

Уважаемые читатели!

Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

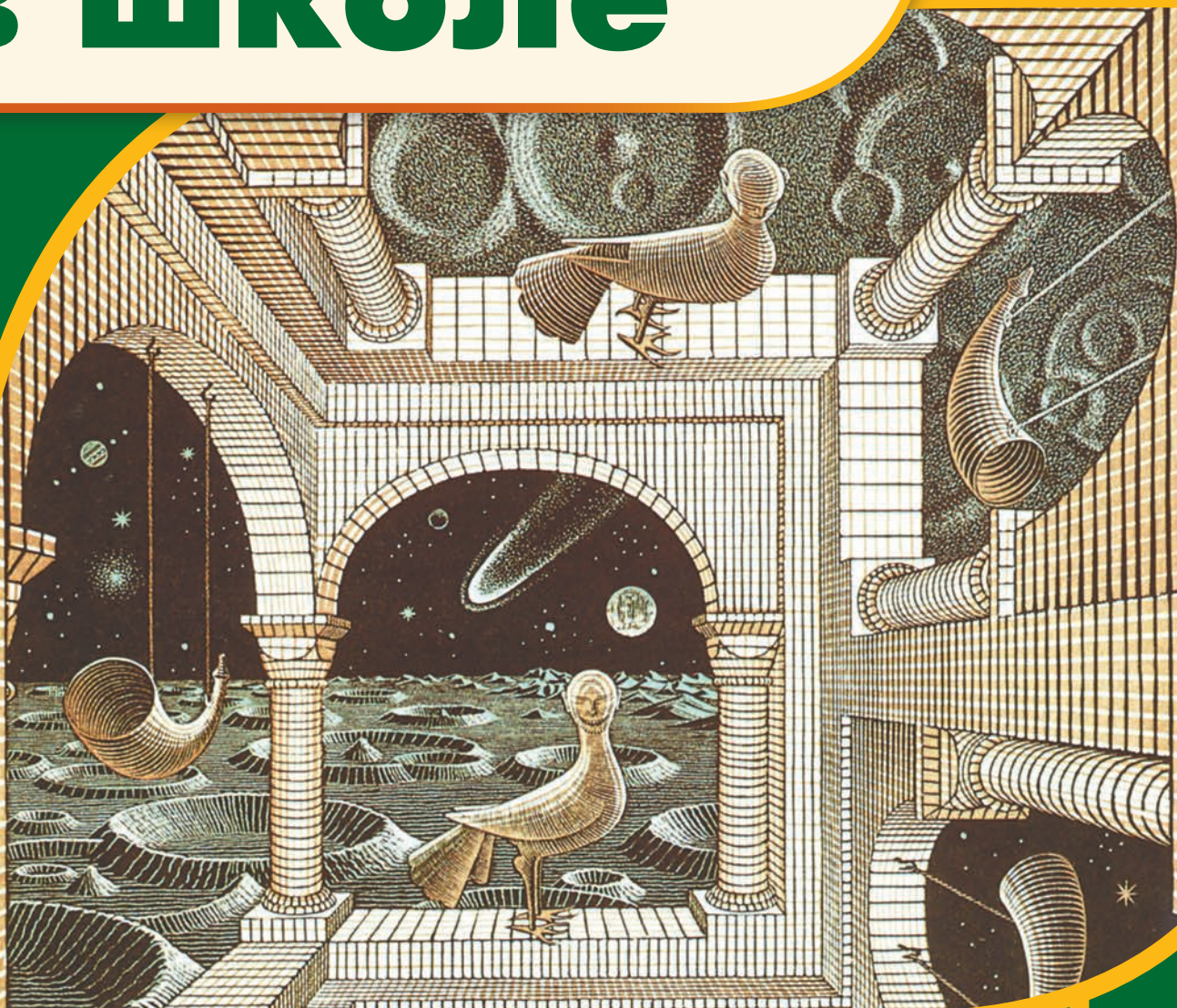


научно-теоретический и методический журнал

2 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ



**Воспитание в процессе обучения математике:
исторические тенденции и современные вызовы**

**Фронтально-парные занятия
(на примере изучения темы «Пропорция»)**

**О практико-ориентированном изучении стереометрии
с использованием виртуальной реальности**

**НЕ
ЗАБУДЬТЕ
ПОДПИСАТЬСЯ
НА ЖУРНАЛ
ПО КАТАЛОГУ
«ПОЧТА
РОССИИ»!**



И СНОВА О ТРАДИЦИЯХ И НОВАЦИЯХ

Наш журнал, авторы, редакция живут в современном мире, и все актуальные вопросы нашего времени, такие как, например, вопросы традиций и новаций, находят отражение на страницах журнала. Вот и в этом номере мы помещаем материалы об истории преподавания математики, о традициях, о тех людях, учителях, учёных, которые являются реальным воплощением этих традиций. И в то же время мы не можем не обсуждать фактически новые безграничные возможности образования, которые открыл перед нами цифровой век с его информационными технологиями, виртуальной реальностью и искусственным интеллектом.

Тем более, что тревожная информация о растерянности системы образования перед искусственным интеллектом посыпалась в новом году как из рога изобилия. Вот сообщение нашего крупнейшего информационного агентства: «Бот ChatGPT уже вызывает опасения учителей старших классов из-за его возможного использования при выполнении заданий».

Однако проблема не ограничивается средней школой. В другом сообщении говорится, что нейросеть — тот же нашумевший чат-бот, созданный по технологиям искусственного интеллекта, — сдал магистерский экзамен в одной из самых престижных американских школ бизнеса.

А вот ещё одна информация: «Систему искусственного интеллекта испытали на реальном экзамене по радиологии в рамках курса лондонского Королевского колледжа радиологов. Компьютер сдал медицинский экзамен на уровне настоящих врачей с точностью 79,5%».

И это не только там, «у них». В полной растерянности отечественные СМИ пишут о том, что «студент из Москвы за сутки написал диплом с помощью искусственного интеллекта и защитил его». Студент попросил нейросеть со-

ставить план диплома, а затем по нему же написать весь текст. Работа прошла систему «антиплагиат», набрав 82% уникальности, и никак не смутила преподавателей.

Очевидно, что это не проблема особенностей системы контроля в той или иной конкретной школе или в конкретном университете. Не пытаться осмыслить возможности и опасности применения всех виртуальных новаций в образовании уже невозможно. Вот и в этом номере журнала вы можете найти материал А.А. Олехова, даже название которого «О практико-ориентированном изучении стереометрии с использованием виртуальной реальности» невозможно было бы представить себе ещё несколько лет назад.

Всё так, и всё же нам не обойтись без осмысления традиций, в том числе и критического, как это делается в статье «Воспитание в процессе обучения математике: исторические тенденции и современные вызовы», где показано, как идеологические рамки ограничивали вроде бы далёкие от «прозы жизни» методики школьной математики.

И традиции, и современность ярче всего воплощаются в людях — учителях, методистах, авторах учебников и пособий. В этом номере журнала вы можете увидеть рассказ о жизненном пути и научно-педагогической деятельности профессора В.А. Гусева, а также отчёт о Международной научно-практической конференции его памяти в МПГУ, о затронутых там вопросах преподавания математики в школе.

Интереснейший материал в номере — интервью с В.А. Рыжиком, которого не нужно представлять читателям нашего журнала. Вопросы для этого интервью о школе и жизни подготовили молодые учителя математики. Уверен — каждый найдёт в ответах нашего знаменитого коллеги что-то важное для себя, для своего профессионального и человеческого опыта.

Евгений Бунимович

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

- 3 Саввина О.А., Симоновская Г.А., Щербатых Г.В.
**Воспитание в процессе обучения математике:
исторические тенденции и современные вызовы**

ОЛИМПИАДЫ

- 8 Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С.,
Антропов А.В., Козлов П.Ю., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храмцов Д.Г.
**Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике
и олимпиады им. Л. Эйлера 2021/2022 учебного года (второй день)**

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

- 19 Есина Л.Ю.
Метод дополнительных построений – ключ к решению задачи

ОТКРЫТЫЙ УРОК

- 31 Лебединцев В.Б., Ламтюгина И.М.
Фронтально-парные занятия (на примере изучения темы «Пропорция»)

ТОЧКА ЗРЕНИЯ

- 41 Олехов А.А.
**О практико-ориентированном изучении стереометрии
с использованием виртуальной реальности**

У НАС В ГОСТЯХ

- 50 «Не так важно что и как, а важно кто» (интервью с В.А. Рыжиком)

ДЕЯТЕЛИ НАУКИ И ПРОСВЕЩЕНИЯ

- 62 В.А. Тестов
**Жизненный путь и научно-педагогическая деятельность
Валерия Александровича Гусева (к 80-летию со дня рождения)**

ХРОНИКИ

- 69 Езупова М.В., Лукьянова Е.В.
**Международная научно-практическая конференция
 памяти профессора Гусева В.А. в МПГУ**

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

- 74 Карпушина Н.М.
**«Неактуальные» предметы (вести образования одной строкой)
 и другие новости (обзор интернет-ресурсов)**

ЗАДАЧИ

- 78 Иванова Е.Ю.
Решения задач из журнала «Математика в школе» № 8 / 2022

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук. Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ. Статьям журнала присваивается идентификатор DOI	
Главный редактор Е.А. Бунимович Заместитель главного редактора С.И. Калинин Редакционная коллегия: Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов Редакторы: Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков Выпускающий редактор И.А. Моргунова Компьютерная вёрстка В.Н. Бармин ООО «Школьная Пресса» Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62 Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80 E-mail: matematika@schoolpress.ru Интернет http://www.школьнаяпресса.рф	Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г. Формат 84×108/16 Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3741. Заказ Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия» 428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13 © ООО «Школьная Пресса» © «Математика в школе», 2023, № 2 В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.
Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы. Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.	

ВОСПИТАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ИСТОРИЧЕСКИЕ ТЕНДЕНЦИИ И СОВРЕМЕННЫЕ ВЫЗОВЫ

EDUCATION IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS: HISTORICAL TRENDS AND MODERN CHALLENGES

Научная статья

Scientific article

УДК: 272.851

DOI: 10.47639/0130_9358_2023_2_3

О.А. Саввина, доктор пед. наук, профессор,
oas5@mail.ru,

Г.А. Симоновская, канд. пед. наук, доцент,
simonovskaj_g@mail.ru,

С.В. Щербатых, доктор пед. наук,
профессор, shcherserg@mail.ru;
ЕГУ им. И.А. Бунина

O.A. Savvina, ShiD (Pedagogy), Professor,
oas5@mail.ru,

G.A. Simonovskaya, PhD (Pedagogy), associate
Prof., simonovskaj_g@mail.ru,

S.V. Shcherbatykh, ShiD (Pedagogy),
Professor, shcherserg@mail.ru;
Bunin Yelets State University

Аннотация: исторический анализ литературы по методике обучения математике показал, что большинство исследований советского периода ограничено рамками коммунистической идеологии воспитания

Abstract: a historical analysis of the literature on the methodology of teaching mathematics has shown that most studies of the Soviet period are limited to the framework of the communist ideology of education

Ключевые слова: воспитание в процессе обучения математике, история математического образования, традиционные ценности

Keywords: education in the process of teaching mathematics, the history of mathematical education, traditional values

© Саввина О.А., Симоновская Г.А., Щербатых С.В. 2023

В нашей стране имеется богатый опыт успешного решения частных воспитательных задач в процессе обучения математике. Однако распад СССР показал, что глобальная цель советского математического образования – коммунистическое воспитание молодежи – потерпела фиаско, поэтому эксплицирование советской теории воспитания в современную образовательную систему является ошибочным.

Обращение к дореволюционному опыту показывает, что проблему воспитательной направленности обучения математике поднимали педагоги XIX века Н.В. Бугаев, П.С. Гурьев, С.И. Шохор-Троцкий и др.

Н.В. Бугаев ещё в конце XIX столе-

тия утверждал, что в обучении математике «воспитательный элемент надо поставить выше, даже, может быть, поступиться некоторыми знаниями» [1]. Однако фундаментальных исследований, посвящённых именно реализации воспитательного потенциала в обучении математике, в дореволюционный период не было осуществлено.

В советское время воспитательные задачи формулировались исключительно в контексте господствующей в то время идеологии. Так, на передовице журнала «Математика в школе» в 1956 г. была помещена статья «Повысить уровень учебно-воспитательной работы в школах», в кото-

рой отмечалось: «Школа не только учит, но и воспитывает. В задачу школы входит воспитание и развитие в молодом поколении тех качеств ума, воли, характера, которые должны быть присущи советскому гражданину, строителю коммунистического общества» [5, с. 1].

В 1961 г. вышла работа «О воспитательном эффекте уроков математики» А.Я. Хинчина. Важно отметить, что её лейтмотивом стало коммунистическое воспитание «революционера-борца». Эта работа переиздавалась неоднократно и получила большую известность.

Проблема воспитания коммунистического (диалектико-материалистического) мировоззрения находилась в центре внимания педагогов-математиков 1970–1980-х гг. Об этом свидетельствуют многочисленные публикации на страницах журнала «Математика в школе». Так, в 1978 г. вышла публикация «О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения» академика А.Н. Колмогорова (№ 3), в 1979 г. – статья «Язык цифр и фактов в процессе идейно-политического воспитания на уроках математики» А.С. Рубанова (№ 5).

Преподаватель Л.Н. Рязанова описала опыт использования элементов историзма в воспитании материалистического мировоззрения учащихся в процессе обучения математике («Математика в школе», 1982 г., №4), Н.Д. Волкова и Т.В. Гришина привели убедительные аргументы о двуединстве обучающей и воспитывающей цели математического образования («Математика в школе», 1984 г., № 1).

В 1980-х гг. проблеме воспитательной направленности обучения математике были посвящены отдельные издания. Например, огромным тиражом вышли книги «Формирование мировоззрения

учащихся в процессе обучения математике» Б.В. Гнеденко (1982 г.) и «О воспитательной направленности обучения математике в школе» К.Г. Кожабаева (1988 г.). При этом в центре внимания педагогов оставалась проблема коммунистического воспитания, главной целью которого является формирование материалистического мировоззрения. К.Г. Кожабаев писал: «Школьный курс математики, на изучение которого отводится почти пятая часть учебного времени в школе, в основном содержит разнообразный учебный материал, который может быть использован в воспитании советского патриотизма и пролетарского интернационализма. Знакомая с историческими фактами, решая задачи и отвечая на вопросы, учащиеся получают определенные представления о преимуществах социалистической системы, о великих учёных народов нашей страны, о достижениях математической науки в СССР, об успехах коммунистического строительства» [4, с. 4].

На рубеже XIX–XX вв. интерес педагогов-математиков к проблеме коммунистического воспитания на основе диалектико-материалистического подхода заметно ослабевает. Акцент исследований переносится в нейтральную область – область эстетического воспитания.

Надо признать, что вопросы эстетического воспитания педагогами-математиками поднимались и раньше. В 1910 г. С.И. Шохор-Троцкий выступил с докладом «Эстетический элемент в преподавании математики» (Труды Всероссийского съезда по педагогической психологии), в 1925 г. появилась работа «Эстетические элементы в математике» С. Богомолова, в 1963 г. – «Об элементах эстетического воспитания на уроках математики» В.Л. Минковского (Математика в школе, 1963, № 4, с. 25–30).

Довольно богатый содержательный материал для воспитания прекрасного собрал советский педагог-математик И.Г. Зенкевич [2]. Автор выявил особенности математики, которые оказывают эстетическое воздействие: абстрактность, дедуктивный характер, непреложность выводов, единство частей, совершенство языка, полезность и обаяние красоты. При этом И.Г. Зенкевич чётко обозначил, что в основе его исследования был использован материалистический подход: «Коренной поворот в истории эстетики связан с применением к её области марксистского метода исследования – диалектического и исторического материализма» [3, с. 4].

В постсоветское время процесс разработки средств эстетического воспитания исследователи пытались ограничить только математикой, отстранившись от идеологии и методологии. Приведём в качестве примеров тематику работ этого периода: «О воспитании эстетического вкуса учащихся при решении планиметрических задач» («Математика в школе», 1997, № 2) и «Решение задач различными способами – первый шаг к эстетическому восприятию геометрии» Н.Л. Рощиной («Математика в школе», 1996, № 3), «Присутствие красоты» Е.И. Черпаковой и Т.А. Липкиной («Математика в школе», 2001, № 3). «Эстетическая мотивация в обучении математике» Г.И. Саранцева (Саранск, 2003 г.).

Поскольку геометрия несёт в себе огромный потенциал именно эстетической направленности, то появились исследования, посвящённые красоте школьной геометрии. Например, работы «Золотое сечение» авторов И.Ш. Шевелёва, М.А. Марутаева и И.П. Шмелёва (М., 1990), «В мире многогранников» И.М. Смирновой (М., 1995), «Этот удивительно симметричный мир» (М., 1982).



Рис. 1

Исследовались связи геометрии с искусством, архитектурой, градостроительством. Вся информация использовалась на уроках математики и при подготовке к внеурочным занятиям, да и сейчас является актуальной. Именно в этой канве тесно переплетаются эстетическое и духовное воспитание. Невозможно анализировать связь геометрии и

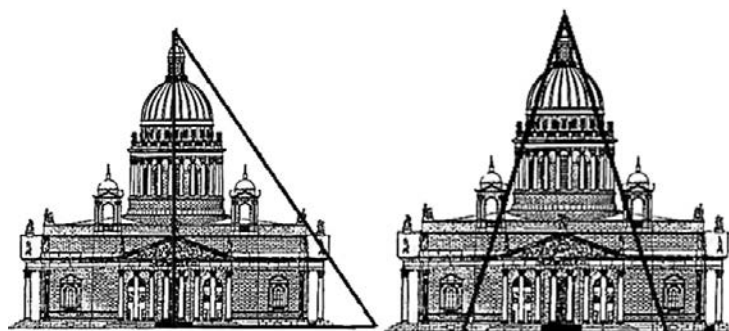
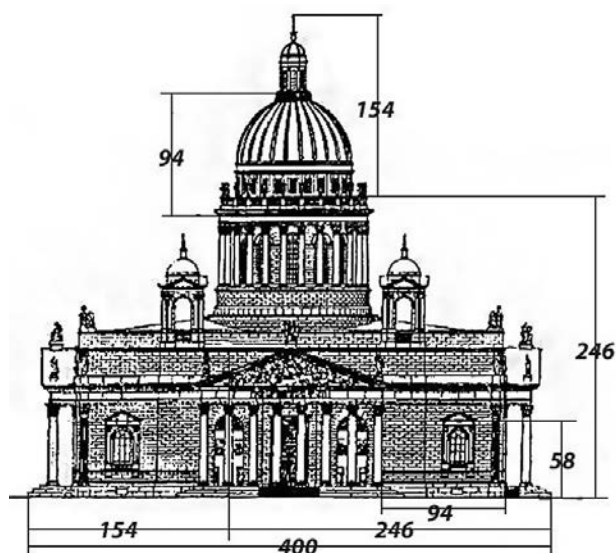
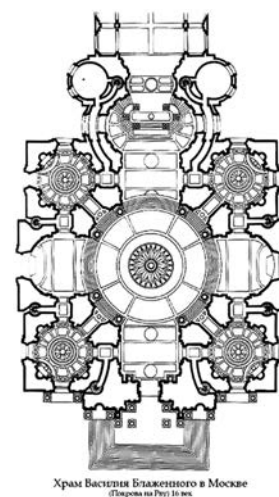
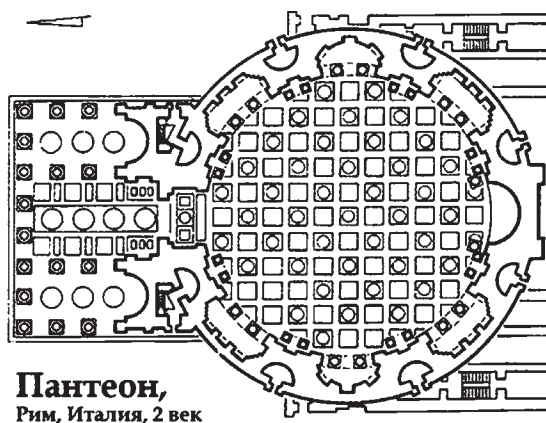
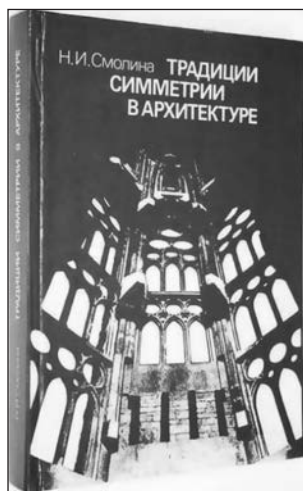


Рис. 2

строительства, не рассмотрев архитектуру православных храмов. Что необратимо приведёт к истокам православной культуры, исторической православной духовности. В

книге «Традиции симметрии в архитектуре» Н.И. Смолиной (М., 1990) были представлены фотографии, чертежи, эскизы строений, в том числе и православных храмов.

После распада СССР попытку переосмыслить проблему нравственного воспитания в новых реалиях обучения предпринял член-корреспондент РАН Л.Д. Кудрявцев [5]. При этом за рамками вопросов нравственного воспитания в публикациях учёного осталась специфика науки математики.

Современные исследователи преимущественно оставляют вне поля зрения методологические вопросы, а реализацию возможностей математического образования в решении воспитательных целей обычно ограничивают использованием специально подобранных фабул задач или примеров из биографий известных математиков (Т.К. Авдеева, Ю.А. Дробышев, О.В. Панишева, О.А. Павлова и др.).

При этом нередко в качестве доминирующих побуждений к математическому творчеству продолжают рассматриваться качества, выделенные в прошлом веке английским ученым Г.Х. Харди: любознательность, профессиональная гордость и честолюбие исследователя (цит. по [3, с. 6]). Пришло время признать, что эти качества противоречат традиционным духовно-нравственным национальным ценностям и добродетелям: застенчивости, кротости, честности, милосердию, стремлению служить ближнему и отдать «жизнь за други своя». Все эти человеческие качества были востребованы во все времена, но особенно в тяжёлые для нашей страны годы, которые мы переживаем сегодня, в условиях нестроения между двумя братскими народами.

Поэтому перед современным научным педагогическим сообществом стоит задача поиска новых методологических подходов к реализации воспитательных целей в процессе обучения математике.

Один из таких подходов предложен в монографии «Современное математиче-

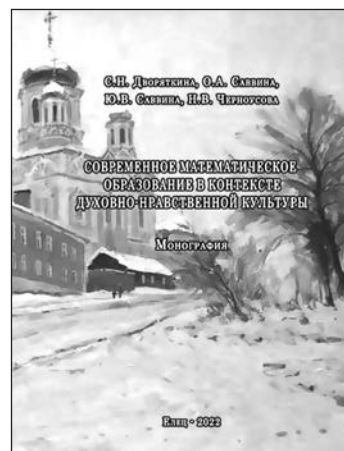


Рис. 3

ское образование в контексте духовно-нравственной культуры», изданной в Елецком государственном университете им. И.А. Бунина [2].

Список источников

1. Бугаев, Н.В. Математика как орудие научное и педагогическое / Н.В. Бугаев. – 2 изд. М. Типография И.И. Родзевича, 1875. – 33 с.
2. Дворяткина С.Н., Саввина О.А., Саввина Ю.В., Черноусова Н.В. Современное математическое образование в контексте духовно-нравственной культуры. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022. – 167 с.
3. Зенкевич И.Г. Эстетика урока математики: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981. – 79 с.
4. Кожабаяев К.Г. О воспитательной направленности обучения математике в школе: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 80 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её преподавании. М.: Физматлит, 2008. – 434 с.
6. Повысить уровень учебно-воспитательной работы в школах // Математика в школе. – 1956. – № 4. – С. 1–2.

Статья поступила в редакцию

13.08.2022.

Принята к публикации

20.10.2022.

РЕГИОНАЛЬНЫЕ ЭТАПЫ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ОЛИМПИАДЫ ИМ. Л. ЭЙЛЕРА 2021/2022 УЧЕБНОГО ГОДА (второй день)

THE REGIONAL STAGES OF THE ALL-RUSSIAN OLYMPIAD ON MATHEMATICS FOR SCHOOL STUDENTS AND EULER OLYMPIAD OF 2021/2022 ACADEMIC YEAR (second day)

Научная статья

УДК: 372.851

Scientific article

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_2_8

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников, О.К. Подлипский
(Московский физико-технический институт),
Москва, nazar_ag@mail.ru,

И.С. Рубанов
(Кировский Центр дополнительного образования одаренных школьников),

А.В. Антропов
(Москва, Центр педагогического мастерства),
П.Ю. Козлов,
(Московский государственный университет им. Ломоносова),

А.С. Кузнецов
(Санкт-Петербургский государственный университет),

К.А. Сухов
(Санкт-Петербург, Президентский Физико-Математический Лицей № 239),

Д.Г. Храмцов
(Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук)

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov, P.A. Kozhevnikov, O.K. Podlipskii
(Moscow Institute of Physics and Technology),
nazar_ag@mail.ru,

I.S. Rubanov
(Kirov Centre for Additional Education of Gifted Student),

A.V. Antropov
(Moscow, Center for Teacher Excellence),
P.Yu. Kozlov
(Lomonosov Moscow State University),

A.S. Kuznetsov
(St Petersburg University),

K.A. Sukhov
(Saint-Petersburg, Presidential Physics and Mathematics Lyceum No. 239),

D.G. Khramtsov
(Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences)

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) второго дня региональных этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2021/2022 учебного года

Abstract: problems with solutions of the second day of the regional stages of the All-Russian Olympiad on mathematics for school students and Euler Olympiad of 2021/2022 academic year are provided

Ключевые слова: Всероссийская олимпиада школьников по математике, олимпиады им. Л. Эйлера, региональный этап, олимпиадная задача

Keywords: All-Russian Olympiad on mathematics for school students, Euler Olympiad, regional stage, Olympiad problem

© Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С., Антропов А.В., Козлов П.Ю., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храмцов Д.Г. 2023

На протяжении ряда лет Всероссийская олимпиада школьников (ВсОШ) на региональном этапе проводилась для учащихся 8, 9, 10 и 11 классов. Затем, в связи со значительным расширением числа предметов, по которым проводится ВсОШ, и унификацией её правил, официально региональный и заключительный этапы ВсОШ стали проводиться только для учащихся 9–11 классов. И в целях сохранения наработанной в нашей стране системы работы с одарёнными школьниками для учащихся 8 класса стала проводиться олимпиада им. Л. Эйлера. В статье приведены задания с решениями второго дня региональных этапов ВсОШ и олимпиады Эйлера 2021/2022 учебного года.

Условия задач

8 класс

8.6 (Н. Агаханов). Сумма остатков от деления трёх последовательных натуральных чисел на 2022 – простое число. Докажите, что одно из чисел делится на 2022.

