно записать следующим образом:

$$y - \psi(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)). \quad (4)$$

Понятие касательной позволяет ввести понятие угла между линиями. *Углом θ между линиями γ и γ_1* (между различными ветвями линии), пересекающимися в точке M_0 , называется угол между касательными l , l_1 к этим линиям (ветвям) в их общей точке M_0 .

Если касательные l , l_1 к кривым γ и γ_1 в их общей точке M_0 заданы уравнениями $y = kx + b$, $y = k_1x + b_1$, то $\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}$. В частности, если $l_1 \perp l$, то $k_1 = -\frac{1}{k}$.

Нормалью кривой γ в данной её точке M_0 называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой же точке кривой.

Для кривой, заданной явным уравнением (1), уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть записано в виде:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (5)$$

а для кривой, заданной параметрическими уравнениями (3), – в виде:

$$y - \psi(t_0) = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)). \quad (6)$$

В дальнейшем, как и в статье [3]–[4], будем использовать для примеров, сопровождающих изложение, циклоидальные

кривые, в частности астроиду.

Найдём уравнения касательной и нормали астроида, заданной параметрическими уравнениями

$$x = R \cos^3 \alpha, \quad y = R \sin^3 \alpha, \quad (7)$$

в её произвольной точке.

Дифференцируя x и y по параметру α , имеем:

$$x'_\alpha = -3R \cos^2 \alpha \sin \alpha, \quad y'_\alpha = 3R \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

$$\frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Согласно (4) искомое уравнение касательной имеет вид

$$y - R \sin^3 \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(x - R \cos^3 \alpha)$$

или

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha - R \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (8)$$

Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \varphi$ касательной равен $-\operatorname{tg} \alpha$, следовательно, касательная образует с положительным направлением оси Ox угол

$$\varphi = \pi - \alpha. \quad (9)$$

Уравнение нормали в произвольной точке астроида можно на основании (6) записать следующим образом:

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha - R \cos 2\alpha = 0. \quad (10)$$

Примечание. При исследовании формы кривых, имеющих бесконечные ветви, часто используется понятие асимптоты. *Асимптотой* кривой с бесконечной ветвью называется прямая, к которой кривая по мере удаления в бесконечность приближается сколь угодно близко. Из курса алгебры и начал анализа школьникам известно, что у кривых, заданных уравнениями в прямоугольной декартовой системы координат Oxy , различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты (по отношению к осям системы координат).

Пусть кривая γ в системе Oxy задана явным уравнением $y = f(x)$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ либо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (кривая y удаляется в бесконечность по мере при-

ближения x к a), то прямая $x = a$ называется *вертикальной* асимптотой кривой γ . Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ либо $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $b = \text{const}$ (кривая удаляется в бесконечность по мере приближения y к b), то прямая $y = b$ называется *горизонтальной* асимптотой. Чтобы выяснить, имеет ли кривая *наклонные* асимптоты, сначала ищут предел $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Если этот предел существует, то находят предел $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Когда существуют оба предела, кривая γ при $x \rightarrow +\infty$ имеет **правую** наклонную асимптоту, уравнение которой записывается в виде $y = kx + b$ (если $k = 0$, то асимптота является горизонтальной). Аналогично ищется левая наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Кривая, имеющая бесконечные ветви, может не иметь асимптот. Такой кривой является, например, парабола. Отметим также, что кривая может пересекать свою асимптоту. Примером такой кривой служит график затухающих гармонических колебаний $y = e^{-mx} \sin kx$.

В GeoGebra для построения асимптот заданной (построенной) кривой имеется специальная команда **Асимптота**, которая находится в разделе *Функции и исчисление* общего *Списка команд*.

2. Виды особых точек кривой. Для описания формы кривых вводятся также понятия обыкновенных и особых точек кривой.

Точка кривой γ называется *обыкновенной*, если в ней существует единственная касательная к этой кривой.

Точки кривой, в которых имеется несколько касательных (быть может, совпавших), либо касательной не существует, называются *особыми*.

На этапе школьного обучения математике достаточно ограничиться формиро-

ванием у учащихся наглядных представлений о различных видах особых точек. При отборе для этого конкретных демонстрационных примеров можно руководствоваться тем, что кривые, имеющие особые точки, как правило, распадаются на несколько ветвей. Особые точки следует искать среди точек, в которых ветви кривой примыкают друг к другу, точек пересечения ветвей и точек, в которых ветви имеют общую касательную.

При изображении и моделировании циклоидальных кривых [3–4] уже встречались два вида особых точек – узловые и точки возврата. *Узловыми точками* являются, например, точки самопересечения удлинённой гипотрохоиды с модулем $m = \frac{1}{4}$, в которых у кривой имеются две

различные касательные ([3], рис. 6б). Такие узловые точки называют *двукратными* (по числу различных касательных в точке). В общем случае, если через узловую точку проходит $k \geq 2$ ветвей кривой, каждая из которых имеет в этой точке касательную, то узловую точку называют *k-кратной*. Так роза, изображённая в [3] на рисунке 6в, имеет в начале координат четырёхкратную узловую точку.

Пример точек возврата дают вершины астроида ([3], рис. 4). В *точках возврата* две различные ветви кривой имеют общую касательную и образуют «заострение», поэтому для их названия используется также термин *касп* (от английского cusp – заострение, пик).

Различают точки возврата 1-го и 2-го рода. В точках возврата 1-го рода ветви кривой расположены по одну сторону от общей нормали и по разные стороны от общей касательной. В точках возврата 2-го рода ветви расположены по одну сторону от общей нормали и по одну сторону от общей касательной. Следовательно,

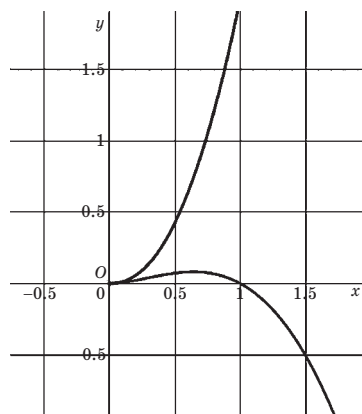


Рис. 1

вершины астроиды являются точками возврата 1-го рода. Кривая на рисунке 1, имеющая уравнение $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, распадается на две ветви $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ и $y = x^2 - \sqrt{x^5}$, которые касаются оси Ox и расположены по одну сторону от оси Oy . Поэтому O – точка возврата 2-го рода.

Кривая $4(x - 2)^4 - 25y^2 = 0$, изображённая на рисунке 2, даёт представление об особых точках, которые называются *точками самоприкосновения*. Данная кривая распадается на две ветви – параболы $y = \pm \frac{2}{5}(x - 2)^2$, каждая из которых не имеет особых точек, но точка прикосновения ветвей A считается особой. В этой точке

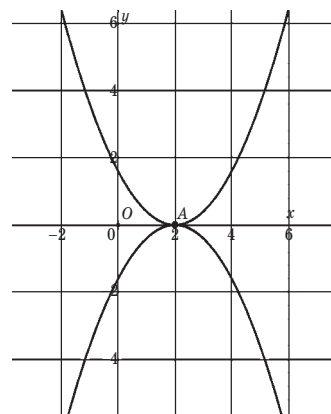


Рис. 2

параболы имеют общую касательную – ось Ox .

К особым точкам кривой относят её *изолированные точки* (если они существуют). Для изолированной точки кривой можно указать окружность с центром в этой точке, внутри которой нет других точек этой кривой. Пример кривой с изолированной точкой даёт улитка Паскаля [5, с. 106]

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$$

при $b > 2a$. Изолированной точкой этой улитки является начало координат O (рис. 3).

Кроме того, кривые характеризуются наличием или отсутствием у них точек перегиба. Точка M плоской кривой γ называется *точкой перегиба*, если в этой

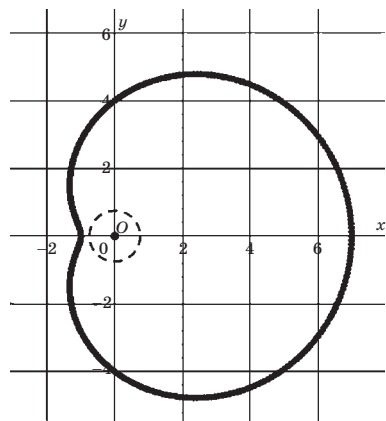


Рис. 3

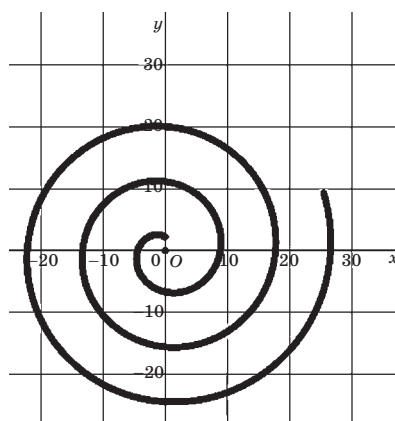


Рис. 4

точке кривая γ переходит с одной стороны касательной на другую. Иными словами, в точке перегиба меняется направление выпуклости кривой.

Наконец, для описания формы некоторых спиралей используется понятие *асимптотической точки*. Так называют точки, вокруг которых закручиваются спирали с бесконечным числом витков, никогда этих точек не достигая. Например, полюс полярной системы координат является асимптотической точкой логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ (рис. 4). Если при $m > 0$ полярный угол $\varphi \rightarrow +\infty$, то и полярный радиус $\rho \rightarrow +\infty$, а если $\varphi \rightarrow -\infty$, то $\rho \rightarrow 0$.

Примечание. Пусть кривая γ задана неявным уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Доказывается, что точка $M_0(x_0, y_0)$ этой кривой может быть особой, если в ней одновременно выполнены два условия:

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Когда же в точке M_0 хотя бы одна из производных F'_x, F'_y отлична от нуля, то кривая γ , по крайней мере, в некоторой окрестности этой точки может быть задана явным уравнением. Так, если $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то кривая может быть задана уравнением $y = f(x)$, где функция f непрерывна и имеет непрерывную производную. В этом случае $y'_x = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$. Поэтому уравнения касательной и нормали кривой γ в точке M_0 можно представить в виде

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

соответственно.

3. Изображение касательной и нормали кривой. Для построения касательных к кривым в ИМС GeoGebra имеется специальная команда **Касательная**, она

расположена в разделе *Геометрия* общего *Списка команд*. После активации этой команды (щелчка на ней левой клавишей мыши (ЛКМ)) открывается окно, в котором представлен набор из шести инструментов.

Три инструмента предназначены для работы с коническими сечениями (парабола, гипербола, эллипс, в частности, окружность). С помощью первого инструмента **Касательная** (<Точка>, <Коника>) строятся касательные к заданной невырожденной линии второго порядка γ , проходящие через заданную точку M . На рисунке 5а этим инструментом построена касательная l к эллипсу γ , проходящая через точку $M \in \gamma$, а на рисунке 5б – касательные l_1 и l_2 к эллипсу γ , проходящие через точку M , не принадлежащую эллипсу. Вторым инструментом **Касательная** (<Прямая>, <Коника>) строятся касательные к заданной линии второго порядка, параллельные заданной прямой (на рисунке 5в – касательные l_1, l_2 к эллипсу γ , параллельные прямой m). Третьим инструментом **Касательная** (<Коника>, <Коника>) строятся общие касательные двух заданных линий второго порядка (на рисунке 5г – общие касательные окружности ω и эллипса γ). Перечисленные инструменты можно использовать для создания моделей, демонстрирующих свойства конических сечений, в частности, их оптические свойства.

Инструменты **Касательная** (<Точка>, <Функция>) и **Касательная** (<Абсцисса>, <Функция>) предназначены для построения касательных к графикам функций. Эти инструменты можно применять для построения касательных к плоским кривым, заданным явными уравнениями.

Шестой инструмент **Касательная** (<Точка>, <Кривая>) даёт возможность строить касательную к любой заданной кривой γ в

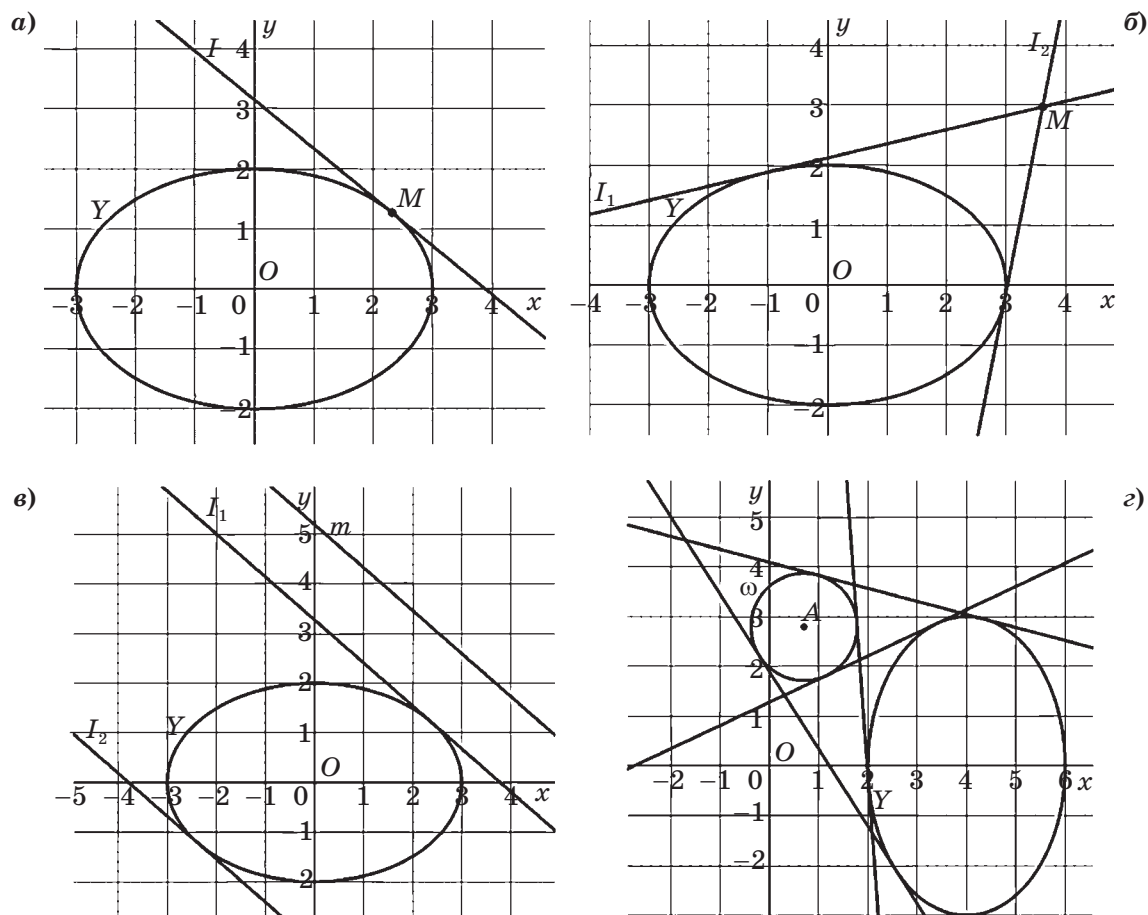


Рис. 5

заданной на ней точке M . Рассмотрим применение этого инструмента более подробно. Одновременно с этим опишем построение нормали кривой в точке M . Для демонстраций, как было сказано, будем использовать циклоидальные кривые.

Напомним сначала, что кривая γ в GeoGebra является заданной, если на графическом полотне ИМС представлено изображение этой кривой, а на панели объектов – её уравнение в привязанной к полотну прямоугольной декартовой системе координат Oxy [3]. Точку $M \in \gamma$ можно задать с помощью мыши инструментом **Точка на объекте**, расположенным на панели инструментов, либо аналитиче-

ски – путём указания имени и координат точки в строке *Ввод*.

Пример 1. Построим касательную и нормаль астроида (7) в заданной на ней точке M .

При построении астроида по её параметрическим уравнениям используем команду **Кривая** из раздела *Функции и исчисление* общего *Списка команд* (см. [4]). GeoGebra обозначит астроида буквой a , сменим это имя на γ . Для построения точки $M \in \gamma$ активируем инструмент **Точка на объекте** и щёлкаем ЛКМ в выбранной точке астроида. Появившаяся после этого точка будет обозначена буквой A , переименуем её буквой M .

Выбираем ЛКМ в списке команды **Касательная** инструмент **Касательная** (<Точка>, <Кривая>) и щёлкаем на опцию *Вставить*. В строке *Ввод* появится надпись **Касательная[]**. Через запятую вписываем в квадратные скобки имена M , γ точки и кривой, щёлкаем на клавишу *Enter*. После этого искомая касательная астроида будет построена на графическом полотне системы, а на панель объектов будет вынесено её уравнение. Обозначим касательную буквой l (рис. 6 для $R = 4$).

Для построения нормали используем инструмент **Перпендикулярная прямая**, расположенный на панели инструментов. Выбрав этот инструмент, щёлкаем ЛКМ сначала на точку M , а затем на прямую l . Искомая нормаль при этом будет построена, она на рисунке 6 обозначена буквой n .

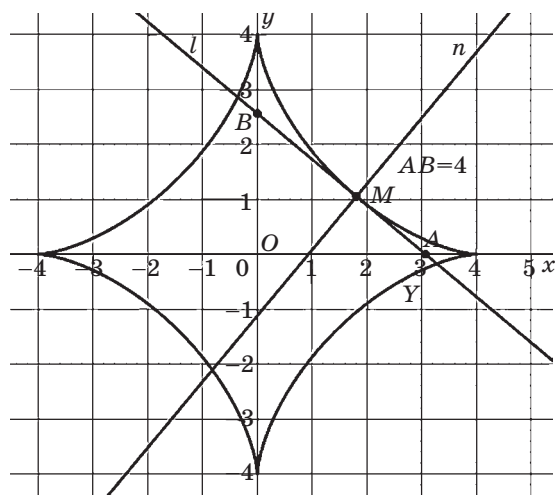


Рис. 6

Если на созданной модели-чертеже курсором перемещать точку M по астройде, то вместе с точкой будут перемещаться «привязанные» к ней касательная и нормаль кривой. За счёт этого в ряде случаев удаётся экспериментально выявлять свойства касательных и нормалей изучаемых кривых.