8.7 (Н. Агаханов). Существует ли треугольник, у которого длины не совпадающих между собой медианы и высоты, проведённых из одной его вершины, соответственно равны длинам двух сторон этого треугольника?

8.8 (К. Сухов). Будем называть натуральное число **красивым**, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?

8.9 (С. Берлов). Петя и Вася написали на доске по 100 различных натуральных чисел. Петя поделил все свои числа на Васины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Вася поделил все свои числа на Петины с остатком и выписал все 10000 получившихся остатков себе в тетрадь. Ока-

залось, что наборы выписанных Васей и Петей остатков совпадают. Докажите, что тогда и наборы их исходных чисел совпадают.

8.10 (С. Берлов). В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

9 класс

9.6 (Н. Агаханов). Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022} ?

9.7 (Е. Бакаев). Петя разбил клетчатый квадрат 100×100 некоторым образом на домино – клетчатые прямоугольники 1×2 – и в каждом домино соединил центры двух его клеток синим отрезком. Вася хочет разбить этот же квадрат на домино вторым способом и в каждом своём домино соединить две клетки красным отрезком. Вася хочет добиться того, чтобы из каждой клетки можно было пройти в любую другую, идя по синим и красным отрезкам. Обязательно ли у него будет возможность это сделать?

9.8 (А. Кузнецов). В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD . Диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

9.9 (Е. Бакаев). На плоскости отмече-

ны N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

9.10 (Д. Храмов). Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100} .

10 класс

10.6 (Н. Агаханов). На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу?

10.7 (А. Кузнецов). Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке E . Докажите, что $AD + AE = BE$.

10.8 (Е. Бакаев). На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

10.9 (С. Берлов). В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

10.10 (Д. Храмов). Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100} .

11 класс

11.6 (Н. Агаханов). Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022} ?

11.7 (А. Кузнецов). Произведение цифр натурального числа n равно x , а произведение цифр числа $n + 1$ равно y . Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y - 1$, а произведение цифр числа $m + 1$ равно $x - 1$?

11.8 (С. Берлов). В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, ..., 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

11.9 (А. Кузнецов). Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω . Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Точка M – середина отрезка AB . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L . Точка N – середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD , не содержащей точку P . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

11.10 (А. Кузнецов). Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a + b + c + d = 8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b + c} + \frac{b^3}{b^2 + c + d} + \frac{c^3}{c^2 + d + a} + \frac{d^3}{d^2 + a + b} \geq 4.$$

Решения задач

8 класс

8.6. Решение. Пусть наши числа равны k , $k + 1$ и $k + 2$, и ни одно из них не делится на 2022. Тогда если остаток от деления числа k на 2022 равен $r > 0$, то остатки от деления на 2022 чисел $k + 1$ и $k + 2$ равны, соответственно, $r + 1$ и $r + 2$, а сумма трёх остатков равна составному числу $3r + 3 = 3(r + 1)$. Противоречие.

Замечание. Описываемая в условии задачи ситуация возможна. Если наименьшее из чисел делится на 2022, то числа при делении на 2022 дают соответственно остатки 0, 1 и 2, сумма которых равна простому числу 3.

8.7. Ответ: существует.

Решение. Возьмём треугольник ABC , где $AB = BC$ и высота BH , проведённая из вершины B , равна $2AC$ (очевидно, такой существует) (рис. 1). На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CD = AC$. В треугольнике ABD высота BH равна стороне $AD = 2AC$, а медиана BC равна стороне AB .

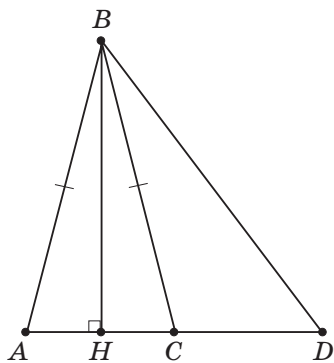


Рис. 1

Замечание. Другим примером служит прямоугольный треугольник, у которого медиана, проведённая из вершины острого угла, образует с катетом, выходящим из той же вершины, угол 30° (рис. 2).

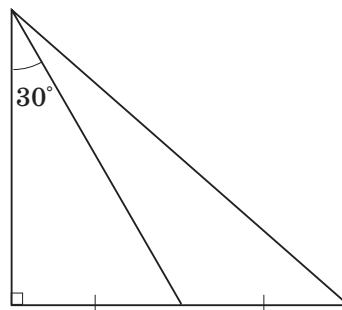


Рис. 2

8.8. Ответ: не может.

Решение. Заметим, что количество цифр красивого числа делится на 3. Если десятичная запись красивого числа x состоит из $3n$ цифр, то оно удовлетворяет неравенству

$$10^{3n-1} < x < 3 \cdot 10^{3n-1}. \quad (*)$$

Следовательно, произведение двух красивых чисел, записываемых $3k$ и $3m$ цифрами соответственно, лежит между числами $10^{3(k+m)-2}$ и $9 \cdot 10^{3(k+m)-2} < 10^{3(k+m)-1}$. В этом промежутке согласно неравенству (*) красивых чисел нет. Поэтому произведение двух красивых чисел не может быть красивым.

8.9. Решение. Пусть Петя записал числа $a_1 > a_2 > \dots > a_{100}$, а Вася — $b_1 > b_2 > \dots > b_{100}$. Если $a_1 > b_1$, то у Васи один из остатков будет b_1 , а у Пети все остатки будут меньше b_1 — противоречие. Аналогично приводит к противоречию предположение, что $a_1 < b_1$. Значит, $a_1 = b_1$.

Допустим, мы уже доказали, что $a_1 = b_1$, ..., $a_k = b_k$ для некоторого $k \geq 1$. Наборы остатков от деления друг на друга чисел $a_1, \dots, a_k$ у Пети и Васи совпадают, вычеркнем все эти остатки. Если $a_{k+1} > b_{k+1}$, то у Пети среди невычеркнутых остатков есть k чисел a_{k+1} — остатки от деления Петиного числа a_{k+1} на все большие Васиного числа (то есть $a_1, \dots, a_k$), а у Васи все невычеркнутые остатки меньше a_{k+1} , так

как там либо делимое меньше a_{k+1} , либо делитель не превосходит a_{k+1} . Аналогично разбирается случай, когда $a_{k+1} < b_{k+1}$. Поэтому $a_{k+1} = b_{k+1}$. Последовательно проводя это рассуждение для $k = 1, 2, \dots, 99$, мы докажем утверждение задачи.

8.10. Ответ: 50.

Решение. *Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. Получаем требуемое расположение.

Есть несколько способов доказать оценку, ниже мы приводим два из них.

Способ 1. Предположим, что при некотором $k < 50$ требуемая расстановка получена.

В каждый момент времени считаем покрашенную дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m ($2 \leq m \leq 99$) могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100.

Поскольку изначально и в конце фишка m не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество *входов* на покрашенную дугу и *выходов* с покрашенной дуги. При $m \leq 50$ фишка m не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать *вход* или *выход* только путём обмена с фишкой 1. При *входе* фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при *выходе* – на 1 против часовой стрелки. Проведём аналогичные рассуждения для фишек $m \geq 51$, которые не могут меняться с фишкой 1.

Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.

Способ 2. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальной позиции, причём сдвиг по часовой стрелке будет

считаться с плюсом, против часовой – с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется +1, а другой – -1. Значит, в результате проведённых операций сумма сдвигов будет равна 0.

Рассуждаем от противного: пусть при $k < 50$ каждая фишка i в итоге сдвинута на одну позицию по часовой стрелке, то есть её сдвиг оказался равным $1 + 100t_i$ (здесь t_i – целое «число оборотов» по часовой стрелке, в частности при $t_i < 0$ фишка i сделала $|t_i|$ оборотов против часовой стрелки). Тогда суммарный сдвиг всех 100 фишек равен $100(t_1 + t_2 + \dots + t_{100}) + 100$. Поскольку он должен равняться 0, получаем равенство $t_1 + t_2 + \dots + t_{100} = -1$.

Поскольку $k < 50$, фишки с номерами i и j , где $j \geq i + 50$, не могли меняться местами, поэтому их сдвиги в любой момент заведомо отличаются меньше чем на 100 (точнее, $|(1 + 100t_i) - (1 + 100t_j)| < 100$), значит, «количества оборотов» t_i и t_j равны при $j \geq i + 50$. Отсюда получаем, что $t_1 = t_{51}, t_2 = t_{52}, \dots, t_{50} = t_{100}$. Тогда сумма $t_1 + t_2 + \dots + t_{100} = 2(t_1 + t_2 + \dots + t_{50})$ – чётная, а значит, не равна -1. Противоречие.

Замечание. Последнее рассуждение можно видоизменить следующим образом.

Отсюда $t_1 = t_{51}, t_1 = t_{52}, \dots, t_1 = t_{100}, t_2 = t_{100}, t_3 = t_{100}, \dots, t_{50} = t_{100}$. Таким образом, все t_i равны t_1 . Тогда $t_1 + t_2 + \dots + t_{100} = 100t_1 \neq -1$.

9 класс

9.6. Ответ: $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$.

Решение. Записывая условие при $n = 2022, k = 1011$ и при $n = 1011, k = 2022$, получаем

$$a_{2022} = a_{2022} - a_{1011} \geq 2022^3 - 1011^3$$

и

$$-a_{2022} = a_{1011} - a_{2022} \geq 1011^3 - 2022^3,$$

то есть $a_{2022} \geq 2022^3 - 1011^3 \geq a_{2022}$. Отсюда и следует ответ.

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая условию, существует, а именно $a_n = n^3 - 1011^3$. Более того, аналогично решению, приведённому выше, несложно показать, что такая последовательность единственна. Однако для решения задачи *не требуется* ни находить все такие последовательности, ни даже приводить пример такой последовательности.

9.7. Ответ: не обязательно.

Решение 1. Занумеруем вертикали слева направо числами от 1 до 100. Пусть a – верхняя строка квадрата, а b – строка сразу под ней. Пусть в Петинном разбиении эти строки заняты вертикальными домино $a1 - b1, a2 - b2, \dots, a98 - b98$ и горизонтальными домино $a99 - a100, b99 - b100$. Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разбить на домино (например, на горизонтальные), поэтому такое разбиение существует.

Предположим, что существует Васино разбиение на домино, удовлетворяющее требованиям задачи. Если в Васином разбиении какая-то из клеток $a1, a2, \dots, a98$ занята вертикальным домино, то это – то же домино, что и в Петинном разбиении, и из этих двух клеток нельзя добраться до остальных. Поэтому в Васином разбиении обязательно должны присутствовать домино $a1 - a2, a3 - a4, \dots, a97 - a98$. Аналогично, клетки $a99$ и $a100$ не могут быть накрыты горизонтальными домино, поэтому они накрыты вертикальными домино $a99 - b99$ и $a100 - b100$. Но тогда из четырёх клеток $a99, a100, b99, b100$ нельзя попасть в остальные – противоречие.

Замечание. Существуют и другие варианты Петинного разбиения, при которых требуется невозможно. Например, если обозначить через c строку непосред-

ственно под b , то годится любое разбиение, содержащее следующие пять домино: $a1 - b1, a2 - b2, a3 - a4, b3 - b4, c1 - c2$ (такие разбиения существуют).

Решение 2. Предположим, что Васе удалось требуемое. Тогда из каждой клетки выходит один синий и один красный отрезок, при этом они идут в разные клетки – иначе из этих двух клеток нельзя было бы добраться до остальных.

Раскрасим все клетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвета (клетку $a1$ покрасим в белый цвет), и поставим на каждом синем отрезке стрелку от белой клетки к чёрной, а на красном – от чёрной к белой. Тогда из каждой клетки ведёт ровно одна стрелка, и в неё входит ровно одна. Тогда все клетки разбились на циклы, и, если Васе удалось, то получился один цикл из всех клеток.

Пусть a – верхняя горизонталь, а z – нижняя. Пусть в Петинном разбиении присутствуют домино $a1 - a2$ и $z2 - z3$ (такое разбиение возможно, если, например, клетки $z1$ и $z100$ покрыть вертикальными домино, а все остальные домино сделать горизонтальными). Тогда эти отрезки будут ориентированы как $a1 \rightarrow a2$ и $z1 \rightarrow z2$. Если они находятся в одном цикле, то этот цикл должен пройти от $a2$ к $z2$, а затем от $z3$ к $a1$. Но такие два пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

9.8. Решение. Поскольку $AD \parallel CB$, треугольники EAD и ECB подобны, и поэтому $\frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AD}$. Построим треугольник BCD до параллелограмма $BCDK$ (рис. 3). Тогда треугольники DEF и DBK подобны, поэтому $\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB}$. Наконец, поскольку $DK = BC$ и $DB = DA$, получаем

$$\frac{DF}{DE} = \frac{DK}{DB} = \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{DE},$$

откуда и следует, что $DF = BE$.

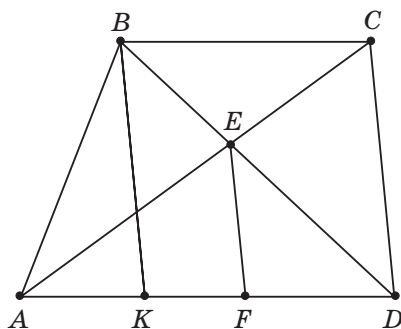


Рис. 3

9.9. Ответ: 180.

Решение 1. Пример. Покажем сначала, что при $N = 180$ требуемое возможно. Отметим на окружности 180 точек, разбивающих её на 180 равных дуг величиной по 2° каждая. Величина любой дуги с концами в двух из отмеченных точек выражается чётным числом градусов, поэтому величина любого вписанного в окружность угла, образованного тремя отмеченными точками, выражается натуральным числом градусов. Следовательно, 180 отмеченных точек удовлетворяют условию задачи.

Оценка. Осталось доказать, что $N \leq 180$. Любые три отмеченных точки образуют треугольник, поэтому не могут лежать на одной прямой. Считая отмеченные точки расположенными на координатной плоскости, обозначим через A любую из них с максимальной ординатой. Среди оставшихся выберем точки B и C такие, что угол BAC максимален.

Из условия задачи следует, что в треугольнике ABC величины углов ABC и ACB не меньше 1° , поэтому величина угла BAC не больше 178° . Ввиду выбора точек B и C остальные $N - 3$ отмеченные точки лежат строго внутри угла BAC , и каждый луч с началом в точке A содержит не больше одной из них. Проведя через каждую отмеченную точку внутри угла BAC луч с началом в точке A , получим $N - 3$ раз-

личных луча, делящих $\angle BAC$ на $N - 2$ угла. Если $N - 2 > 178$, то хотя бы один из этих углов имеет величину, меньшую 1° , и является углом некоторого треугольника с вершинами в трёх отмеченных точках, что противоречит условию задачи. Следовательно, $N - 2 \leq 178$, то есть $N \leq 180$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Описать выбор используемой в решении точки A можно также следующими способами.

1. Рассмотрим вершину A выпуклой оболочки системы отмеченных точек. В качестве точек B и C тогда можно взять соседние с A вершины выпуклой оболочки.

2. Рассмотрим опорную прямую множества отмеченных точек, то есть такую прямую, что все отмеченные точки лежат по одну сторону от этой прямой, а на самой прямой лежит хотя бы одна отмеченная точка. Эту точку и можно взять за точку A .

Замечание 2. В примере отмеченные точки являются вершинами правильного 180-угольника. Все примеры для $N = 180$ устроены именно таким образом (это не сложно вывести, используя рассуждения из доказательства оценки, но, конечно, это не требуется в решении).

Решение 2. Приведём другое доказательство оценки. Рассмотрим пару отмеченных точек A, B , расположенных на наибольшем расстоянии друг от друга. Тогда для любой другой отмеченной точки C сторона AB – наибольшая в треугольнике ABC , поэтому, в частности, угол $\angle BAC$ острый.

Проведя из точки A лучи во все отмеченные точки, получаем, что все эти лучи различны (ибо три отмеченных точки не могут лежать на одной прямой), и каждый составляет с лучом AB острый угол, выражаемый целым числом градусов. Такой

угол (если луч не совпадает с AB) может принимать значения от 1° до 89° , поэтому количество таких лучей $N - 2$ не превосходит $2 \cdot 89 = 178$. Отсюда $N \leq 180$.

Замечание 3. Можно доказать оценку несколько по-другому. Рассмотрим угол BAC выпуклой оболочки множества отмеченных точек. Он выражен натуральным числом градусов и меньше 180° , значит, он не превосходит 179° . Далее повторяя рассуждения из решения, получаем, что $N - 2 \leq 179$, откуда $N \leq 181$.

Если хотя бы один угол выпуклой оболочки не больше 178° , то доказываем оценку $N \leq 180$ так же, как в первом решении.

Остаётся случай, когда все углы выпуклой оболочки равны 179° , или все внешние углы выпуклой оболочки равны 1° . Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360° , поэтому в выпуклой оболочке не менее 360 вершин, тогда $N \leq 360$. Но ранее показано, что $N \leq 181$ – противоречие.

9.10. Решение. Положим $a = 10^{100}$. Через $s(m)$ обозначим сумму цифр числа m . Отметим простое свойство $s(l) + s(m) \geq s(l + m)$, которое сразу видно, если числа l и m сложить в столбик.

Лемма. Пусть k – натуральное число и пусть натуральное число m кратно $10^k - 1$. Тогда $s(m) \geq 9k$.

Доказательство леммы. Индукция по m . База $m = 10^k - 1$ очевидна.

Предположим, что $m \geq 10^k$ и что утверждение доказано для всех чисел, меньших m . Докажем его и для m . Пусть последние k цифр числа m образуют число v (возможно, с ведущими нулями), а все остальные – число $u > 0$ (иначе говоря, $m = uv = 10^k u + v$). Поскольку m делится на $10^k - 1$, то и число $m' = u + v = m - (10^k - 1)u$ также кратно $10^k - 1$. При этом $0 < m' < m$. Поэтому $s(m') \geq 9k$ по

предположению индукции, а тогда и $s(m) = s(u) + s(v) \geq s(u + v) = s(m') \geq 9k$. Лемма доказана.

Для решения задачи осталось взять такое k , что $9k \geq a$, и заметить, что если $b = 10^k - 1$ и $n \geq b$, то $n!$ делится на $10^k - 1$ и, значит, $s(n!) \geq 9k \geq a$.

Замечание. В доказательстве леммы по сути использован следующий признак делимости на $10^k - 1$. Разобьём десятичную запись числа m на блоки по k цифр (первый блок может быть неполон). Воспринимая эти блоки как обычные числа (возможно, с ведущими нулями), сложим их, получив число m' . Тогда m кратно $10^k - 1$ тогда и только тогда, когда m' делится на $10^k - 1$.

У леммы есть несколько вариаций; например, любое число, делящееся на число

$\underbrace{11\dots1}_{k \text{ единиц}}$, имеет сумму цифр, не меньшую k .

10 класс

10.6. Ответ: не может.

Решение. Пусть r – остаток меньшего из данных нечётных чисел при делении на 2022, так что k – некоторое нечётное число из множества $\{1, 3, 5, \dots, 2021\}$. Если $r \leq 2017$, то два других остатка – $r + 2$ и $r + 4$, так что сумма остатков равна $r + (r + 2) + (r + 4) = 3(r + 2)$ – это число составное, так как делится на 3 и больше 3. Отдельно рассмотрим случаи $r = 2019$ и $r = 2021$. В первом случае остатки данных чисел равны 2019, 2021 и 1. Во втором случае остатки данных чисел равны 2021, 1 и 3. В обоих случаях сумма остатков делится на 3 и больше 3.

Замечание 1. Во всех трёх случаях сумма трёх остатков равна $3(r + 2) - 2022k$, где $k \in (0, 1, 2)$.

Замечание 2. Если в условии задачи 2022 заменить на другое число (не крат-

ное 3), то сумма остатков от деления трёх последовательных нечётных чисел на это число может оказаться простым числом. Например, сумма остатков чисел 19, 21, 23 при делении на 20 равна $19 + 1 + 3 = 23$ – простое число.

10.7. Решение. Обозначим $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$ (рис. 4). На продолжении отрезка AB за точку A отметим точку F так, что $AD = AF$. Тогда треугольник AFD равнобедренный, и его углы при основании равны. Так как $\angle FAD = 180^\circ - 2\alpha$, то $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ – вписанный, то $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle ADF$. Следовательно, точки C , D и F лежат на одной прямой. Тогда $\angle CFB = \alpha = \angle CBF$, поэтому треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой. Следовательно, $BE = EF = AD + AE$, что и требовалось доказать.

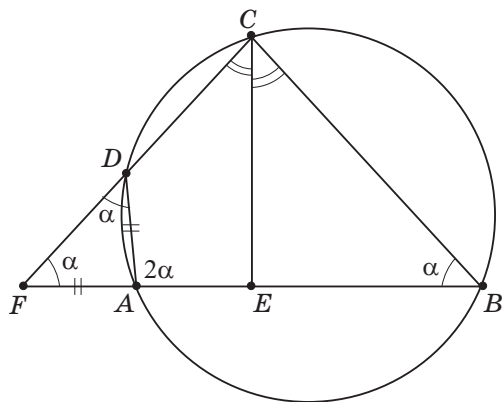


Рис. 4

Замечание 1. Существует и такая вариация решения. Обозначим $\angle ABC = \alpha$, тогда по условию $\angle DAB = 2\alpha$. Из вписанности четырёхугольника $ABCD$ имеем $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ - \alpha$, лучи BA и CD пересекаются в некоторой точке F , и при этом $\angle BFC = \alpha$. Поскольку $\angle CFB = \alpha =$

$= \angle CBF$, треугольник FCB равнобедренный. Значит, его биссектриса CE совпадает с медианой, поэтому $BE = EF = AF + AE$.

Для завершения решения остаётся показать, что $AF = AD$. Это следует из вписанности четырёхугольника $ABCD$, поскольку $\angle ADF = \angle CBF = \alpha$. Значит, треугольник AFD равнобедренный с равными углами $\angle AFD = \angle ADF = \alpha$.

Замечание 2. Во втором решении равнобедренность треугольника FCB можно обосновать по-другому, заметив, что CE – его высота: $\angle DAB = 2\alpha \Rightarrow \angle DCB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle ECB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CEB = 90^\circ$.

10.8. Ответ: 180.

Решение. См. решение 9.9.

10.9. Ответ: 50.

Решение. См. решение 8.10.

10.10. Решение. См. решение 9.10.

11 класс

11.6. Ответ: $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$.

Решение. См. решение 9.6.

11.7. Ответ: не может.

Решение. Если бы такое число m существовало, то $x \geq 1$ и $y \geq 1$, поскольку произведение цифр натурального числа не может быть отрицательным. Следовательно, числа n и $n + 1$ не содержат нулей в десятичной записи. Тогда эти числа отличаются лишь последней цифрой, причём у числа $n + 1$ она больше на единицу. Таким образом, $y > x$. Если $x - 1 > 0$, то, рассуждая аналогично, мы получим, что $y - 1 < x - 1$, это противоречит доказанному выше. Следовательно, $x - 1 = 0$. Тогда $x = 1$, и в десятичной записи числа n все цифры равны 1. Отсюда следует, что в числе $n + 1$ последняя цифра – двойка, а остальные цифры – единицы, поэтому $y = 2$. Значит, $y - 1 = 1$, и число m состоит лишь из единиц. Но тогда число $m + 1$ не содержит нулей в десятичной за-

Список источников

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Математика. Областные олимпиады. 8–11 класс. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.

2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.

3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012/2013 учебного года // Математика в школе. 2013. № 9. С. 36–46.

4. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013/2014 учебного года // Математика в школе. 2014. № 9. С. 37–40.

5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015/2016 учебного года // Математика в школе. 2016. № 5. С. 16–28.

6. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиа-

ды школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (первый день) // Математика в школе. 2019. № 4. С. 11–21.

7. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (второй день) // Математика в школе. 2019. № 5. С. 15–25.

8. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (первый день) // Математика в школе. 2020. № 5. С. 12–19.

9. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (второй день) // Математика в школе. 2020. № 6. С. 10–20.

Статья поступила в редакцию

31.08.2022.

Принята к публикации

24.09.2022.



МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ — КЛЮЧ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

THE METHOD OF ADDITIONAL CONSTRUCTIONS IS THE KEY TO SOLVING THE PROBLEM

Научная статья

УДК: 372.851

Scientific article

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_2_19

Л.Ю. Есина, МПГУ (Москва),
laesina@gmail.com

L.Y. Yesina, MPSU (Moscow),
laesina@gmail.com

Аннотация: в статье на примере изучения свойств четырёхугольников рассматриваются три этапа обучения решению геометрической задачи методом дополнительных построений

Abstract: using the example of studying the properties of quadrilaterals, the article considers three stages of learning to solve a geometric problem by the method of additional constructions

Ключевые слова: планиметрические задачи повышенной сложности, метод дополнительных построений

Keywords: planimetric tasks of increased complexity, the method of additional constructions

© Есина Л.Ю. 2023

Успешное освоение курса геометрии требует от школьников высокого уровня самоорганизации. Одним из её компонентов является *осознанность учебных действий*. Как её можно формировать, рассмотрим на примере обучения решению планиметрических задач повышенной сложности.

Затруднения школьников в решении планиметрических задач часто связаны с тем, что во время обсуждения не поясняется, как был выбран метод решения. Внимание учащихся не акцентируется на общих методах и приёмах, которые являются ключом к решению большинства задач повышенной сложности. Целенаправленное обучение таким методам и приёмам требует подбора специальных упражнений и систематизации на их основе приёмов учебной работы школьников.

Одним из результативных методов

решения планиметрических задач повышенной сложности является *метод дополнительных построений*, или *метод вспомогательных фигур*. Как показывает практика обучения геометрии, школьники испытывают значительные затруднения при решении задач, требующих дополнительных построений, и чаще выбирают способ решения без их применения, если конфигурация в задаче это допускает. Только исчерпав другие возможности, учащиеся, знакомые с указанным методом, всё же выполняют некоторые построения, но не всегда могут объяснить, с какой целью они делаются.

Выбор метода дополнительных построений для решения конкретной задачи может быть обусловлен как «родственными» отношениями объектов, например между касательной к окружности и радиусом, проведённым в точку касания [2, 4], пони-

манием ключевой роли треугольника [5], так и применением «поисковых областей» геометрических объектов, связанных одним из отношений: равенства, параллельности или перпендикулярности [1].

Использование дополнительных построений должно быть осознанным. Под осознанным использованием указанного метода будем понимать:

- *осознание назначения* конкретных дополнительных построений;
- *осознанный выбор* подходящего для решения задачи построения;
- *аргументацию* сделанного выбора.

В учебно-методической литературе для студентов педагогических вузов и учителей математики проблема обучения дополнительным построениям при решении геометрических задач достаточно хорошо представлена. В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович делают акцент на дополнительных построениях как на приёме поиска решения задачи и указывают некоторые такие построения для планиметрических задач:

- 1) проведение прямой, параллельной или перпендикулярной одной из имеющихся на рисунке прямых;
- 2) удвоение медианы треугольника с последующим достраиванием треугольника до параллелограмма;
- 3) проведение вспомогательной окружности;
- 4) проведение радиусов в точки касания двух окружностей или окружности и прямой [2].

И.Ф. Шарыгин представляет простую и доступную для школьников классификацию приёмов дополнительных построений. Автор выделяет четыре построения:

- 1) соединение двух точек отрезком;
- 2) продолжение отрезка прямой;
- 3) проведение через данную точку прямой, параллельной данной;

- 4) проведение через данную точку прямой, перпендикулярной данной [5].

Эти построения позволяют увеличить число треугольников на рисунке в целях применения метода ключевого треугольника (к изучению его свойств сводится решение).

Г.И. Саранцев предлагает использовать «родственные» отношения между объектами в планиметрии. Например, такими отношениями связаны два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, описанная окружность и углы, опирающиеся на одну дугу. Восстановление окружности, описанной около таких треугольников, может стать дополнительным построением, приводящим к решению. По мнению автора, знание специальных конфигураций геометрических объектов способствует поиску дополнительного построения, необходимого для решения задачи [4].

В то же время ни в методической, ни в учебной литературе ещё не сложилась практика такого представления теории и задачного материала, которое обеспечивало бы обучение школьников поиску решения задач с помощью метода дополнительных построений. Обучение этому методу часто сводится к демонстрации готовых решений. Но, на наш взгляд, главная цель состоит в формировании у школьников умения сделать осознанный выбор дополнительного построения на этапе поиска решения. Учащиеся, получившие опыт в решении задач методом дополнительных построений, начинают применять его чаще, так как понимают, к каким результатам может привести то или иное дополнительное построение.

Как известно, формирование математических умений школьников происходит поэтапно. Поэтому освоение умения выполнять дополнительные построения свя-

зано с приёмами учебной работы, которые реализуются на трёх основных этапах:

- 1) введение приёма;
- 2) обучение путям переноса приёма в новые условия (решение аналогичных задач) и нахождение нового приёма;
- 3) подведение учащихся к обобщению приёма [3].

Рассмотрим подробнее каждый из них.

Этап 1. *Введение приёма решения задач методом дополнительных построений и его закрепление с помощью упражнений*

На этом этапе учитель может предложить классификацию дополнительных построений и с помощью специальных упражнений продемонстрировать применение построения каждого типа. При таком подходе школьники могут не только изучить наиболее часто встречающиеся дополнительные построения, но и осуществлять самостоятельный поиск решения задачи путём их перебора.

Будем рассматривать дополнительные построения следующих пяти типов.

1. Соединение двух точек отрезком.
2. Продолжение отрезка:
 - а) до пересечения с другим отрезком, лучом или прямой;
 - б) путём удвоения отрезка.
3. Проведение через точку прямой, перпендикулярной данной прямой.
4. Проведение через точку прямой, параллельной данной прямой.
5. Построение вспомогательной окружности.

Покажем, как можно воспользоваться этой классификацией для составления упражнений на формирование приёма учебной работы, связанного с выполнением дополнительных построений. Сделаем это на примере изучения свойств трапеции.

В таблице представлены упражнения на применение к трапеции построений всех пяти типов. От учащихся требуется выделить и назвать добавляющиеся в результате построений геометрические фигуры, сделать выводы об их свойствах. Как и при обучении решению задач, учитель может использовать подсказки и наводящие вопросы (в особенности если свойства, которые следует получить, ранее не обсуждались и незнакомы ученикам).

В первом столбце указаны дополнительные построения и дано их описание применительно к трапеции. Во втором столбце для каждого построения записаны условия, при которых его необходимо выполнить, даётся рисунок трапеции. Учащиеся заполняют третий столбец: делают указанное построение на готовом рисунке, записывают замеченные новые фигуры и их свойства, то есть оценивают результаты выполнения этого построения.

В последнем столбце таблицы уже записаны предполагаемые ответы. На практике «открытие» новых знаний происходит при фронтальной работе, когда выводы учащихся фиксируются на доске и обосновываются устно. Работа проводится поэтапно: выполняется каждое упражнение и заполняется соответствующая клетка таблицы. Важно, чтобы перечень обнаруженных свойств был как можно более полным. При необходимости учитель с помощью наводящих вопросов помогает учащимся открывать новые для них знания.

Очевидно, что такие упражнения могут быть реализованы и в иной форме, например с использованием цифровой образовательной среды школы. Это требует большей подготовки со стороны учителя, но позволит повысить наглядность. Возьмём, к примеру, дополнительное построение 1. Чтобы помочь ученикам

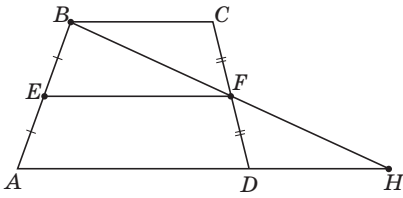
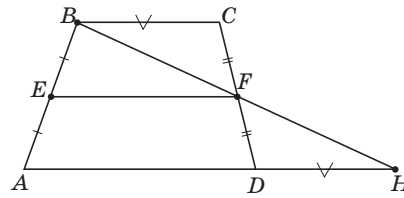
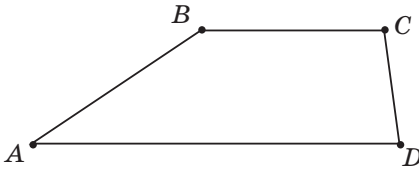
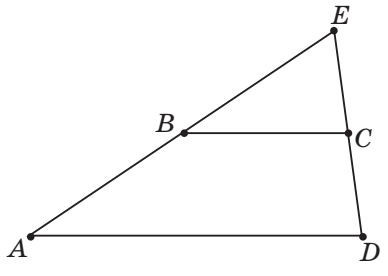
открыть свойство 1) $S_{BAD} = S_{CAD}$, можно на исходном рисунке выделить цветом общую сторону треугольников BAD и CAD , а затем провести к ней высоту каждого

треугольника. Демонстрация цепочки рисунков с отмеченными на них цветом равными элементами позволяет ученикам быстрее «увидеть» новое свойство.

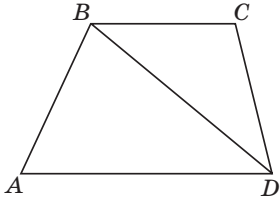
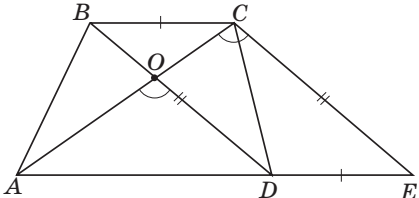
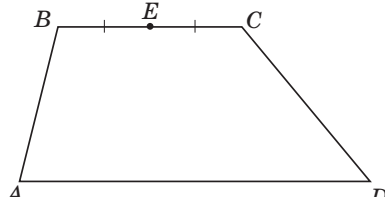
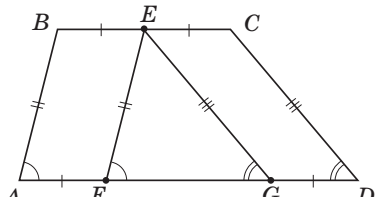
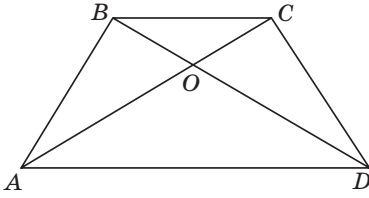
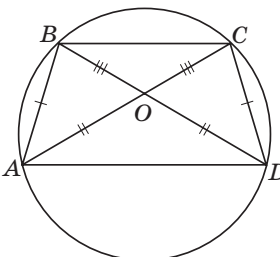
Таблица

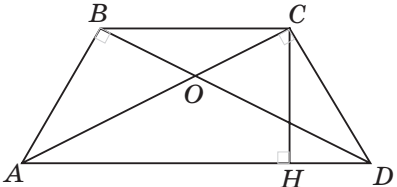
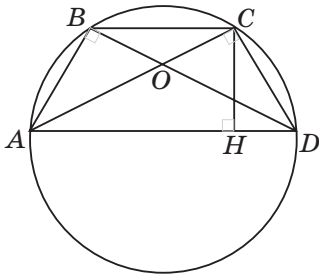
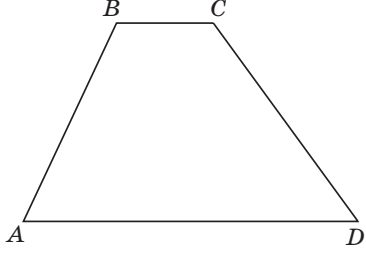
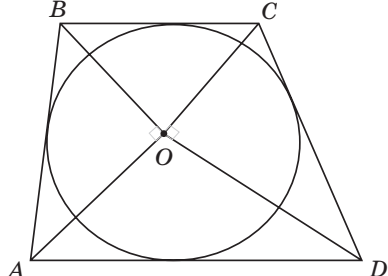
Упражнения на дополнительные построения в трапеции

Дополнительное построение	Условия	Результат
1 Соединить противоположные вершины трапеции отрезками (тип 1)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$	Проведены диагонали AC и BD . 1) $S_{BAD} = S_{CAD}$. 2) $S_{BAC} = S_{BDC}$. 3) $S_{BAO} = S_{CDO}$. 4) Треугольники AOD и BOC подобны
2 Последовательно соединить середины сторон трапеции отрезками (тип 1)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, E, F, G, H – середины сторон трапеции. AC и BD – диагонали трапеции	Проведены отрезки EF, FG, GH, HE . 1. $EFGH$ – параллелограмм. 2. $EF = 0,5AC$. 3. $FG = 0,5BD$. 4. $\angle EFG = \angle AOD$. 5. $\angle FGH = \angle BOA$

3	Продлить отрезок, соединяющий вершину трапеции с серединой боковой стороны, до пересечения с другим основанием трапеции (тип 2)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, EF – средняя линия трапеции. Отрезок BF соединяет вершину трапеции с серединой боковой стороны	Отрезок BF продлён за точку F до пересечения с продолжением основания AD в точке H . 1. EF – средняя линия треугольника ABH . 2. $AH = AD + BC$. 3. $S_{ABCD} = S_{ABH}$
			
4	Продлить боковые стороны трапеции до пересечения (тип 2)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$	Продлены отрезки AB и CD до пересечения в точке E . 1. Треугольники ADE и BCE подобны. 2. $\angle E = 180^\circ - (\angle A + \angle D)$. 3. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° , то треугольник ADE – прямоугольный
			
5	Провести высоты трапеции из вершин, принадлежащих меньшему основанию (тип 3)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$	Проведены отрезки BE и CF . $BE \perp AD$, $CF \perp AD$. 1. $BC = EF$. 2. $AD = AE + BC + FD$. 3. Равенство треугольников ABE и DCF равносильно равенству отрезков AB и CD

6	Провести высоты трапеции через середины боковых сторон (тип 3)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, E, F – середины боковых сторон трапеции	Проведены отрезки GL, HK, GB, CH. $GL \perp AD, HK \perp AD$, $BC = a, AD = b, GL = h$. $GB + CH = \frac{b-a}{2}$. $GH = a + GB + CH = \frac{a+b}{2}$. $S_{ABCD} = S_{LGHK} = \frac{a+b}{2}h$.
7	Через вершину трапеции провести прямую, параллельную боковой стороне (тип 4)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$	Проведён отрезок BE. $BE \parallel CD$ $BCDE$ – параллелограмм. $\angle AEB = \angle ADC$

8	Через вершину C трапеции провести прямую, параллельную диагонали BD (тип 4), затем продлить основание AD до пересечения с этой прямой (тип 2)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$. BD – диагональ трапеции 	Проведена прямая CE. $CE \parallel BD$. Основание AD продлено за точку D до пересечения с CE. $BCDE$ – параллелограмм. $\angle AOD = \angle ACE$ 
9	Через середину основания трапеции провести прямые, параллельные боковым сторонам (тип 4)	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $BE = EC$ 	Проведены отрезки EF, EG. $AB \parallel EF$, $CD \parallel EG$. $ABEF$ – параллелограмм. $DCEG$ – параллелограмм. $\angle A = \angle F$, $\angle D = \angle G$. $\angle E = 180^\circ - (\angle A + \angle D)$ 
10	Около трапеции описать окружность (тип 5). <i>Замечание.</i> Это дополнительное построение применимо для трапеций, у которых сумма противоположных углов равна 180°	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$, $AC \cap BD = O$ 	Около трапеции описана окружность. $ABCD$ – равнобедренная трапеция. - Треугольники AOD и BOC – равнобедренные 

11	Около трапеции описать окружность с диаметром AD (тип 5). <i>Замечание.</i> Это дополнительное построение применимо для трапеций, у которых диагонали перпендикулярны боковым сторонам	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $AC \perp CD$, $BD \perp AB$, $AC \cap BD = O$ 	Около трапеции описана окружность. 1. AD – диаметр описанной окружности. 2. $ABCD$ – равнобедренная трапеция. 3. Треугольники AOD и BOC – равнобедренные. 4. Высота CH трапеции есть среднее пропорциональное отрезков, на которые она делит основание AD 
12	Вписать окружность в трапецию (тип 5). <i>Замечание.</i> Это дополнительное построение применимо для трапеций, у которых суммы длин противоположных сторон равны	$ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $AB + CD = BC + AD$ 	Окружность вписана в трапецию. 1. Средняя линия трапеции, описанной около окружности, равна полусумме боковых сторон. 2. Диаметр окружности является высотой трапеции. 3. $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ 

В результате выполнения этих упражнений школьники *осознают назначение* каждого дополнительного построения. Обратим внимание, что упражнения 10, 11 и 12 могут быть именно упражнениями, если соответствующие свойства четырёхугольников, вписанных и описанных около окружности, уже изучены. Отметим, что интересно рассмотреть те же построения в равнобедренной и в прямоугольной трапециях.

Следующие два этапа формирования умения использовать дополнительные построения проиллюстрируем на примере задач, подобранных таким образом, что их решение либо затруднительно, либо нерационально без использования одного из изученных дополнительных построений. Новизна условий в том, что рассматривается не трапеция, а произвольный выпуклый четырёхугольник. Школьникам предоставляется возможность убедиться, что имеется вариативность в выборе дополнительного построения.

Этап 2. Обучение переносу приёма в новые условия

На этом этапе учащимся предстоит сделать *осознанный выбор* подходящего построения для решения задачи.

Задача 1. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ADC = 30^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$. Найдите длину стороны CD , если известно, что $AB = 6$, $BC = 4$ (рис. 1).

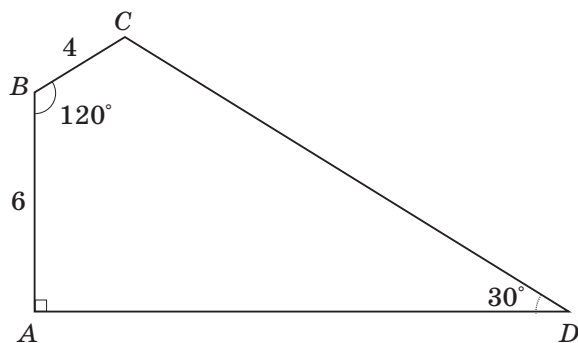
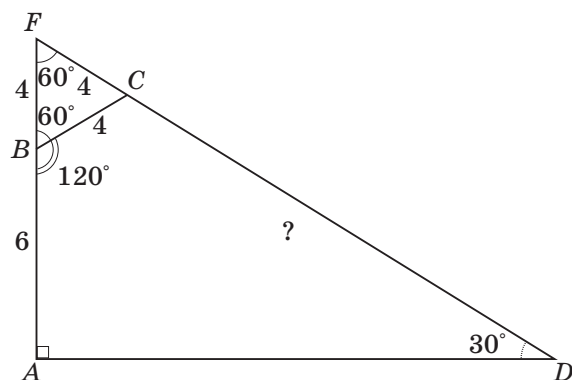


Рис. 1

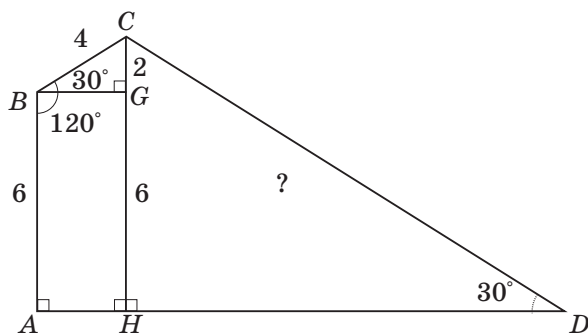
Учащимся предлагается решить задачу, применив известные им типы дополнительных построений. Например, осуществить их перебор и оценить потенциальную пользу построения каждого типа с точки зрения поиска решения задачи. Как показала практика работы с учениками седьмых классов, на перебор всех дополнительных построений уходит не более десяти минут. При этом школьники получают опыт самостоятельной организации поиска решения задачи. Они достаточно быстро понимают, что основной идеей, на которой основано применение метода дополнительных построений, является получение на рисунке новых фигур, в частности треугольников. Сложность представляет как раз построение такой фигуры, для которой можно сформулировать свойства. Это может послужить критерием для выбора дополнительного построения при их переборе.

Целесообразно объединить учащихся в малые группы. Это способствует более осознанному выбору подходящего построения, поскольку появляется необходимость оценивать эффективность не только собственных идей, но и предложений других участников группы. Обсудив найденные способы решения задачи, каждая группа записывает на доске свой план решения для последующего общего обсуждения. В результате оказывается, что к решению задачи 1 может привести как продление сторон четырёхугольника до пересечения, так и проведение перпендикуляра к стороне четырёхугольника (рис. 2).

Отмечается, что решение задачи 1 предполагает дополнительное построение одного из трёх типов: 2а, 3 или 4. В первом случае при продолжении отрезков DC и AB до пересечения в точке F на рисунке возникают равнобедренный треугольник BCF и прямоугольный тре-



a)



б)

Рис. 2

угольник ADF с углом 30° (рис. 2a). Два других построения равноценны, то есть приводят к отрезкам CH и BG (рис. 2б). Тогда для решения задачи используются свойства прямоугольника $AHGB$ и прямоугольных треугольников BGC , CHD с углом 30° каждый.

Этап 3. Обобщение приёма

Суть этого этапа заключается в подведении учащихся к обобщению приёма учебной работы.

Задача 2*. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$. Биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке X , а продолжение стороны BC за точку C – в точке Y (рис. 3). Оказалось, что $\angle AXC = 90^\circ$.

* Пригласительный (пробный) этап ВсОШ в городе Москве, математика, 7 класс, 2022. № 6, вариант 1. См. на <https://vos.olimpiada.ru/>.

Найдите длину отрезка AB , если известно, что $AD = 16$, $CY = 13$.

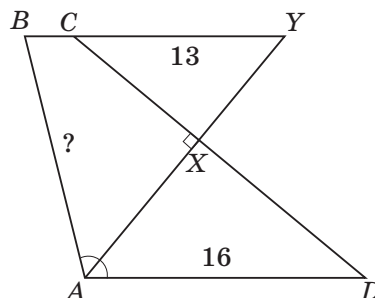


Рис. 3

Сначала учащиеся работают в парах. Перед ними ставится задача подобрать как минимум два подходящих дополнительных построения и записать план решения в каждом случае. Затем пары объединяются в четвёрки и сверяют результаты. Учитель наблюдает за каждой группой, при необходимости корректирует её работу с помощью подсказок, указаний, наводящих вопросов. При такой организации работы продолжается формирование у учащихся осознанного использования дополнительных построений в части *аргументации* сделанного *выбора*, как это было продемонстрировано и на этапе 2. Навык закрепляется во внешней речи, в дальнейшем переходя во внутреннюю речь, когда школьники ищут решение самостоятельно.

Перебор всех типов построений даёт следующие результаты.

Использование дополнительного построения типа 1 не приводит к решению.

В результате дополнительного построения типа 2, а именно продления отрезков AB и CD до пересечения в точке E , на рисунке увеличивается количество треугольников. Анализ их свойств показывает, что треугольники ADE и BCE равнобедренные, как и треугольник ABY . Дальнейшие рассуждения требуют об-

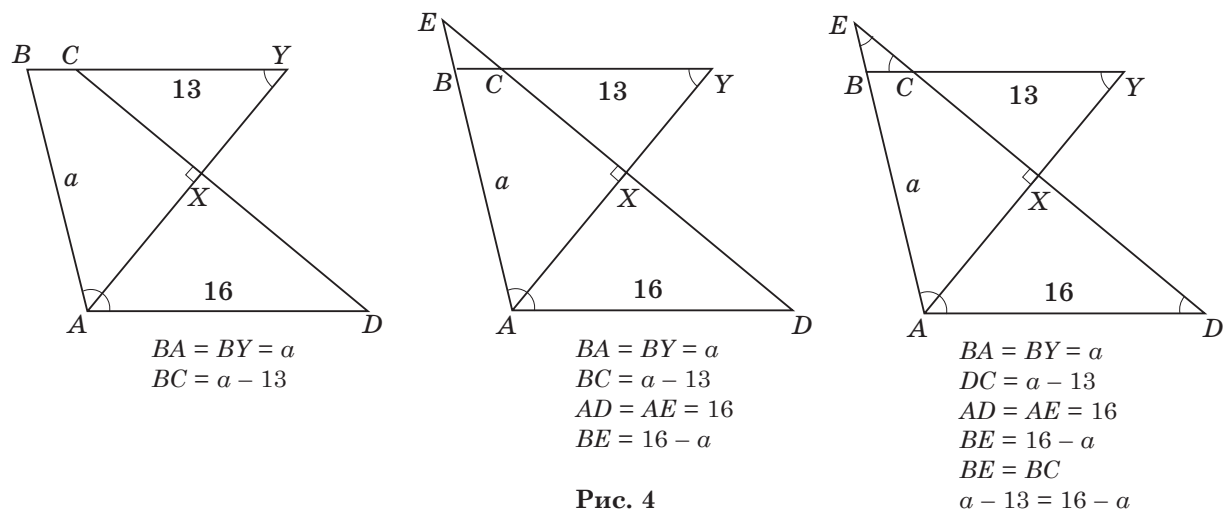


Рис. 4

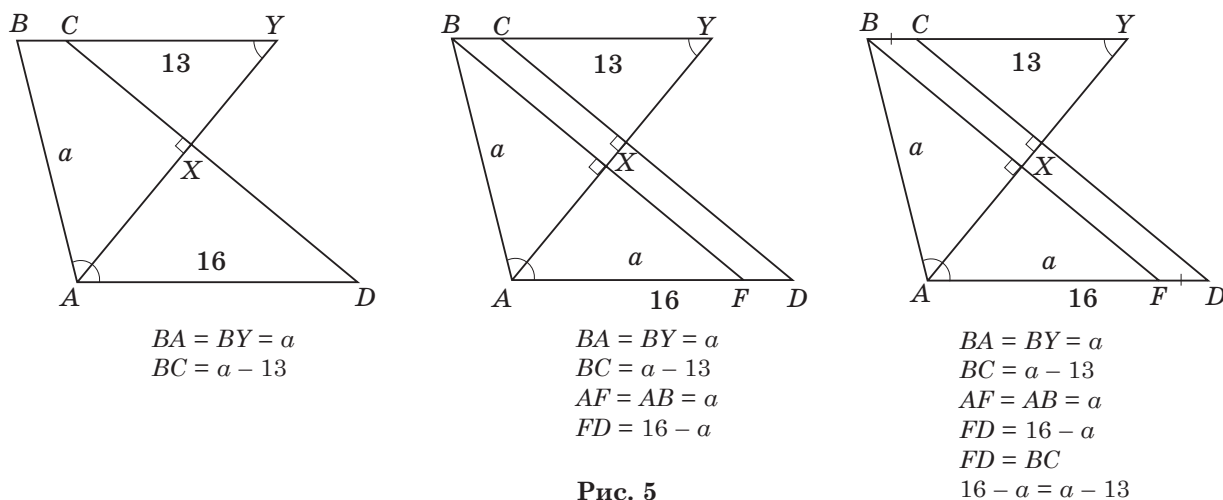


Рис. 5

ращения к алгебраическому методу. Решение задачи 2 таким способом можно представить в виде следующей цепочки рисунков (рис. 4).

Использование дополнительного построения типа 3 не приводит к решению.

В результате дополнительного построения типа 4, а именно проведения через точку B прямой BF , параллельной CD , на рисунке появляются параллелограмм $BCDF$ и равнобедренный треугольник ABF в дополнение к имевшемуся на исходном рисунке равнобедренному треугольнику ABY . Далее применяется

алгебраический метод. Решение задачи 2 этим способом можно представить в виде такой цепочки рисунков (рис. 5).

Если на регулярной основе предлагать школьникам упражнения и задачи, требующие использования приёмов учебной работы по выполнению дополнительных построений различного типа, то в процессе такой учебной деятельности они будут постепенно осваивать соответствующий метод решения задач.

Проведение описанной трёхэтапной работы по формированию приёма решения задач с помощью метода дополни-

тельных построений занимает два-три урока. Представляется целесообразным проводить такой блок уроков в седьмом классе в рамках темы «Треугольники», в восьмом классе – при изучении свойств четырёхугольников и вписанных (описанных) фигур, а также в девятом классе – на уроках обобщающего повторения на соответствующем задачном материале.

Список источников

1. *Боженкова Л.И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. – Электр. изд. – М.: Лаборатория знаний, 2015.
2. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике. Геометрия: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов и учителей. – М.: Просвещение, 1992.

вич А.Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов и учителей. – М.: Просвещение, 1992.

3. *Денищева Л.О.* и др. Теория и методика обучения математике в школе: учебное пособие. – М.: Лаборатория знаний, 2014.

4. *Саранцев Г.И.* Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. – М.: ВЛАДОС, 2006.

5. *Шарыгин И.Ф.* Стандарт по математике: 500 геометрических задач: книга для учителя. – М.: Просвещение, 2005.

Статья поступила в редакцию 19.10.2022.

Принята к публикации 25.11.2022.

Составлен рейтинг лучших российских школ со специализацией по математике и естественным наукам

Образовательный Центр «Сириус» при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) и портала Olimpiada.ru составил рейтинг российских школ, чьи ученики показывают лучшие результаты в области математики и естественных наук. Всего в список вошли 200 учебных заведений. Лидером рейтинга стал Президентский физико-математический лицей № 239 из Санкт-Петербурга.