Свойства кривых, которые чаще всего становятся предметом ученических исследований, давно и достаточно всесторонне изучены (см., например, [5]). Поэтому вероятность того, что школьнику удастся открыть какие-то новые свойства изучаемой им кривой весьма небольшая. Вместе с тем, само создание моделей, демонстрирующих уже известные свойства, может стать для него интересной, а иногда и достаточно трудной творческой задачей. В тех случаях, когда для доказательства свойства не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы, полезно предложить учащемуся реконструировать его с помощью созданной модели или найти собственный вариант доказательства.

Проиллюстрируем сказанное на примере создания моделей для демонстрации свойств астроида (предполагается, что читатель знаком с содержанием статьи [3]–[4]). Известно, что касательная и нормаль астроида обладают следующими свойствами:

- длина отрезка касательной к астройде, отсекаемого её осями, постоянна и равна радиусу R неподвижной окружности;
- касательная астроида в её произвольной точке проходит через точку окружности производящего круга, диаметрально противоположную точке касания её с неподвижной окружностью, а нормаль – через точку касания этих окружностей.

Пример 2. Экспериментально подтвердить первое из этих свойств можно с помощью модели, рассмотренной в предыдущем примере. Для этого достаточно инструментом **Пересечение** отметить дополнительно точки A и B пересечения касательной к астройде с осями координат. Затем выбрать инструмент **Расстояние или длина** и последовательно щёлкнуть

курсором сначала на точке A , а затем на B . После этого на полотне появится надпись « $AB = 4$ », указывающая расстояние между точками A и B (длину отрезка AB) (рис. 6). Перемещая курсором точку M по астроиде, убеждаемся, что расстояние AB при этом не изменяется.

Свойство весьма просто доказывается аналитически. Найдём точки пересечения касательной (8) с осями координат. Ось Ox имеет уравнение $y = 0$, следовательно, касательная пересекает эту ось в точке $A(R \cos \alpha, 0)$. Ось Oy , имеющую уравнение $x = 0$, касательная пересекает в точке $B(0, R \sin \alpha)$. Поэтому отрезок AB , высекаемый на касательной осями координат, имеет длину

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0 - R \cos \alpha)^2 + (R \sin \alpha - 0)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = R. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что длина отрезка AB не зависит от α , то есть отрезки, высекаемые осями астроида на касательных к ней, имеют постоянную длину, равную радиусу R неподвижной окружности Ω .

Пример 3. Приступая к конструированию модели, наглядно демонстрирующей второе свойство, отметим следующее. Создание модели-анимации, реализующей процесс вычерчивания астроида на основе её кинематического определения, было рассмотрено в Примере 1 работы [3]. Однако полученное таким образом анимационное изображение кривой представляет собой не непрерывную кривую, а дискретное множество её точек; эффект непрерывности создается за счёт «малого» шага изменения параметра. Инструмент **Касательная**, как мы видели, позволяет строить касательные кривых, заданных аналитически в строке *Ввод*. Поэтому этим инструментом построить касательную астроида, вычерченной на основе кинематического определения, не

удастся. Для решения поставленной задачи потребуются комбинированная модель [4], на которой одновременно представлены и готовое статичное изображение астроида, и изображение, получаемое в процессе анимационной реализации её кинематического определения. При этом вычерчивающую астроида точку M окружности производящего круга ω , катящегося по неподвижной окружности Ω , нужно «привязать» к статичному изображению астроида.

Конструирование комбинированной модели начнём с создания ползунков для радиуса R неподвижной окружности Ω и угла α , задающего значение производящего круга ω . Построим неподвижную окружность Ω и вписанную в неё астроида γ (рис. 7). Для построения окружности воспользуемся инструментом **Окружность по центру и радиусу**, а для построения астроида – инструментом **Кривая**. Затем, как в Примере 1 работы [3], создадим анимацию, показывающую процесс вычерчивания астроида точкой M окружности производящего круга ω . При этом вместо

параметра t используем параметр $\alpha = \frac{t}{4}$. Поэтому теперь $\angle EOO_1 = \alpha$, $\angle NO_1M = 4\alpha$ (рис. 7). Здесь O и O_1 – центры неподвижной окружности Ω и производящего круга соответственно; N – точка соприкосновения окружностей Ω и ω , M – точка, вычерчивающая астроида.

Точка M расположена на астройде γ . Это позволяет построить касательную к γ в точке M с помощью инструмента **Касательная**. Обозначим построенную касательную буквой l . Инструментом **Пересечение** построим точки A и B пересечения касательной с координатными осями Ox и Oy соответственно. Точку окружности ω , диаметрально противоположную точке N , обозначим буквой P . Построим отрезки

MP и MN . Угол PMN вписан в окружность ω и опирается на её диаметр, а значит, является прямым.

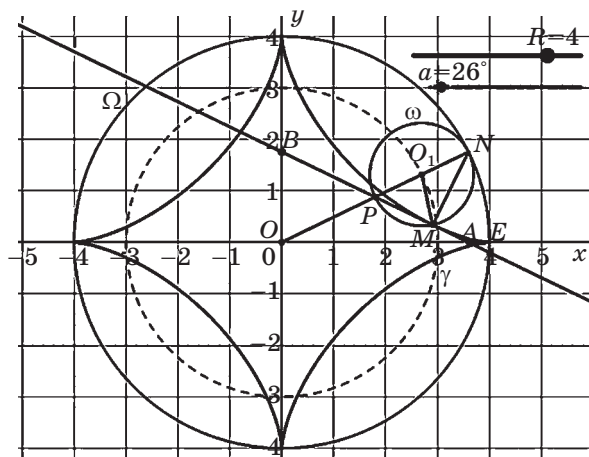


Рис. 7

Меняя курсором на ползунке значения α и перемещая тем самым точку M по астроидам, можно наблюдать, что при любом α отрезок MP расположен на касательной l астроида в точке M . Это наблюдение визуально подтверждает справедливость второго свойства. Дадим его геометрическое доказательство.

Угол O_1NM является углом при основании MN равнобедренного треугольника MO_1N , поэтому

$$\angle O_1NM = \frac{1}{2}(\pi - 4\alpha) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

Из прямоугольного треугольника MPN находим:

$$\angle MPN = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = 2\alpha.$$

Угол MPN является смежным с углом OPA , поэтому $\angle OPA = \pi - 2\alpha$. Из треугольника OPA имеем:

$$\angle PAO = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha) = \alpha.$$

Отсюда в силу (9) следует, что отрезок MP лежит на касательной l астроида в точке M , а перпендикулярный ему отрезок NM – на нормали астроида в этой точке. Тем самым доказано, что нормаль

астроида в любой её точке проходит через точку N соприкосновения неподвижной окружности и окружности производящего круга, а касательная – через диаметрально противоположную ей точку P окружности этого круга.

Используя рисунок 7, легко дать геометрическое доказательство первого свойства. Из равенства $\angle PAO = \angle POA = \alpha$ следует, что OPA – равнобедренный треугольник с основанием OA , поэтому $PO = PA$. Очевидно, что треугольник OPB также является равнобедренным, в нём $PB = PO$. Таким образом, $PA = PB = PO$, где $PO = ON - PN = R - \frac{2R}{4} = \frac{R}{2}$. Следовательно, $AB = PA + PB = R$.

Примечание. Второе из рассмотренных свойств имеет простое кинематическое истолкование. Точка N соприкосновения окружностей Ω и ω является мгновенным центром вращения производящего круга, поэтому вектор скорости точки M , определяющий направление касательной в этой точке, перпендикулярен отрезку NM . Более подробно с использованием кинематических соображений при исследовании свойств плоских кривых можно познакомиться в пункте «Скорости и касательные» § 7 пособия [2]. В качестве примера рассмотрим решение задачи из этого пособия, адресованной читателям для самостоятельного решения.

Пример 4. Рассматривается астроида, описанная около окружности радиуса $2r$. Требуется доказать, что из любой точки P этой окружности можно провести такие три прямые PT_1, PT_2, PT_3 , касательные к астроидам, что они образуют друг с другом одинаковые углы (по 60°), при этом точки касания T_1, T_2, T_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $3r$, касающуюся окружности, описанной около астроида.

Астроида, описанная около окружности радиуса $2r$, вписана в окружность радиуса $4r$. Точка, лежащая на окружности ω круга радиуса $3r$, который катится без скольжения по неподвижной окружности Ω радиуса $4r$ с её внутренней стороны, вычерчивает астроида ([3], Пример 5). Точки T_1, T_2, T_3 , расположенные в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность ω , вычерчивают при качении одну и ту же астроида ([4], задача для самостоятельного решения 15б).

Точка N соприкосновения окружностей ω и Ω (рис. 8) является **мгновенным центром** вращения окружности ω . Поэтому касательные астроида в точках T_1, T_2, T_3 будут перпендикулярны отрезкам NT_1, NT_2, NT_3 соответственно. Отсюда следует, что все три касательные проходят через точку P окружности ω , диаметрально противоположную точке N . Точка P , как нетрудно заметить, будет точкой соприкосновения окружности ω с окружностью, вписанной в астроида. Доказательство равенства углов между касательными опирается на теоремы об измерении углов в окружности.

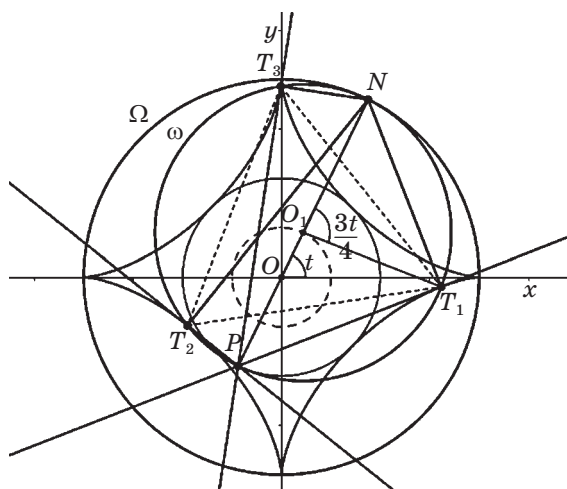


Рис. 8

Динамическая модель к задаче может быть построена следующим образом:

1. Создаем ползунки для r и угла t . Инструментом **Окружность по центру и радиусу** строим неподвижную окружность Ω радиуса $4r$ и окружность радиуса $2r$ с центром в начале координат, с помощью инструмента **Кривая** строим астроида, вписанную в окружность Ω (рис. 8).

2. В соответствии с алгоритмом, реализованным в Примере 1 статьи [3], строим окружность радиуса $3r$, которая после анимации параметра t будет без скольжения катиться по окружности Ω . Точку соприкосновения окружностей Ω и ω обозначим буквой N , а точку окружности ω , соответствующую значению параметра t , установленному на ползунке, – буквой T_1 (при изменении значений параметра точка T_1 будет перемещаться по астроида).

3. Инструментами, расположенными на *Панели инструментов*, строим правильный треугольник $T_1T_2T_3$, вписанный в окружность ω (на рисунке 8 изображён пунктирной линией, все вспомогательные построения с помощью опции *Показывать объект* сделаны невидимыми).

4. Строим отрезки NT_1, NT_2, NT_3 и перпендикулярные им прямые l_1, l_2, l_3 (касательные астроида в точках T_1, T_2, T_3). С помощью инструмента **Пересечение** выделяем общую точку пересечения касательных на вписанной в астроида окружности, обозначаем её буквой P .

Нужная нам модель построена. Меняя курсором на ползунке значения параметра t , можно убедиться, что из любой точки P вписанной в астроида окружности можно провести три касательные к астроида, образующие друг с другом одинаковые углы по 60° .

5. Подера. Во многих теоретических и особенно в практических задачах возникает необходимость вводить и изучать

новые линии, которые тем или иным способом связаны с рассматриваемой кривой. В качестве примера рассмотрим построение кривой, называемой подерой (или педалью) данной кривой.

Пусть на плоскости заданы кривая γ и некоторая фиксированная точка A . *Подерой* данной кривой γ относительно данной точки A называется кривая, являющаяся геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на касательные к кривой γ .

Примечание. В математической литературе достаточно часто термин «подера» пишется через э – подэра.

Пример 5. Рассмотрим конструирование модели-анимации, демонстрирующей вычерчивание подеры астроида γ , заданной уравнением (7), относительно заданной точки A .

1. Создаём ползунки для R и α . С помощью команды **Кривая** строим астроида γ и её ось симметрии $y = x$ (на рисунке 9 изображена штриховой линией и обозначена буквой m). Описываем около астроида окружность Ω .

2. Инструментом **Точка** строим на полотно точку A .

3. Через строку ввода задаём текущую точку $M(R \cos^3 \alpha, R \sin^3 \alpha)$ астроида. Инструментом **Касательная** строим касательную l к астроида в точке M .

4. Используя инструмент **Перпендикулярная прямая**, через точку A проводим прямую p , перпендикулярную касательной l . Выделяем точку пересечения прямых l и p (на рисунках 9 обозначена буквой B). Активируем у точки B опцию *Оставлять след*.

Модель для образования подеры астроида γ относительно точки A сконструирована: искомую подеру будет вычерчивать точка B после анимации параметра α .

В книге А.А. Савелова рассмотрена по-

дера астроида относительно точки, лежащей на биссектрисе первой координатной четверти на заданном расстоянии s от начала координат [5, с. 133]. Её изображение при $s \neq 0$ представлено в [5] на рисунке 78. Комментируя рисунок, автор пишет, что такая подера имеет в начале координат четырёхкратную узловую точку и называется *жуком*, который при $s = 0$ становится розой. Вместе с тем, с помощью созданной нами модели легко экспериментально установить, что при $s \neq 0$ **форма подеры существенно зависит от величины s** . Для этого достаточно перемещать точку A по биссектрисе первой координатной четверти.

Если точка A находится в начале координат (рис. 9а), то подера действительно является четырёхлепестковой розой [5, с. 166]. Рисунки 9б – 9д, соответствующие различным случаям расположения точки A на прямой $y = x$, позволяют увидеть, что форма подеры астроида зависит от положения точки A .

Когда точка находится внутри астроида, «лепестки» розы изменяются в размерах таким образом, что кривая в самом деле напоминает стилизованное изображение жука. Однако кривая в этом случае имеет не только четырёхкратную узловую точку, но ещё две двукратные (рис. 9б). Когда точка A расположена на астроида, один «лепесток» у кривой пропадает (рис. 9в). Рисунок 9г представляет случай расположения точки A на окружности, описанной около астроида, здесь у подеры три двукратные узловые точки, при этом одна из дуг с концами в двукратных узловых точках имеет точку перегиба. Точка перегиба исчезает, если точку A выбрать на биссектрисе вне описанной окружности Ω (рис. 9д).

Так же точно с помощью созданной модели можно вычертить подеры астроида относительно точек, расположенных на её оси, и наблюдать за изменениями их

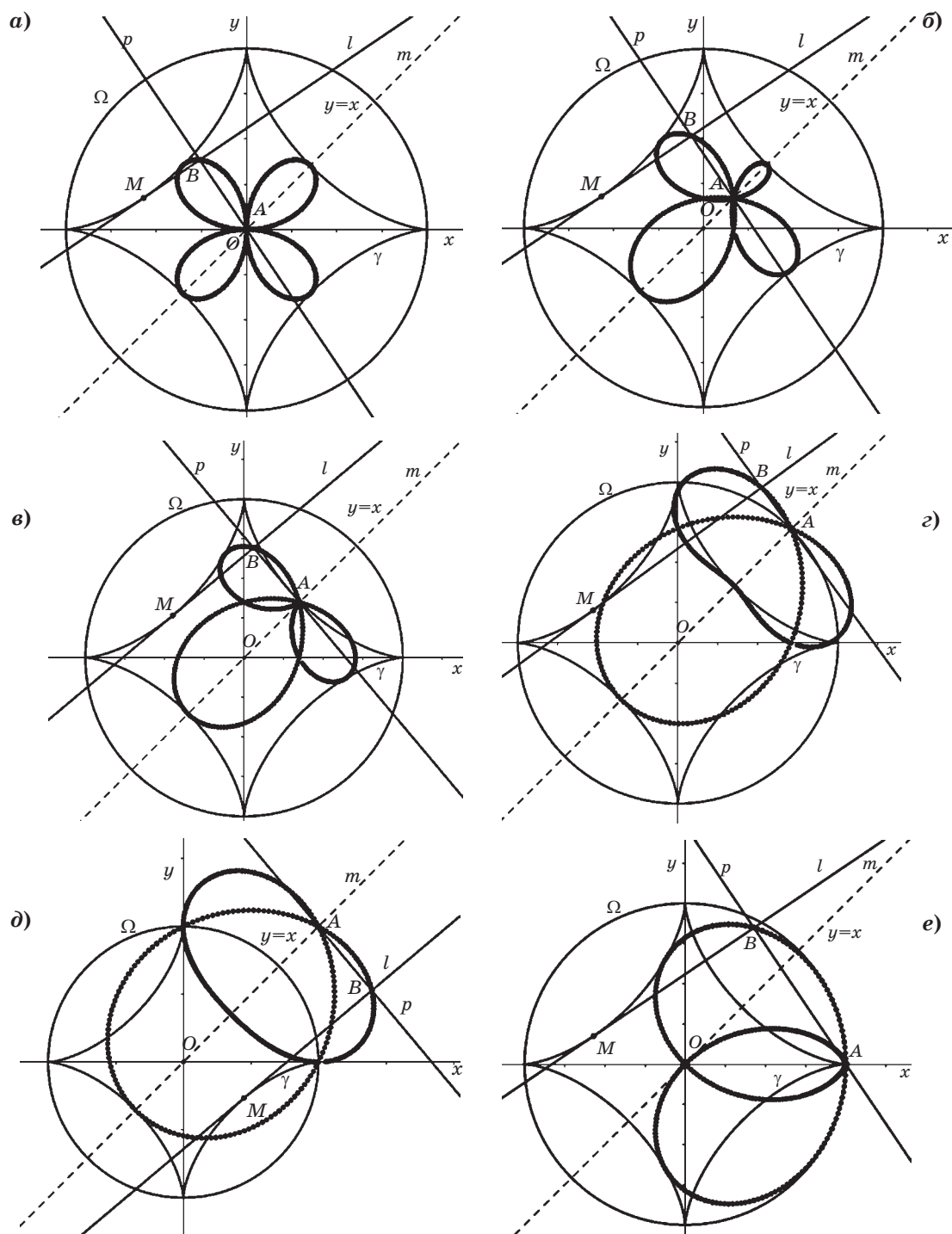


Рис. 9

формы при перемещении точки A по этой оси. Случай, когда точка A находится в точке возврата астроида, представлен

на рисунке 9e. Можно, наконец, вычерчивать подеры относительно точек, не лежащих на осях симметрии астроида,

и наблюдать за изменениями их формы.

6. Задания для самостоятельного решения с комментариями и указаниями.

1. Как отмечено в [3], астроида (7) в прямоугольной декартовой системе координат Oxy можно задать двумя явными уравнениями

$$y = \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ и } y = - \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Первое уравнение определяет ветвь, лежащую в верхней полуплоскости, а второе – в нижней.

а) Докажите, что функция

$$y = \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} :$$

- возрастает на промежутке $[-R, 0]$ и убывает на промежутке $[0, R]$;
- выпукла вниз на промежутках $(-R, 0)$, $(0, R)$.

Указание. Воспользуйтесь приложениями первой и второй производных к исследованию функций:

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}} \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$y'' = \frac{\frac{2}{3} R^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} \sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}.$$

б) Сформулируйте аналогичные свойства для функции

$$y = - \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

в) Докажите, что касательная астроида в любой её обыкновенной точке пересекает эту астириду в двух точках.

Указание. Воспользуйтесь результатами пунктов а) и б).

г) Докажите, что вершины астроида являются точками возврата 1-го рода.

2. Астроида задана неявным уравнением $(x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0$. Найдите уравнения её касательной и нормали в точке

$$M \left(\frac{1}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right).$$

Построив в GeoGebra астириду и найденные касательную и нормаль, визуальнo убедитесь в правильности полученных результатов.

3. Известно, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются астроида (7), является четырёхлепестковой розой. Создайте модель-анимацию, демонстрирующую это свойство астроида.

Указание. Прямые, содержащие стороны углов, касаются астроида (7) в точках $M(R \cos^3 \alpha, R \sin^3 \alpha)$ и

$$M_1 \left(R \cos^3 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right), R \sin^3 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

4. Из заключительной части **Примера 3** следует, что отрезки ON и AB равны и пересекаются в их середине (рис. 7). Отсюда по признаку прямоугольника заключаем, что четырёхугольник $OANB$ является прямоугольником. Основание M перпендикуляра, опущенного из вершины N прямоугольника на его диагональ AB , принадлежит астроиде. Точка N является точкой соприкосновения неподвижной окружности Ω и катящегося по ней производящего круга, окружности ω которого принадлежит точка M . При качении производящего круга прямоугольник $OANB$ деформируется так, что его диагонали сохраняют свою длину.

На основании этого можно дать ещё один способ образования астроида. Возьмём пару взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O . Рас-

смотрим прямоугольник $OANB$, вершины A и B которого лежат на выбранных прямых. Будем деформировать прямоугольник так, чтобы его диагональ AB сохраняла свою длину. Астроиду можно определить, как геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из вершины N прямоугольника на его диагональ AB .

а) Создайте модель-анимацию, реализующую это определение.

в) Выясните, какую кривую при деформации прямоугольника описывает основание перпендикуляра, опущенного на диагональ AB из вершины O .

По аналогии с рассмотренными примерами можно предложить учащимся создать модели, визуально демонстрирующие свойства кардиоиды и дельтоиды (кривой Штейнера).

Напомним, что кардиоида является эпициклоидой с модулем $m = 1$, то есть траекторией точки M , расположенной на окружности ω производящего круга радиуса r , который катится без скольжения по окружности Ω того же радиуса r с её внешней стороны. Ту же кардиоиду вычерчивает точка M_1 окружности ω_1 радиуса $2r$, катящаяся по содержащейся в ней неподвижной окружности радиуса r

(рис. 10). В прямоугольной декартовой системе координат Oxy кардиоида может быть задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos t - r \cos 2t, \\ y &= 2r \sin t - r \sin 2t. \end{aligned} \quad (11)$$

Дельтоида является гипоциклоидой с модулем $m = \frac{1}{3}$, то есть траекторией точки

M , расположенной на окружности ω производящего круга радиуса r , катящегося без скольжения по окружности Ω радиуса $3r$ с её внутренней стороны. Ту же дельтоиду вычерчивает точка M_1 окружности ω_1 радиуса $2r$, которая также катится по Ω с её внутренней стороны (рис. 11). В прямоугольной декартовой системе координат Oxy дельтоида может быть задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}, \\ y &= 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Для кардиоиды, заданной параметрическими уравнениями (11):

а) запишите уравнения касательной и нормали в её произвольной точке M ;

б) найдите величину угла, образуемого касательной с положительным направлением оси Ox ;

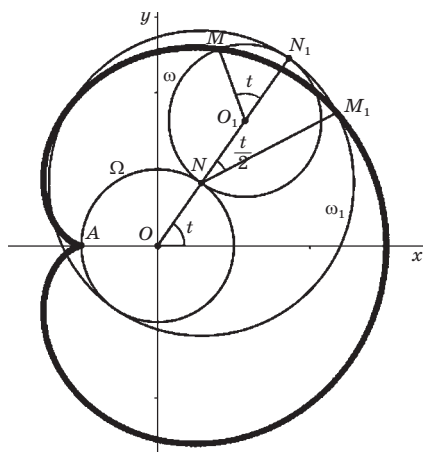


Рис. 10

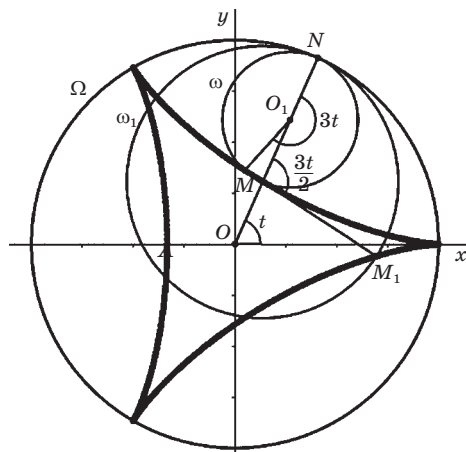


Рис. 11

в) задав в строке ввода кардиоиду, её текущую точку M и найденные касательную и нормаль, убедитесь в правильности выполненных вычислений.

6. Решите задачи предыдущего задания для дельтоиды, заданной параметрическими уравнениями (12).

7. Свойства касательной и нормали астроида, рассмотренные в **Примере 3**, относятся к общим свойствам гипо- и эпициклоид. Именно, касательная к любой гипоциклоиде (эпициклоиде) в её произвольной точке проходит через точку окружности производящего круга, диаметрально противоположную точке касания его с неподвижной окружностью, а нормаль – через точку касания этих окружностей. Создайте модели, позволяющие продемонстрировать справедливость этих свойств: а) для эпициклоид с модулем m ; б) для гипоциклоид с модулем $m < 1$. С помощью созданных моделей пронаблюдайте выполнение свойств для: нефроиды (эпициклоиды с модулем $m = \frac{1}{2}$), кардиоиды, дельтоиды.

В заданиях 8–10 приведены наиболее интересные специфические свойства кардиоиды и дельтоиды. Создайте интерактивные динамические модели для демонстрации указанных свойств и докажете эти свойства.

8. Произвольная хорда M_1M_2 кардиоиды (11), проходящая через её точку возврата A (рис. 10) обладает следующими свойствами:

- а) середина хорды лежит на неподвижной окружности Ω (радиуса r);
- б) длина хорды равна $4r$;
- в) касательные к кардиоиде в точках M_1, M_2 взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения лежит на окружности радиуса $3r$ с центром в центре неподвижной окружности Ω .

Указание. В случае затруднений см. [1], [2, с. 118–119], [5, с. 122].

9. Если M_1, M_2, M_3 – такие точки кардиоиды с точкой возврата A , что $\angle M_1OM_2 = \angle M_2OM_3 = \angle M_3OM_1 = 120^\circ$, то касательные кардиоиды в этих точках параллельны между собой.

Указание. В случае затруднений см. [1].

10. Касательная дельтоиды в её произвольной точке M пересекает эту дельтоиду в двух точках M_1 и M_2 . При этом

а) точки M_1, M_2 являются диаметрально противоположными точками окружности радиуса $2r$, которая катится без скольжения по окружности Ω радиуса $3r$ с её внутренней стороны;

б) середина хорды M_1M_2 принадлежит окружности, вписанной в дельтоиду;

в) касательные дельтоиды в точках M_1, M_2 взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения лежит на окружности, вписанной в дельтоиду.

11. В [5] найдено уравнение подеры дельтоиды (12) относительно точки, лежащей на её оси симметрии, и приведены рисунки с изображением подеры для четырёх частных случаев расположения точки на оси Ox [5, с. 128–130]. По аналогии с **Примером 5** постройте модель-анимацию для вычерчивания подеры дельтоиды относительно заданной точки A . С помощью этой модели пронаблюдайте изменения формы подеры при изменении положения точки A относительно дельтоиды.

12. Выполните предыдущее задание для: а) нефроиды, б) кардиоиды.

13. Создайте универсальную модель-анимацию для вычерчивания подер эпициклоид с рациональным модулем $m = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

14. Создайте универсальную модель-

анимацию для вычерчивания подер гипоциклоид с рациональным модулем

$$m = \frac{p}{q} < 1, p, q \in \mathbb{N}.$$

15. На плоскости даны окружность θ и точка A . Докажите, что подерой окружности относительно точки A является *улитка Паскаля* [5, с. 106]. Создайте модель для вычерчивания подеры окружности относительно точки A . Выясните, когда улитка Паскаля становится кардиоидой.

Указание. В случае затруднений см. [5, с. 124].

Список источников

1. Акоюн А. Геометрия кардиоиды <https://users.mccme.ru/akopyan/papers/cardioid.pdf> (дата обращения 20.06.2022).

2. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. 6-е изд. М.: МЦНМО, 2006. 128 с.

3. Клековкин Г.А. Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (изображение и моделирование). Часть 1 // Математика в школе. № 3. 2022. С. 39–51.

4. Клековкин Г.А. Плоские линии как предмет учебно-исследовательских проектов (изображение и моделирование). Часть 2 // Математика в школе. № 4. 2022. С. 24–31.

5. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения: Справочное руководство. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 296 с. (Физико-математическое наследие: математика).

Статья поступила в редакцию

28.08.2022.

Принята к публикации

26.10.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Неосмотрительный математик

Первый научный журнал в истории появился под эгидой Лондонского королевского общества. Произошло это всего через четыре с половиной года после его основания. 6 марта 1665 года увидел свет первый номер «Философских трудов Королевского общества». Инициатором издания журнала стал первый секретарь Лондонского королевского общества Генри Ольденбург. Он же выполнял редакторские обязанности. Журнал выходит до сих пор, а с 1997 года «Философские труды...» публикуются в интернете. Издание его прерывалось только дважды: в первый раз из-за эпидемии чумы в Лондоне, во второй раз – из-за болезни Ольденбурга, который всё своё время посвящал работе. Его энтузиазм был так велик, что каждую неделю он писал для журнала пять колонок. Ольденбург считал, что наука не знает границ, поэтому продолжал публиковать свои статьи даже во время войны. Но в те времена это было очень неосмотрительно, и Ольденбург на три месяца был заключён в Лондонский Тауэр. Первые научные издания, посвященные исключительно математике, появились в XIX веке. Так, в 1810 году вышли в свет «Анналы математики» Жозефа Жергонна. Интересно, что свой журнал этот французский геометр стал издавать после неудачных попыток опубликовать собственную работу.

По книге: Энрике Гарсиан. Открытие без границ. Бесконечность в математике (М.: Де Агостини, 2014)

НАКЛОН КОЛЕСА К ДОРОГЕ, ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И ФЕНОМЕН ПРОБУКСОВКИ

THE TILT OF THE WHEEL TO THE ROAD, CYCLOIDAL CURVES AND THE PHENOMENON OF SLIPPING

Научная статья

УДК: 372.851

Scientific article

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_49

А.В. Ястребов, к.ф.-м.н., д.п.н., профессор, ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль, alexander.yastrebov47@gmail.com;

П.А. Клюкин, учащийся школы № 33 им. Карла Маркса с углублённым изучением математики, г. Ярославль, klukin0202@yandex.ru

A.V. Yastrebov, PhD (Phys and Math), DrSci (Pedagogy), Professor, YSPU named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl), alexander.yastrebov47@gmail.com;

P.A. Klukin, high-school student, school № 33 named after Karl Marx with profound study of mathematics (Yaroslavl), klukin0202@yandex.ru

Аннотация: в статьях [1, 2] описаны циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды, порождённые буксующими колёсами. В статье [3] тот же самый подход применяется к изучению окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях. В настоящей статье делается следующий естественный шаг: плоскости двух окружностей расположены под произвольными углами

Abstract: in paper [1, 2] we studied cycloids, epicycloids, and hypocycloids generated by skidding wheels. In paper [3] the same approach is used with respect to circumferences whose planes are perpendicular to each other. The present paper is devoted to *random* value of the angle between the planes

Ключевые слова: сцепление колеса с дорогой, коэффициент сцепления колеса с дорогой, циклоидальная кривая, пространственное расположение окружностей

Keywords: grip of the wheel, coefficient of grip, cycloidal curve, 3-dimensional placement of circumferences

© Ястребов А.В., Клюкин П.А. 2023

Постановка задачи является одним из важнейших элементов работы исследователя, и при этом не важно, кто рассматривается в качестве такового: школьник, студент, аспирант или сэр Исаак Ньютон. Покажем, что бывают ситуации, когда научная задача рождается буквально на страницах учебника.

Важным этапом развития геометрии было изучение так называемых циклоидальных кривых – циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды. Анализ соответствующих

определений в учебниках и справочниках выявил несколько обстоятельств. Во всех случаях окружность движется по тому или иному геометрическому объекту, и при этом изучается траектория точки, находящейся на ней. Неподвижный объект и движущаяся окружность находятся в одной плоскости. Окружность катится без скольжения, причём факт отсутствия скольжения акцентируется во всех трёх случаях.

Два последних обстоятельства наводят

на размышления. Во-первых, каждый человек наблюдал буксующие колёса, так что было бы естественным изучать траекторию точки на ободе буксующего колеса. Между тем, в доступных авторам источниках феномен пробуксовки не обсуждается. Во-вторых, достаточно часто встречаются ситуации, когда неподвижный объект и движущаяся окружность находятся в разных плоскостях. Таковы, например, рельсы на повороте и катящееся по ним колесо вагона, которые находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Такова, например, арена цирка и катящееся по ней колесо мотоцикла, которые расположены под некоторым углом друг к другу, непрямым углом.

Так возникает *общая задача*, которую на естественном языке можно сформулировать так: изучить траекторию точки, лежащей на окружности круга, который движется по некоторой линии и при этом буксует, или скользит, или катится «нормально».

Физические понятия – естественный элемент изучения движения колеса по дороге. Приведём их в том виде, в каком они сформулированы в [1].

Пусть колесо движется по некоей дороге в течение промежутка времени $[0, t]$. **Следом на дороге** называется множество точек *дороги*, которые соприкоснулись с колесом за указанный промежуток времени. **Следом на колесе** называется множество точек *колеса*, которые соприкоснулись с дорогой за указанный промежуток времени.

Сцепление колеса с дорогой называется **постоянным**, если длины обоих следов прямо пропорциональны длине промежутка времени. *Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать такое движение колеса, у которого сцепление с дорогой является постоянным.*

Определение. *Коэффициентом сцепления* колеса с дорогой называется отношение длины следа на дороге к длине следа на колесе.

Сцепление колеса с дорогой называется **нормальным**, если коэффициент сцепления $k = 1$. В этом случае колесо называется **катящимся**. Сцепление колеса с дорогой называется **слабым**, если $k \neq 1$. При этом колесо называется **буксующим**, если $0 \leq k < 1$. Колесо называется **скользящим**, если $k > 1$.

Формализация – неизбежный элемент применения математики для анализа естественнонаучных явлений. Изложим наши житейские наблюдения за колёсами в точных терминах и рассмотрим следующую задачу.

Задача. Две окружности радиусов R и r , расположенные в пространстве, имеют одну общую точку и общую касательную в этой точке. При этом угол между плоскостями этих окружностей равен α . Сохраняя такое расположение, вторая окружность катится по первой с постоянным сцеплением, коэффициент которого равен k . Найдите траекторию точки на ободе катящейся окружности.

Решение задачи проведём в несколько этапов.

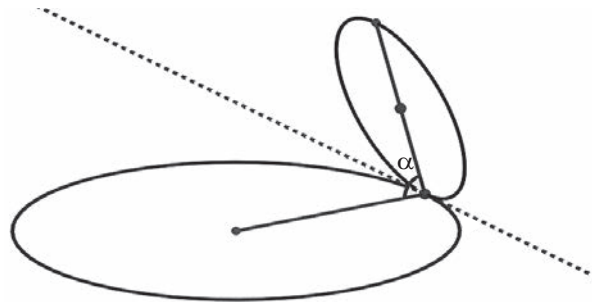


Рис. 1. Визуализация условий задачи

1. Прежде всего, визуализируем условия задачи (рис. 1). Поскольку касательная к окружности перпендикулярна ра-

диусу, проведённому в точку касания, линейный угол двугранного угла между плоскостями изучаемых окружностей можно изобразить, проведя радиусы (или диаметры) через общую точку двух окружностей.

2. Очевидно, что рисунок 1 недостаточен для нахождения параметрических уравнений кривой по той простой причине, что он не содержит систему координат. Кроме того, не указан параметр, через который будут выражаться искомые координаты. Введём недостающие объекты.

Пусть дана система координат $Oxyz$ (рис. 2). Поместим неподвижную окружность радиуса R в плоскость xOy и совместим её центр с началом координат. Пусть в начальный момент времени две окружности имели общую точку $P(R; 0; 0)$. Через некоторое время движущаяся окружность сместилась в новое положение, при котором общей точкой стала точка P_1 , а изучаемая точка оказалась в положении $A(x; y; z)$.

Выбор параметра произведём стандартным образом, а именно, в качестве

такового выберем величину t угла между двумя радиусами: радиусом движущейся окружности, проведённым в изучаемую точку, и радиусом, проведённым в точку касания.