Топ-20 лучших школ России математического и естественно-научного профиля:

- Президентский физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
- Общеобразовательная школа Центра педагогического мастерства, г. Москва;
- СУНЦ МГУ, г. Москва;
- «Физтех-лицей» имени Капицы, Московская область;
- Лицей «Вторая школа» имени Овчинникова, г. Москва;
- Школа № 179, г. Москва;
- Республиканский лицей для одарённых детей, Республика Мордовия;
- Пятьдесят седьмая школа, г. Москва;
- Школа «ЛЕТОВО», г. Москва;
- Воробьёвы горы, г. Москва;
- Физико-математический лицей № 5 г. Долгопрудный, Московская область;
- Лицей «Физико-техническая школа» имени Алферова, г. Санкт-Петербург;
- Физико-математический лицей № 31 г. Челябинск, Челябинская область;
- СУНЦ НГУ, Новосибирская область;
- Физико-математическая школа, Тюменская область;
- Лицей № 131 Вахитовского района г. Казань, Республика Татарстан;
- Школа № 1568 имени Пабло Неруды, г. Москва;
- Школа № 2007 ФМШ, г. Москва;
- СУНЦ УрФУ, Свердловская область;
- Лицей-интернат № 2 Московского района города Казани, Республика Татарстан

Источник: mathcenter.kpfu.ru

ФРОНТАЛЬНО-ПАРНЫЕ ЗАНЯТИЯ (НА ПРИМЕРЕ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ПРОПОРЦИЯ»)

FRONT-PAIR CLASSES (USING THE EXAMPLE OF STUDYING THE TOPIC «PROPORTION»)

Научная статья

Scientific article

УДК: 372.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_2_31

В.Б. Лебединцев, кан. пед. наук., доцент, Красноярский краевой институт повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования (Красноярск), lebedincev@kipk.ru,

И.М. Ламтюгина, ФКОУ СОШ ГУФСИН России по Красноярскому краю (Канск), lamtyugina_i@mail.ru

V.B. Lebedintsev, PhD (Pedagogy), As. Prof., Krasnoyarsk regional institute for advanced training and professional retraining of educators (Krasnoyarsk), lebedincev@kipk.ru,

I.M. Lamtyugina, Secondary School of the GUF SIN of Russia in the Krasnoyarsk Territory (Kansk), lamtyugina_i@mail.ru

Аннотация: в статье описан новый вариант организационной структуры и технология проведения фронтально-парного занятия, сочетающего два вида работы с учащимися: фронтальную и парную; рассмотрен пример такого занятия: урок изучения нового материала по теме «Пропорция»

Abstract: the article describes a new version of the organizational structure and the technology of conducting a frontal-paired lesson combining two types of work with students: frontal and paired; an example of such a lesson is considered: a lesson of studying new material on the topic «Proportion»

Ключевые слова: образовательная технология, фронтально-парные занятия, урок изучения нового материала, пропорция

Keywords: educational technology, front-pair classes, a lesson in learning new material, proportion

© Лебединцев В.Б., Ламтюгина И.М. 2023

На уроке учитель имеет дело с группой учащихся – «обобщённым учеником». Если класс за счёт усилий разных учеников даёт правильные ответы на все вопросы, это вовсе не означает, что каждый овладел необходимым объёмом знаний. Всегда будут ученики, которым легко, как бы само собой удаётся уяснить материал, но что делать с теми, у кого это не получается? Значительная часть обучающихся испытывает недопонимание, а кто-то и полное непонимание изложенного учителем. Причины тому разные, например пробелы в знаниях, невнимательность,

неадекватные способы восприятия и переработки информации.

Попытки хотя бы частично устранить недопонимание посредством фронтальной работы либо индивидуального выполнения заданий на закрепление нового материала малоэффективны. Нами разработан особый вид учебных занятий, на которых фронтальная форма организации обучения сочетается с активным взаимодействием учащихся друг с другом в парах, – *фронтально-парные занятия*, или кратко ФПЗ [1].

Парная работа позволяет существенно

увеличить долю учащихся, включённых в обучение продуктивно. Следует признать: мало кто из ребят в одиночку выполняет весь комплекс учебных действий, который приводит к пониманию учебного материала. При работе в паре появляется возможность для совместного обсуждения, напарник вынуждает, инициирует, обеспечивает действия партнёра по освоению материала. Привычка работать в паре делает ученика причастным к добыванию знаний. Эта форма обучения является основой решения исходной проблемы образовательной практики: как действительно включить *каждого* обучающегося в учебный процесс [2].

В основе ФПЗ лежит также ряд других фундаментальных психолого-педагогических положений.

Во-первых, согласно культурно-исторической психологии, знаковое опосредствование является основой развития высших психических функций, регуляции деятельности и поведения. Так, «сущность человеческой памяти состоит в том, что человек активно запоминает с помощью знаков» [3].

Во-вторых, мышление и речь тесно взаимосвязаны. «Мысль не выражается в слове, но совершается в слове» [4], то есть речь – не просто средство оформления мысли, а прежде всего механизм её порождения. Отсутствие чёткой словесной формулировки означает, что мысль находится в туманном состоянии. Задачи решаются намного успешнее в случае проговаривания рассуждений вслух. Размышляя вслух, человек формирует мысли и для себя.

В-третьих, имеет смысл отрабатывать только полностью уясненные знания и умения, а учебную информацию предлагать дозированной и без излишеств. Жалеть времени для полного уяснения нового материала

не нужно. На этом этапе учебные действия осуществляются медленно, развёрнуто, с трудом [5]. Экономия времени на уяснении впоследствии оборачивается неоправданным увеличением продолжительности этапа отработки. А закрепление неполных или неправильных знаний и умений только усиливает их недостатки [5].

В-четвёртых, уяснение продуктивно осуществлять в материализованной и внешне-речевой форме. Этому способствуют внешние опоры (схемы, записи) и проговаривание учеником материала. Слово является не только мощным средством запоминания, но и делает осознаваемыми и управляемыми процессы свёртывания действия, его ускорения и автоматизации [5].

Структура фронтально-парного занятия

Обычно ФПЗ проводятся на этапе изучения нового материала. Учитель делит объяснение на части, и относительно каждой из них разворачивается отдельный фронтально-парный цикл из четырёх тактов:

- 1) изложение нового материала, или вброс содержания*;
- 2) формулирование задания для учащихся по изложенному фрагменту;
- 3) выполнение задания учащимися в парах (проработка брошенного содержания);
- 4) акцентирование на различных содержательных и организационных моментах.

За урок можно успеть организовать от трёх до пяти фронтально-парных циклов. Если тема включает больше содержательных фрагментов, то оставшиеся части пе-

* По аналогии с мячом, брошенным команде игроков, которые играют именно с ним, а не с каким-либо другим мячом.

реносятся на следующее занятие.

Первый такт. Вброс содержания. Учитель объясняет часть новой темы: теоретический материал, способ решения задачи и пр. При этом фиксирует на доске содержательные моменты – получается опора для последующих действий ученика на этом и последующих занятиях. Она создаётся постепенно и не даётся в готовом виде. Ученик по ходу объяснения переносит все записи в тетрадь. Помимо прочего, они играют роль внешних «крючков» для удерживания в памяти текста, произнесённого учителем. На ФПЗ опорами для памяти и мышления выступают схемы, ключевые слова, речевые клише, примеры применения конкретного правила (но не само правило или иное развёрнутое высказывание).

Второй такт. Запуск парной работы. Учитель даёт установку на работу в парах: формулирует задание на восстановление учениками изложенного им фрагмента материала (задание связано как с его содержанием, так и со способом взаимодействия учащихся).

Третий такт. Работа в парах и отладка её учителем. В ходе парной работы ученики должны восстановить только что изложенное, проговаривая его друг другу. Тем самым каждый ученик выделяет то, что понял, обнаруживает пробелы и непонятные моменты, с помощью напарника дополняет и корректирует своё знание, восстанавливает недостающие логические связи, выстраивает и воспроизводит структуру услышанного текста. Он проверяет себя через партнёра, неотложно употребляя изложенные знания не только ради своей пользы, а прежде всего для пользы товарища, что в воспитательном аспекте очень важно; это также позволяет избежать противопоставления способных учеников всем остальным.

Учитель совершает распространённую ошибку, когда на этапе первичного усвоения стирает все свои записи с доски и предлагает без них выполнить задание. Наоборот, следует приучать учащихся пользоваться всеми записями и любыми источниками информации, задавать вопросы и предлагать задачи, которые можно решить на основе услышанного и увиденного. Наличие опор и на классной доске, и в тетради ученика обусловлено также необходимостью обеспечить качественную коммуникацию на занятии.

На этапе отладки парной работы учитель наблюдает и корректирует общую включённость пар в работу, разделение труда, качество и способ взаимодействия, активность каждого из напарников, при необходимости помогает организовать коммуникацию между учащимися; корректирует содержание разговора и обсуждаемой информации, отвечает отдельным ученикам на вопросы по новой теме, не привлекая внимания остальных. Деятельность и результаты работы в паре не оцениваются. Очевидно, что педагог не сможет послушать все пары, но это и не требуется, ведь на обычном уроке учитель тоже не знает, что в голове у каждого.

Четвёртый такт. Акцентирование. Выделение существенных моментов, касающихся, с одной стороны, качества и организации парной работы, а с другой – содержания учебного материала и степени его усвоения.

Как видим, первые два и последний такты фронтально-парного цикла реализуются во фронтальной работе, а третий – в парной. Перед началом следующего цикла при необходимости можно сменить напарников.

Далее подробнее остановимся на нюансах подготовки и организации каждого такта фронтально-парного цикла.

Изложение нового материала

Не следует бояться, что на ФПЗ даётся меньший объём материала, чем на обычном уроке. Прежде всего надлежит обеспечить освоение каждым учеником программы-минимум. Для изложения отбирается только тот новый материал, который в дальнейшем подлежит отработке, закреплению или является базой для изучения следующих тем.

К самому изложению предъявляются следующие требования.

1. Вначале необходимо назвать действия, которые предстоит выполнить ученику после изложения учителем конкретного фрагмента.
2. Сказать не много, а самое существенное.
3. Главное в содержании выделить интонацией.
4. Акцентировать внимание на опорных понятиях.
5. Излагаемое схематизировать, по ходу объяснения делать краткие записи.
6. Каждый новый фрагмент учебного материала фиксировать на новой схеме.
7. Приводить примеры.
8. В конце объяснения остановиться на каждом пункте изложенного, спрашивая: что это означает? почему это так?

Правила организации учебного взаимодействия в паре

В каждый момент времени партнёры должны иметь дело только с одним учебным средством: открытой на двоих тетрадью, учебником, карточкой с заданием и т. д.

Следует распределить роли в паре и разделить общий труд на взаимообратные действия. Например, один ученик задаёт вопрос, а другой на него отвечает, при этом обязательно аргументировать свою позицию.

Задание для парной работы должно быть конкретным, а требуемые от учеников действия – явными, внешне наблюдаемыми, посильными и соответствующими содержанию только что изложенного материала.

О заданиях для парной работы на ФПЗ

Поначалу придётся учиться действовать по-новому и педагогам, и обучающимся. Учителю не нужно усложнять свою деятельность разработкой специальных заданий для парной работы, связывая их формулировки со спецификой излагаемого содержания. Рекомендуем, приступая к освоению технологии ФПЗ, использовать задания базового уровня: с одной стороны, с ходу можно предложить любое из них, а с другой, они не будут вызывать трудности у учеников.

Базовые задания для парной работы:

- пересказать объяснение учителя: «Один ученик воспроизводит сказанное, другой – дополняет»;
- сформулировать вопросы по содержанию изложенного фрагмента: «Задайте друг другу по два вопроса, ответы на которые есть в объяснении учителя» (один напарник задаёт вопросы, второй – отвечает, затем меняются ролями);
- разделить сказанное на главное и дополнительное, обосновать такое разделение: «Первый напарник выделяет главную информацию, второй – дополнительную, и каждый поясняет, почему именно это выделил»;
- обосновать приведённые в объяснении примеры: почему они демонстрируют смысл основного тезиса.

В дальнейшем можно использовать и другие приёмы работы в парах, выбирая их с учётом особенностей учебного материала.

Примеры более сложных заданий:

- задать вопросы типа «Правильно ли я понял, что...»;
- привести свой пример;
- привести контрпример;
- отделить понятное от непонятого;
- интерпретировать описанную ситуацию в определённом аспекте;
- озаглавить изложенное учителем;
- составить схему изложенного учителем;
- составить план рассказа по схеме;
- выдвинуть гипотезу и др.

Этап акцентирования

Он завершает фронтально-парный цикл и может включать следующие части (сразу все или некоторые из них):

- 1) продолжение отладки парной работы;
- 2) ликвидацию пробелов, коррекцию понимания учениками новой темы;
- 3) усиление важных содержательных моментов изложенного материала.

На первых занятиях учитель больше внимания уделяет организации работы в парах, а на последующих – важным моментам содержания.

Продолжая отладку парной работы, учитель посредством вопросов акцентирует внимание на способе и качестве взаимодействия в парах. Приведём примеры вопросов к конкретным парам.

1. Какой вопрос задал тебе напарник? Как ты на него ответил? Сколько вопросов вы задали друг другу? Всё ли содержание охватили своими вопросами? Чем ты дополнил ответ своего напарника?

2. Удалось ли обосновать примеры, приведённые в прослушанном материале, и как?

3. Кто в вашей паре отвечал за выделение главного? Почему выделенное парнёром показалось тебе главным?

4. Чем помог тебе напарник? Как рас-

пределили роли в паре? Как осуществлялось взаимодействие?

Анализ ключевых моментов изложенного материала осуществляется ситуативно или посредством заранее подготовленных вопросов по теме. Если рассматривался способ решения задачи, есть смысл предложить кому-нибудь из учеников повторить объяснение; при этом можно использовать речевое клише, например «Чтобы... Вначале... Затем...». Рекомендуем также обсудить разные нюансы записи решения на доске.

Следует обратить внимание на типичные ошибки, замеченные при комментировании учащимися в парах нового материала. Попросите ученика полностью воспроизвести тезис, а затем отметьте, что было сказано неточно. Или узнайте, какие вопросы возникли во время обсуждения с напарником. Здесь и сейчас вербализованный учеником факт недопонимания полезен как для него самого, так и для учителя: есть шанс устранить возникшую проблему адресно и предметно.

ФПЗ по теме «Пропорция»

В качестве примера опишем возможную структуру и содержание фронтально-парного занятия по теме «Пропорция». Для удобства фрагменты, посвящённые изложению нового материала, поместим в таблицах, где в левой колонке записана речь учителя, обращённая к ученикам, а в правой – его записи на доске, которые появляются постепенно.

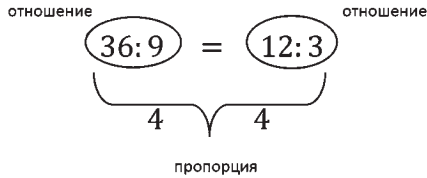
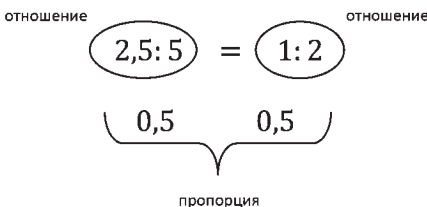
Учитель. Здравствуйте, ребята! Сегодня будем изучать тему «Пропорция». Занятие будет состоять из четырёх частей. Каждый раз вы сначала будете работать всем классом, а затем в парах: вам нужно будет повторить данное мною объяснение напарнику. Распределитесь в парах по вариантам: первый и второй.

• Первый фронтально-парный цикл

Изложение нового материала

См. таблицу 1.

Таблица 1

Речь учителя	Записи на доске
На доске записаны два выражения. Такая запись называется отношением двух чисел. (<i>Учитель обводит выражения $36 : 9$ и $12 : 3$ и подписывает, что это «отношения».</i>) Что значит «найти отношение двух чисел»? Как это сделать? Чтобы найти отношение двух чисел, нужно одно число разделить на другое. Найдём значение каждого выражения (<i>вычисляет и записывает ниже ответы</i>). Отношения равны. Равенство двух отношений называется <i>пропорцией</i>. Так как данные отношения чисел равны, то это равенство можно назвать пропорцией (<i>рисует фигурную скобку и указывает, что это «пропорция»</i>).	
Аналогично рассматривается вторая пара выражений – $2,5 : 5$ и $1 : 2$ – и делаются соответствующие записи.	

Задание для работы в парах

Ученик, которому достался первый вариант, должен пересказать напарнику всё, что было сказано учителем по поводу первой пропорции. Напарник внимательно слушает и, если заметит неточности или пропуски информации, исправляет и дополняет его рассказ. Затем поменяйтесь ролями и рассмотрите вторую пропорцию.

Работа в парах и её отладка

Учитель следит за тем, все ли работают и пользуются записями.

Акцентирование на способе работы в парах

По окончании работы учитель задаёт следующие вопросы, обращаясь по очереди к ученикам из нескольких пар. Всё ли было сказано напарником верно? Если нет, то какие поправки ты сделал? Была ли использована схема, записанная в тетради, и если да, то как?

Акцентирование на содержании

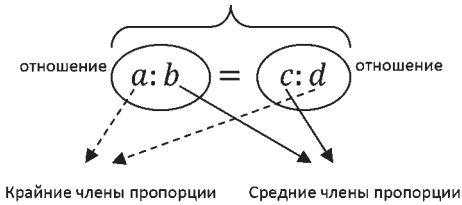
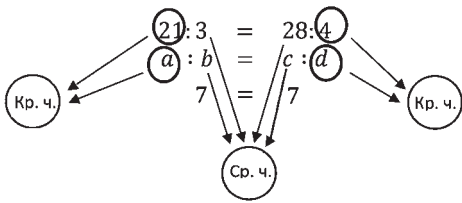
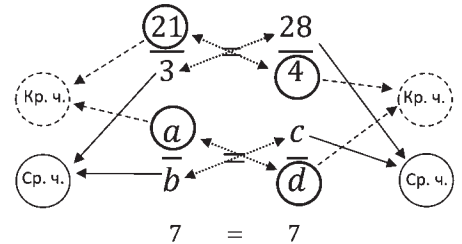
Учитель. Подведём итог первой части занятия. Что значит «найти отношение двух чисел»? Что такое пропорция? В каком случае два отношения можно назвать пропорцией?

• Второй фронтально-парный цикл

Изложение нового материала

См. таблицу 2.

Таблица 2

Речь учителя	Записи на доске
В общем виде (с помощью буквенных выражений) можно записать пропорцию так: отношение a и b равно отношению c и d (<i>равенство записывается на доске</i>). a, b, c, d – члены пропорции: b, c – средние члены пропорции, a, d – крайние члены пропорции. Запомнить их название легко: средние члены пропорции – b и c – расположены ближе к середине, к знаку равенства. Крайние члены пропорции – a и d – названы так потому, что находятся по краям пропорции. (<i>На доске делаются необходимые записи.</i>)	ПРОПОРЦИЯ 
Запишем равенство двух числовых отношений – $21 : 3$ и $28 : 4$ – и сравним с аналогичной буквенной записью. Почему данное равенство двух отношений является пропорцией? Потому что при делении чисел в обоих случаях получится число 7, а равенство двух равных отношений называется пропорцией. Числа 21 и 4 – крайние члены пропорции, так же как a и d (находятся по краям пропорции), а 3 и 28 – её средние члены, так же как b и c (находятся ближе к знаку равенства). (<i>Учитель обводит кружком одного цвета крайние члены пропорции, а кружком другого цвета – средние члены.</i>)	
Пропорцию можно записать и в другом виде: используя дробную черту (<i>те же пропорции записываются иначе</i>). Если в предыдущем примере можно сразу определить крайние и средние члены пропорции, то в данном случае могут возникнуть затруднения. Действуя перекрёстно, можно легко определить члены пропорции. Проводим стрелку из левого верхнего угла в правый нижний, 21 и 4 (аналогично a и d) – это крайние члены пропорции. Соответственно, 3 и 28 (b и c) – средние члены пропорции. (<i>На доске делаются необходимые записи.</i>)	

Задание для работы в парах

Первый ученик пересказывает напарнику всё, что говорилось о второй пропорции, а тот внимательно слушает, исправляет и дополняет его рассказ. Затем ученики меняются ролями и обсуждают первую пропорцию.

Работа в парах и её отладка

Учитель действует по ситуации.

Акцентирование на способе работы в парах

Всё ли было сказано напарником правильно? Если нет, то какие поправки ты сделал? Чем дополнил его рассказ? Использовалась при работе в паре схема, записанная в тетради?

Акцентирование на содержании

Учитель. Подведём итог второй части занятия. Какими двумя способами можно записать пропорцию? Чем отличаются крайние члены пропорции от средних членов?

Обратите внимание на то, что членами пропорции могут быть как натуральные числа, так и десятичные дроби. Рассмотрим такое равенство: $\frac{1,3}{5,2} = \frac{3}{12}$.

Является ли оно пропорцией и почему? Является, так как в результате деления получится 0,25 в обоих случаях: $0,25 = 0,25$.

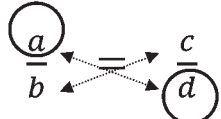
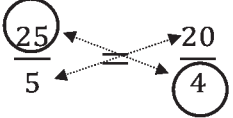
Значит, данные отношения равны и образуют пропорцию.

• **Третий фронтально-парный цикл**

Изложение нового материала

См. таблицу 3.

Таблица 3

Речь учителя	Записи на доске
При решении задач применяется основное свойство пропорции: <i>произведение крайних членов равно произведению средних членов</i> . Определим, какие члены данной пропорции крайние, а какие средние, и запишем равенство согласно основному свойству пропорции. <i>(На доске делаются необходимые записи.)</i>	 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Кр. ч. Ср. ч.
Применим это свойство. Дано равенство отношений чисел 25 и 5, 20 и 4. Будет ли оно являться пропорцией и почему? Оно является пропорцией, так как каждое отношение равно 5. Определим члены пропорции: крайние – 25 и 4 (<i>учитель обводит кружком каждое число</i>), средние – 5 и 20. Теперь можем воспользоваться основным свойством пропорции: <i>произведение крайних членов равно произведению средних членов</i> . Запишем: 25 умножить на 4 равно 5 умножить на 20. Вычислив, убеждаемся, что обе части равенства равны 100. Значит, действительно произведение крайних членов пропорции равно произведению средних её членов.	 $\frac{25}{5} = \frac{20}{4}$ Кр. ч. Ср. ч. $5 = 5$ $25 \cdot 4 = 5 \cdot 20$ $100 = 100$

Задание для работы в парах

Задайте друг другу не менее двух вопросов, чтобы ответами на них служила информация, содержащаяся в изложенном фрагменте. Ответьте на вопросы напарника.

Работа в парах и её отладка

Учитель действует по ситуации, обращая внимание на то, какие вопросы задают друг другу учащиеся и пользуются ли записями.

Акцентирование на способе работы в парах

Кому удалось задать два вопроса; больше двух вопросов? Какие вопросы ты задавал? Что ответил на них напарник? Использовалась ли при этом схема, записанная в тетради? (*Конкретные вопросы обсуждаются.*) А можно ли было задать следующие вопросы? (*Учитель приводит примеры вопросов, которые не были сформулированы учениками.*)

Акцентирование на содержании

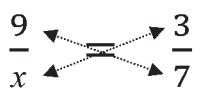
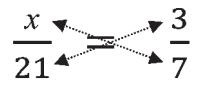
Учитель. Подведём итог третьей части занятия. В чём заключается основное свойство пропорции? Для чего необходимо уметь находить крайние и средние члены пропорции? Как записывается равенство согласно основному свойству пропорции? Для чего используется основное свойство пропорции?

• **Четвёртый фронтально-парный цикл**

Изложение нового материала

См. таблицу 4.

Таблица 4

Речь учителя	Записи на доске
При решении задач с помощью пропорций приходится находить её неизвестный член. Рассмотрим такую пропорцию (<i>учитель записывает её на доске</i>). Какой член пропорции неизвестен? Один из средних членов. Чтобы найти неизвестный член пропорции, необходимо воспользоваться её основным свойством: произведение крайних членов равно произведению средних членов. Умножим 9 на 7 и x на 3, приравняем произведения. Получим линейное уравнение. Решим его. Таким образом, мы нашли средний член пропорции. (<i>На доске делаются необходимые записи.</i>)	 $\frac{9}{x} = \frac{3}{7}$ $9 \cdot 7 = x \cdot 3$ Кр. ч. Ср. ч. $63 = 3x$ $3x = 63$ $x = 21$
Рассмотрим другой пример (<i>записывается на доске</i>). Какой член пропорции неизвестен? Один из крайних членов. Чтобы найти его, воспользуемся основным свойством пропорции. Произведение крайних членов x и 7 равно произведению средних членов 21 и 3. Получим линейное уравнение. Решим его. Таким образом, мы нашли крайний член пропорции. (<i>На доске делаются необходимые записи.</i>)	 $\frac{x}{21} = \frac{3}{7}$ $x \cdot 7 = 21 \cdot 3$ Кр. ч. Ср. ч. $7x = 63$ $x = 9$

Задание для работы в парах

Первый ученик пересказывает напарнику всё, что говорилось о первой пропорции, а тот внимательно слушает, исправляет и дополняет его рассказ. Затем ученики меняются ролями и обсуждают вторую пропорцию.

Работа в парах и её отладка

Учитель действует по ситуации.

Акцентирование на способе работы в парах

Всё ли было сказано напарником правильно? Если нет, какие поправки ты сделал? Чем дополнил его рассказ? Использовалась ли схема, записанная в тетради, при работе в паре?

Акцентирование на содержании

Учитель. Подведём итог четвёртой части занятия. Что необходимо сделать, чтобы найти неизвестный член пропорции? Необходимо применить основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних членов. Поэтому важно правильно определять местоположение крайних и средних членов.

• Завершающий этап занятия

Учитель. Чтобы быть уверенным, что вы действительно поняли данную тему, выполните задание. Но сначала поменяйтесь напарниками: первый ученик остаётся на месте, а второй переходит к другому партнёру.

Задание. Заполните таблицу 5. Первый ученик комментирует свои действия, работая с первой пропорцией, и записывает ответы в таблицу. Напарник слушает, дополняет, поправляет его в случае несогласия. Затем второй ученик проделывает то же самое с другой пропорцией, а напарник его слушает и проверяет. При выполнении задания необходимо использовать записи, которые вы делали во время занятия.

Таблица 5

Пропорция	$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$	$72 : 9 = 16 : 2$
Крайние члены		
Средние члены		
Произведение крайних членов		
Произведение средних членов		

В заключение отметим, что фронтально-парное занятие *технологически* обеспечивает возможность включиться отличающимся ученикам в общее движение всей группы: делаются остановки при изучении темы («слон съедается по частям»), инициируется многократное обращение учащихся к тексту учителя, организуется управляемое использование опор и речи. Ученик оказывается в позиции берущего и отдающего – *индивидуальное продвижение каждого обеспечивается посредством взаимопомощи учеников*. В паре трудно «отсидеться», когда вопрос задан лично тебе. Психологический аспект парной работы связан с чувством комфорта, ощущением успешности (не может не получиться, если рядом помощник), разноаспектностью взглядов и техник рассуждения (происходит взаимообогащение ими), взаимоконтролем.