Наша общая задача состоит в том, чтобы найти координаты точки A , выразив их через исходные данные и параметр t .

3. Начнём с рассмотрения угла τ между двумя радиусами неподвижной окружности: радиусом, проведённым в начальную общую точку, и радиусом, проведённым в новое положение общей точки (рис. 2). Очевидно, что следом колеса на дороге является дуга $\widehat{PP_1}$, а следом дороги на колесе – дуга $\widehat{AP_1}$. По определению коэффициента сцепления $\widehat{PP_1} = k\widehat{AP_1}$, откуда имеем $R\tau = krt$. Получаем, что

$$\tau = \frac{krt}{R}. \quad (1)$$

4. Проведём первую серию дополнительных построений (рис. 3).

Во-первых, построим ортогональную проекцию A_1 точки A на плоскость xOy . Во-вторых, построим ортогональную проек-

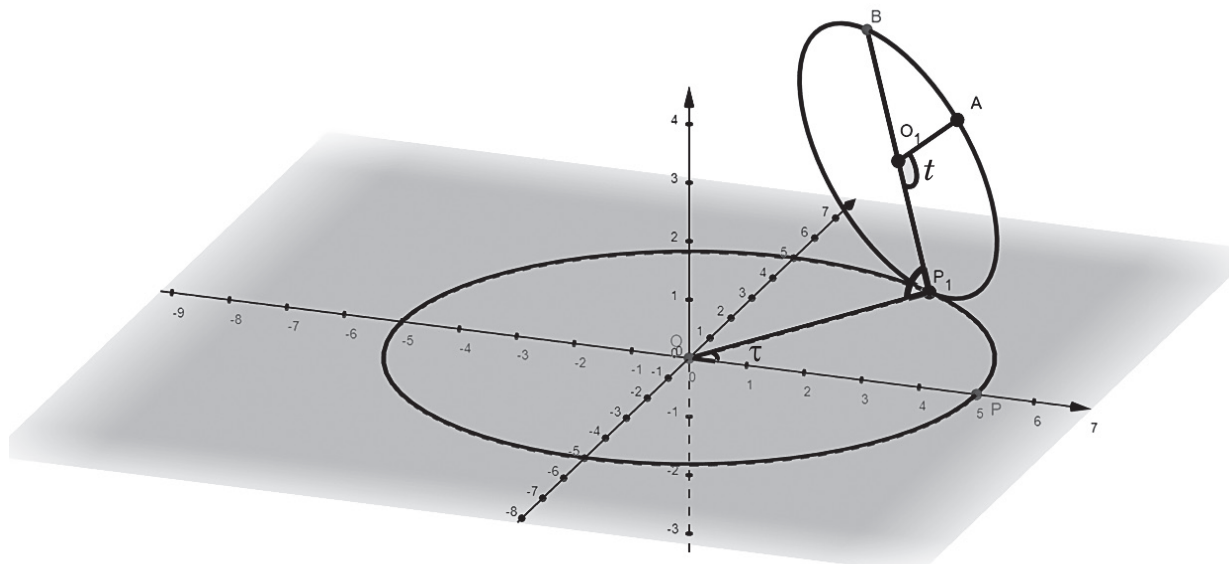


Рис. 2. Система координат и параметр

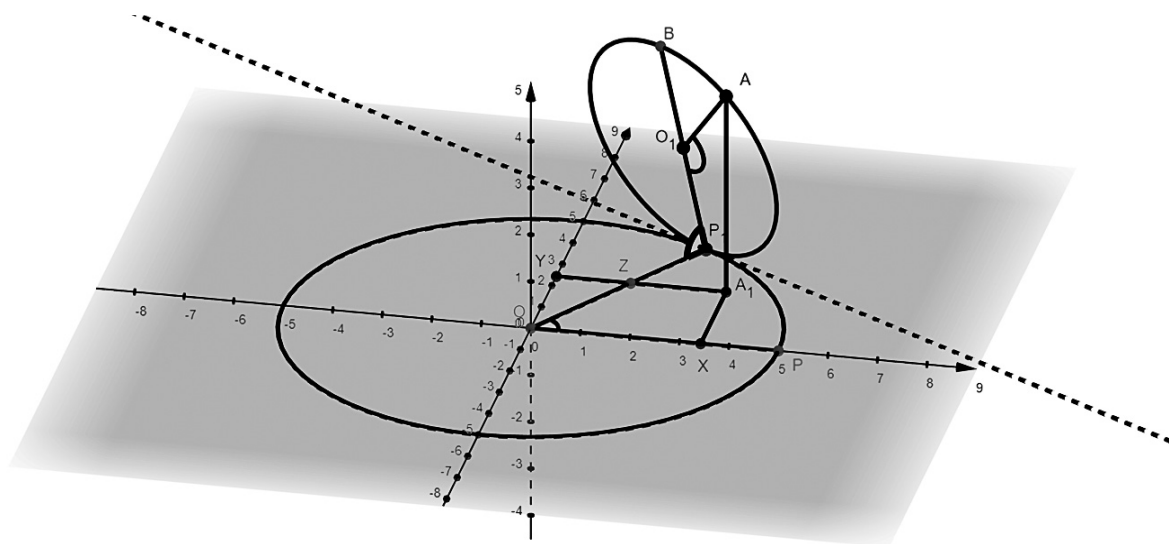


Рис. 3. Искомые координаты как длины отрезков

цию X точки A_1 на ось абсцисс. В-третьих, построим ортогональную проекцию Y точки A_1 на ось ординат. В определённом смысле построение таких проекций неизбежно, т.к. длины построенных отрезков равны искомым координатам:

$$\begin{cases} x = OX, \\ y = OY, \\ z = AA_1. \end{cases} \quad (2)$$

5. Проведём вторую серию дополнительных построений (рис. 4).

Во-первых, построим ортогональную проекцию C точки A на диаметр BP_1 . Для этого достаточно через точку A провести прямую, параллельную общей касательной, и найти её пересечение с диаметром. Во-вторых, построим проекцию C_1 точки C на плоскость xOy . В-третьих, соединим отрезком точки A_1 и C_1 .

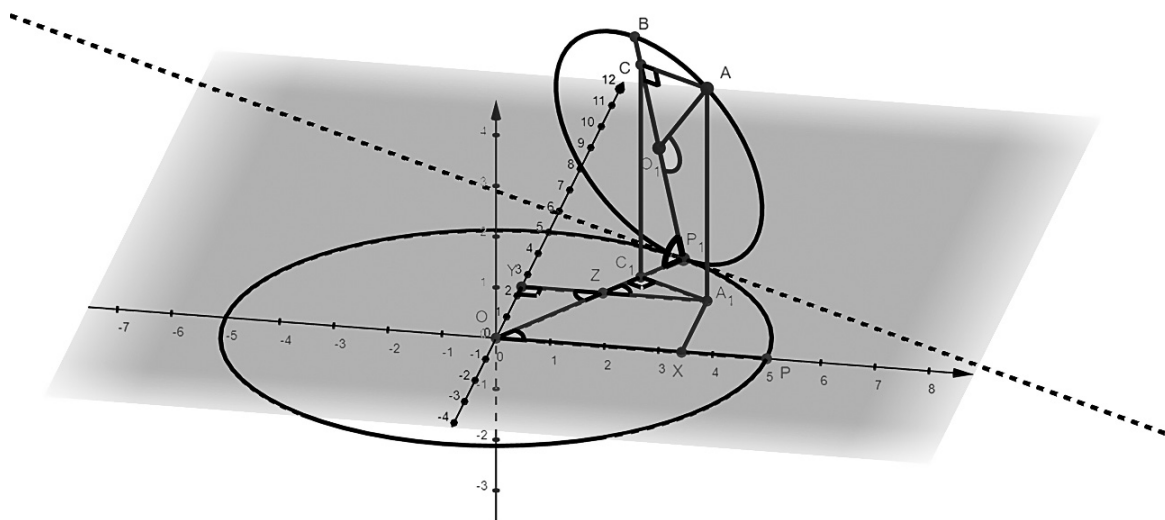


Рис. 4. Пространственная «триангуляция»

Важно при этом, что четырёхугольник ACC_1A_1 является прямоугольником. Действительно, прямая AC параллельна плоскости xOy , поскольку по построению она параллельна касательной, а отрезки AA_1 и CC_1 представляют собой два перпендикуляра к плоскости. Важно также, что угол A_1C_1Z является прямым, поскольку радиус OP_1 перпендикулярен касательной, а касательная параллельна обоим прямым AC и A_1C_1 .

Следствием второй серии дополнительных построений является возникновение, образно говоря, «пространственной триангуляции», то есть системы прямоугольных треугольников, некоторые элементы которых известны:

$\triangle AO_1C$ с прямым углом C ;

$\triangle CP_1C_1$ с прямым углом C_1 ;

$\triangle A_1ZC_1$ с прямым углом C_1 ;

$\triangle OZY$ с прямым углом Y .

6. Найдём *стороны* этих треугольников, выразив их через радиусы R и r окружностей и углы t и τ .

6.1. Очевидно, что гипотенуза O_1A *первого* треугольника AO_1C равна r , поэтому его катеты находятся стандартным образом:

$$AC = r \sin \angle O_1 \text{ и } O_1C = r \cos \angle O_1.$$

Заменив $\angle O_1$ на его значение $\pi - t$ и применив формулы приведения, получим, что

$$AC = r \sin t, \quad (3)$$

$$O_1C = -r \cos t. \quad (4)$$

6.2. Формула (4) позволяет найти гипотенузу *второго* треугольника CP_1C_1 , поскольку она равна $P_1C = P_1O_1 + O_1C$. По условию и формуле (4) получаем, что

$$P_1C = r - r \cos t = r(1 - \cos t). \quad (5)$$

Теперь его катеты находятся стандартным образом: $CC_1 = P_1C \sin \alpha$ и $C_1P_1 = P_1C \cos \alpha$. По формуле (5) получаем, что

$$CC_1 = r(1 - \cos t) \sin \alpha, \quad (6)$$

$$C_1P_1 = r(1 - \cos t) \cos \alpha \quad (7)$$

6.3. Рассмотрим прямоугольник ACC_1A_1 .

В силу равенства противоположных сторон и формул (2) и (6) получаем, что

$$z = AA_1 = CC_1 = r(1 - \cos t) \sin \alpha. \quad (8!)$$

Мы ставим восклицательный знак возле номера формулы по той причине, что нашли одну из искоемых координат.

В силу равенства другой пары противоположных сторон прямоугольника и формулы (3) получаем, что

$$A_1C_1 = AC = r \sin t. \quad (9)$$

6.4. Формула (9) даёт нам катет *третьего* треугольника A_1ZC_1 с прямым $\angle C_1$ и острым $\angle Z = \tau$. Его второй катет равен $C_1Z = A_1C_1 \operatorname{ctg} \tau$, откуда по формуле (9) получаем, что

$$C_1Z = r \sin t \operatorname{ctg} \tau. \quad (10)$$

Его гипотенуза равна $ZA_1 = A_1C_1 / \sin \tau$, откуда по формуле (9) получаем, что

$$ZA_1 = \frac{r \sin t}{\sin \tau}. \quad (11)$$

6.5. Рассмотрев радиус OP_1 неподвижной окружности, легко видеть, что $OZ = OP_1 - P_1C_1 - C_1Z$. Заменив второе слагаемое по формуле (7), а третье по формуле (10), получим, что

$$OZ =$$

$$= R - r(1 - \cos t) \cos \alpha - r \sin t \operatorname{ctg} \tau. \quad (12)$$

6.6. Формула (12) даёт нам гипотенузу *четвёртого* прямоугольного треугольника OZY с прямым $\angle Y$ и острым $\angle Z = \tau$.

Очевидно, что $OY = OZ \sin \tau$, откуда по формуле (12) получаем, что

$$OY =$$

$$= (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha - r \sin t \operatorname{ctg} \tau) \sin \tau.$$

Раскрыв скобки и воспользовавшись формулой (2), получим, что

$$y = OY =$$

$$= (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \sin \tau - r \sin t \cos \tau. \quad (13!)$$

Таким образом, мы получили ещё один искомый результат.

Очевидно также, что $YZ = OZ \cos \tau$, откуда по формуле (12) имеем, что $YZ = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha - r \sin t \operatorname{ctg} \tau) \cos \tau$. Раскрыв скобки, получим, что

$$YZ = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \cos \tau - r \frac{\sin t}{\sin \tau} \cos^2 \tau. \quad (14)$$

7. Нам осталось найти координату x . Очевидно, что $x = OX = YA_1 = YZ + ZA_1$. Заменяя слагаемые по формулам (14) и (11), получим, что

$$x = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \cos \tau - r \frac{\sin t}{\sin \tau} \cos^2 \tau + \frac{r \sin t}{\sin \tau}.$$

Сгруппируем теперь второе и третье слагаемое, вынесем за скобки общий множитель $\frac{r \sin t}{\sin \tau}$ и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством. Мы получим, что сгруппированные слагаемые равны $r \sin t \sin \tau$. Теперь предыдущее равенство примет вид

$$x = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \cos \tau + r \sin t \sin \tau. \quad (15!)$$

8. Соберём в единую систему равенства (15!), (13!) и (8!), заменив в них угол τ его значением из формулы (1). Окончательно будем иметь

$$\begin{cases} x = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \cos \frac{krt}{R} + \\ + r \sin t \sin \frac{krt}{R} \\ y = (R - r(1 - \cos t) \cos \alpha) \cos \frac{krt}{R} - \\ - r \sin t \cos \frac{krt}{R} \\ z = r(1 - \cos t) \sin \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

Это и есть искомые параметрические уравнения траектории рисующей точки.

Проверка сложных формул, полученных в результате объёмных выкладок, часто осуществляется с помощью «правдоподобных рассуждений» в смысле Пойа. Проведём некоторые из таких рассуждений, придавая параметру α специальные

значения и выявляя их геометрический смысл.

Пусть плоскости изучаемых окружностей взаимно перпендикулярны. В этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = 1$, а $\cos \alpha = 0$, поэтому формулы (16) примут вид

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{krt}{R} + r \sin t \sin \frac{krt}{R} \\ y = R \sin \frac{krt}{R} - r \sin t \cos \frac{krt}{R} \\ z = r - r \cos t. \end{cases} \quad (16.1)$$

Этот результат был получен ранее в статье [3, формула (5)], посвящённой циклоидальным кривым в пространстве.

Пусть $r < R$ и подвижная окружность лежит внутри неподвижного круга. В этом случае $\alpha = 0$, $\sin \alpha = 0$, а $\cos \alpha = 1$, поэтому формулы (16) примут вид

$$\begin{cases} x = (R - r(1 - \cos t)) \cos \frac{krt}{R} + r \sin t \sin \frac{krt}{R} \\ y = (R - r(1 - \cos t)) \sin \frac{krt}{R} - r \sin t \cos \frac{krt}{R} \\ z = 0. \end{cases}$$

Если раскрыть все скобки, сгруппировать два первые и два последние слагаемые и ко второй группе применить теоремы сложения для косинуса (1-ая формула) и синуса (2-ая формула), то получим, что

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \frac{krt}{R} + r \cos \left(t - \frac{krt}{R} \right) \\ y = (R - r) \sin \frac{krt}{R} - r \sin \left(t - \frac{krt}{R} \right). \end{cases} \quad (16.2)$$

Этот результат был получен ранее в статье [2, формула (9)], посвящённой гипоциклоидам буксующих колёс.

Пусть изучаемые окружности лежат в одной плоскости, причём подвижная окружность лежит вне неподвижного

круга. В этом случае $\alpha = \pi$, $\sin \alpha = 0$, а $\cos \alpha = -1$, поэтому формулы (16) примут вид

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \frac{krt}{R} - r \cos \left(t + \frac{krt}{R} \right) \\ y = (R + r) \sin \frac{krt}{R} - r \sin \left(t + \frac{krt}{R} \right). \end{cases} \quad (16.3)$$

Этот результат был получен ранее в статье [1, формула (12)], посвящённой эпициклоидам буксующих колёс.

Таким образом, формулы (16) выдерживают «проверку на правдоподобие».

Педагогическая рефлексия – это неизбежный объект размышлений математика, занятого руководством научной работой школьника или студента. В нашем случае это особенно важно, потому что один из авторов в течение нескольких лет является научным руководителем другого.

Попытаемся понять, в какой мере рассмотренный математический материал может быть использован для организации исследовательской работы школьников. Сразу отметим, что всё нижеизложенное является дополнением тех педагогических рассуждений, которые были сделаны в статьях [1] и [3].

Важнейшим элементом исследовательской работы является постановка математической задачи. Действительно, без постановки задачи все дальнейшие вопросы о каких бы то ни было исследованиях теряют смысл. К счастью, изложенный математический материал содержит в себе большие возможности для самостоятельной или частично самостоятельной постановки школьниками математических задач. Опишем эти возможности.

Прежде всего, отметим, что исходная задача вполне может быть поставлена школьником самостоятельно при минимальной помощи учителя. Для этого до-

статочно погрузиться в «исторический контекст» использования колеса. Действительно, в XVI–XVII веках, когда применялась только конная тяга, естественным (или даже единственным) способом перемещения колеса было качение. В математике и, как следствие, в учебниках математики, это нашло своё отражение в виде изучения циклоиды. С появлением двигателя, вращающего колёса, почти автоматически возник феномен пробуксовки, которую каждый современный человек наблюдает, вольно или невольно. Для любознательного человека вполне естественно задуматься о том, какова траектория точки на ободе *буксующего* колеса. Когда же выясняется, что решение этой задачи отсутствует в популярных учебниках по математическому анализу, вопрос приобретает определённую общественную значимость. Эта значимость только усиливается по мере того, как в область размышлений школьника включаются наблюдения за движением колеса, наклонённого по отношению к плоскости дороги. Самостоятельность в формулировке проблемы выводит её из области бесчисленных и безликих задач и превращает проблему в некий личный вызов, от которого трудно уклониться.

Предлагая ту или иную исследовательскую задачу, научный руководитель должен быть уверен, что используемый математический аппарат адекватен уровню подготовки руководимого им школьника. В нашем случае это действительно так, потому что в процессе доказательства мы использовали только стандартный, банальный материал: основное тригонометрическое тождество и формулы приведения, соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, перпендикулярность касательной и радиуса, проведённого в точку касания...