Список источников

1. Лебединцев В.Б. Фронтально-парные учебные занятия // Педагогика. – 2021. – № 8. С. 77–86.
2. Мкртчян М.А. Становление коллективного способа обучения: монография. – Красноярск, 2010.
3. Выготский Л.С. Собрание сочинений (в шести томах). Т. 3. Проблемы развития психики. – М.: Педагогика, 1983.
4. Выготский Л.С. Собрание сочинений (в шести томах). Т. 2. Проблемы общей психологии. – М.: Педагогика, 1982.
5. Ильясов И.И., Галатенко Н.А. Проектирование курса обучения по учебной дисциплине. – М.: Логос, 1994.

Статья поступила в редакцию 08.06.2022. Принята к публикации 01.09.2022.

О ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОМ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

TECHNICAL AND METHODOLOGICAL FEATURES OF THE PRACTICE- ORIENTED STUDY OF STEREOMETRY USING VIRTUAL REALITY

Научная статья

Scientific article

УДК: 272.851

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_2_41

А.А. Олехов,

Пермский государственный гуманитарно-
педагогический университет,
olehov.alexei@mail.ru

A.A. Olekhov,

Perm State Humanitarian Pedagogical
University,
olehov.alexei@mail.ru

Аннотация: статья посвящена анализу цифровых средств обучения стереометрии, основанных на применении технологии виртуальной реальности. Характеризуется необходимое для её использования программное и аппаратное обеспечение, а также алгоритм его подбора. Приводятся примеры практико-ориентированных заданий по стереометрии для их выполнения с использованием среды виртуальной реальности

Abstract: the article is devoted to the analysis of digital stereometry teaching tools based on the use of virtual reality technology. The article presents an analysis of the main types of necessary software and hardware for using this technology, as well as an algorithm for selecting the necessary equipment. Examples of practice-oriented tasks on stereometry for solving by schoolchildren in a virtual reality environment are given

Ключевые слова: практико-ориентированные задачи, стереометрия, виртуальная реальность

Keywords: practice-oriented tasks, stereometry, virtual reality

© Олехов А.А. 2023

Введение

С активным развитием цифровых технологий возрастает их влияние на все сферы деятельности современного общества. В частности, информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) помогают моделировать процессы взаимодействия объектов окружающей действительности при невозможности проведения реального практического опыта с ними. Эту особенность ИКТ разумно применять при изучении стереометрии.

Существует большое количество цифровых средств, позволяющих эффективно

организовать наглядность образовательного процесса, начиная от облачных цифровых технологий, предполагающих возможность постоянного сетевого доступа к информации, заканчивая технологиями веб-квестов, охватывающих различные аспекты учебной дисциплины и предусматривающих неоднозначное решение вопроса [7].

Виртуальная реальность является одной из перспективных технологий, вокруг которой ведётся большое количество споров. Это связано с недостаточной изученностью её возможностей в обучении школьников,

высокой стоимостью аппаратного обеспечения и несовершенством действующей нормативной документации.

Словосочетание «виртуальная реальность» впервые было упомянуто ещё в 1938 году в сборнике эссе «Театр и его двойник» [2], но в науке данный термин появился лишь в 1987 году с подачи основателя Лаборатории визуального программирования Джарона Ланье. Он определил данное понятие как реальность визуальных образов, генерируемую исключительно компьютерными средствами [10]. Современные учёные трактуют его несколько иначе. К примеру, А.И. Воронов понимает виртуальную реальность как «кибернетическое пространство», созданное с помощью компьютера, для полного погружения в которое техническими средствами достигается практически полная изоляция от внешнего мира [3]. И.Г. Корсунцев определяет такую реальность как результат переработки бытия субъектом с позиции присущей ему логики [4]. Н.А. Носов говорит о совокупности виртуальных объектов относительно порождающей реальности, образующих виртуальную реальность [6].

Мы будем понимать под виртуальной реальностью информационную технологию, обеспечивающую погружение пользователя в трёхмерную интерактивную среду.

Как известно, человек получает 80% информации из окружающего мира с помощью зрения, при этом люди запоминают 20% того, что они видят, 40% того, что они видят и слышат, и 70% того, что они видят, слышат и делают [8]. Реализация идей применения виртуальной реальности позволяет использовать данные особенности для решения ряда проблем, связанных с восприятием и обработкой информации субъектами образовательного процесса.

Одной из таких проблем является сложность восприятия учащимися пространственных фигур в школьном курсе стереометрии. До 10 класса учащиеся имеют дело лишь с планиметрическими фигурами. В курсе стереометрии же зачастую наблюдается несоответствие зрительного восприятия геометрических фигур закономерностям, которым тот или иной объект восприятия соответствует. В зависимости от положения объекта его прямые углы могут выглядеть на чертеже как острые или тупые, отрезки разной длины могут казаться равными, а скрещивающиеся прямые – пересекающимися.

Обратим внимание на рисунок 1. Диагонали AC и BD , проведённые в основании $ABCD$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, кажутся отрезками разной длины. Однако, как диагонали квадрата они равны. Теперь посмотрим на параллелепипед $MNP K M_1 N_1 P_1 K_1$, в основании которого лежит квадрат $MNKP$. Прямой угол $N_1 M_1 K_1$ на чертеже изображён острым. Наконец, рассмотрим треугольную призму $TUET_1 U_1 E_1$. Скрещивающиеся прямые UE и $T_1 E_1$ выглядят пересекающимися в некоторой точке Y .

Сталкиваясь с вышеуказанными факторами, многие учащиеся начинают испытывать трудности в изучении предмета и теряют к нему интерес.

В методических рекомендациях учителю математики [9] И.В. Яценко, А.В. Семёнов, И.Р. Высоцкий указывают на тот факт, что лишь 2,5% выпускников школ успешно справляются со стереометрической задачей повышенного уровня сложности. При этом в качестве основных проблем невыполнения задания отмечаются (см. [9, с. 10]):

- несформированность наглядных геометрических представлений;
- недостаточное владение геометриче-

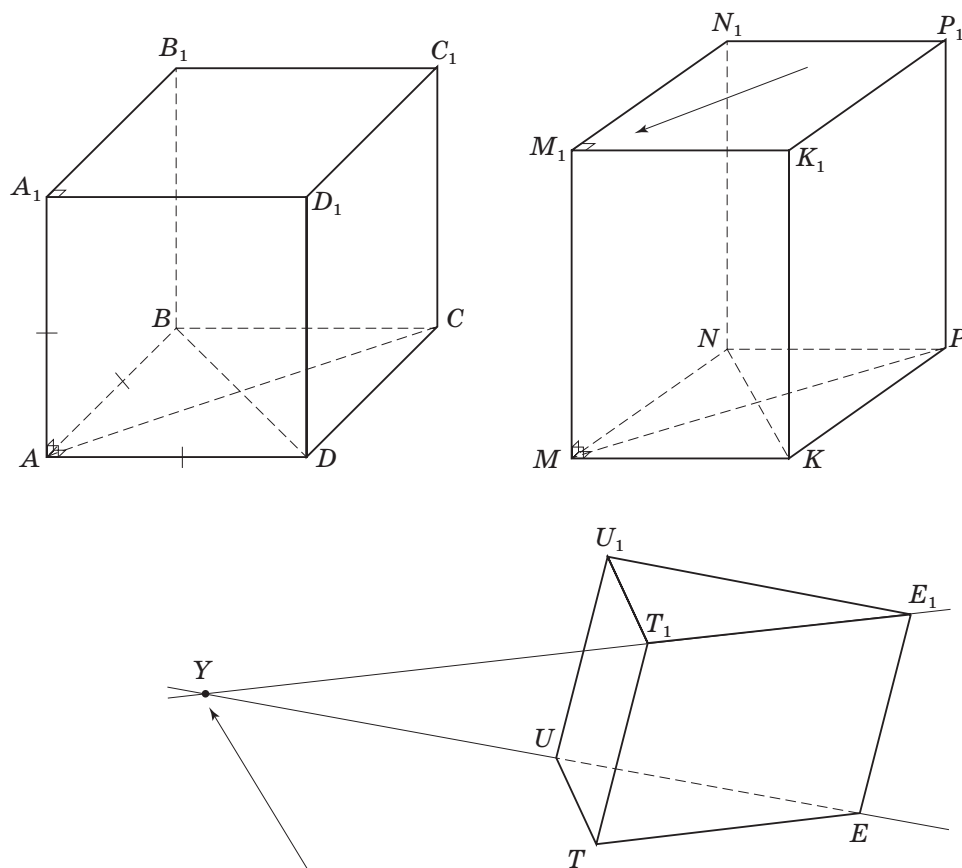


Рис. 1. Несоответствие зрительного восприятия геометрических фигур закономерностям, которым тот или иной объект восприятия соответствует

скими знаниями, отсутствие графической культуры.

Перечисленные проблемы могут быть связаны с отсутствием у обучающихся потребности в глубоком, осмысленном изучении предмета. Сложившуюся ситуацию можно улучшить путём активизации познавательной деятельности учащихся посредством специальных подходов к изучению материала.

Таким образом, возникает необходимость в поиске средств, позволяющих синтезировать связь между абстрактными геометрическими и реальными практическими объектами и задачами.

О средствах реализации технологии виртуальной реальности

В первую очередь мы занялись поиском программных и аппаратных средств, имеющих возможности обучения стереометрии в виртуальной реальности с использованием реальных практических объектов.

Сегодня в образовательном контенте виртуальной реальности (VR) можно выделить три типа средств:

- видеофайлы в формате 360 градусов;
- образовательные VR-платформы и площадки;
- интерактивные программы.

Простейший образовательный VR-инструмент для использования в аудитории – это видеофайлы формата 360 градусов. Данный инструмент взаимодействует с очками виртуальной реальности и форматирует двумерное изображение или видеофайл в пространственное трёхмерное таким образом, что учащийся может оказаться внутри обволакивающего пространства в центре событий и фокусировать свой взгляд в любую точку среды, в которой находится. Описанный технический приём называется *эффектом погружения* или *иммерсии*. При его использовании активизируются центры восприятия, однако, в связи с отсутствием какой-либо возможности взаимодействия с окружающим пространством, кроме как наблюдения, его нельзя считать полноценным вариантом виртуальной реальности. При этом с его помощью можно, например, продемонстрировать правильные многогранники в памятниках архитектуры, мгновенно переместившись в любую из таких стран, как Египет, Греция, Япония, Римская империя, Китай. Данное средство будет полезно для мотивационного этапа урока. При правильном использовании учитель может вызвать большой интерес к определённому объекту курса стереометрии.

Приведём пример. При изучении пирамид можно задаться вопросом осознания строителями египетских пирамид геометрических особенностей их построения. Греческий учёный Геродот, основываясь на рассказах египетских жрецов, сообщает, что площадь квадрата, построенного на высоте пирамиды, равна площади каждой из её граней [5, с. 48]. Пользуясь видеороликом «Великие пирамиды Гизы в формате 360 градусов» (рис. 2), можно рассмотреть пирамиды со всех сторон и приблизительно (учитывая проективные искажения) под-



Рис. 2. Кадр видеоролика «Великие пирамиды Гизы 360 градусов»

твердить или опровергнуть заключение Геродота. А также найти соотношения между элементами остальных пирамид, обсудить, с чем связана форма пирамиды.

При использовании образовательных VR-платформ и площадок (Rumii, EngageVR, Anyland, NeosVR, High Fidelity, Bigscreen и др.) виртуальная среда меняется в режиме реального времени. Учащиеся одновременно погружены в неё, видят друг друга и могут взаимодействовать. Данные инструменты характеризуются наличием виртуальных классов для интерактивного обучения, в которые учитель может добавлять любые пространственные объекты из готовой библиотеки либо смоделированные самостоятельно в 3D-редакторе. Все перечисленные платформы имеют большую библиотеку готовых виртуальных уроков, записанных разными пользователями. Благодаря им учащиеся могут практически вживую присутствовать на занятиях преподавателей из лучших учебных заведений мира.

Преимуществом названных платформ перед предыдущим инструментом является возможность интерактивного обучения, взаимодействия с окружающими объектами. Учащийся может взять в руки любую стереометрическую фигуру, изменить её размер, оказаться внутри, посмотреть на неё с любого ракурса, провести вычисления и записать свои расчёты на виртуаль-

ной интерактивной доске. Однако, на данных платформах пока не предусмотрены функции проведения учащимися дополнительных построений.

Описанный инструмент можно использовать при изучении нового материала или практической отработке решения задач на готовых чертежах. Учитель может перед уроком подготовить чертежи для решения определённых задач в 3D-редакторе, а на уроке раздать учащимся их виртуальные копии для дальнейшей работы.

Интерактивные образовательные продукты являются автономными разработками для использования на уроке, их конструирование может стать основой для проектного домашнего задания. Примером такого продукта может служить программа, разработанная центром НТИ ДВФУ «Стереометрия ВиАр». Её функционал направлен на подготовку обучающихся к решению стереометрических задач, самостоятельное

освоение ими физических действий с пространственными объектами на кубической сетке, свободное взаимодействие с геометрическими объектами и выбор оптимального пути решения задачи [7]. Описанный инструмент позволяет учащимся самостоятельно строить геометрические фигуры, их сечения, проводить иные построения. Несмотря на это, его возможности ограничены. В частности, сложно организовать связь абстрактных геометрических фигур с реальными объектами.

Помимо программного обеспечения важным фактором осуществления образовательной деятельности с использованием технологий виртуальной реальности является выбор аппаратных средств. Аппаратные средства можно разделить на следующие типы:

- очки виртуальной реальности для мобильного телефона;
- шлемы виртуальной реальности для персонального компьютера;

Таблица 1

Преимущества, недостатки и особенности использования аппаратных средств VR

Тип	Преимущества	Недостатки	Особенности Ипользования
Очки VR	Низкая стоимость, простота использования	Малая функциональность, можно использовать только для видео 360 и мобильных приложений	Используются в паре с мобильным телефоном и гарнитурой
Шлемы VR для ПК	Обладает наибольшим эффектом погружения благодаря хорошей графике и качественным сенсорам передвижений в пространстве. Позволяет взаимодействовать почти со всеми программными VR-ресурсами	Высокая стоимость, сложно использовать в образовательном процессе с большим количеством учащихся. Для одновременной совместной работы в большой группе необходимо оборудовать аудиторию сенсорами слежения, поделить её на рабочие зоны с мощным компьютером, подключаемым к шлему, и сделать технически сложную разводку проводов	Исходя из технической сложности применения, данное средство применяется лишь для индивидуальной работы либо для работы в мини-группах до четырёх человек

Авто- номные шлемы VR	Обладают встроенным графическим процессором, могут использоваться без персонального компьютера и мобильного телефона. Просты в эксплуатации, имеют встроенные датчики передвижения и приемлемую стоимость. Обладают необходимым функционалом для применения в образовательном процессе	Необходимость подзарядки, относительно низкое время автономной работы. Меньшее количество поддерживаемых программных ресурсов в сравнении с шлемами для ПК	Беспроводные. Можно использовать в любом необорудованном помещении, переносить из одного класса в другой
--	--	--	--

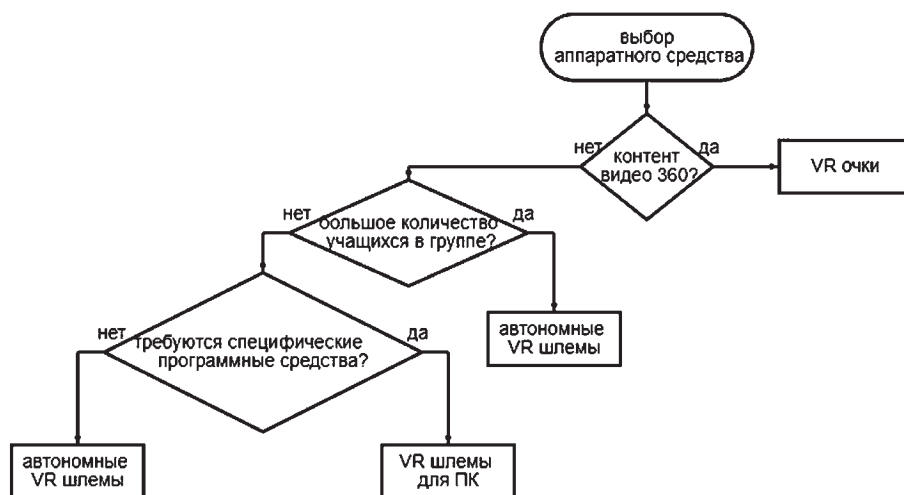


Рис. 3. Схема выбора аппаратного средства VR для обучения

— автономные шлемы виртуальной реальности.

В таблице 1 представлены преимущества, недостатки и особенности использования различных типов аппаратных средств VR.

Для выбора необходимого типа аппаратного средства мы предлагаем воспользоваться схемой, представленной на рисунке 3.

В ходе проведения настоящего исследования в качестве аппаратного средства был выбран автономный шлем виртуальной реальности «Oculus quest». По результатам анализа программных инструментов, совместимых с данным шлемом,

принято решение воспользоваться платформой «Gravity sketch», предназначенной для 3D-дизайна в виртуальной реальности с возможностью одновременной работы множества участников над одним 3D-объектом. Данный инструмент не является непосредственно образовательной платформой, однако обладает необходимыми функциями для построения стереометрических фигур и работы с реальными объектами.

Учитель с учащимися могут совместно работать над стереометрическими задачами в виртуальном помещении. Использование жестового взаимодействия в качестве основного метода ввода обеспе-

чивает интуитивно понятное управление процессом построения геометрических объектов. Кроме того, **Gravity sketch** обладает встроенной библиотекой всех фигур школьного курса стереометрии. Также можно загружать эскизы реальных объектов и работать с ними, решая практико-ориентированные стереометрические задачи. Большим плюсом данной платформы является бесплатный доступ для всех субъектов образовательного процесса.

Форматы реализации технологии виртуальной реальности в учебном процессе

В процессе исследования было опробовано два формата обучения:

- обучение с частичным погружением в виртуальную реальность;
- обучение с полным погружением.

Обучение с частичным погружением подразумевает использование только одного шлема виртуальной реальности: изображение со шлема передаётся на проектор, телевизор, интерактивную доску либо планшеты учащихся. При использовании шлема Oculus quest данная задача решалась путём создания прямой трансляции в онлайн-сервисах. Заметим, что для полноценной работы и хорошего качества трансляции необходим постоянный высокоскоростной интернет.

При обучении с частичным погружением учитель может наглядно демонстрировать аксиомы и теоремы стереометрии, решать задачи, вызывать учащихся к доске. У доски учащийся надевает шлем и сам погружается в виртуальную реальность. Остальные школьники видят проекцию происходящего на экране, могут изображать нужные объекты у себя в тетради, вести диалог с учеником, находящимся в виртуальной реальности, совместно решая задачу или доказывая теорему.

Плюсы данного формата:

- понимание учащимися связей между трёхмерными объектами и их проекциями на экран;
- простота организации процесса. Для такого обучения необходим лишь один шлем, средство же для проекции имеется в каждой школе. Для запуска трансляции в профиль онлайн-сервиса не нужно иметь специальной подготовки.

Минусы данного формата:

- отсутствие постоянного уровня восприятия виртуальной реальности;
- низкая эффективность процесса восприятия пространственных геометрических фигур.

Обучение с полным погружением подразумевает одновременное подключение всех субъектов образовательного процесса к виртуальной реальности. В данном формате обучения учитель создает виртуальный зал и приглашает в него всех учащихся. Школьники могут совместно с учителем строить различные геометрические объекты, решать задачи, доказывать теоремы. Также учитель может разделить учеников на группы для решения задач и «путешествовать» между группами, контролируя процесс их работы. Возможна и индивидуальная работа учащихся.

Преимущества формата:

- высокая эффективность процесса восприятия пространственных геометрических фигур;
- возможность совместной интерактивной работы.

Недостатки формата:

- сложность организации, поскольку для каждого субъекта учебного процесса необходим шлем виртуальной реальности и приобретение навыков его использования;
- сложность перехода от трёхмерной модели к её проекции на чертеже.

Наиболее эффективно применение данного формата при работе с реальными объектами. Приведём пример.

В виртуальный класс загружается модель чердака дома с двускатной крышей и прогонно-ригельной системой стропил. Для прочности конструкции опорные стойки двускатной крыши должны быть перпендикулярны основанию чердака. Стяжка перпендикулярна мауэрлату [1]. Необходимо выяснить, будет ли стропильная нога, соединяющая стойку и стяжку, также перпендикулярна мауэрлату, для того, чтобы закупить правильные уголки крепления к мауэрлату.

Данная модель есть практико-ориентированная интерпретация теоремы о трёх перпендикулярах. Опорная стойка является перпендикуляром к плоскости, стропильная нога – наклонной, стяжка – проекцией наклонной на плоскость основания, а мауэрлат – это отрезок прямой, лежащей в плоскости основания чердака, проходящий через пересечение наклонной и плоскости основания и перпендикулярный проекции (рис. 4).

Исходя из того, что опорная стойка перпендикулярна плоскости основания чердака, учащиеся делают вывод, что она перпендикулярна любой прямой, находя-

щейся в этой плоскости. Значит, стойка перпендикулярна прямой, лежащей в плоскости чердака, частью которой является мауэрлат, следовательно, перпендикулярна мауэрлату. Мауэрлат перпендикулярен к стойке и перпендикулярен к стяжке. Получается, он перпендикулярен к двум пересекающимся прямым. Значит, он будет перпендикулярен к любой прямой в плоскости, заданной этими двумя прямыми. Стропильная нога лежит в той же плоскости, в которой лежат стойка и стяжка, следовательно, мауэрлат перпендикулярен стропильной ноге.

Для простоты доказательства учащиеся могут обозначить точки пересечения прямых в пространстве буквами.

Решая данную задачу, школьники на реальных объектах доказывают теорему о трёх перпендикулярах, дополнительно знакомясь с устройством двускатной крыши.

Благодаря возможностям выбранного программного инструмента, можно наглядно демонстрировать аксиомы стереометрии. Например, выберем две точки в пространстве и построим плоскость, которая проходит через них. Заметим, что положение плоскости можно менять. Однако, если поставить ещё одну точку, не лежащую на одной прямой с первыми двумя,

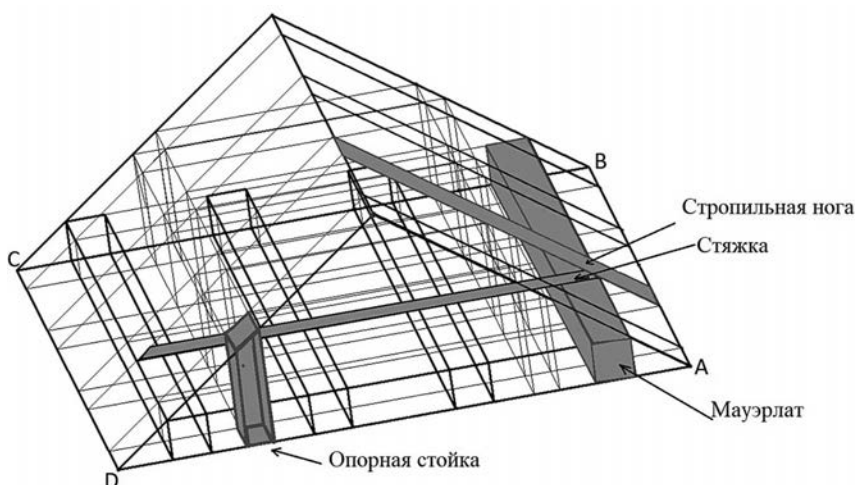


Рис. 4. Модель каркаса крыши дома

найдётся лишь одно положение плоскости, в котором она будет проходить через все точки. Этот пример помогает учащимся осваивать аксиоматику стереометрии.

Кроме этого, изучение метода построения сечений становится гораздо проще, когда учащиеся видят действительное положение достаиваемых прямых. Встроенный функционал создания фигур вращения позволяет познакомиться со свойствами цилиндра, конуса и других фигур. В качестве примера практико-ориентированной задачи можно «выдать» учащимся по виртуальному, частично заполненному рожку с мороженым, и попросить найти объём всего рожка. В данном случае верхний слой мороженого, перпендикулярный основанию рожка, служит сечением при выводе формулы объёма конуса.

Заключение

Апробация проводилась путём интеграции VR-составляющей в блок стереометрии курса по подготовке учащихся к итоговой аттестации. В описанных форматах обучения рассматривались примеры стереометрических заданий итоговой аттестации. В результате эксперимента были получены значительные отличия между контрольной и экспериментальной группами со сдвигом в положительную сторону по результатам решения учащимися трёх стереометрических заданий повышенной сложности. В данной связи можно отметить эффективность использования инструментов виртуальной реальности в образовательном процессе.

Отметим, что для наилучшего образовательного результата целесообразно чередовать обучение с частичным и полным погружением. В этом случае у учащихся усиливается формирование смысловых связей между абстрактными стереометрическими и реальными практическими

объектами наряду с адекватным восприятием трёхмерных объектов и их двумерных проекций.

Список источников

1. Андреев В. Крыши. Кровли. Мансарды. Чердаки / В. Андреев, А. Преображенский. Москва: Контэнт, 2011. 154 с.
2. Арто А. Театр и его двойник. Москва: Симпозиум, 2000. 448 с.
3. Воронов А.И. Философский анализ понятия «виртуальная реальность»: дис. ... канд. филос. наук / А.И. Воронов. – СПб., 1999. 199 с.
4. Корсунцев И. Г. Современные технологии несут глобальную угрозу // Центр исследования платежных систем и расчетов. [Электронный ресурс] URL: http://www.paysyscenter.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=605 (дата обращения: 8.12.2021).
5. Лауэр Ж.-Ф. Загадки египетских пирамид / Сокращенный пер. с франц. М.П. Рожицкой и Г.В. Сахорова. М.: Наука, 1966. 228 с.
6. Носов Н. А. Виртуальная реальность // Вопросы философии. М.: 1999. № 10. С. 14–21.
7. Программа для ЭВМ «Стереометрия Ви-Ар»: [Электронный ресурс] URL: https://edu.vnti.ru/about_st. (дата обращения: 18.12.2021).
8. Центр визуализации и виртуальной реальности для науки и образования [Электронный ресурс] URL: <http://ve-group.ru/3dvrresheniya/obrazovanie-i-nauka/> (дата обращения: 06.11.2021).
9. Яценко И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике / И.В. Яценко, А.В. Семёнов, И.Р. Высоцкий. Москва: ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений», 2020. 17 с.
10. Lanier J. You are not a Gadget: A Manifesto. N.Y., 2010. 224 p.

Статья поступила в редакцию

02.08.2022.

Принята к публикации

19.11.2022.