Задача не была бы творческой, если бы всё сводилось к неким алгоритмическим действиям, пусть и достаточно объёмным. В нашем случае в процессе решения задачи пришлось выполнять некие неформализуемые действия. Прежде всего, это две серии дополнительных построений, необходимость выполнения которых не обусловлена какими бы то ни было правилами. Кроме того, это обнаружение нескольких прямоугольных треугольников, к рассмотрению которых, в конце концов, всё и сводится. Наконец, это обнаружение неочевидных взаимосвязей этих треугольников, благодаря которым решение одного треугольника порождает возможность решения последующего.

Таким образом, рассмотренная нами задача обладает взаимно дополнительными и трудно сочетаемыми свойствами. С одной стороны, она сильна для школьника, несмотря на большой объём и многочисленные логические ходы. С другой стороны, она требует от школьника творческих рассуждений, не поддающихся формализации. Используя психологическую терминологию, можно сказать, что школьник-исследователь, решающий эту задачу, находится в зоне своего ближайшего развития.

Отметим, что для нашей задачи построение чертежей традиционными инструментами, циркулем и линейкой, было бы крайне затруднительным. Авторы использовали возможности интерактивной математической среды GeoGebra, что само по себе оказалось отдельной, специальной подзадачей.

Построение экзотических кривых

могло бы служить естественным продолжением изучения полученных нами формул (16). Действительно, эти формулы, рассматриваемые сами по себе, без изучения их частных случаев, не несут информации о тех кривых, форму которых они отражают. Мы оставляем изучение таких кривых за рамками настоящего текста, поскольку исследовательская программа такого сорта была составлена нами в статье [3]. В ней предложено 45 сочетаний параметров R , r и k , для каждого из которых было бы целесообразно построить кривую и проанализировать её форму. Если добавить к каждому из этих сочетаний несколько значений параметра α , то у нас получится большая программа, выполнение которой может потребовать усилий целой группы школьников-исследователей.

Список источников

1. *Ястребов А.В.* Буксующие колёса и циклоидальные кривые // Математика в школе. – 2021. – № 6. – С. 62–71.
2. *Ястребов А.В.* Гипоциклоиды буксующих колёс // Геометрические аспекты преподавания математики в высшей и средней школе. Материалы Международной конференции «Классическая и современная геометрия». К 100-летию со дня рождения Л. С. Атанасяна. Москва, 1–4 ноября 2021 г. Электронное издание сетевого распространения. – М.: МПГУ, 2022. – С. 200–208. DOI: 10.31862/9785426310605
3. *Ястребов А.В.* Циклоидальные кривые в пространстве и буксующие колёса // Математика в школе. – 2022. – № 4. – С. 32–38.

Статья поступила в редакцию	10.10.2022.
Принята к публикации	10.01.2023.



АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

ARITHMETIC-GEOMETRIC PROGRESSION

Научная статья

УДК: 372.851

Scientific article

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_3_57

Г.И. Ботиров, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт Математики;

Н.Х. Курбанов, учитель математики школы-интерната № 10, Республика Узбекистан, normurodqurbonov1958@gmail.com

G.I. Botirov, ShiD (Phys&Math), Senior Researcher, Institute of Mathematics;

N.Kh. Kurbanov, mathematics teacher of boarding school № 10, Republic of Uzbekistan, normurodqurbonov1958@gmail.com

Аннотация: в статье дано определение арифметико-геометрической прогрессии и доказаны некоторые её свойства. Решено несколько задач с использованием арифметико-геометрической прогрессии

Abstract: in this article the definition of arithmetic – geometric progression is given, some of properties are proved, the general term formula is given. Some problems of arithmetic – geometric progression are solved

Ключевые слова: последовательность, арифметико-геометрическая прогрессия, характеристическое свойство, треугольник, угол

Keywords: sequence, arithmetic-geometric, progression, characteristic property, triangle, angle

© Ботиров Г.И., Курбанов Н.Х. 2023

В стандартных школьных учебниках и учебных пособиях не встречаются сведения об арифметико-геометрических прогрессиях.

Определение. Последовательность (x_n) , общий член которой определяется рекуррентным соотношением

$$x_1 = a_1, x_{n+1} = qx_n + d, \quad (1)$$

где q и d заданные числа, $q^2 + d^2 \neq 0$, называется *арифметико-геометрической прогрессией*.

В частности, при $q = 1$ последовательности (x_n) является арифметической прогрессией с разностью d , а при $d = 0$ – геометрической прогрессией со знаменателем q . Этим и объясняется то, что последовательность (1) называют арифметико-геометрической прогрессией. По аналогии будем говорить, что q – знаменатель, а d – разность арифметико-геометрической

прогрессии. Рассмотрим примеры.

1. Если $x_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $d = 2$, тогда $1; 2\frac{1}{3}; 2\frac{7}{9}; 2\frac{25}{27}; \dots$

2. Если $x_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$, $d = 1$, тогда $-2; 2; 0; 1; \dots$

Выведем формулу общего члена.

Пусть в соотношении (1) параметры q и d удовлетворяют условиям: $q \neq 1$ и $d \neq 0$. Прибавив к обеим частям равенства

(1) выражение $\frac{d}{q-1}$, получим:

$$x_{n+1} + \frac{d}{q-1} = qx_n + d + \frac{d}{q-1} = q \left(x_n + \frac{d}{q-1} \right),$$

или

$$x_{n+1} = q \left(x_n + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}. \quad (2)$$

Выразим несколько первых членов прогрессии через a_1 :

$$\begin{aligned}x_2 &= q \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}; \\x_3 &= q \left(x_2 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} = \\&= q \left(q \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} = \\&= q^2 \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом после подстановки x_3 в равенство (2) получается

$$x_4 = q^3 \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}.$$

Можно увидеть закономерность и заключить, что при любом номере n имеет место формула

$$x_{n+1} = q^n \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1}. \quad (3)$$

Строгое обоснование выявленной закономерности осуществляется с помощью метода математической индукции. Равенство (3) является формулой общего члена арифметико-геометрической прогрессии.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых возникает арифметико-геометрическая прогрессия.

Задача 1. Над цепью озёр летала стая белых гусей. На каждом озере садилась половина гусей и ещё полгуса, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озёрах. Сколько гусей было в стае?

Решение. Обозначим через x_n количество летящих белых гусей, когда впереди остаётся ещё n озёр. Тогда условие задачи запишется так:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение для последовательности (x_n) : $x_0 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Это и есть арифметико-

геометрическая прогрессия с параметрами $q = 1$, $d = 1$, $a_1 = 1$.

По формуле (3) имеем:

$$\begin{aligned}x_7 &= 2^6 \left(1 + \frac{1}{2-1} \right) - \frac{1}{2-1} = \\&= 128 - 1 = 127, \quad x_7 = 127.\end{aligned}$$

О т в е т: 127 гусей.

Приведём некоторые основные свойства арифметико-геометрической прогрессии (x_n) .

Свойство 1. Три последовательных члена x_{n-1} , x_n , x_{n+1} арифметико-геометрической прогрессии связаны между собой соотношением:

$$x_{n+1} = (q+1)x_n - qx_{n-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Преобразуем правую часть равенства (4), используя формулы (3):

$$\begin{aligned}&(q+1)x_n - qx_{n-1} = \\&= (q+1) \left(q^{n-1} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} \right) - \\&- q \left(q^{n-2} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} \right) = \\&= q^n \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) + q^{n-1} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \\&- \frac{d(q+1)}{q-1} - q^{n-1} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) + \frac{dq}{q-1} = \\&= q^n \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} = x_{n+1}.\end{aligned}$$

Равенство (4) доказано.

В частности, при $q = 1$ из соотношения (4) получаем характеристическое свойство арифметической прогрессии:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}. \quad (5)$$

Из соотношения (4) можно вывести, что знаменатель q арифметико-геометрической прогрессии определяется по формуле:

$$q = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}. \quad (6)$$

Свойство 2. Разность d арифметико-геометрической прогрессии определяется по формуле

$$d = \frac{x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}. \quad (7)$$

Доказательство. Из соотношения (1) найдём d . Используя формулу (6), получаем:

$$\begin{aligned} d &= x_{n+1} - qx_n = x_{n+1} - \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} x_n = \\ &= \frac{x_n x_{n+1} - x_{n-1} x_{n+1} - x_n x_{n+1} + x_n^2}{x_n - x_{n-1}} = \\ &= \frac{x_n^2 - x_{n-1} x_{n+1}}{x_n - x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Равенство (7) доказано.

В частности, если $d = 0$ и $q \neq 1$, получаем характеристическое свойство геометрической прогрессии

$$x_n^2 = x_{n-1} x_{n+1}. \quad (8)$$

Свойство 3. Последовательность (b_n) , где $b_n = x_{n+1} - x_n$, является геометрической прогрессией с тем же знаменателем q , то есть

$$|x_{n+1} - x_n| = \sqrt{|x_n - x_{n-1}| |x_{n+2} - x_{n+1}|}. \quad (9)$$

Равенство (9) является характеристическим свойством арифметико-геометрической прогрессии. Доказательство свойства 3 оставляем читателям.

Теорема. Сумма n первых членов арифметико-геометрической прогрессии (x_n) при $q \neq 1$ может быть представлена формулой:

$$S_n = a_1 + \frac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1} \left(a_1 + \frac{d}{q - 1} \right) - \frac{(n-1)d}{q - 1}. \quad (10)$$

Если $q = 1$, то $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$.

Доказательство. Пусть $q \neq 1$, $n \geq 3$. Тогда по формуле (3) имеем:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n =$$

$$\begin{aligned} &= a_1 + q \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} + \\ &+ q^2 \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} + \dots \\ &+ q^{n-1} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{d}{q-1} = \\ &= a_1 + q \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) - \\ &\quad - \frac{(n-1)d}{q-1} = \\ &= a_1 + q \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} - \frac{(n-1)d}{q-1} = \\ &= a_1 + \frac{q(q^{n-1} - 1)}{q-1} \left(a_1 + \frac{d}{q-1} \right) - \frac{(n-1)d}{q-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (10) справедливо.

В частности, если $d = 0$, имеем формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Пусть $q = 1$. Нам известно, что в этом случае рассматриваемая последовательность является арифметической прогрессией, поэтому $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$. Теорема доказана.

Задача 2. Для арифметико-геометрической прогрессии (x_n) докажите равенство:

$$S_{n+1} = (q + 2)S_n - (2q + 1)S_{n-1} + qS_{n-2}.$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n+1} - x_{n+1}, \\ S_{n-1} &= S_{n+1} - x_{n+1} - x_n, \\ S_{n-2} &= S_{n+1} - x_{n+1} - x_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Возьмём правую часть доказываемого равенства и выполним преобразования:

$$\begin{aligned} &(q + 2)S_n - (2q + 1)S_{n-1} + qS_{n-2} = \\ &= (q + 2)(S_{n+1} - x_{n+1}) - \\ &\quad - (2q + 1)(S_{n+1} - x_{n+1} - x_n) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q(S_{n+1} - x_{n-1} - x_n - x_{n-1}) = \\
& = (q + 2 - 2q - 1 + q) S_{n+1} + \\
& + (-q - 2 + 2q + 1 - q)x_{n+1} + \\
& + (2q + 1 - q)x_n - qx_{n-1} = \\
& = S_{n+1} - x_{n+1} + x_n + q(x_n - x_{n-1}) = \\
& = S_{n+1} - x_{n+1} + x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) = S_{n+1}.
\end{aligned}$$

Равенство доказано.

Задача 3. Дана арифметико-геометрическая прогрессия с параметрами: $a_1 = 3$, $q = 3$, $d = 4$. Найдите сумму десяти первых членов этой прогрессии.

Решение. Применим формулу (9):

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 3 + \frac{3(3^9 - 1)}{3 - 1} \left(3 + \frac{4}{3 - 1} \right) - \frac{9 \cdot 4}{3 - 1} = \\
&= 3 + 3 \cdot 9841 - 18 = 147\,600.
\end{aligned}$$

Ответ: $S_{10} = 147\,600$.

Задача 4. В трапеции A_1B_1CD с основаниями $A_1B_1 = a$, $CD = b$ ($b > a$) проведём отрезок A_2B_2 , соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции A_3B_3CD снова проведём отрезок A_3B_3 , соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис. 1). Найдите общую формулу для последовательности длин отрезков A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , ...

Решение. Отрезок A_2B_2 , соединяющий середины диагоналей исходной трапеции, лежит на средней линии этой трапеции. Его длина есть

$$A_2B_2 = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a.$$

Длина отрезка A_3B_3 , соединяющего середины диагоналей трапеции A_2B_2CD , равна

$$A_3B_3 = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}A_2B_2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{4}.$$

Аналогичным образом можно вычислить $A_4B_4 = \frac{3b-a}{8}$ и далее A_5B_5 , ...

Для каждого натурального индекса n точки A_{n+1} и B_{n+1} лежат на средней линии трапеции A_nB_nCD . Если $A_nB_n = a_n$ и

$A_{n+1}B_{n+1} = a_{n+1}$, то имеет место равенство

$$A_{n+1}B_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b.$$

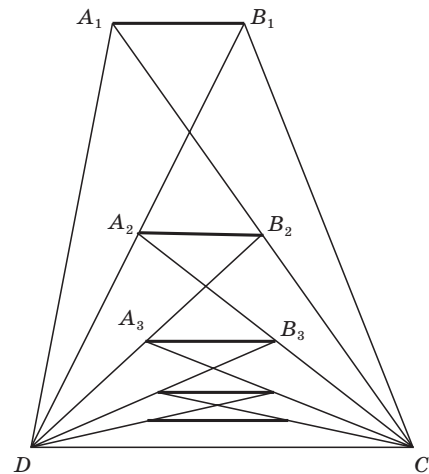


Рис. 1

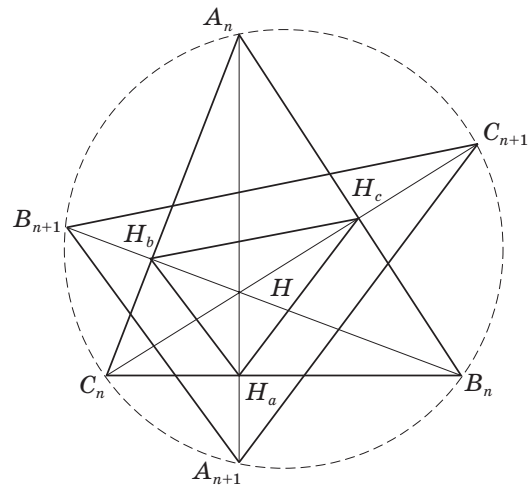


Рис. 2

Значит, последовательность длин отрезков $A_{n+1}B_{n+1}$ составляет арифметико-геометрическую прогрессию с параметрами $q = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}b$. По формуле (3) имеем:

$$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a - \frac{b}{3}\right) + \frac{b}{3}.$$

$$\text{О т в е т: } a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a - \frac{b}{3}\right) + \frac{b}{3}.$$

Задача 5 [1]. Высоты остроугольного треугольника $A_1B_1C_1$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках A_2, B_2, C_2 , служащих вершинами остроугольного треугольника $A_2B_2C_2$. Высоты треугольника $A_2B_2C_2$ продолжены до пересечения с описанной окружностью соответственно в точках A_3, B_3, C_3 , служащих вершинами остроугольного треугольника $A_3B_3C_3$, и так далее – до треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ включительно. Найдите углы треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, считая углы треугольника $A_1B_1C_1$ известными.

Решение. На рисунке 2 изображены окружность и вписанные в неё остроугольные треугольники $A_nB_nC_n$ и $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$. Отрезки B_nH_b, A_nH_a, C_nH_c являются высотами треугольника $A_nB_nC_n$. Выразим угол A_{n+1} через угол A_n . Имеем:

$$\begin{aligned}\angle A_{n+1} &= \angle B_{n+1}A_{n+1}C_{n+1} = \\ &= \angle B_{n+1}A_{n+1}A_n + \angle A_nA_{n+1}C_{n+1} = \\ &= \angle B_{n+1}B_nA_n + \angle A_nC_nC_{n+1} = \\ &= (90^\circ - \angle A_n) + (90^\circ - \angle A_n) = 180^\circ - 2\angle A_n.\end{aligned}$$

Таким образом, $\angle A_{n+1} = -2\angle A_n + 180^\circ$, значит, последовательность величин углов $\angle A_1, \angle A_2, \angle A_3, \dots, \angle A_{n+1}$ образует арифметико-геометрическую прогрессию. По формуле (3) находим

$$\angle A_{n+1} = (-2)^n(\angle A_1 - 60^\circ) + 60^\circ.$$

Аналогично получаем

$$\angle B_{n+1} = (-2)^n(\angle B_1 - 60^\circ) + 60^\circ,$$

$$\angle C_{n+1} = (-2)^n(\angle C_1 - 60^\circ) + 60^\circ.$$

Задача 6. Из трёх колышек два свободны, на первом колышке надето восемь дисков из дерева с отверстием посередине, через которое могут пройти все колышки (рис.3). Все диски разного радиуса, наибольший диск лежит в самом низу, и радиусы дисков убывают снизу вверх; таким образом, самый маленький диск лежит сверху. Диски можно переносить с одного колышка на другой, при этом не разрешается класть диск большего радиуса

на диск меньшего радиуса и брать за один раз больше одного диска. Сколько ходов придётся сделать, чтобы перенести все диски с одного колышка на какой-то другой?

Решение. Пусть x_n – число ходов, с помощью которых n дисков можно перенести с одного колышка на другой. Пронумеруем диски сверху вниз от 1 до n . Нетрудно проверить, что $x_1 = 1, x_2 = 3$.

В задаче требуется найти x_8 . Последовательность первых шагов организуем в таблицу. Из неё видно, что три верхних диска можно переложить за 7 ходов, а четыре верхних диска – за 15 шагов, то есть $x_3 = 7, x_4 = 15$.

Число ходов	1-ый колышек. Номера дисков	2-ой колышек. Номера дисков	3-ий колышек. Номера дисков
0	1,2,3,4,5,6,7,8	–	–
1	2,3,4,5,6,7,8	1	–
2	3,4,5,6,7,8	1	2
3	3,4,5,6,7,8	–	1,2
4	4,5,6,7,8	3	1,2
5	1,4,5,6,7,8	3	2
6	1,4,5,6,7,8	2,3	–
7	4,5,6,7,8	1,2,3	–
8	5,6,7,8	1,2,3	4
9	5,6,7,8	2,3	1,4
10	2,5,6,7,8	3	1,4
11	1,2,5,6,7,8	3	4
12	1,2,5,6,7,8	–	3,4
13	2,5,6,7,8	1	3,4
14	5,6,7,8	1	2,3,4
15	5,6,7,8	–	1,2,3,4
...			
255			1,2,3,4,5,6,7,8

Теперь опишем алгоритм, позволяющий выполнить перекладывание любого

числа дисков с первого колышка на один из двух оставшихся. Действуем по следующим правилам.

1) Перенесём верхние $n-1$ дисков на один из свободных колышек (назовём его вторым колышком). Потребуется сделать x_{n-1} ходов.

2) Последний диск, оставленный на первом колышке, перенесём на другой свободный колышек (назовём его третьим колышком). Тем самым сделаем ещё один ход.

3) Затем со второго колышка $n-1$ дисков перенесём на третий колышек. Для этого выполним ещё x_{n-1} ходов.

В сумме получаем общее число ходов для переноса n дисков:

$$x_n = x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1.$$

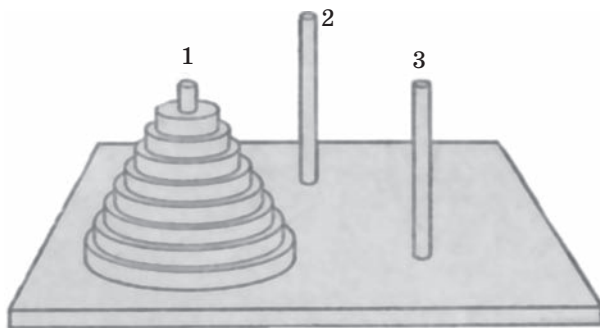


Рис. 3

Таким образом, имеем арифметико-геометрическую прогрессию: $x_1 = 1$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$. Здесь $a_1 = 1$, $q = 2$, $d = 1$.

По формуле (3) имеем:

$$x_8 = 2^7 \left(1 + \frac{1}{2-1} \right) - \frac{1}{2-1} = 256 - 1 = 255.$$

О т в е т: 255 ходов.

Список источников

1. *Суконник Я.Н.* Арифметико-геометрическая прогрессия // Квант. 1975. № 1. С. 36–39.
2. *Резников А.Г.* Две последовательности треугольников // Квант. 1975. № 8. С. 46–48.
3. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
4. *Мартин Гарднер.* Математические головоломки и развлечения. М.: Мир. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.
5. *Игнатъев Е.И.* В царстве смекалки. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
6. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию

12.10.2021.

Принята к публикации

29.06.2022.



К СТОЛЕТИЮ УЧЁНОГО-МЕТОДИСТА СЕРГЕЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ГУБЫ

TO THE CENTENARY OF THE METHODOLOGIST S.G. GUBA

Персоналии

УДК: 929+372.851

Personalities

DOI: 10/47639.0130-9358_2023_3_63

В.А. Тестов, доктор пед. наук,
канд. физ.-мат. наук, профессор,
vladafan@inbox.ru;

Г.Н. Шилова, кан. физ.-мат. наук, доцент,
Вологодский государственный университет,
shilovagn@vogu35.ru

V.A. Testov, ShiD (Pedagogy),
PhD(Phys&Math), Professor,
vladafan@inbox.ru;

G.N. Shilova, PhD(Phys&Math), associate Prof,
Vologda State University,
shilovagn@vogu35.ru

Аннотация: в статье описывается жизненный путь и направления научно-педагогической деятельности С.Г. Губы. В науке основным направлением его деятельности была разработка методики решения задач на доказательство для активизации математической деятельности учащихся

Abstract: the article describes the life path and directions of scientific and pedagogical activity of S.G. Guba. In science, the main focus of his activity was the development of methods for solving proof problems to activate the mathematical activity of students

Ключевые слова: олимпиадные задачи, теория вероятностей, внеурочная работа

Keywords: Olympiad tasks, probability theory, extracurricular work

© Тестов В.А., Шилова Г.Н. 2023

Сергей Григорьевич Губа родился в рабочей семье 8 октября 1922 г. на Украине, в Черниговской области, там же окончил среднюю школу. С детства большой интерес он проявлял к точным наукам, особенно любил химию и математику. В 1939 г. после окончания средней школы он поступил в Киевский государственный университет на механико-математический факультет, где проучился два курса вплоть до начала Великой Отечественной войны. В 1941 г. попал в окружение и до конца войны находился в немецком плену на принудительных работах.

В 1946 г. переехал в Вологодскую область, куда ранее переехали его родители, и поступил на 3-й курс физико-математического факультета Вологодско-

го пединститута. После окончания института в 1948 г. Сергей Григорьевич был направлен на работу в среднюю школу г. Сокола Вологодской обл., где и работал учителем математики, а затем и завучем в течение 14 лет. В 1962 г. перешёл на работу в Вологодский У КП Ленинградской лесотехнической академии в качестве ассистента кафедры высшей математики. С 1966 г. стал работать старшим преподавателем в Вологодском филиале Северо-западного политехнического института. Работая в высшей школе, С.Г. Губа никогда не прерывал связей со средней школой, проводил кружковые и факультативные занятия со школьниками, вёл подготовку учащихся к решению олимпиадных задач.

Имея хорошую математическую подготовку и большой педагогический опыт, С.Г. Губа успешно занимался научно-методической работой, участвовал в конкурсе по решению задач, проводимом журналом «Математика в школе», помещал собственные задачи на страницах этого журнала. Сергей Григорьевич активно участвовал в педагогических чтениях, читал лекции для учителей по вопросам преподавания математики в Вологодском областном институте усовершенствования учителей. Плакаты с задачами, составленные Сергеем Григорьевичем, помогали учителям при подготовке учащихся к математическим олимпиадам. Его лекции увлекали слушателей гармоничным сочетанием точного языка формул с образностью выражения мыслей, богатством ассоциаций, уместным юмором. В этом человеке чувствовалась широкая, разносторонняя культура.

Особый интерес он проявил к задачам на доказательство и их роли в обучении математике. Им был составлен сборник задач на доказательство, опубликован по этой тематике целый ряд статей в журнале «Математика в школе». Его научными консультантами стали ярославские учёные проф. З.А. Скопец и доц. В.А. Жаров. Кандидатская диссертация С.Г. Губы «Варьирование задач на доказательство как средство активизации математической деятельности учащихся и развития у них интереса к предмету», успешно защищённая им в 1973 г. в Ярославле, до сих пор привлекает внимание исследователей.

Работая в политехническом институте, Сергей Григорьевич осознавал своё призвание быть учителем учителей. К тому времени он накопил солидный педагогический опыт, выверенный многолетней практикой работы в школе, почувствовал

свою способность передавать этот опыт будущим школьным учителям. Это и послужило причиной его перехода в педагогический институт. В мае 1974 г. он был избран доцентом кафедры математики Вологодского государственного педагогического института.

Работая в пединституте, он разработал и неоднократно читал курсы теории вероятностей и методики обучения математике, добиваясь прочного и глубокого усвоения студентами учебного материала. Это были курсы, ориентированные на будущую профессиональную деятельность учителя математики, что лежит в русле современных требований к высшему образованию. Особое внимание он уделял теории вероятностей как важному разделу школьного курса математики, тем самым предвосхитив современные тенденции обновления содержания этого курса.

Сергей Григорьевич был очень уважаемый студентами преподаватель. Главное в его работе – глубокое понимание предмета и умелый подбор системы заданий и задач для студентов. Он увлекал и вёл за собой тех, кого особенно интересовала математика. Его манера ведения занятий говорила о высокой педагогической культуре. Его студенты успешно работают в школе и в вузе, в их числе проф. А.И. Зейфман, доц. Г.Н. Шилова, доц. Е.В. Шульман.

Кроме работы со студентами С.Г. Губа вёл плодотворную научную деятельность, являлся активным членом редколлегии республиканского сборника «Подготовка студентов педагогических институтов к внеурочной работе по математике», а также редактором сборника «Факультативы по математике».

Большим авторитетом С.Г. Губа пользовался и среди учителей математики, для которых прочитал большое количество

лекций на курсах повышения квалификации. Эта его деятельность проходила в трудный для школы период перехода на новые программы и учебники по математике. С.Г. Губа потратил много сил и времени для разъяснения учителям новых идей в математическом образовании.

С 1980 г. С.Г. Губа возглавил кафедру математического анализа и методики обучения математике. На этой должности он отдавал все свои силы совершенствованию подготовки учителей математики. За отличную работу в 1977 г. он был награжден значком «Отличник народного просвещения», в 1983 году – медалью «Отличник просвещения СССР».

Период с 1980 по 1988 г. был одним из наиболее ярких периодов научной деятельности Сергея Григорьевича. Его статьи часто появлялись на страницах научно-методического журнала «Математика в школе». Кроме статей, посвящённых различным видам задач на доказательство, он публикует статьи о развитии у учащихся интереса к поиску и исследо-

ванию математических закономерностей, о причинах перегрузки учащихся при обучении математике, о формах приобщения учащихся старших классов к педагогической профессии, а также рецензии на целый ряд известных книг по внеклассной работе по математике.

С.Г. Губа был очень неординарным человеком: знал много языков, увлекался переплетением книг, а также составлением орнаментов.

Жизнь Сергея Григорьевича оборвалась 15 сентября 1988 г. в возрасте 66 лет. До последнего дня он не покидал любимую работу. До сих пор ученики и студенты вспоминают своего Учителя с благодарностью. Двое его детей закончили МГУ им. М.В. Ломоносова, сын – В.С. Губа – стал известным российским алгебраистом, доктором физ.-мат. наук, который работает профессором на той же кафедре Вологодского университета, что и его отец.

Статья поступила в редакцию

25.10.2022.

Принята к публикации

07.11.2022.

Таинственная наука

«Математические начала натуральной философии» Исаака Ньютона всегда считались непростыми для понимания. Это неудивительно, если учесть, что Ньютон умышленно усложнил свою работу.

Как-то раз учёный признался другу, что поступил так, чтобы «избежать атак со стороны шарлатанов от математики». Предыдущие работы Ньютона, посвященные природе света, уже подвергались ожесточённой и не всегда оправданной критике. Некоторые из полученных результатов Ньютон и вовсе записал шифром. Следующая последовательность букв и цифр $6a \cdot cc \cdot d \cdot ae \cdot 13eff7i \cdot 31 \cdot 9n4o4q \cdot rr \cdot 4s \cdot 9t \cdot 12vx$ отнюдь не сложный ключ. Это так называемый логогриф – способ шифрования, который Ньютон использовал для описания своего метода анализа флюксий, чтобы Лейбниц не смог прочесть его записи и приписать авторство себе. Говорят, последнему понадобилось бы потратить на расшифровку так много сил, что быстрее было бы самостоятельно прийти к аналогичным результатам.

По книге: *Энрике Гарсиан. Открытие без границ. Бесконечность в математике* (М.: Де Агостини, 2014).

Перспективы далёкие и близкие

СТАНДАРТ ЗНАНИЙ И УЧИТЕЛЬСКИЙ РЕЙТИНГ

(новости образования)

* С 1 сентября 2023 года в школах начнёт действовать так называемый золотой стандарт знаний. Будут введены Федеральные основные образовательные программы (ФООП). Появится единый стандарт преподавания по ряду предметов.

* 2023 год был объявлен в России Годом педагога и наставника. В его рамках планируется провести ряд масштабных мероприятий, флешмобов и вебинаров, в которых в общей сложности будет задействовано 80 миллионов человек.

40% учителей в ближайшие два года смогут повысить квалификацию за счёт федерального бюджета в рамках нацпроекта «Образование».

* С этого года учителя станут проходить аттестацию по новым правилам. Теперь их работу будут оценивать по единой шкале и создадут специальный преподавательский рейтинг. Добавятся две квалификационные категории: учитель-методист и учитель-наставник. Выслуга лет не будет влиять на продвижение по карьерной лестнице.

* Самые ожидаемые тренды года в образовании: гибридное обучение, совмещение очных форматов с элементами дистанта и цифровыми технологиями; возрастание роли образовательного контента в популярных соцсетях; совмещение учебы с практикой, знакомство с основами будущей профессии в профильных классах.

Подробнее: pedsovet.org/, 2023god.com.



А как у других?

ПОСЛЕДСТВИЯ ПАНДЕМИИ

(о чём поведали результаты тестирования школьников)

В разных странах продолжают оценивать последствия пандемии, приведшей к временному закрытию школ и переходу на дистанционное обучение. Везде локдауны негативно сказались на качестве образования и усилили неравенство. Например, в США результаты проведённого в прошлом году тестирования по математике среди девятилетних детей ухудшились впервые за полвека (раньше они в целом улучшались, а последнее десятилетие оставались неизменными) и составили в среднем 234 балла против 241 в 2020 году. Если ученики с лучшими показателями по математике в среднем «потеряли» 3 балла, то результаты тех, кто и без того плохо успевал, снизились ощутимо – на 12 баллов. Потерю одного

балла в тестировании специалисты оценили примерно в три недели занятий по предмету. Результаты ухудшились у школьников из всех социальных, расовых и других групп. Велики оказались и временные потери. Так, в Нидерландах подсчитали: закрытие школ на восемь недель в 2020 году привело к тому, что на выпускных экзаменах учащиеся показали недостаточные знания, равноценные потере 20% учебного года. Но хуже всего дела обстоят в наиболее бедных странах, где у школьников, по данным организации Save the Children, потеря учебного времени в пандемию оказалась на 66% больше, чем у их сверстников из богатых стран.

Подробности: kommersant.ru/doc/5537866.

Из жизни учёных

СОБРАТЬ ЗА НЕСКОЛЬКО СЕКУНД

(как система DeepCubeA решила знаменитую головоломку)

Системы искусственного интеллекта давно научились обыгрывать людей в шахматы и го, но эффективное решение сложных комбинаторных головоломок вроде сборки кубика Рубика до недавнего времени было им не под силу. Считается, что с этой задачей можно справиться не более чем за 20 ходов (поворотов граней на 90° или 180°). Среди людей и среди роботов регулярно проводятся соревнования по сборке кубика на скорость. Действующие рекорды – 3,47 секунды и 0,38 секунды соответственно – были установлены ещё в 2018 году. Американские исследователи разработали систему искусственного интеллекта DeepCubeA, способную собрать кубик Рубика из любого положения за считанные секунды, а в иных случаях за доли секунды, в среднем за 30 ходов. Она решает головоломку без каких-либо специальных знаний предметной области и без вмешательства человека, самостоятельно подбирая подходящую стратегию. После обучения DeepCubeA успешно справилась со 100% тестовых конфигураций и нашла оптимальный алгоритм в 60,3% случаев. Разработчики предполагают, что DeepCubeA можно использовать для решения более масштабных задач в разных сферах науки, где приходится иметь дело с большим количеством данных.



Подробности: chudo.tech, new-science.ru.

Хроники

ЛЕОНТИЙ МАГНИЦКИЙ И ЕГО «АРИФМЕТИКА»

(в России переиздан первый русский учебник математики)

Компания «Криптонит» и Музей криптографии совместно с издательством «Эксмо» выпустило малым тиражом раритетную книгу – знаменитую «Арифметику» Л.Ф. Магницкого, первый в России печатный курс математики, по которому в своё время выучилось не одно поколение отроков. В 1914 году труд Магницкого был проработан и адаптирован («переведён» на более понятный современный русский язык) российским и советским педагогом, мето-

дистом, историком математического образования Дмитрием Дмитриевичем Галаниным. Эта версия и легла в основу нынешнего переиздания. В книгу вошли также исследования самого Галанина, посвящённые «Арифметике» и её автору, замечательному русскому математику и преподавателю, определившему судьбу отечественной математической науки. *Подробнее: kryptonite.ru/news.*

Житейские истории

НА БЛЮДЕЧКЕ С ГОЛУБОЙ КАЁМОЧКОЙ

(нейросеть на службе школьников)

Российские учащиеся начали активно использовать при выполнении домашних заданий американскую нейросеть ChatGPT. Она была выпущена разработчиками в ноябре 2022 года и за считанные дни приобрела популярность у школьников. Искусственный интеллект довольно успешно справляется с решением задач по математике и другим точным наукам, выдаёт правильные ответы и даже «расписывает» логику решения, хотя иногда не обходится без ошибок. Результаты оцениваются учителями на «четвёрки» и «пятёрки», а распознать, кто настоящий автор предъявленной учеником работы, бывает непросто. Это ничем не лучше списывания у одноклассников, говорят эксперты. Ранее с аналогичной проблемой столкнулись в нескольких школах Нью-Йорка. Там ученики начали злоупотреблять ChatGPT, в итоге доступ к ней был ограничен. Сегодня нейросети по первому требованию преподносят готовые ответы на любые вопросы; с одной стороны, они облегчают процесс обучения, а с другой – примитивизируют его. Приведёт ли это к ускорению деградации и сделает ли мышление подрастающего поколения ещё более мозаичным? Или нейросети станут для школьников незаменимыми виртуальными помощниками, готовыми разжевать и донести материал доступнее, чем учитель, и восполнить пробелы в знаниях? Что говорят об этом специалисты?

Подробнее: newizv.ru/news.

Пополняем ресурсы

Л ФУНТОВ II ШИЛЛИНГА VIII ПЕНСОВ

(что и как считали в Средние века)

Знаете ли вы, как европейцы называли целые числа в эпоху Средневековья? Какие техники счёта практиковались в то время? Сложно ли было выполнять арифметические операции, имея дело с римскими цифрами? Какое самое большое число можно было показать с помощью пальцев двух рук? Когда применялся счёт на пальцах, а в каких случаях требовался абак? Как средневековые математики упрощали вычисления? Почему в первых учебниках арифметики, использующей новые для европейцев индо-арабские цифры, умножению и делению числа на два учили как отдельным операциям? И что общего у древнего пальцевого счёта и современных цифровых технологий? Хотите получить ответы на эти вопросы? Тогда оправляй-



тес в увлекательное путешествие по миру средневековой науки в компании брата Джона Вествика, который жил в XIV веке, получил образование в крупнейшем монастыре Англии и занимался точными науками.