Герой нашего интервью – **Валерий Адольфович Рыжик** – не нуждается в представлении. Авторы большинства вопросов – начинающие или будущие учителя математики. Хотелось узнать, что их сегодня волнует, о чём они спросили бы своего мудрого коллегу, чьи знания и опыт бесценны. Мы предложили магистрантам и слушателям курсов профессиональной переподготовки из МПГУ и ВятГУ задать Валерию Адольфовичу занимающие их вопросы. Не только профессиональные, но и «за жизнь». Их набралось несколько десятков. Во многих вопросах нашли отражение конкретные учительские и житейские запросы. Тем интереснее услышать на них ответы и получить дельные советы.



Фото Юрия Белинского
(источник: spbau.ru)

«НЕ ТАК ВАЖНО ЧТО И КАК, А ВАЖНО КТО»

Чтобы быть хорошим преподавателем, нужно любить то, что преподаёшь, и любить тех, кому преподаёшь.

В.О. Ключевский

Учитель и ученики

Валерий Адольфович, расскажите, пожалуйста, об учениках, которые Вам запомнились больше всего и почему.

Назову Сашу Лившица. Он ещё в средних классах стал победителем городской олимпиады по математике среди старшеклассников. В старших классах победил на всесоюзной олимпиаде и на международной. На всесоюзной олимпиаде он по просьбе жюри рассказал решение одной из задач настолько оригинальное и неведомое её автору, что заслужил аплодисменты всех слушателей. А запомнился, помимо прочего, тем, что решал любую школьную задачу по математике и фи-

зике и лучше всех в классе вычислял по таблице логарифмов. При этом был на уроке совершенно не замечен, руку для ответа поднимал чуть-чуть над партой.

Ещё в средних классах Саша освоил учебник Фихтенгольца по математическому анализу – трёхтомник для студентов математических отделений университетов. Причём прочитал его всего один раз. А сделал это потому, что у него перестали получаться трудные задачи по физике. Однажды попросил меня что-нибудь по-серьёзнее школьной математики. Я сговорился с профессором матмеха З. Бореви-чем, и тот пригласил его на свой семинар для аспирантов по теории Галуа. Семинар

тот был через неделю. Я дал Саше книгу А. Постникова на эту тему, чтобы он понял, о чём пойдёт речь. На следующий день после семинара я спросил Сашу, всё ли он понял. Ответ был: «Конечно. Труднее было с книгой».

Назову также Толю Мошникова. Он стал альпинистом, заслуженным мастером спорта. Два раза восходил на Эверест, причём без кислорода. Ещё один раз был руководителем гималайской экспедиции на Эверест. А начинал он свою горную судьбу в моём походе со школьниками по Дагестану; было видно, что он рождён для горных дорог – с такой лёгкостью он шёл по горным тропинкам. Толя погиб в горах, на Алтае, на учебном маршруте, попав в лавину. На одном из алтайских камней есть табличка в память о нём.

А есть ли среди Ваших учеников те, кто добились успеха в области гуманитарных наук или сделали карьеру в какой-нибудь творческой профессии?

Могу назвать доктора философских наук В. Мостепаненко, кандидата философских наук В. Кудрявцева, других не знаю. Понятие творческой профессии ныне в России означает много чего, но вряд ли профессию учёного. Что странно. А если говорить о сути явления, то есть о творческой деятельности как таковой, то среди тех, кого мне посчастливилось учить математике, есть и члены-корреспонденты Академии наук (физики), и много-много докторов наук. Особо упомяну Г. Перельмана¹ и Я. Элиашберга².

¹ Григорий Перельман (род. 1966) – российский математик, доказавший гипотезу Пуанкаре, лауреат Филдсовской премии (2006) и премии Математического института Клэя (2010), от которых отказался.

² Яков Элиашберг (род. 1946) – советско-американский математик, лауреат премии Вольфа (2020), премии Крафорда по математике (2016) и др.

Было ли у Вас какое-то прозвище от учеников? Если не секрет, какое и за что им Вас «наградили»?

Может, и было, но я никогда его не слышал. При моей фамилии непросто выдумать прозвище.

Вы согласны с тем, что чувство юмора должно быть одним из главных качеств учителя, или, как сегодня модно говорить, это «необходимая профессиональная компетенция педагога»? Часто ли оно помогало Вам в общении с учениками?

Чувство юмора украшает любого человека, не только учителя. И никакая это не компетенция и даже не чувство, а свойство интеллекта плюс черта характера. Кстати, о «компетенции». Не знаю никакой такой, которая не была бы по существу умением. Сказать ученику вместо «ты не умеешь использовать метод интервалов» фразу «ты некомпетентен в методе интервалов» у меня язык не повернётся.

Иногда юмор – спасательный круг в напряжённой ситуации. Приведу пример. Как-то продиктовал домашнее задание, видимо, великоватое. В повисшей острой тишине слышу тихий голос своей лучшей ученицы Марины Д.: «Спасибо». – «Марина, я могу дать задание на два спасибо». Улыбнулись и пошли по уроку дальше.

Однажды рассказывал в курсе анализа про остаточный член формулы Тейлора. А он носит фамилии учёных. Например, есть остаточный член в форме Коши, в форме Лагранжа, в форме Шлёмильха – Роша. И тут один ученик вопрошает, откуда такие названия. «Ну, – говорю, – это в память о математиках, которые их вычислили. Вот если ты найдёшь для него форму, неизвестную ранее, то он будет носить твою фамилию». Смеху в классе было немало. Фамилия ученика была Глобус.

Но шутить в классе надо очень осторож-

но, реакция детей иногда непредсказуема, запросто могут обидеться. Как-то раз мой ученик Витя Л., весьма кряжистый и не слишком успешный, явился в школу, напялив на себя массивную цепь. Ну, я не удержался и процитировал Пушкина: «Златая цепь на дубе том». Класс чуть не лопнул со смеху, но я сейчас не уверен в уместности этой шутки. Парень был нормальный, не обиделся. На следующий день цепи не было.

А в одном из походов я поначалу объяснил новичку дежурному, что макароны перед варкой следует продуть, чтобы очистить от внутренней пыли. Бывалые собрались у костра посмотреть, что будет дальше. С трудом остановили повара, уже начавшего процесс. Потом все смеялись вместе с ним.

А какая самая курьёзная вещь произошла с Вами во время урока и как Вы с ней справились?

Как-то раз, ещё в далёком начале учительства, доказал теорему косинуса (там всего один косинус, больше одного косинуса в теореме о трёхгранном угле) со знаком «плюс» вместо «минуса». Бывает, на автомате пишешь на доске ляп, когда голова не следит за рукой. Мысль уже убежала вперёд, а рука ещё продолжает писать. Не посмотрел на доску, не заметил ляп. Потом ученики, решая задачу и используя эту теорему, сообщили, что у них остроугольный треугольник почему-то стал тупоугольным. И вот тут моё сознание проснулось.

Объяснил ученикам происшедшее и с тех пор всегда призываю их к обязательному вычитыванию написанного. А на уроке, исписав доску выкладками, иду в конец кабинета, чтобы обозреть то, что получилось. Издалека проверять лучше, чем вблизи.

Наверняка на уроках случались и не-

ловкие ситуации. Как Вы из них выходили?

Однажды был такой случай. Ученики строили график гармонического колебания с применением разных преобразований: переносов, растяжений и пр. Там на одном рисунке получается несколько графиков. Я попросил окончательный график нарисовать красным цветом, чтобы сразу был виден результат. Иду по классу, смотрю, у кого что получается. Вдруг вижу, у Юры П. окончательный график зелёного цвета. Я подивился, стал на него легонько сердиться (ученик-то был хороший, учил его не один год) и осёкся на полуслове. А вдруг он дальтоник? Так и оказалось. Извинился. До сих пор стыдно вспоминать.

Бывали ли в Вашей педагогической практике случаи, когда дети задавали на уроках вопросы, на которые Вы не знали ответа? Можете вспомнить самые необычные или неожиданные вопросы? Как Вы на них реагировали?

Конечно, были такие случаи. И не раз. Более того, за такой вопрос тут же ставил пятёрку. Например, однажды ученица Вера Д. спросила: «Если тетраэдр и треугольная пирамида – это одно и то же, то почему правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида не одно и то же?» С ходу и не знал, что ей ответить.

А Саша С. попросил как-то истолковать, что значит «отрезок состоит из точек». Я даже удивился, что тут такого: состоит – не состоит, подумаешь, важность какая. Где это работает? Молодой был, мало что понимал в предмете. Мне бы задуматься, вникнуть в суть. Ан нет. И только спустя много лет оценил глубину этого вопроса. Фраза «состоит из...» корректна, когда речь идёт о разбиении фигуры на конечное число частей. Для бесконечного множества точек она непригодна. До сих пор казню себя за эту промашку.

Как Вы думаете, Валерий Адольфович, если отменить привычную систему оценок в школе (оставить их только для аттестации раз в полгода), это помогло бы ученикам лучше осваивать материал и увереннее практиковаться на уроках?

Ответ на этот вопрос может дать только соответствующее исследование. Более того, ответ на него зависит от того, о каком возрасте идёт речь. Наконец, ученики настолько разнятся, что вряд ли возможен однозначный ответ. Кто-то работает ради хорошей отметки, а кому-то это абсолютно безразлично, коль скоро есть интерес к предмету.

Я задаю вопрос ученику: «Ты пришёл ко мне на урок за отметкой? Хорошо, какую отметку тебе нарисовать в журнале? Хочешь пятёрку? Пожалуйста, тут же нарисую эту циферку в журнальную клеточку. Именно это тебе нужно от школы?» Разумеется, этот номер проходит не в каждом классе (по возрасту), не с любым учеником. Но он работает! В конце концов, ученики начинают понимать, что не в отметках суть процесса. Иногда это приходится объяснять и родителям.

Альтернатива отметке – качественная оценка ответа ученика (и вообще его работы). Помните, у Марка Твена в одном из рассказов есть фраза: награда – рукопожатие редактора? Публичное рукопожатие учителя по-настоящему впечатляет детей. Или можно сказать: «Ребята, посмотрите на этого чудо-ребёнка с восхищением!» – когда на доске появляется необычное решение задачи или звучит точный и оригинальный ответ на вопрос учителя. И ведь так и смотрят.

А имеет ли учитель право на избирательность по отношению к ученикам? Он ведь тоже человек, а не машина, со своими симпатиями и антипатиями.

Право-то имеет, но вряд ли стоит его часто демонстрировать. Применение его должно быть обосновано и публично. Я говорю ученикам: «Сначала вы работаете на репутацию, потом репутация работает на вас». И все об этом знают. Иногда ввожу звание «придворного геометра» – за очевидные достижения в решении задач. С того, кто заслужил его, спрос особый, но и льготы заметны.

О педагогах, современном образовании и его перспективах

Школьный учитель «даёт знания и строго контролирует» или «прививает интерес и любовь к предмету»? Каким из них был Ваш любимый учитель?

Ответ на первый вопрос содержится в самом вопросе. Стоит уточнить терминологию. Как мне видится, интерес к предмету реализуется через чтение дополнительной литературы, а любовь к предмету проявляется в готовности тратить время на решение задач. И ещё. К проверке знаний стоит также добавить проверку понимания и готовности к продолжению образования, но это тема требует отдельного разговора.

Любимого учителя у меня не было (замечу, что «любимый учитель» иногда сбивает с толку ученика при выборе профессии). А хорошие учителя были. Особо помню учительницу географии в средних классах Анну Михайловну Маркову. Нас, 30 мальчишек, она завораживала чтением отрывков из книг о разных странах, путешествиях, приключениях. Слушали, открыв рот и затаив дыхание.

И конечно, учитель математики Бакрылов Владимир Васильевич, заслуженный учитель, потомственный учитель математики, участник войны. Пришёл к нам на один год в 10-й выпускной класс, с

ходу нагнал страху и вклеил мне в первой четверти «3» по тригонометрии: отметку подпортила «1», которую я получил за то, что не сдал первую же самостоятельную работу сразу со звонком. В итоге «4» по тригонометрии в аттестате, и я остался без медали. Потом мы стали коллегами и долго и славно общались на всякие темы.

А хотели бы учиться у самого себя, будучи школьником?

Было бы любопытно посмотреть на это со стороны.

Как Вы думаете, почему профессия учителя в России преобладающе «женская»?

Ну, трудно у нас мужчине идти на долго на такую зарплату, даже если есть желание учительствовать. Семью-то надо обеспечивать. Думается, в царской России ситуация была иная.

Поговорим о современном школьном образовании. Каковы, на Ваш взгляд, его главные недостатки, а что, наоборот, нравится в нём больше всего?

Главные недостатки вот какие. Ужасное финансирование, чрезмерная централизация и некомпетентное управление. Ныне то, что творится в школьном математическом образовании, достойно пера Салтыкова-Щедрина и напоминает его «Историю одного города». Для современных «градоначальников» возникло громадное поле для нововведений, в том числе безумных, чему мы сегодня свидетели. Один только ЕГЭ с предварительным списком типов задач чего стоит. Ясно, во что он превращает бесконечную ценность математики для развития ребёнка. Или тот же ФГОС, в котором вместо знаний, умений, понимания появилось взятое с потолка «оперирование понятиями». Термин этот не имеет никакого научного и практического смысла.

Больше всего мне нравится упорство российских учителей, с которым они вкалывают из последних сил, несмотря на издевательство над ними и над математикой нынешних прожектёров: составителей программ и стандартов, а также со стороны лиц, принимающих решения. Издевательство оное дошло до того, что в рецензии на учебник геометрии для 7 класса я прочитал: он не годится для школы, поскольку не соответствует неким пунктам Стандарта и практике ЕГЭ.

Если бы в своё время нашим выдающимся математикам А. Колмогорову, А. Погорелову, Э. Позняку, А. Александрову как авторам школьных учебников поставили такие условия изначально, создали бы они нечто значимое и оригинальное? Первичен учебник, созданный серьёзными специалистами и прошедший апробацию, а не документ, придуманный неизвестно кем. Ясно, что компьютерные инструменты со временем изменят математическое образование, как они уже повлияли на саму науку. Приняв за основу Программу и Стандарт, как мы сможем учесть новые веяния?

Профессиональный уровень нынешних составителей этих документов и экспертов, оценивающих качество учебной литературы, несравним с уровнем понимания дела серьёзных учёных, методистов и учителей. Об уровне нынешней экспертизы скажу конкретнее. Одно из замечаний, сделанных тремя (!) экспертами РАО по нашему учебнику «Геометрия 7» для математических классов, было такое: «Нельзя определять прямоугольник как четырёхугольник с четырьмя прямыми углами, так как под это определение попадает квадрат».

Есть ли что-то, что Вам хотелось бы поменять в методах обучения в школе? Исходя из собственного много-

летнего опыта преподавания, можете ли Вы назвать наиболее эффективные методы обучения математике?

Методы – это нечто вторичное. Не в них суть процесса. Они есть нечто производное от установки учителя, его системы работы и атмосферы, которую он создаёт. Анекдотично выглядит в качестве чего-то первостепенного стремление к групповым методам, проектной деятельности, дистанционному обучению и прочим нынешним инновациям, как будто именно они выправят наши беды. Когда в школе будут работать грамотные, мотивированные и обеспеченные люди, тогда и дело, может, наладится. Чуть утрируя, скажу: не так важно что и как, а важно кто. Разумеется, если никто и ничто не будет мешать работать.

Из методов всё же отмечу эвристику, интеллектуальный диалог с учеником как нечто обязательное для развития ребёнка. В книгах Д. Пойа этот метод представлен замечательно.

Насколько важны сегодня информационные технологии для обучения математике? Без них действительно уже не обойтись?

Разумеется. Надо только разумно их применять. Я уже более тридцати лет использую на уроках компьютерные инструменты, то бишь программные продукты. И дома ученики используют их при выполнении домашних заданий. Именно на этом пути, полагаю, можно попытаться преодолеть давнишний кризис в современной школьной математике. В частности, появляется иная, по сравнению с традиционной, деятельность учителя и учеников, решаются иные задачи³.

³ Подробнее об этом см.: *Иванов С.Г., Рыжик В.И.* Плюс компьютер // Математика в школе. – 2022. – № 1.

А как Вы относитесь к дистанционному обучению и как оцениваете его перспективы?

Положительно отношусь, но без экзальтации. В иных случаях оно необходимо. Давно известна более сильная форма дистанционного обучения – заочное обучение. Сегодня оно существует, например, как экстернат. Я бы сказал, дистанционное обучение занимает (в некотором смысле) промежуточное положение между очным и заочным. Существенное преимущество дистанционного обучения перед заочным – возможность постоянного диалога. Мне видится, что далее оно будет развиваться и совершенствоваться.

В обществе давно есть некий аналог возникновения новых методов коммуникации и их сочетания со старыми методами. Возьмём театр. Появилось кино, затем телевидение. Но театр не умер. Более того, появился телевизионный театр, спектакли и оперы в виде кинофильмов. Налицо симбиоз старого и нового в искусстве. То же будет, полагаю, и с компьютерными технологиями. Они займут свою нишу и войдут в симбиоз с предыдущими достижениями в образовании. И никуда не исчезнет чудо живого общения между людьми, между человеком и творением.

Опасность использования компьютерного инструмента в образовании, видимо, есть, но не для конкретного учителя или ученика, а для общества в целом. Ну чем можно заменить живое общение учителя и ученика? Дополнить – пожалуйста, но убрать «глаза в глаза»? Напомню сцену из замечательной пьесы «Лиса и виноград». Философ Ксанф, рабом которого был Эзоп, услышав от него нечто умное, восклицает: «Какая мысль! Я иду к своим ученикам!»

И были Учителя, окружённые теми, кто хотел их воспринять: Пифагор, Со-

крат, Конфуций... А вспомните Рачинского на картине Н. Богданова-Бельского «Устный счёт». Разумеется, эта тенденция присуща человечеству во все времена и в любом виде. Вот и сегодня родители ищут для ребёнка хорошего учителя в начальной школе. И что, эту роскошь можно заменить?

Согласны ли Вы с мнением, что скоро искусственный интеллект составит серьёзную конкуренцию учителю, а затем и вовсе заменит его? Если нет, то какую роль, на Ваш взгляд, он в будущем будет играть в школе: помощника учителя, тьютора (персонального наставника ученика) или кукуую-то иную?

Загадывать трудно, а порой бесполезно. Даже на моей памяти появилась атомная энергетика, спутники, компьютерные технологии, интернет. Давайте вспомним, что принесли в жизнь достижения цивилизации. В конечном счёте — экономию времени для обычной жизни. Жизнь — это то, что происходит сегодня. Сегодня у меня есть то, что освобождает от «технических забот». Думаю, каждый понимает, о чём веду речь. Средства транспорта и связи отнесём туда же. Так почему искусственный интеллект должен быть исключением? Видимо, будет сокращено время на принятие интеллектуальных решений. Для меня тут пример — подготовка шахматиста к турниру. Насколько я знаю, нейронные сети уже обыгрывают сильнейшие шахматные программы, а значит, и человека. Ясно, что они помогут и в других аналогичных ситуациях.

Наверняка влияние искусственного интеллекта скажется на деятельности учителя. Например, учитель сможет быстрее справляться с проверкой письменных работ. Я сам не один год легко провожу письменный экзамена по геометрии

в тестовой форме с помощью специально написанной программы.

А зачем вообще продолжать обучать людей математике, если можно все расчёты возложить на искусственный интеллект, а людям оставить творческие задачи?

В математике расчёты совсем не главное, скорее, они присущи физике, инженерии. Нам главное получить формулу. А со стереометрией ещё сложнее. Известно, что специальная программа может доказать некие теоремы геометрии. Но может ли искусственный интеллект создать, скажем, лист Мёбиуса? Однако проблема видна: надо бы подобрать такие задачи, которые не могут быть решены только человеком или только искусственным интеллектом. Есть громадное поле для учительского творчества.

Поделитесь опытом или советом!

Валерий Адольфович, подскажите, как учителю не остановиться в профессиональном развитии с годами стажа, когда кажется, что уже всё умеешь и можешь?

Мне нравится Ваш оптимизм. Мне никогда так не казалось. Более того, работа учителя — это постоянная неудача. В классе-то 25 человек (однажды я выпустил класс, к котором было 44 ученика!), и на уроке до кого-то обязательно не доберёшься. Так что такое может казаться, когда работаешь репетитором, причём занимаешься с одним учеником.

А чтобы совершенствоваться в профессиональном мастерстве, рецепт прост: читаем литературу, подходящие книги и статьи, смотрим, что делают коллеги, беспристрастно анализируем свой опыт. Экспериментируем, пробуем, сочиняем. Главное в нашей работе — чтобы она нравилась и была интересной. Тогда и ученикам

будет интересно. Помните, как Пушкин, поставив последнюю точку в «Борисе Годунове», воскликнул: «Ай да Пушкин! ай да сукин сын!» Вот и мы, закончив урок, стремимся к такому же ощущению, не правда ли?

Хотела спросить про уравнения, которые содержат в себе и логарифмы, и тригонометрические функции, и нашла ответ в Вашей книге. Спасибо Вам за честный и открытый разговор! Хочу поинтересоваться судьбой Вашего блокнота, куда Вы записываете интересные задачи. Очень хочется их порешать. Будут ли они опубликованы или уже?

Я и сам хотел бы заглянуть в такой блокнот. Но, увы, его нет. Иногда что-то заносу в записную книжку, но она общего характера.

Желание порешать задачи дорогого стоит. Превосходные задачи (вместе с решениями) есть нынче не только в архивах. Я бы сейчас ориентировался на задачки В. Прасолова. Чтобы овладеть техникой в геометрии, решал бы тематические задачи, например задачи на построение (В. Голубев с соавторами), на преобразования (Я. Понарин, В. Болтянский и И. Яглом), на векторы (В. Болтянский и И. Яглом, З. Скопец), по комбинаторике (Н. Виленкин), олимпиадные задачи (И. Ибатулин) и конкурсные задачи (М. Сканава и соавторы). Вообще, учитель математики, чтобы прилично зарабатывать, должен, репетируя, уметь решать задачи не только из учебника или сборника для подготовки к ЕГЭ. А «для души» я решал бы занимательные задачи из книг, например, Б. Кордемского, М. Гарднера.

Есть ещё и параллельная деятельность: придумывание задач. Мне уже давно это стало интереснее, чем решать

задачи. Удалось найти малоизвестную нишу в учебных задачах по геометрии: задачи на оценку величин. Простейший пример: большая сторона треугольника равна 1; оцените его периметр и площадь. Техника составления подобных задач может быть, например, такой: нужно взять обычную задачу на вычисление и убрать одно данное, а затем посмотреть, что можно оценить. Тут большой простор для самостоятельного творчества. Оценка величин в математике имеет не меньшее значение, нежели применение точных формул.

А с чего Вы как опытный автор советовали бы начать писать книгу об обучении математике?

Для начала накопим удачный опыт. Осмыслим его. Сделаем устный доклад. Затем сочиним статью в журнал или методический сборник. Когда такого материала накопится достаточно, можно начать готовить книгу. При этом обязательна собственная работа над языком и стилем, чтобы текст «читался». Беда многих авторов математических текстов, что их даже интересный материал читать очень трудно.

Кстати, работе с текстом важно учить и школьников. Весьма непросто внедрить в их сознание, что письменный математический текст – это не разрозненный набор формул, а мысли, последовательно изложенные на грамотном русском языке. Однажды в слове «тетраэдр» мой ученик сделал четыре ошибки. Причём учебник геометрии лежал перед ним. Две буквы «с» в слове «асимптота» – стандарт. Я говорю тому, кто их допустил: «Чего поспешил-то на букву “с”»? Написал бы её сразу три раза».

Как мотивировать современных детей, погрязших в гаджетах, изучать математику? Приведите, пожалуйста,

ста, три наиболее весомых, на Ваш взгляд, аргумента при ответе на вопрос школьника: «Зачем нужно учить математику?»

Во-первых, математика нужна практически. Конечно, вы (обращаемся к ученикам), если не будете заниматься математикой или её применением профессионально, со временем забудете все формулы и константы. А что останется? Например, пространственное мышление. Тут я привожу пример параллельной парковки: не имея пространственного мышления, хорошо, если вы не повредите машины, между которыми паркуетесь.

Во-вторых, математика развивает абстрактное мышление, то есть мышление понятиями. Представьте, что вам потребовалось сделать важный жизненный выбор, скажем, сменить жильё. Появляются абстрактные понятия: планировка, наличие инфраструктуры и пр., с которыми придётся иметь дело. В природе нет чисел и фигур. Эти понятия придумал человек в процессе эволюции интеллекта. И они куда проще, нежели те понятия, что встречаются в других науках, а тем более в реальности. Школьная математика не только приучает человека к таким понятиям, но и учит преодолевать трудности, возникающие при овладении ими. Проще говоря, постепенно увеличивает трудность решаемых задач. Вспомним замечательный роман Д. Хеллера «Уловка-22». Один из персонажей перед принятием решения делил лист бумаги пополам и записывал в одной части «Пирог и пышки», а в другой – «Синяки и шишки».

В-третьих, в математике всё доказывается. Она учит не верить на слово. Мало ли кто что говорит или пишет. А где доказательство? Нет ли в нём ошибок? Адекватна ли созданная модель ситуации? Нет ли других решений проблемы?

И всё это можно продемонстрировать при надлежащем математическом образовании.

Говорят, что красота в глазах смотрящего. Кто-то смотрит на мир сквозь призму математики. А через какую призму рассматривать красоту самой математики с современными школьниками?

Через призму геометрии прежде всего. Поменьше вычислительной работы, побольше примеров симметрии. Используя компьютерные инструменты, ученики могут создавать красивые узоры, да ещё цветные. Я до сих пор храню лучшие их рисунки. Для собственного уразумения важны книги Г. Вейля «Симметрия», Д. Пидоу «Геометрия и искусство», Р. Пименова «Эстетическая геометрия». В других разделах математики тоже стоит поискать подходящие примеры. Можно показать ученикам длиннющее преобразование, что называется, «решение в лоб», а потом для сравнения коротенькое, изящное. В книге В. Болтянского «Симметрия в алгебре» есть замечательные тому примеры. Посмотрите книги А. Волошинова «Математика и искусство», Д. Хофштадтера «Гёдель, Эшер, Бах», А. Жукова «Элегантная математика».

Каждый ученик уникален и удивителен по-своему. Как распознать талант и раскрыть потенциал каждого? Существуют ли некие «универсальные рецепты» или подход всегда должен быть индивидуальным?

Нужно почаще давать ребятам несложные задачи с возможностью нестандартного решения. Например, такую: просуммировать выражения вида $1 / k(k + 1)$, где $k = 1, 2, \dots, 10$. В своё время на районной олимпиаде я дал эту задачу шестикласснику Юре Матиясевичу. Таких задач много в книгах по занимательной математике, в

сборниках заданий для внеклассной работы. Особо советую книги Я. Перельмана, Б. Кордемского, М. Гарднера, Р. Смаллиана. Олимпиадные задачи чересчур специфичны, по-моему.