Подробнее: nauka.tass.ru/nauka/16326609.

АНТОЛОГИЯ ДОСТИЖЕНИЙ

(Стивен Хокинг о главных «прорывах» математиков)

Книга «Бог создал целые числа» (АСТ, 2022) представляет собой сборник оригинальных текстов великих математиков – выдержек из наиболее значимых их работ, начиная с «Начал» Евклида, по версии знаменитого британского астрофизика, космолога и популяризатора науки Стивена Хокинга. Она имеет целью осветить важнейшие идеи и открытия в математике за двадцать пять веков её развития и «призвана прославить учёных, которые помогли продвинуться в понимании мира и проложили путь для нынешнего века науки и технологии». В их числе Архимед, Декарт, Ньютон, Гаусс, Лобачевский, Дедекин, Гёдель и др. Каждую главу сопровождает написанный Хокингом биографический очерк, в котором раскрываются ключевые идеи учёного и значение его трудов. Отобранные им оригинальные тексты позволяют проследить эволюцию математического мышления от его зарождения до наших дней.

Подробнее: nplus1.ru/blog/2022/04/25/god-created-the-integers (отрывок).



Нетривиальные суждения

Это наука [математика] величественная и прекрасная. И нельзя не ценить её подлинную красоту, её поэзию. Убеждён, в наше время молодой человек должен знать интегралы не хуже, чем стихи Пушкина.

Ю.В. Лепехин, советский и российский педагог-математик

Могущество и красота математической мысли – в предельной чёткости её логики, изяществе её конструкций, искусном построении абстракций. И вместе с тем математические высказывания – определения, теоремы, формулы – сопоставимы с поэзией по силе воздействия на воображение...

Б.А. Кордемский, советский математик, методист, популяризатор математики

Математика и поэзия – это... выражение одной и той же силы воображения, только в первом случае воображение обращено к голове, а во втором – к сердцу.

Томас Хилл, американский педагог

Рубрику ведёт **Н.М. Карпушина**

КОГДА ОТРЕЗОК РАВЕН СУММЕ ДВУХ ДРУГИХ?

Как известно, геометрия на плоскости содержит неисчерпаемое количество сюжетов на самые разнообразные темы. Один из них, затрагивающий сразу много разделов, – это случай, когда рассматривается отрезок, равный по длине сумме двух или более других. Способы решения таких задач весьма различны, и приведённая подборка, составленная по мотивам условий различных олимпиад, затрагивает самые разные темы.

Задачи

для самостоятельного решения

1. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC . На сторонах AC , AB , BC лежат, соответственно, точки D , E , F , угол BAC равен углу FDE , причём $DE = DF$. Докажите, что $AE + FC = AC$. (Фольклор.)

2. AL – биссектриса в треугольнике ABC . Точка D лежит на AL . Известно, что углы BAC , ADC , ACB относятся как $2 : 3 : 4$. Докажите, что $BC + DC = BA$. (А. Кузнецов.)

3. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC . Точка M выбрана внутри треугольника так, что угол AMC равен удвоенному углу ABC . Точка K выбрана на отрезке AM так, что угол BKM равен углу ABC . Докажите, что $BK = KM + MC$. (С. Берлов.)

4. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, причем сумма углов CAD и BCA равна 180 градусам, $AB = BC + AD$. Докажите, что сумма углов BAC и ACD равна углу CDA . (Фольклор.)

5. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, угол A равен удвоенному углу B ,

CE – биссектриса угла C , причём точка E лежит на стороне AB . Докажите, что $AD + AE = BE$. (А. Кузнецов.)

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Подаеву Михаилу Валерьевичу по адресу podaev86@gmail.com к 01.05.23 в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать:

- для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт);
- для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь.

Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

В редакцию журнала по адресу matematikavskole@bk.ru читатели могут также присылать свои новые задачи (с оформленными решениями), которые после одобрения редколлегией в дальнейшем будут предложены на страницах задачной рубрики для решения широкому кругу читателей.

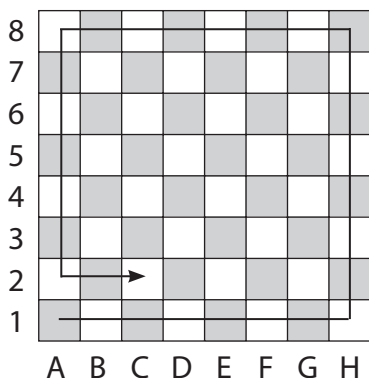
Рубрику ведёт **М.В. Подаев**



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» № 1 / 2023

Задача 55. Доминошки с точками от 0 до 6 стали выкладывать в спираль на шахматной доске (см. рис.). В какой-то момент все доминошки кончились. Как обозначены клетки, которую накрыла последняя доминошка? (*О.С. Парамонова, Олимпиада начальной школы «ДваждыДва», 3 класс, 2018 год.*)

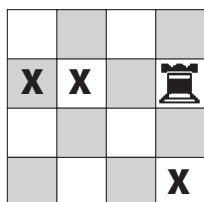
О т в е т: e6, f6.



Решение. Всего доминошек в наборе 28 штук. Следовательно, в спирали будет занято 56 клеток.

Задача 56. «Летучая ладья» ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на соседнее поле (на рисунке справа показаны возможные ходы такой ладьи). Может ли за 16 ходов «летучая ладья» обойти всю доску размером 4×4 , становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле? (*А.К. Толпыго, Турнир имени Ломоносова 1991 год.*)

О т в е т: один из возможных вариантов обхода показан на рисунке.



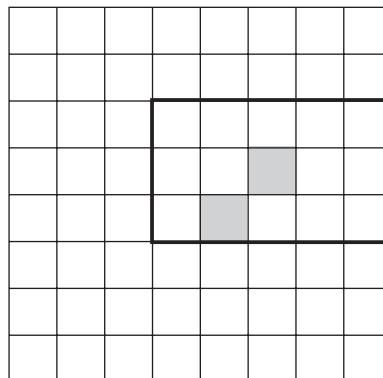
12	16	9	13
6	2	7	3
11	15	10	14
5	1	8	4

Решение. (Как можно было найти этот вариант).

Заметим, что если бы ладья могла ходить только на соседнее по стороне поле, то можно было нарисовать на доске 4×4 замкнутый маршрут, что несложно. Например, с левой нижней клетки змейкой до левой верхней. Теперь переставим горизонтали доски в порядке $2 - 4 - 1 - 3$, затем так же переставим вертикали, и наш маршрут превратится в искомый маршрут для летучей ладьи.

Задача 57. На шахматной доске 8×8 две клетки (e4 и f5) выкрашены в серый цвет так, как на рисунке. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке приведён пример такого прямоугольника. (*Л.М. Самойлов, из материалов Ульяновских математических кружков, 2021 год.*)

О т в е т: 240 прямоугольников.



Решение. Заметим, что прямоугольник определяется выбором вертикальных и горизонтальных линий, его ограничивающих. Для нижней линии 4 варианта, для верхней – 4. Для левой 5 вариантов и для правой – 3. Каждая из этих линий может быть выбрана независимо, поэтому количество прямоугольников равно произведению $4 \times 4 \times 3 \times 5 = 240$.

Задача 58. Шахматный король обошёл всю доску 8×8 , побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов. (В.В. Произволов, Турнир Городов, 1998 год.)

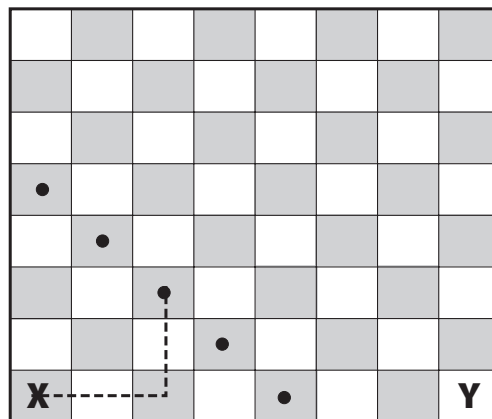
Решение. При каждом недиагональном ходе меняется цвет поля, на котором стоит король; при диагональном – не меняется. Поскольку король обошёл всю доску и вернулся обратно, то цвет поля менялся с белого на чёрный столько же раз, сколько с чёрного на белый, значит, недиагональных ходов король сделал *чётное* число. Число диагональных ходов равно 64 минус число недиагональных ходов – тоже *чётное* число.

Задача 59. Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад? (Н.П. Стрелкова, Турнир Городов, 2012 год.)

Ответ: 3 клетки.

Решение. Перекапываем угловую клетку X. Пусть там табличка. Все клетки на указанном расстоянии от X образуют диагональ, перпендикулярную главной диагонали, проведённой из X. На рисунке показано множество клеток, где может быть

клад, если в X лежит табличка с числом «4». И показан маршрут для одной из клеток. Перекапываем ещё одну угловую клетку Y другого цвета, нежели X. Если и там табличка, то образуется ещё одна диагональ, перпендикулярная первой. Диагонали пересекаются по одной клетке, там-то клад и зарыт.



Заметим, что не может получиться диагональ, не содержащая ни одну из уже отмеченных клеток, поскольку мы выяснили, что клад может находиться только среди выделенных клеток и никаких других.

Мы привели алгоритм, как за три перекапывания гарантированно добыть клад. Покажем, что двух перекапываний может не хватить. Если, например, нам не повезло, и в первый раз мы откопали табличку с числом 1, тогда клад находится на соседней клетке, но таких клеток не менее двух.

Задача 60. На шахматной доске 8×8 стоят восемь ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.) (Д.Ю. Кузнецов. Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 9 класс, 2002 г.)

Решение 1. Пусть у нас введена прямоугольная система координат с единицей в длину стороны клетки и осями, направленными вдоль сторон доски. Рассмотрим семь пар ладей, стоящих в соседних столбцах. Тогда разности их координат по вертикали являются целыми числами от 1 до 7, поэтому либо две из них совпадают (и тогда расстояния в соответствующих парах тоже совпадают), либо среди них есть все числа от 1 до 7. В частности, есть две ладьи, отстоящие друг от друга на 2 по вертикали и на 1 по горизонтали (пара *A*). Аналогично либо найдутся две пары в соседних строках с равным расстоянием, либо есть две ладьи, отстоящие

друг от друга на 1 по вертикали и на 2 по горизонтали (пара *B*). Тогда расстояния в парах *A* и *B* совпадают, а сами эти пары различны.

Решение 2. Пусть у нас введена прямоугольная система координат с единицей в длину стороны клетки и осями, направленными вдоль сторон доски. Тогда квадраты расстояний между ладьями могут принимать значения от $1^2 + 1^2$ до $7^2 + 7^2$. Всего таких различных чисел $7 \cdot 8 : 2 - 1 = 27$, поскольку $1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$. А пар ладей больше: $8 \cdot 7 : 2 = 28$. Значит, какие-то два расстояния совпадают.

Е.Ю. Иванова

Владимир Путин объявил о реформе высшего образования

Она будет совмещать достижения советской системы и наработки последних лет.

В системе образования «нужен синтез того лучшего, что было в советской системе и опыта последних десятилетий», заявил Владимир Путин в послании Федеральному собранию. По его словам, нужно вернуться к базовой подготовке в вузах сроком от 4-х до 6-ти лет. Но если профессия требует дополнительной подготовки, то можно продолжить обучение в магистратуре или ординатуре.

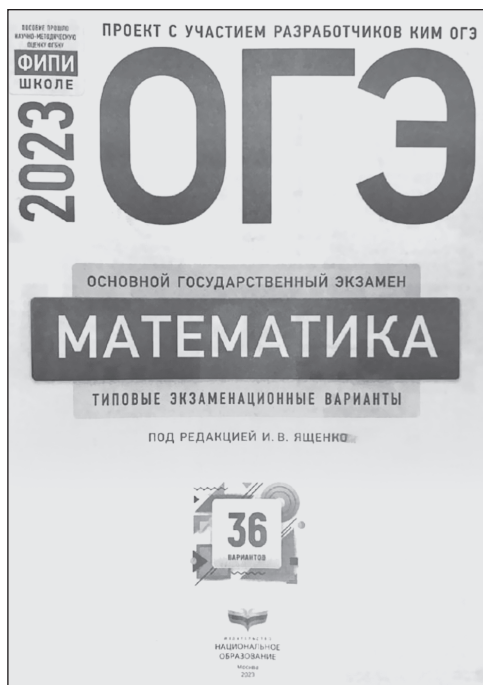
Но переход на новую систему должен быть плавным, чтобы те, кто учится сейчас, смогли получить образование по текущим программам. Выполнение поручения на «особый контроль» Путин поручил взять «Народному фронту».

Источник: news.mail.ru

НЕХОРОШАЯ ЗАДАЧА

В статье указана некорректная задача на проценты

Как бывает каждый год, для подготовки учащихся к предстоящему экзамену вышел в свет сборник



На с. 44 находим задачу 21 из второй части варианта 7.

21. В сосуд, содержащий 7 литров 26-процентного водного раствора вещества, добавили 6 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

О т в е т: 14.

На с. 50 находим аналогичную задачу 21 из второй части варианта 8.

21. Смешали 7 литров 25-процентного

раствора вещества с 8 литрами 10-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

О т в е т: 17.

К сожалению, обе эти задачи (и ответы к ним) не имеют никакого смысла. Долго говорить об этом не приходится. Проценты и концентрация относятся к массе вещества и массе раствора, а не к объёму. Подробно об этом и о других дефектных задачах сказано в [1] и [2]. Оба журнала «Квант» и «Математическое образование» — в свободном доступе в интернете.

Конечно, в сборнике ОГЭ есть и добротные задачи на проценты, например, в варианте 23 на с. 128.

21. Имеются два сосуда, содержащие 12 кг и 8 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 65% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится во втором растворе?

Список источников

1. Дворянинов С.В. Осторожно, проценты! // Квант. — 2022. — № 5. — С. 31.
2. Дворянинов С.В. Две математические заметки // Математическое образование. — 2021. — № 4(100), ч. 1. — С. 78–80.

С.В. Дворянинов

ЗНАЯ БРОДУ, СУЙСЯ В ВОДУ (о весьма эффективном способе решать некоторые задачи)

В старой, но по сей день не устаревшей повести Николая Носова «Витя Малеев в школе и дома»¹ главному её герою по ходу действия попадаете парочка арифметических задач². И если первую из них (про топоры и пилы) он сумел одолеть только под руководством одноклассника Вани Пахомова, то со второй («ореховой» – по просьбе младшей сестры) справился сам. Невозможно удержаться, чтобы опять не процитировать, как это было:

...я взял задачник и стал читать задачу:

«Мальчик и девочка рвали в лесу орехи. Они сорвали всего 120 штук. Девочка сорвала в два раза меньше мальчика. Сколько орехов было у мальчика и девочки?»

Прочитал я задачу, и даже смех меня разобрал: «Вот так задача!» – думаю. – Чего тут не понимать? Ясно, 120 надо поделить на 2, получится 60. Значит, девочка сорвала 60 орехов. Теперь нужно узнать, сколько мальчик: 120 отнять 60, тоже будет 60... Только как же это так? Получается, что они сорвали поровну, а в задаче сказано, что девочка сорвала в два раза меньше орехов. Ага! – думаю. – Значит, 60 надо поделить на 2, полу-

чится 30. Значит, мальчик сорвал 60, а девочка 30 орехов». Посмотрел в ответ, а там: мальчик 80, а девочка 40.

– Позвольте! – говорю. – Как же это? У меня получается 30 и 60, а тут 40 и 80.

Стал проверять – всего сорвали 120 орехов. Если мальчик сорвал 60, а девочка 30, то всего получается 90. Значит, неправильно! Снова стал делать задачу. Опять у меня получается 30 и 60! Откуда же в ответе берутся 40 и 80? Прямо заколдованный круг получается!

Дальше Витя, не в силах найти конструктивный путь, пустился во все тяжкие, призвав на помощь свои художественные таланты:

С отчаяния я нарисовал в тетрадке ореховое дерево, а под деревом мальчика и девочку, а на дереве 120 орехов. И вот я рисовал эти орехи, рисовал, а сам все думал и думал. Только мысли мои куда-то не туда шли, куда надо. Сначала я думал, почему мальчик нарвал вдвое больше, а потом догадался, что мальчик, наверно, на дерево влез, а девочка снизу рвала, вот у неё и получилось меньше. Потом я стал рвать орехи, то есть просто стирал их резинкой с дерева и отдавал мальчику и девочке, то есть пририсовывал орехи у них над головой. Потом я стал думать, что они складывали орехи в карманы. Мальчик был в курточке, я нарисовал ему по бокам два кармана, а девочка была в передничке. Я на этом передничке

¹ Книга была удостоена Сталинской премии 1952 года – и вполне заслуженно!

² Отрывки с подробными их решениями очень любят приводить разные математические журналы. Но лучше найдите и прочитайте повесть целиком.

нарисовал один карман. Тогда я стал думать, что, может быть, девочка сорвала орехов меньше потому, что у неё был только один карман. И вот я сидел и смотрел на них: у мальчика два кармана, у девочки один карман, и у меня в голове стали появляться какие-то пробы. Я стёр орехи у них над головами и нарисовал им карманы, оттопыренные, будто в них лежали орехи. Все 120 орехов теперь лежали у них в трёх карманах: в двух карманах у мальчика и в одном кармане у девочки, а всего, значит, в трёх. И вдруг у меня в голове, будто молния, блеснула мысль: «Все 120 орехов надо делить на три части! Девочка возьмет себе одну часть, а две части останутся мальчику, вот и будет у него вдвое больше!» Я быстро поделил 120 на 3, получилось 40. Значит, одна часть 40. Это у девочки было 40 орехов, а у мальчика две части. Значит, 40 помножить на 2, будет 80! Точно как в ответе.

Ну как, нравится? Большинству читателей – без сомнения. Но посудите сами – ведь если бы мальчик, по условию, сорвал, например, в пять раз больше орехов, чем девочка, то Витя задачу, пожалуй бы, и не решил – куда столько карманов дорисовать? Да и если бы не умел рисовать – тоже успех довольно сомнителен.

А между тем верное решение было у него прямо в руках – сумей только им распорядиться! Не сумел...