А какова Ваша философия домашнего задания?

Ну, какая там философия. Характер домашних заданий у меня не раз менялся. Сейчас ученики в геометрии сами выбирают домашнее задание – из учебника или со стороны. И этот выбор говорит о них иногда больше, чем сама выполненная работа. Иногда домашнее задание (одна задача) они оформляют, набирая текст и делая рисунки на компьютере. Качество письменных работ со временем становится всё лучше, порой проверять их одно удовольствие.

Кредо для учеников: если вы хотите, чтобы ваша работа понравилась мне, она сначала должна понравиться вам самим.

Чем, на Ваш взгляд, можно перебороть клиповое мышление, приводящее к «каше в голове» ученика? Как повысить интерес к структурному мышлению?

Под структурным мышлением кроются, видимо, некие интеллектуальные умения, то есть оно не есть особый вид мышления. Мышление, как известно, начинается с вопроса. И не так важно, сам ли ученик задаёт вопрос себе или кому-то, ему ли задают вопрос. Для меня вопросы учеников – часть домашнего задания после изучения параграфа учебника.

Можно подбирать соответствующие задачи, их много в книгах Д. Пойа, О. Иванова. Последний ввёл понятие содержательной задачи, то есть такой, в которой наличествует неочевидное рассуждение. Такая задача не сводится к выполнению известного алгоритма или алгоритмических предписаний, в поиске её решения помогают эвристика, сократический ме-

тод, компьютерный эксперимент. Хорошая задача обычно содержит разветвлённую цепочку силлогизмов. Когда она нравится и учителю, и ученику, от неё больше толку.

При изложении теории важно показать её происхождение, разные варианты построения, чтобы ученики сравнивали и выбирали сами то, что им больше нравится. Например, натуральный логарифм может определяться как площадь под гиперболой на отрезке $[1; a]$, и такой подход гораздо нагляднее традиционного.

Наконец, убрав нагрузку на память, сделаем упор на осмысление. К примеру, не будем сразу давать определение квадрата, лучше спросим, чем отличается квадрат от ромба, от прямоугольника, а также чем эти фигуры сходны.

Про жизнь и не только

Валерий Адольфович, какие мечты детства Вам удалось осуществить?

Про детские мечты сейчас уже не помню. Всё шло как бы само собой. Желания появлялись, иногда реализовывались, иногда пропадали. Не удалось стать физиком и сделать профессией самую интересную для меня науку в школьные годы. До сих пор жалею, что не играю на каком-либо инструменте. Пытался научиться, год занимался, дошёл до исполнения «Неаполитанской песенки» Чайковского, но дома не было пианино, потому не удалось продолжить. Завидую тем, кто может сыграть на рояле ноктюрн Шопена или «Времена года» Чайковского. Главное – нашлось сразу подходящее дело на всю жизнь.

А как часто Вы строили планы, которые рушились и не свершались? Какое решение Вы принимали в такой момент?

Много раз в первой половине жизни.

Первый раз – не смог поступить на физический факультет. Что делал? Продолжал, не особо горюя, жить дальше, зачем травить душу?

Учась в школе, я много времени провёл, пробуя доказать великую теорему Ферма. У меня тогда не было интернета, и я не знал, что она уже доказана. А была ли у Вас своя «проблема тысячелетия», над которой пришлось поломать голову?

Была. В студенческие годы я пытался доказать, что нечётных совершенных чисел не существует. Получил даже несколько простеньких частных результатов, предположив, что такое число есть. Надолго застрял и оставил эту затею. Насколько я знаю, ответ на вопрос о существовании нечётных совершенных чисел не получен по сию пору.

Ещё в школе брался за более простые проблемы. Например, пробовал построить треугольник по стороне, противолежащему углу и его биссектрисе. Не получилось. Решение этой задачи увидел спустя десятилетия в книге «Построение треугольника» авторов В.И. Голубева и др.

Если бы у Вас была возможность отправиться на машине времени в прошлое, чтобы встретиться с кем-то из великих умов минувших столетий, на кого пал бы Ваш выбор и какие темы Вы обсуждали бы?

Для начала на Пифагора. Спросил бы, зачем он стал измерять длины струн на музыкальном инструменте? А уж про несоизмеримость диагонали квадрата и его стороны можно было бы говорить очень долго. Возможен некий список собеседников. Пообщался бы с Сократом. Думаю, с ним интересно было бы обсудить любую проблему. У Омара Хайяма разузнал бы о том, как ему удалось одновременно быть и выдающимся учёным, и великим поэтом.

С Рене Декартом разобрал бы его книгу «Правила для руководства ума». С Исааком Ньютоном поговорил бы о религии, с Карлом Гауссом – о пятом постулате, с Анри Пуанкаре – о связи математики и физики, а с Берtrandом Расселом – о связи математики и философии. Ещё спросил бы у Альберта Эйнштейна, почему он так высоко ценил Достоевского.

Каким, по Вашему мнению, из своих достижений (открытий, изобретений) человечество могло бы больше всего гордиться, а какого «достижения» больше всего стыдиться?

Письменность, наука, технологии – основополагающие достижения. Стыдиться достижений нелепо. Стыдиться можно использования некоторых из них, и в первую очередь – применения их в военных целях.

Расскажите о самой забавной житейской ситуации, в которой Вам пригодилась (пришла на помощь) математика?

Иду я однажды по улице погожим летним днём. Вижу, как двое работают из трёх длинных досок прямо на тротуаре пытаются сделать три стороны прямоугольника. Попросил разрешения посмотреть, как они это будут делать. Они уже имели две равные доски и пытались присоединить их к третьей доске под прямым углом. Угольника под рукой не было, поэтому они стали измерять диагонали будущего прямоугольника. Равенство этих диагоналей, по их мнению, обеспечило бы нужную конструкцию. Про равнобокую трапецию они не сообразили. И вот тут настала минута торжества математики. Я им сказал про египетский треугольник для получения прямого угла. Далее мы вместе померили всё, что нужно, скрепили доски, как надо, и я ушёл, полыхая от удовольствия.

Каков главный урок, который Вы вынесли из своей жизни касательно дружбы между людьми?

Весьма шаткое это отношение. Не всегда можно быстро понять, то ли человек тебе друг, то ли просто приятель. Чтобы разобраться, надо бы пройти вместе «огонь, воду и медные трубы». Причём последнее более существенно. И как заметили когда-то: враги не предадут, предадут друзья. Мы же помним Цезаря: «И ты, Брут!»

Посоветуйте, пожалуйста, простой способ, как успокоиться и поднять себе настроение, что называется, отдохнуть душой.

Тут всё индивидуально. Не мешает иметь подходящее не слишком серьёзное занятие. Именно занятие, а не пассивное созерцание или соучастие. Для меня сейчас это игра в шахматы. Настроение явно улучшается после удавшейся партии с равным по силе соперником, даже не так важен её результат. А уж если удалось выиграть, то в тот миг забывается всё мирское.

Бесценно погружение в искусство. И занятие любого рода творчеством, поскольку в процессе его забываешь себя, иногда полностью, забываешь поесть и поспать. Замечателен туризм, причём спортивный. Заберёшься на вершину горы – и всё земное кажется таким далёким...

Известно, что Вы очень любите и коллекционируете афоризмы. Не могли бы привести один, который точно и ёмко описывал бы «наши времена»?

Даже самого себя не следует воспринимать слишком серьёзно. Эта мысль годится на все времена. И одно пожелание всегда и для всех: «Пусть всегда будет завтра!»

Вы посвятили себя преподаванию и работе с детьми. Сегодня, оглядываясь назад, можете сказать, так кто кого выбрал много-много лет назад: Вы профессию учителя или она Вас?

Мой выбор был обусловлен некими обстоятельствами жизни – моей и моих родителей. Просто так сложилось, по сути, выбора и не было.

А если бы Вы смогли начать жизнь заново и получили возможность выбрать любую другую профессию, то какую профессию выбрали бы?

Если бы можно было начать всё сначала, то сейчас я бы подумал о профессии в документальном кино.

Вокруг так много интересного: в науке, в обустройстве нашей замечательной планеты, в жизни и обычаях живущих на ней существ...

*Материал подготовила
Н.М. Карпушина*



ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ВАЛЕРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА ГУСЕВА (к 80-летию со дня рождения)

THE LIFE PATH AND SCIENTIFIC AND PEDAGOGICAL ACTIVITY OF V.A. GUSEV (to the 80th anniversary of his birth)

Персоналии

УДК 372.851; 37.03

Personalities

DOI: 10.47639/0130-9358_2023_2_62

В.А. Тестов, доктор пед. наук., канд. ф.-м. наук., профессор, Вологодский государственный университет, vladafan@inbox.ru

V.A. Testov, ShiD (Pedagogy), Ph.D (Phys&Math), Professor, Vologda State University vladafan@inbox.ru

Аннотация: в статье описываются наиболее важные вехи жизненного пути и основные направления научно-педагогической деятельности В.А. Гусева. Такими направлениями в методике обучения математике являются: преподавание математического анализа в средней школе без использования строгого определения предела, создание нового курса геометрии для школьников и разработка психологических основ обучения математике в курсе методики для студентов – будущих учителей математики

Abstract: the article describes the most important milestones of the life path and the main directions of V.A. Gusev's scientific and pedagogical activity. Such directions in the methodology of teaching mathematics are: teaching mathematical analysis for schoolchildren without using a strict definition of the limit, creating a new geometry course for schoolchildren and developing the psychological foundations of teaching mathematics in the course of methodology for students – future teachers of mathematics

Ключевые слова: колмогоровская реформа, понятие предела, нестандартный анализ, фузионизм, приёмы мышления, математические способности

Keywords: kolmogorov reform, the concept of limit, non-standard analysis, fusionism, thinking techniques, mathematical abilities

© Тестов В.А. 2023

В российской и мировой математической и методической научной среде, а также среди учителей математики имя В.А. Гусева хорошо известно. Он является автором и соавтором более 250 научных работ, книг для учителей математики, учебников и справочных пособий для школьников, под его руководством было подготовлено около сотни докторов и кандидатов педагогических наук.

Валерий Александрович Гусев родился 18 ноября 1942 г. в г. Кашине Калинин-

ской области, там же прошли его школьные годы. Его мама была прекрасным учителем математики и пользовалась большим уважением. Не удивительно, что Валерий Александрович со школьных лет полюбил математику, закончил школу с серебряной медалью в 1960 г. По окончании школы он сразу поступил в Ленинградский университет на математикомеханический факультет. Параллельно с учёбой в университете он стал заниматься в певческой школе, а затем в оперной

студии, но главным его увлечением стало преподавание математики. Ещё студентом 4 курса будущий учёный начал работать учителем математики в ФМШ-интернате при ЛГУ, открытой осенью 1963 г. Валерий Александрович показал себя в ФМШ увлечённым, творчески работающим учителем, проводил в интернате дни и ночи. В результате после окончания университета в 1965 г. он был принят в аспирантуру мат-меха по специальности «методика обучения математике». Это направление на мат-мехе было открыто специально под В.А. Гусева. Его научным руководителем был назначен член-корреспондент АН СССР Д.К. Фадеев. Большую помощь в руководстве новой для факультета специальностью оказали ученики Д.К. Фадеева, работавшие в интернате, в частности, один из основных организаторов и руководителей ФМШ при ЛГУ М.И. Башмаков.

В 1966 г. произошло знакомство молодого аспиранта с великим учёным, академиком А.Н. Колмогоровым, когда тот приезжал в Ленинград на совещание руководителей и преподавателей школ-интернатов со всей страны. Валерий Александрович неоднократно вспоминал, как они с Андреем Николаевичем после совещания долго гуляли по набережной Невы и увлечённо обсуждали самые разные вопросы, в том числе насущные проблемы математического образования. Этот момент стал определяющим во всей дальнейшей жизни и научной деятельности В.А. Гусева. Он стал учеником, помощником и соавтором А.Н. Колмогорова, их сотрудничество продолжалось около 15 лет. И первая крупная научная проблема, решением которой занимался в аспирантуре В.А. Гусев, была навеяна реформаторскими идеями крупных математиков, в частности А.Н. Колмогорова, Д.К. Фадеева и др.

При реализации реформы школьного математического образования, проходившей в 60–70-х годах прошлого века («колмогоровской реформы»), ярко обозначилась следующая проблема. А именно, при изучении первоначальных понятий математического анализа у старшеклассников возникли большие трудности, аналогичные тем, которые возникали у многих студентов младших курсов. Авторы реформы математического образования считали необходимым знакомить учащихся с производной в старших классах. Однако такое раннее введение производной наталкивается на серьёзные трудности, поскольку строгое определение производной опирается на сложное понятие предела, в определении которого содержатся три квантора.

Так, в одной из своих статей¹ А.Н. Колмогоров отмечал, что при введении начал анализа в курс школьной математики важно исходить из следующих двух принципов:

1) изложение должно быть наглядным и связанным с физическими представлениями и практикой вычислений и исследования функций,

2) понятие производной должно вводиться достаточно рано и широко использоваться в дальнейшем курсе.

Эту же мысль высказывал и Н.Я. Виленкин: «...необходим теснейший контакт с курсом физики – изучение мгновенной скорости в 8-м классе, а производной в 9-м представляется нам педагогической нелепостью» [3, с. 13].

Естественным выходом на пути преодоления возникших трудностей могло стать введение понятия производной, минуя сложное понятие предела функции.

¹ Колмогоров А.Н. Введение к статье С.Б. Суворовой // Математика в школе, 1966, № 4, с. 23.

Именно по этому пути и направились исследования В.А. Гусева после окончания им мат-меха ЛГУ.

Одним из путей упростить изучение математического анализа в школе является сознательное сужение класса рассматриваемых функций. Есть много классов функций, для которых математический анализ строится без больших затруднений. Как было замечено В.А. Гусевым, почти во всех интересующих школьника случаях соотношение

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

доказывается через установление неравенства

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq C \Delta x \quad (*)$$

при всех Δx , не превышающих по модулю некоторого $A > 0$, то есть $|\Delta x| \leq A$, а C — некоторая константа.

Задача нахождения такой константы C , при которой для всех $|\Delta x| \leq A$ выполняется неравенство (*), логически проще и поэтому более доступна для понимания, чем задача подбора для каждого числа $\varepsilon > 0$ соответствующего ему числа $\delta(\varepsilon)$, лежащая в основе общего определения понятия предела функции, а, тем самым, и производной. Основываясь на этих соображениях, В.А. Гусев разработал новый подход, названный им «конструктивным», к введению понятия производной, более простой по сравнению с традиционным. Хотя многие функции, имеющие производные в обычном смысле, не будут иметь их в смысле этого нового определения, однако такие функции в средней школе не рассматриваются [4].

Эксперименты, проведённые В.А. Гусевым, основывались на традиционной физической задаче нахождения мгновенной скорости движения материальной точки и показали возможность наглядного,

нестроого пропедевтического изучения производной в 7 классе, а также строгого «конструктивного» изложения темы «Производная» в 8 классе, не использующего понятия предела.

В этих экспериментах была задействована вся школа-интернат при ЛГУ, но имелось, как отметил В.А. Гусев, ограничение применимости результатов данного исследования. А именно, реализация такого подхода представляется возможным лишь в школах с углублённым изучением математики, имеющих восьмые классы. По результатам своего исследования В.А. Гусев защитил кандидатскую диссертацию, но уже в Москве в 1970 г., куда он переехал в 1969 г. по настоянию А.Н. Колмогорова для работы в ФМШ при МГУ.

К проблеме преподавания анализа в школе сам В.А. Гусев больше не возвращался, но ею занялись другие исследователи, чтобы овладение основами дифференциального и интегрального исчисления могло быть достигнуто не только в школах и классах с углублённым изучением математики, но и в общеобразовательных школах.

Другой подход, отличный от подхода В.А. Гусева, но близкий к нему, к введению производной в 8-м классе одновременно с изучением в физике мгновенной скорости был предложен в 1987 г. К.Г. Аракеляном и В.Г. Болтянским [1]. Производная в массовой школе, по мнению К.Г. Аракеляна, должна вводиться описательно, наглядно, интуитивно, с применением геометрических пояснений вместо трудных доказательств, с опорой на параллельное изучение физических понятий. В своей кандидатской диссертации, защищённой в 1991 г. и основанной на этом подходе, он рассматривает класс так называемых липшицевых функций. Функция $f(x)$, заданная на некотором от-

резке $[a; b]$, называется *липшицевой*, если существует такое число K , что для любых точек x_0 и x_1 из этого отрезка справедливо неравенство

$$\frac{|\Delta f(x_0)|}{|\Delta x|} \leq K.$$

Для таких функций, кроме указанного упрощённого введения понятия производной, возможно введение определенного интеграла при помощи равенства

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Поскольку в определении липшицевой функции участвуют всего два квантора, это определение проще, чем традиционные определения предела и производной.

Предложенный К.Г. Аракеляном путь – это тоже сознательное сужение класса рассматриваемых функций. Кроме липшицевых функций весьма приемлемым в этом отношении является класс кусочно-монотонных функций. Непрерывность монотонной функции наглядно эквивалентна ясному свойству: принимать все промежуточные значения. Отпадает необходимость в теореме Лагранжа для доказательства связи монотонности функции и знака производной и т.д.

Привлекательным для первоначально-го знакомства с математическим анализом действительно является класс кусочно-монотонных функций. Их использование, как отметил А.Г. Мордкович, способствует преодолению обычного заблуждения многих учащихся, отождествляющих функцию только с её аналитическим заданием в виде некоторой формулы. Как в пропедевтическом, так и в мотивационном плане кусочные функции подготавливают учащихся к восприятию понятия непрерывности [6].

Имеется ещё один путь построения математического анализа, не опирающийся на теорию пределов. Этот путь

только кратко намечен в диссертации В.С. Гусева и состоит в развитии наивно-аксиоматического метода. Как отметил М.И. Башмаков в своей статье [2], задание объекта набором его свойств – это не только важнейший метод современной математики, но и очень перспективный путь с точки зрения приложений. Аксиоматический способ описания площадей и объёмов общепринят, аксиоматическое описание интеграла тоже широко распространено. А вот опыт аксиоматического изучения производной явно недостаточен.

В последнее время усилилась критика колмогоровской реформы, особенно введения раннего изучения математического анализа в средней школе. Имеется значительная группа математиков, которые предлагают исключить из школьной программы не только пределы, но и производные, их применение к исследованию функций, первообразные, нахождение площадей криволинейных трапеций, поскольку изучение этих тем часто происходит формально, и они остаются непонятными школьниками.

Однако, как отмечают другие учёные, элементы дифференциального и интегрального исчисления являются частью общечеловеческой культуры, и исключение их из школьной программы нанесло бы урон образованию тех людей, которые не будут изучать их в вузе. Поэтому нужно заниматься не проблемой отказа от изучения в средней школе начал математического анализа, а проблемой совершенствования методик в отыскании эффективных средств обучения. Строгое определение понятий анализа должно быть не началом обучения, а итогом творческого поиска учащихся под руководством учителя.

Аналогичная дискуссия возникает относительно понятия предела и в преподавании математического анализа на

первом курсе вуза. Опыт обучения математическому анализу, накопленный высшей школой, показывает, что наибольшие трудности у студентов вызывает усвоение именно понятия предела. Как правило, это понятие усваивается формально, и, как следствие, формально усваиваются понятия производной и интеграла. Такое положение вполне объяснимо, поскольку первокурсники – это вчерашние школьники, и уровень мышления у них примерно один и тот же.

Для того, чтобы преодолеть эти трудности, ряд авторов предлагает переориентировать обучение анализу в вузе на первом этапе: вместо опоры на сложное понятие предела использовать опору на более наглядные и интуитивно более ясные инфинитезиальные методы. Эти методы использовали в преподавании математики Г. Лейбниц и Л. Эйлер, но об этих методах забыли со времен О. Коши и К. Вейерштрасса. Лишь после работ А. Робинсона (1960 г.) древний метод неделимых также получил прочную основу и стал полнокровным разделом современной математики. Появилась возможность излагать теорию производной и интеграла с новой точки зрения, с точки зрения нестандартного анализа.

Однако, математический анализ, построенный на нестандартной основе, сталкивается с большой методической трудностью, а именно – с невозможностью его строгого построения на ранних этапах, да и на более поздних этапах изучения, поскольку он требует привлечения математической логики и теории моделей. Поэтому вопрос о статусе и месте нестандартного анализа нужно решать осмотрительно, подобно с задачами, которые ставит преподавание. Наиболее оптимальным, по мнению, высказанному в 1993 г. Н.Н. Егарминой, является сочетание обоих подходов,

что позволит взглянуть на одни и те же понятия с двух принципиально разных сторон: с точки зрения философской категории непрерывности и с точки зрения философской категории дискретности².

Таким образом, большинство исследователей сходятся во мнении, что трудности в преподавании основ математического анализа связаны с отсутствием промежуточных ступеней при формировании структур анализа. Все наиболее удачные попытки преодолеть эти трудности как в школе, так и в вузе сводятся к построению таких пропедевтических ступеней. В настоящее время компьютерная техника предоставляет возможности для такой пропедевтики, для визуального формирования представлений и о пределе, и о предельной точке при наблюдениях за траекторией движения точки.

После защиты кандидатской диссертации В.А. Гусев перешёл на работу в Министерство просвещения СССР на должность инспектора вузов, он стал отвечать за математическое образование во всех педвузах страны. Эта трудная и ответственная работа продолжалась 9 лет до перехода его в 1983 г. в МГПИ им. В.И. Ленина (ныне МПГУ) на кафедру методики преподавания математики, на которой он проработал всю оставшуюся жизнь, а с 1990 г. по 2014 г. был заведующим этой кафедрой. В трудные 90-е годы он по совместительству работал в МПГУ деканом факультета повышения квалификации для преподавателей педвузов.

В эти годы своей жизни и творчества В.А. Гусев особый интерес проявлял к геометрии, посвятив исследованиям в области методики обучения геометрии

² Егармина Н.Н. Идеи нестандартного анализа в математической подготовке будущих учителей. Дисс....канд. пед. наук. Липецк, 1993.

несколько десятилетий своей жизни. Он участвовал в создании многих пособий по геометрии под руководством А.Н. Колмогорова, а затем сотрудничал с А.В. Погореловым по написанию (совместно с А.И. Медяником) дидактических материалов для его учебника. В 1988 г. он вместе с А.Г. Мордковичем подготовил и издал книгу «Справочные материалы по математике».

В 90-е годы В.А. Гусев вместе с А.Г. Мордковичем принял участие в написании учебников для новой экспериментальной модели школы «Экология и диалектика», разработанной проф. Л.В. Тарасовым, которая охватывала 300 школ из разных регионов. Используя свой прошлый опыт работы над учебниками геометрии, В.А. Гусев разработал собственную концепцию учебников для 6–9 классов «Я в пространстве». По его мнению, геометрия – это наука, опирающаяся на наглядность, возникшая из наблюдений человека за окружающим миром, в котором нет ни одного плоского объекта. Поэтому раздельное изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве не позволяет ученику увидеть многих общих закономерностей. Для преодоления этого недостатка плоские фигуры и их свойства в его учебнике изучаются не сами по себе, а как части пространственных фигур. Эту концепцию можно отнести к одной из форм фузионистского подхода к преподаванию геометрии. Надо отметить, что В.А. Гусеву удалось успешно реализовать свою концепцию, которая способствовала математическому развитию учащихся, решать проблемы реализации межпредметных связей. В его учебнике по геометрии большое значение придаётся наглядности, рисункам, которые помогают уяснить свойства фигур, выдвинуть идею решения, понять идею доказательства. Поэтому учебники

В.А. Гусева вызвали интерес как у учащихся, так и у учителей.

Но продолжить дальше эту работу оказалось сложнее, чем в начале. В связи с образовательными реформами в стране внедрение этих учебников, к сожалению, прекратилось. Гриф на свой учебник он получил только в 2011 г. Но опыт В.А. Гусева оказался востребованным при написании другого учебника по геометрии в качестве руководителя авторского коллектива. Это учебник по геометрии для 10 и 11 классов для профильного уровня (авторы В.А. Гусев, Е.Д. Куланин, А.Г. Мякишев и С.Н. Федин), на который тоже был получен гриф и который был включён в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию в школьном образовании. Таким образом, на заре своей жизни В.А. Гусев мог констатировать, что поставленная им перед собой задача издания школьного учебника по геометрии была решена.

Отметим ещё одно направление его научной деятельности. Это деятельность В.А. Гусева по перестройке курса методики математики для будущих учителей и включения в этот курс проблем психологии математического образования. Этими проблемами В.А. Гусев заинтересовался в процессе своей длительной работы над докторской диссертацией, которая была защищена в 1990 г. и была посвящена дифференциации обучения математике.

В.А. Гусева в психологии давно интересовали вопросы «что такое ум?» и «как ум привести в порядок?». Для ответов на эти вопросы он изучил труды крупнейших психологов по проблемам мыслительной деятельности и, прежде всего, работы С.Л. Рубинштейна. Чаще всего он отмечал, что, по мнению С.Л. Рубинштейна, в основе любого мыслительного процесса лежат

два основных приёма – синтез и анализ; нет «чистого анализа», нет «чистого синтеза»: эти приёмы взаимосвязаны; «анализ через синтез – квинтэссенция мышления». В своей диссертации В.А. Гусев эти процессы подробно изучил применительно к обучению математике. Затронул он и проблему развития математических способностей, в частности, сгруппировал параметры математических способностей по трём направлениям. Основываясь на своём большом опыте работы с одарёнными школьниками, он заметил, что далеко не для всех таких учащихся олимпиадные задачи интересны по фабуле и внешне эффектны [5]. Поэтому выявление одарённых ребят сводить только к математическим олимпиадам.

Развитием идей В.А. Гусева явилась классификация параметров математических способностей, предложенная его аспиранткой А.К. Насыбуллиной³. Отличительной особенностью этой классификации является её многогранность, взаимосвязь с целями обучения математике, направленность на целостное формирование личности школьника. Дальнейшим развитием этих идей В.А. Гусева явились работы автора данных строк, выделение основных схем математического мышления как метапредметных результатов обучения и использование этих схем для развития математического мышления и математических способностей [7], [8].

Свою концепцию психологии мыслительной деятельности при изучении математики В.А. Гусев внедрил в учебный план подготовки учителей математики в МПГУ и описал в целом ряде книг и учебных пособий. В.А. Гусев был неиз-

менным участником научных конгрессов, конференций и семинаров различного уровня, проходивших в России и странах зарубежья. В течение всех последних лет он входил в состав Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ.

Скончался Валерий Александрович 7 марта 2018 г. Вся его жизнь и деятельность являются образцом служения науке и Отечеству, делу математического образования в нашей стране.