Где же это решение, которого не заметил отважный четвероклассник? Дабы разобраться, давайте поразмыслим: а что вообще значит – решить задачу такого типа (на поиск неизвестных числовых значений)? Это, во-первых, привести все верные ответы (ибо таковых может оказаться и несколько, хотя может и ни одного – от задачи зависит), а во-вторых, доказать, что *иных* ответов (кроме пере-

численных) не существует. Причём (вот тонкий момент!), каким образом найдены ответы – не имеет значения! Можно их подобрать, или догадаться, или спросить кого-нибудь другого, или... ну конечно же, посмотреть ответ в конце задачника! А ведь Витя так и сделал, откуда и узнал, что девочка сорвала 40 орехов, а мальчик – 80. Чего же ему ещё надо?

Вот она – главная ошибка! Герой повести действовал, как большинство *прилежных* учеников – сначала решал, а потом сверялся с ответом³. А надо было наоборот: посмотри сперва ответ, а затем докажи, что других быть не может. И пятерка в кармане!

Но как это сделать? Да проще некуда. Вот вариант того, что можно было бы написать в тетрадке с домашним заданием:

Девочка сорвала 40 орехов, а мальчик – вдвое больше, то есть 80. В сумме получается, как в условии, $40 + 80 = 120$. Убедимся, что других ответов быть не может. В самом деле, если девочка собрала меньше 40 орехов, то мальчик – меньше $40 \cdot 2 = 80$ орехов, и в сумме у них выходит меньше $40 + 80 = 120$ орехов. Если же девочка собрала больше 40 орехов, то мальчик – больше 80 орехов, и в сумме получается больше 120 орехов. Значит, другие ответы невозможны, и указанный ответ – единственный.

Формально говоря, придраться к такому решению невозможно – оно безупречно со всех сторон. Правда, если учитель не формалист, он может потребовать разъяснений: откуда взялся правильный ответ? Здесь, наверно, на соответствующий

³ Чего, вообще-то, от Вити ожидать не стоило, учитывая его, мягко говоря, непростые отношения с арифметикой. Уж он бы первым делом в ответы полез (кто читал повесть, согласится).

раздел задачника лучше не ссылаться, а просто сказать: «Догадался!». А что, разве это запрещается?⁴

Со времён написания книги прошли десятки лет, но «структурная схема» задачников с тех пор почти не поменялась. Всё как и раньше: сначала условия, потом – ответы. А раз так, то указанный принцип «прочти ответ и докажи, что других нет» должен отлично сработать!

Для примера возьмём наугад какое-нибудь из математических пособий. В данном случае в руки попался «Сборник задач и упражнений по математике. 5 класс» (авторы – В. Гамбарин и И. Зубарева, Москва, издательство «Мнемозина», 2011; не исключено, что он по сей день применяется школьными учителями). Откроем его наугад и посмотрим, что нам попало. Вот задача под номером 989:

Два числа в сумме составляют 15,44, причём одно число больше другого на 2,44. Найдите эти числа.

Вооружённые новым методом, справляемся легко и просто. В ответах находим, что искомые числа равны 8,94 и 6,5. После этого решение формулируется почти автоматически:

Ответ: это числа 8,94 и 6,5. Они удовлетворяют условию, потому что $8,94 + 6,5 = 15,44$ и $8,94 - 6,5 = 2,44$. Докажем, что других подходящих чисел нет. В самом деле, так как разность между числами неизменна, то если меньшее из них меньше 6,5, то и большее окажется меньше 8,94, и потому сумма чисел станет меньше 15,44. Аналогичная (хотя и «противоположная») ситуация возника-

ет, если меньшее число больше 6,5. Поэтому другие ответы невозможны.

Думаете, это единственный пример такого рода? Ничего подобного! Чтобы далеко не ходить, вот соседняя задача из того же сборника – предыдущая, под номером 988:

Собранные в саду яблоки разложены в ящики двух типов: по 24,5 кг и по 35,4 кг. Найдите число ящиков каждого типа, если масса всех собранных яблок 860,4 кг, и в ящиках большего размера поместилось на 272,4 кг яблок больше, чем в ящиках меньшего размера.

Если браться за неё всерьёз, то здесь без системы уравнений обойтись довольно затруднительно, то есть эта задача даже не арифметическая, а алгебраическая! Но ответы-то на что? В конце учебника читаем: «12 маленьких и 16 больших ящиков». И всё! Осталось применить сформулированную выше схему, и готово дело! Вот что можно написать в тетради:

Ответ: 12 ящиков по 24,5 кг и 16 ящиков по 35,4 кг. Тогда в маленьких ящиках $24,5 \cdot 12 = 294$ кг яблок, а в больших $35,4 \cdot 16 = 566,4$ кг. В сумме выходит, как и требуется, $294 + 566,4 = 860,4$ кг. При этом в больших ящиках яблок больше, чем в маленьких, на $566,4 - 294 = 272,4$ кг. Итак, ответ удовлетворяет условию.

Докажем, что других ответов нет. Допустим, было использовано меньше 12 маленьких ящиков. Тогда в них содержится меньше $24,5 \cdot 12 = 294$ кг яблок, и потому в больших ящиках – больше 566,4 кг (так как суммарный вес яблок – 860,4 кг – неизменен). Но тогда в больших ящиках содержится более чем на $566,4 - 294 = 272,4$ кг больше, чем в маленьких, что противоречит условию. К аналогичным выводам (только «с обратным знаком») приходим, если предположим, что было больше 12 ма-

⁴ Впрочем, всегда надо учитывать и «внешние факторы». Не исключено, что на самоуверенный ответ «догадался» учитель скажет: «Тогда догадайся, какую оценку я тебе сейчас поставлю». И никакие аргументы здесь не подействуют – у сильного всегда бессильный виноват.

леньких ящичков. Значит, приведённый ответ единствен.

Что, длинновато? Может и так, но вряд ли составление и решение системы уравнений окажется намного короче. И самое главное – зачем заново искать ответ, который и так известен? (Откуда известен – на это прикроем глаза).

Более того, порой «метод подглядывания» позволяет придать решению вполне благопристойный вид, без всяких там «догадался». Например, встретилось нам вот такое квадратное уравнение:

$$21x^2 - 23x + 6 = 0,$$

а формула для вычисления корней наконец вылетела из головы! Можно, конечно, поискать её в справочниках, но лучше заглянем в ответы. Вот они: корни равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{7}$. Далее рассуждаем так: если $\frac{2}{3}$ есть корень данного квадратного трёхчлена, то при разложении его в произведение он должен содержать множитель $\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Аналогично должен быть и множитель $\left(x - \frac{3}{7}\right)$. Ну-ка, перемножим их:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) \times \left(x - \frac{3}{7}\right) = x^2 - \frac{23}{21}x + \frac{2}{7}.$$

Если умножить все слагаемые на 21, получим как раз то, что дано в условии. Таким образом, наше решение может выглядеть, скажем, так:

Преобразуем левую часть и представим уравнение в следующем виде:

$$21 \times \left(x - \frac{2}{3}\right) \times \left(x - \frac{3}{7}\right) = 0.$$

Отсюда сразу следует, что оно имеет ровно два корня: $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{7}$ – и никаких других.

Согласитесь, очень эффектно!

Порывшись в сборниках задач, читатель убедится, что примеров подобного рода и в самом деле очень и очень много. Так что метод безотказен – пользуйтесь на здоровье! Жаль, на контрольных работах его не применишь – некуда подглядеть. Ну что ж, на безрыбье хоть шерсти клок.

И.Ф. Акулич

(г. Минск, Беларусь)

Статья поступила в редакцию

27.06.2022.

Принята к публикации

16.09.2022.

Поздравляем с Победой!

Российские школьники завоевали четыре золотые медали на ежегодной Международной олимпиаде по математике в Бухаресте (Румыния).

Глава Минпросвещения Сергей Кравцов поздравил их с победой и отметил, что отечественная система образования была и остаётся одной из лучших в мире.

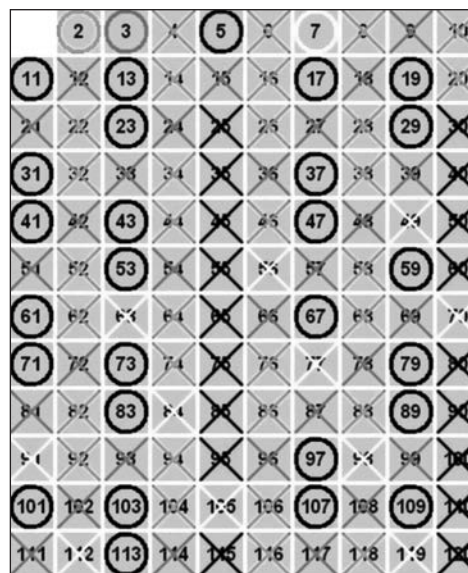
Источник: Telegram/RT на русском

ПРОСТОТА И КРАСОТА

Древние греки придумали наглядный способ представления целых чисел, увязав их с геометрическими фигурами. Любое простое число выглядело в их визуализации как совокупность точек, выстроенных в линию. С тех пор, как было доказано, что натуральный ряд содержит бесконечно много простых чисел, встал вопрос, как их выделить на любом отрезке от 2 до n . Не только указать их полный список, но и ясно отобразить само множество. Не красоты ради, а для выявления важных закономерностей.

Ещё в III веке до н. э. Эратосфен Киренский предложил эффективный способ решения этой задачи, известный ныне как решето Эратосфена. Он сводится к поэтапному отсеиванию из последовательности 2, 3, ..., n всех составных чисел. Заметив, что 2 – простое число, вычеркнем каждое второе число, начиная с 4. Первое нетронутое число 3 – простое, поскольку не делится на 2. Оставим его, а каждое третье число, начиная с 6, вычеркнем. Поступим так же со следующим незачёркнутым числом 5 и его кратными и т. д. В итоге останется множество простых чисел, не превосходящих n . Вот как оно выглядит, когда числа от 2 до n заполняют прямоугольную таблицу.

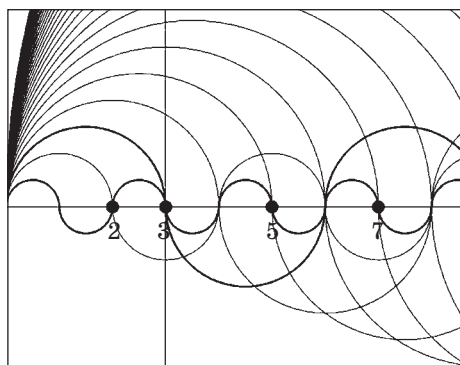
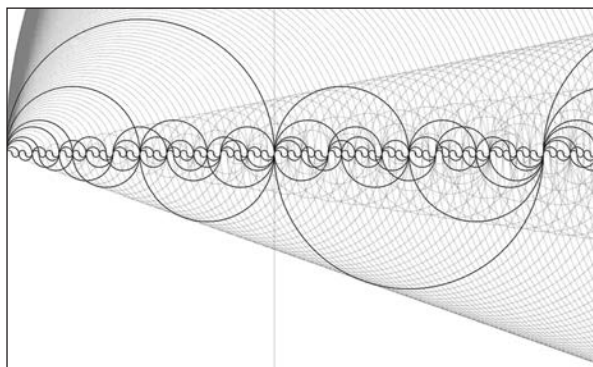
Это современная визуализация алгоритма Эратосфена. Она даёт представление о некоторых особенностях распределения простых чисел и их отдельных представителей, например пар чисел-близнецов. Сам греческий математик, согласно Никомachu, просеивал нечётные числа, начи-



Решето Эратосфена

ная с 3, и выписывал их последовательно в ряд. Многие графические модели для поиска простых чисел, по сути, являются вариациями решета Эратосфена, нередко с расширенными возможностями.

Вот одна из наиболее удачных и эстетически привлекательных визуализаций. Это геометрическая диаграмма, на которой можно выбрать любое натуральное n на числовом луче и увидеть, является ли n простым. Если окажется, что нет, то узнать количество его делителей и даже отыскать их на рисунке. Диаграмму опубликовал в 2007 году аргентинский исследователь Омар Пол и, кстати, выполнил все построения с помощью циркуля и линейки, а интерактивную модель позже разработал британец Джейсон Дэвис, специалист по визуализации данных.



Модель диаграммы Пола

Из начала луча для каждого n проведена периодическая кривая, проходящая через это число и все его кратные. Количество делителей n равно количеству кривых, его пересекающих. Если их всего две, то n – простое, а если больше – составное. Сами делители соответствуют полупериодам. В модели Дэвиса при выборе конкретного числа на луче такие кривые выделяются другим цветом в общем семействе.

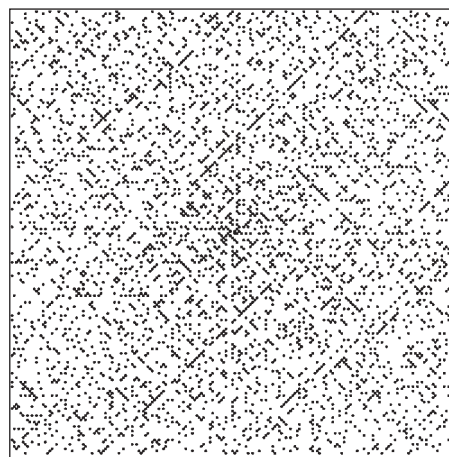
В зависимости от расположения последовательности $2, 3, \dots, n$ на плоскости выделенные в ней простые числа образуют разные узоры. Самый известный пример – скатерть Улама. Эту графическую визуализацию построил в 1963 году польский математик Станислав Улам забавы ради, когда попал на скучный доклад и искал, чем бы себя занять. Начертив на бумаге квадратную сетку, он записал в центре 1

и стал нумеровать точки пересечения линий, двигаясь по спирали против часовой стрелки. Затем начал отмечать простые числа и с удивлением обнаружил, что они выстраиваются вдоль прямых: по горизонтали, вертикали и ещё чаще по диагонали. Это, определённо, не случайность, заключил математик. И оказался прав.

Впоследствии подмеченную закономерность подтвердили построения на компьютере. Спираль насчитывала уже десятки тысяч чисел, а сам узор состоял из точек, обозначавших простые числа. Выяснилось, что числа из отдельных конечных скоплений на диагоналях – это последовательные значения порождающих их многочленов с целыми коэффициентами.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	14	3	12	29
40	19	6	1	2	11	28
41	20	7	8	9	10	27
42	21	22	23	24	25	26
43	44	45	46	47	48	49...

Построение спирали Улама



Скатерть Улама

Неожиданная находка Улама приглянулась его коллегам-математикам и компьютерщикам. Одну из подобных визуализаций, отражающую аналогичные закономерности в распределении простых чисел, предложил в 1994 году инженер-программист Роберт Сакс.

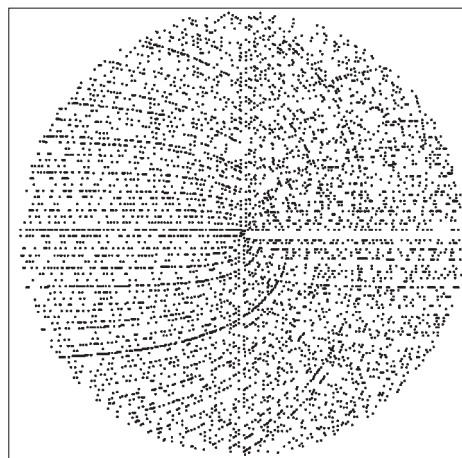
Он разместил целые числа, начиная с нуля, на архимедовой спирали так, что все квадраты попали на пересечение витков с полярной осью, расположенной к востоку от полюса (на рисунке последовательности 0, 1, 4, 9, ... соответствует белая полуполоса), а остальные числа распределил между ними на одинаковом расстоянии друг от друга. В модели Сакса простые числа выстраиваются вдоль кривых, а не прямых.

Спираль Улама не раз вдохновляла художников и дизайнеров. Каждый представил её по-своему, но вполне узнаваемо. Так, российский художник Александр Панкин, мастер абстрактных композиций, в основе которых лежат числа, или суперабстракций, как он сам их называл, изобразил плоский узор, заменив все числа квадратами.

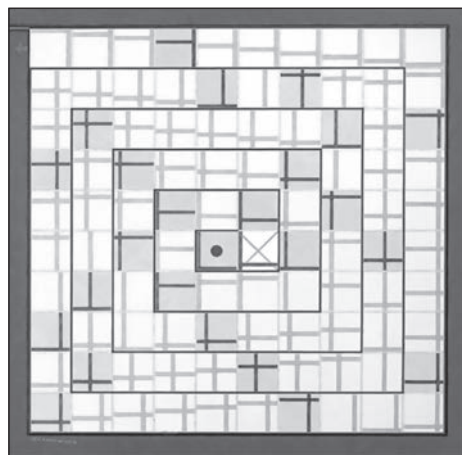
А вот автор обложки американского журнала Math Horizons Брюс Торренс пошёл дальше: выбрался в пространство и обратил спираль Улама в четырёхугольную пирамиду из пронумерованных чисел-шариков (вид сверху). Разве не эффектная визуализация последовательности пар чисел-близнецов, устремлённой в бесконечность, получилась?

Наталья Карпушина

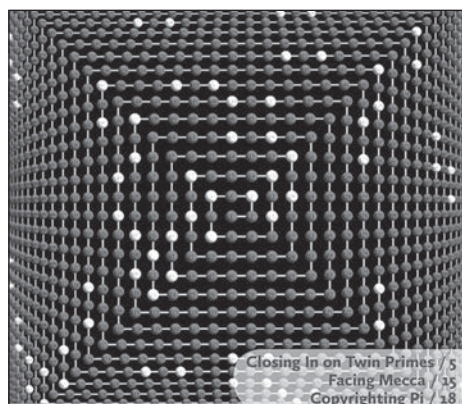
Иллюстрации: Wikimedia Commons, polprimos.com, jasondavies.com/primos, visit-city.art/exhibitions, maa.org/press/periodicals/math-horizons.



Спираль Сакса



А. Панкин. Спираль Улама, 2007



Б. Торренс. Числа-близнецы на спирали Улама, 2013

ПОДПИСКА 2023. II ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс
P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс
P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

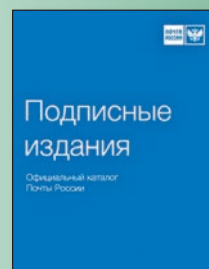
«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

- В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**
- На сайте «Почта России»:
<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



- Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>
- На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

- Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
 - Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека
- Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 3, 1–80