Список источников

1. Аракелян К.Г., Болтянский В.Г. Когда и как вводить производную? // Математика в школе, 1987, № 3. С. 43–47.
2. Башмаков М.И. Определение основных понятий анализа в школьном курсе математики // Математика в школе, 1988, № 3. С. 68–73.
3. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // Математика в школе, 1988, № 4. С. 7–14.
4. Гусев В.А. Из опыта введения понятия производной в средней школе // Математика в школе, 1970, № 6. С. 49–57.
5. Гусев В.А. Как помочь ученику полюбить математику? М., Авангард, 1994.
6. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры // Математика в школе, 1996, № 6. С. 28–33.
7. Тестов В.А. Математическая одарённость и её развитие // Перспективы науки и образования: международный электронный научно-практический журнал: <http://pnojournal.wordpress.com> № 6, 2014. С. 60–67.
8. Тестов В.А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука, 2016; (1): С. 4–20.

³ Насыбуллина А.К. Методика выявления параметров математических способностей учащихся при обучении математике в неполной средней школе. Дисс... канд. пед. наук. М., 1993. 167 с.

Статья поступила в редакцию 14.10.2022.
Принята к публикации 27.10.2022.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА ГУСЕВА В.А. В МПГУ

Представлена информация о VII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике» (к 80-летию со дня рождения В.А. Гусева), состоявшейся в ноябре 2022 года, кратко изложены основные тезисы пленарных докладов, подчеркнута значимость таких мероприятий для развития методической науки и подготовки учителя математики.

18–19 ноября 2022 года в Московском педагогическом государственном университете (МПГУ) в Институте математики и информатики состоялась VII Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике» (к 80-летию со дня рождения В.А. Гусева).

Международная конференция, посвящённая памяти доктора педагогических наук, профессора Гусева Валерия Александровича, прошла в год празднования 150-летия МПГУ. В этом ведущем педагогическом вузе В.А. Гусев проработал 33 года, с 1983 по 2016 год, из них 24 года, с 1990 по 2014 год, был заведующим кафедрой теории и методики обучения математике. В это время на кафедре обучались в аспирантуре и докторантуре и успешно защитили диссертации многие известные ныне учёные в области теории и методики обучения математике. Сам Валерий Александрович подготовил более 80 докторов и кандидатов педагогических наук. Среди его учеников – методисты-математики не только из России, но и из Йемена, Казахстана, Монголии, Польши, Сирии, Южной Кореи и других стран. Некоторые из них

приняли участие в конференции, посвящённой его памяти, уже со своими учениками. География участников довольно обширна: это преподаватели, аспиранты, магистранты и студенты из Алматы, Брянска, Вологды, Донецка, Кирова, Костромы, Краснодар, Красноярск, Курска, Минска, Нижнего Новгорода, Омска, Пензы, Петропавловска, Самары, Санкт-Петербурга, Смоленска, Тольятти, Ульяновска, Хабаровска, Ярославля и других городов. Всего было подано ровно сто статей и тезисов в пять секций конференции, работавших по следующим направлениям:

1. Методическая подготовка учителя математики в вузе: направления развития.
2. Предметная подготовка учителя математики в вузе: поиск новых подходов.
3. Общее математическое образование: цифровая трансформация.
4. История методики обучения математике в лицах: педагоги-математики, учёные-методисты.
5. Информатика и информационные технологии в образовании.

С секционными докладами можно ознакомиться на сайте кафедры теории и методики обучения математике и ин-

форматике МПГУ [2], видеозапись пленарного заседания размещена на канале МПГУ [1].

С приветственным словом к участникам конференции обратились ректор ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», академик РАО, доктор исторических наук, профессор *Лубков Алексей Владимирович*; заслуженный деятель науки РФ, доктор педагогических наук, профессор *Мордкович Александр Григорьевич*; заслуженный учитель России, главный редактор журнала «Математика в школе», председатель Комиссии по образованию Московской городской Думы, кандидат педагогических наук *Бунимович Евгений Абрамович*; ректор ФГАОУ ДПО «Академия Минпросвещения России», кандидат педагогических наук *Кузьмин Павел Владимирович*.

А.В. Лубков поздравил участников конференции со 150-летием МПГУ, а также отметил, что сегодня имя профессора В.А. Гусева известно каждому преподавателю, участвующему в подготовке будущего учителя математики и занимающемуся научной работой в области теории и методики обучения математике. Направление исследований – психология и педагогика математического образования, в котором В.А. Гусевым были получены значимые результаты, – стало основой для учебной дисциплины «Психолого-педагогические основы обучения математике», вошедшей в Ядро педагогического образования.

А.Г. Мордкович в приветственной речи к участникам конференции поделился фактами личной биографии, рассказал о своём выборе МПГИ им. В.И. Ленина, в который он поступил в 1957 году: «Ещё учась в школе, я понял, что хочу быть учителем. В порядке общественной работы в старших классах я собирал неуспевающих по математике одноклассников и прово-

дил с ними дополнительные занятия. Меня они понимали, а учительницу И.Н. – нет, за что, кстати, она меня немножечко не полюбила. Я окончил школу с золотой медалью и мог поступать в институт без экзаменов. Meine mutter мечтала об МГУ, а я – об МПГИ им. В.И. Ленина (ныне МПГУ). Пришлось обещать ей, что буду поступать в МГУ, если меня не примут в МПГИ. Но кто же в пединституте откажется от мальчика с золотой медалью...» [2]. И, конечно, А.Г. Мордкович вспоминал В.А. Гусева: «Мы были с ним постоянными соавторами и большими друзьями. Это был добрый, умный, отзывчивый человек, просто запрограммированный на помощь другим. Светлая тебе память, Валера!» [2].

Е.А. Бунимович в приветственном слове затронул ряд актуальных проблем развития школьного математического образования в России. Особое внимание он уделил проблеме обучения современных школьников статистике и теории вероятностей, отметив большое прикладное значение этого раздела математики. Евгений Абрамович подчеркнул важность повышения познавательного интереса к изучению математики в школе, понимания роли этой науки для развития современного информационного общества, ответил на вопросы участников конференции о новом федеральном перечне учебников для общеобразовательных школ. Также он почтил память В.А. Гусева, отметив его высокий профессионализм в области школьного математического образования.

П.В. Кузьмин, приветствуя участников конференции, как руководитель образовательного учреждения, занимающегося повышением квалификации учителей, подчеркнул вклад МПГУ и, в частности, Института математики и информатики в обеспечение технологического и мировоз-

зренческого суверенитета России, отметил мощный потенциал научно-методической школы Института, определяющей вектор развития теории и методики обучения математике и информатике в стране.

Первая часть пленарного заседания состояла из докладов, в которых представлены страницы истории Института математики и информатики, анализировались значимые результаты научной и педагогической деятельности В.А. Гусева [1].

С пленарными докладами в этой части Конференции выступили:

Каракозов Сергей Дмитриевич, директор Института математики и информатики МПГУ, доктор педагогических наук, профессор, и *Борисов Владимир Юрьевич*, директор музея МПГУ, с докладом «150 лет с университетом: Институт математики и информатики»;

Тестов Владимир Афанасьевич, доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и информатики Вологодского государственного университета, с докладом «О новаторских научно-методических начинаниях видного учёного и педагога В.А. Гусева»;

Орлов Владимир Викторович и *Подходова Наталья Семёновна*, доктора педагогических наук, профессора кафедры методики обучения математике и информатике Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, с докладом «Валерий Александрович Гусев и школьный курс геометрии».

Представим основные тезисы этих докладов.

С.Д. Каракозов познакомил участников с основными вехами в истории Института математики и информатики. Датой рождения Института следует считать 1872 год. В этот год в структуре Московских высших женских курсов (МВЖК) в составе Физико-математического факультета

появился Математический кабинет, а в 1900 году уже было создано математическое отделение. Годом создания кафедры теории и методики обучения математике и информатике можно считать 1924 год. Тогда и потом долгое время она носила название Кафедра методики преподавания математики. А значит, через два года эта кафедра будет отмечать 100-летний юбилей. Также в докладе были приведены интересные факты о содержании обучения в разные периоды существования физико-математического, а затем математического факультета, об учёных и педагогах, участвовавших в подготовке учителя математики. В частности, в 1906 году среди дисциплин значилась дисциплина, называемая энциклопедией математики для естественного отделения. В её содержание были включены, например, следующие темы: основания аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, элементы математического анализа. Для математического отделения эти же темы изучались в отдельных дисциплинах и более глубоко. Интересно заметить, что среди выпускниц математического отделения физмата МВЖК 1908 года была Лиля Юрьевна Брик, «муза российского авангарда» Владимира Маяковского.

В.А. Тестов представил наиболее значительные начинания В.А. Гусева в методике обучения математике и их более поздние продолжения: преподавание математического анализа без использования строгого определения предела, создание нового курса геометрии для школьников и разработка психологических основ обучения математике в курсе методики для студентов – будущих учителей математики. Приведём ряд цитат из представленного доклада. В.А. Тестов отмечает следующие важные результаты научно-методической деятельности В.А. Гусева:

- в области изучения в школе основ математического анализа и алгебры: «При реализации реформы школьного математического образования, проходившей в 60–70-х годах прошлого века (колмогоровской реформы), ярко обозначилась одна из проблем. А именно при изучении первоначальных понятий математического анализа у старшеклассников возникли большие трудности... Естественным выходом на пути преодоления возникших трудностей могло стать введение понятия производной, минуя сложное понятие предела функции. Именно по этому пути и направились исследования В.А. Гусева после окончания им мат-меха ЛГУ» [2];
 - в области обучения школьников геометрии: «В последующие годы своего творчества В.А. Гусев особый интерес проявлял к геометрии, посвятив исследованиям в области методики обучения геометрии несколько десятилетий своей жизни. Он участвовал в создании многих пособий по геометрии под руководством А.Н. Колмогорова...» [2];
 - в области подготовки учителей математики: «Деятельность В.А. Гусева по перестройке курса методики математики для будущих учителей и включению в этот курс проблем психологии математического образования. Этими проблемами В.А. Гусев заинтересовался в процессе своей длительной работы над докторской диссертацией (защищена в 1990 г.), которая была посвящена дифференциации обучения математике... Свою концепцию психологии мыслительной деятельности при изучении математики В.А. Гусев внедрил в учебный план подготовки учителей математики в МПГУ и описал в целом ряде книг и учебных пособий...» [2].
- В.В. Орлов показал вклад В.А. Гусева

в развитие современной методики обучения математике, описал его видение школьного курса геометрии, состоящее в ряде авторских принципов построения современного курса геометрии 1–11 классов. В частности, докладчик отметил, что «В.А. Гусев был активным сторонником прикладной направленности обучения геометрии. В рамках такого курса он предлагал реализовать две идеи: идею отложенного доказательства и идею построения локально доказательного курса геометрии» [2]. Нельзя не упомянуть и о приверженности В.А. Гусева идеям фузионизма. Он блестяще реализовал эту идею в своем курсе «Геометрия 6–9». В его учебнике плоские фигуры рассматриваются как элементы объёмных. Также В.В. Орлов подчеркнул, что В.А. Гусев поддерживал постоянное взаимодействие двух ведущих кафедр методики обучения математике в России: московской и санкт-петербургской. Эти профессиональные и дружеские связи между сотрудниками кафедр сохраняются и сегодня.

Нельзя не отметить и ряд статей о наследии В.А. Гусева в секции «История методики обучения математике в лицах: педагоги-математики, учёные-методисты».

О человеческих качествах В.А. Гусева и его отношении к своим ученикам написала М.В. Егупова, доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике МПГУ (Москва). И.Е. Малова, доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии БГУ имени академика И.Г. Петровского (Брянск), представила методические идеи В.А. Гусева, обращение к которым и сегодня позволит исследователю, как начинающему, так и опытному, получить значимые результаты в области методики обучения

математике. И.С. Сафуанов, доктор педагогических наук, профессор департамента математики и физики МПГУ (Москва), описал зарубежные научные поездки, в которых участвовал вместе с В.А. Гусевым. К сожалению, в настоящее время большая часть международных связей, установленных Валерием Александровичем, утрачена. В.С. Секованов, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий КГУ (Кострома), не раз обращался в своих публикациях к биографии и творческому наследию В.А. Гусева. В статье, направленной на конференцию, он описал его творческие контакты «с великим русским математиком Андреем Николаевичем Колмогоровым, выдающимися методистами математики Абрамовым Александром Михайловичем и Вавиловым Валерием Васильевичем» [2].

Во второй части пленарного заседания конференции представлены следующие доклады на актуальные темы: «*Инновации в предметной области "Математика и информатика" и подготовка педагогических кадров к их реализации*» (Л.Л. Босова, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике и информатике, доктор педагогических наук, профессор, член-корр. РАО, Московский педагогический государственный университет); «*Об отдельных аспектах методики обучения математике в Казахстане*» (А.Е. Абылкасымова, заслуженный деятель Казахстана, академик Национальной академии наук РК, иностранный член РАО, доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой методики преподавания математики, физики и информатики, Казахский национальный педагогический университет имени Абая); «*Опыт руководства исследованиями школьника: Кривые в пространстве и фе-*

номен пробуксовки» (А.В. Ястребов, доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского); «*Технология построения образовательных результатов будущих педагогов и средств их оценки*» (Е.Н. Перевощикова, доктор педагогических наук, профессор кафедры физики, математики и физико-математического образования, Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина).

Представленные пленарные и секционные доклады опубликованы в сборнике материалов конференции [3].

Итогами конференции можно считать сохранение памяти о наших учителях, укрепление профессиональных связей в научно-методическом сообществе.

Список источников

1. Канал МПГУ. URL: <https://youtu.be/2dEItJUNXvU> (дата обращения 27.11.2022).
2. Сайт кафедры теории и методики обучения математике и информатике. URL: <http://news.scienceland.ru/ноябрь-2022/> (дата обращения 27.11.2022).
3. Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике. К 80-летию со дня рождения В.А. Гусева: материалы VII Международной научно-практической конференции, г. Москва, 18–19 ноября 2022 г. / под ред. М.В. Егуповой [Электронное издание сетевого распространения]. – Москва: МПГУ, 2022. – 701 с.

М.В. Егупова,

доктор пед. наук., профессор кафедры теории и методики обучения математике и информатике, МПГУ, Москва,

Е.В. Лукьянова,

канд. пед. наук, доцент кафедры математического анализа МПГУ, Москва

А как у других?

ГЛЯДЯТ В КНИГУ, А ВИДЯТ ФИГУ

(трое из пяти школьников в мире не осваивают универсальные базовые навыки)

В конце 2022 года сотрудники Института экономических исследований Ifo при Мюнхенском университете (Германия) обнародовали результаты исследования, в котором оценили масштаб экономических потерь из-за низкого качества массового образования. По их подсчётам, по этой причине до конца века мировая экономика потеряет не менее 11,4% ВВП, или порядка 700 трлн долларов. Проанализировав результаты ряда региональных и международных тестирований, включая TIMSS и PISA, по состоянию на 2020 год, исследователи получили данные по странам, охватывающим 98,1% населения мира, которое создаёт 99,4% глобального ВВП. Оказалось, что в целом 62% обучающихся не имеют универсальных базовых навыков – УБН (чтение, письмо, понимание текста, инструкций, минимальные критерии дальнейшей обучаемости), необходимых для работы в условиях мировой экономики; в будущем либо они останутся неконкурентоспособными, либо их нужно будет доучивать до обретения этих навыков. Цифры таковы. В 101 стране из 159 обследованных УБН не получили более половины детей, в 36 странах – более 90%. Лучше всего дела обстоят в Гонконге (универсальные базовые навыки не осваивают 11% школьников), заметно хуже – в США (24%) и в России (24%), в аутсайдерах – страны Северной Африки (89%). При этом данные касательно УБН напрямую не связаны с распространённостью школьного образования как такового. Сценарии дальнейшего развития ситуации с образованием в мире показывают, что доля освоивших УБН в школе в ближайшие десятилетия существенно измениться не должна. *Подробности: kommersant.ru.*



Перспективы далёкие и близкие

«НЕАКТУАЛЬНЫЕ» ПРЕДМЕТЫ

(вести образования одной строкой)

- * Вступил в действие новый федеральный перечень учебников, список их значительно сокращён. Ранее был принят законопроект, в котором авторские права на учебники закрепляются за РФ и появится госзаказ на учебники.
- * Минпросвещения намерено единолично проверять учебники и пособия. Экспертизой займётся научно-методический совет при министерстве, куда, помимо чиновников, войдут представители общественных и некоммерческих организаций. Сам совет затем будет передавать книги на госэкспертизу в РАО или её институты.

* Из списка школьных предметов в старших классах были исключены как отдельные шесть дисциплин: астрономия, экономика, право, естествознание, Россия в мире и экология. Теперь их содержание включено в другие курсы, например астрономия в полном объеме вошла в физику (базовый и углублённый уровни). В математику (основная школа, базовый уровень) был добавлен курс «Вероятность и статистика».

* Учёные из МПГУ выяснили, что только у четверти российских подростков к старшей школе полноценно формируется навык учебной деятельности (умение не просто усваивать информацию, но и осознавать свои пробелы в знаниях и находить способы их устранения), а у каждого третьего старшеклассника он практически отсутствует.

Подробности: rg.ru, ria.ru, tass.ru, pedsovet.org.

Барометр ЕГЭ

РИТОРИЧЕСКИЙ ВОПРОС

(как нейросеть получила допуск к Единому госэкзамену)

«Достижения прогресса, которые дают человеку удобство и комфорт, могут быть опасны для человечества, поскольку они могут привести к самоуспокоенности и отсутствию критического мышления. По мере того как люди привыкают к удобствам, обеспечиваемым технологиями и достижениями общества, они могут начать воспринимать эти вещи как должное и терять способность представлять жизнь без них. Этот недостаток воображения может затруднить людям оспаривание статус-кво или адаптацию к меняющимся обстоятельствам». Так начинается одно итоговое сочинение для допуска к ЕГЭ на тему «Почему достижения прогресса, дающие человеку удобства и комфорт, могут быть опасны для человечества?» (школьники писали работу в начале декабря). По мнению опытных учителей-словесников, сочинение зачётное. Всё бы ничего, только его автор – нейросеть GPT-3. Получив задание, она сгенерировала текст всего за пару минут, учтя все требования – критерии оценивания от ФИПИ: объём не менее 350 слов, соответствие теме, аргументация с привлечением литературного материала и др. Эксперимент провёл учитель Лицея НИУ ВШЭ Михаил Павловец. Из нескольких текстов на английском языке, созданных сетью, он выбрал один, перевёл его с помощью переводчика от Яндекса и попросил коллег оценить работу. Итог эксперимента: несмотря на «речевые просчёты» (текст намеренно не редактировался), нейросеть справилась с заданием и «получила допуск» к ЕГЭ. Павловец предложил Минпросвещению призадуматься над рядом вопросов. Например, как проверить письменную работу на плагиат? Действительно ли автору подобного сочинения необходимо читать книги? А главное, зачем вообще натаскивать детей на создание таких текстов, если с ними прекрасно справляется нейросеть?

Подробности: vogazeta.ru.

Портрет педагога

У КОГО ИТ-НАВЫКИ ЛУЧШЕ?

(любопытная статистика от чиновников и не только)

* В 2022 году количество заявлений от абитуриентов в педагогические вузы по сравнению с предыдущим годом выросло в 1,5 раза (более 370 тысяч), а студентами стали почти 43 тысячи человек. Самыми популярными естественно-научными профилями оказались

«математика» и «информатика» (конкурс более 10 человек на место). Были открыты новые направления подготовки по программам бакалавриата (этнографическое образование, робототехника, образовательный инжиниринг) и магистратуры (бизнес-педагогика, инновационное предпринимательство, госпитальная педагогика).

* Рособнабзор оценил IT-навыки педагогов. В исследовании участвовали 5198 учителей информатики, математики, истории и биологии. По данным чиновников, 79% учителей неплохо владеют ИКТ-компетенциями: 39% – на базовом уровне, 35% – на повышенном, 5% – на высоком, а лучший результат показали учителя математики.

* Большинство россиян различают понятия «учитель» и «педагог», показал опрос Rambler&Co, проведённый среди 357 тысяч интернет-пользователей. Своими учителями 60% опрошенных назвали тех, кто сыграл важную роль в становлении их личности: родителей, друзей, руководителей, супругов, лидеров мнений в интернете.

Подробности: ria.ru, pedsovet.org, news.rambler.ru.

Из жизни учёных

СКОЛЬКО ВЕСИТ ЗЕМЛЯ?

(в системе СИ появились новые префиксы)

В ноябре 2022 года на XXVII Генеральной конференции по мерам и весам принято решение о добавлении в Международную систему единиц (СИ) четырёх метрических префиксов к уже известным кило-, милли- и пр. Последнее такое обновление произошло в 1991 году: тогда появились приставки дзета- (10^{21}), йотта- (10^{24}), зепто- (10^{-21}) и йокто- (10^{-24}). Но сегодня их уже недостаточно. Из всех учёных более всего в новых обозначениях нуждаются химики, имеющие дело с огромным количеством молекулярных соединений. Теперь для обозначения очень больших и очень маленьких величин введены приставки *ронна-* (ronna) – 10^{27} , *кетта-* (quetta) – 10^{30} , *ронто-* (ronto) – 10^{-27} и *квекто-* (quecto) – 10^{-30} . Выбор префиксов был обусловлен тем, что их начальные буквы r и q оказались единственными из латинского алфавита, которые не использовались для аналогичных обозначений в системе единиц. Добавленные единицы измерения, считают метрологи, должны удовлетворить потребности научного сообщества как минимум на ближайшие 20–25 лет. Теперь на вопрос о массе Земли можно смело отвечать: «Примерно 6 роннаграммов».

Подробности: gazeta.ru/science/news/, nplus1.ru/news/.



Житейские истории

КРУЧЕ, ЧЕМ СТИВЕН ХОКИНГ?

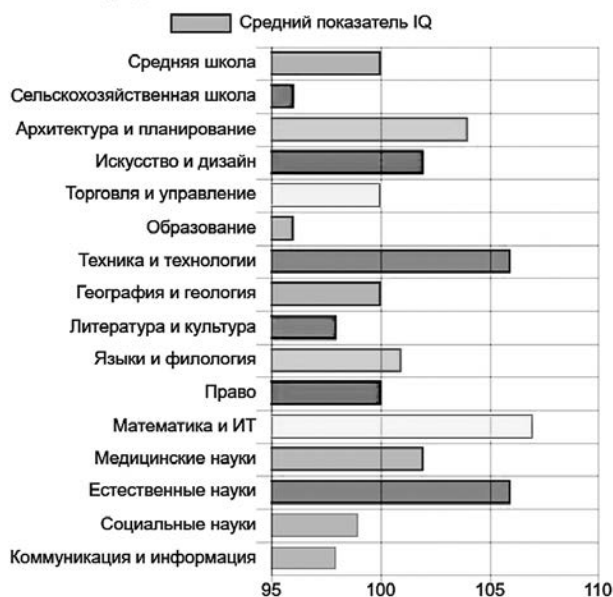
(подросток сдал популярный тест на интеллект и получил максимальный балл)

Одиннадцатилетний мальчик Юсуф Шах из Йоркшира (Великобритания) сдал тест IQ для детей до 18 лет на максимально возможные 162 балла. Это на два балла больше, чем

в своё время получил знаменитый физик и популяризатор науки Стивен Хокинг. Случай редкий, но не уникальный. Пройти тест Юсуфа подтолкнули одноклассники, которые часто отмечали, какой он умный. Хобби мальчика – решение головоломок типа sudoku и собирание кубика Рубика. В будущем он хочет изучать математику в Кембридже или Оксфорде. Тест IQ, говорят разработчики, годится для определения уровня способностей к обучению, пониманию, формированию понятий, использованию информации и применению логики. Некоторые специалисты относятся к нему скептически, считают, что этот тест позволяет оценить скорость процессов мышления, а не способность человека мыслить, его недостаточно, чтобы счесть подростка одарённым или назвать юным гением. Пройти тест IQ может любой желающий на сайте international-iq-test.com. Там же приводится интересная статистика: распределение результатов относительно возрастных групп, уровня образования, области знаний и др.

Подробности: kudago.com/all/news/.

Распределение по отношению к области знаний



Пополняем ресурсы

АЛЕКС БЕЛЛОС ПРЕДСТАВЛЯЕТ

(*must-read для любителей шевелить извилинами*)

Перед вами новый сборник известного британского писателя, колумбиста и популяризатора математики Алекса Беллоса «Капуста, неверные мужья и зебра» (МИФ, 2021). В книгу вошло 125 специально отобранных занимательных задач и головоломок – тех, что автор посчитал наиболее захватывающими, увлекательными и стимулирующими работу мысли. Все они были придуманы за прошедшие два тысячелетия, в разные эпохи и в разных странах. Беллос обещает по возможности познакомить читателя с историями их происхождения и влияния. Тут и проверенный фольклор, и оригинальные головоломки, созданные классиками жанра, и задачи, придуманные математиками. Для их решения не требуется глубоких знаний, но не обойтись без логики, творческого подхода и способности ясно мыслить, а иной раз необходимы интуиция и озарение.

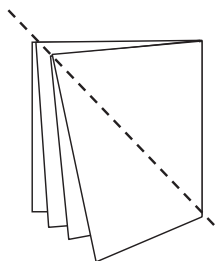
Подробности: nauka.tass.ru/nauka/11524893 (отрывок из книги).



Рубрику ведёт **Н.М. Карпушина**

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» № 8 / 2022

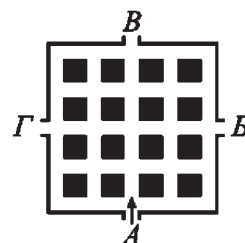
Задача 49. Белый магический лист бумаги меняет свой цвет на чёрный в местах соприкосновения белого с белым. Квадратный лист сложили дважды (как на рисунке), прижали и разрезали по диагонали. Сколько получилось кусочков, полностью чёрных с обеих сторон? (*Олимпиада «ДваждыДва» начальной школы, 1 класс, 2020 год.*)



О т в е т: 2.

Р е ш е н и е. Заметим, что когда листок сложили пополам, то весь лист стал чёрным с одной стороны. После того, как лист сложили второй раз, половина листа стала чёрной с двух сторон, а половина — с одной стороны белая, с другой — чёрная. Когда полученный свёрток бумаги разрезали, то получилось четыре треугольника — два чёрные с двух сторон и два с одной стороны чёрные, с другой белые. И ещё один большой кусок (квадрат). Он чёрно-белый, поэтому в подсчете не участвует.

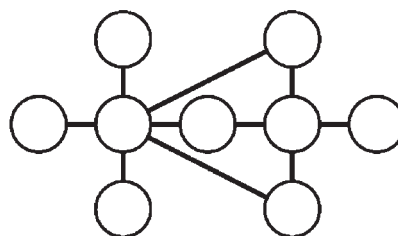
Задача 50. Дима катался на велосипеде по дорожкам парка. Он въехал в парк в ворота А. Во время прогулки он три раза поворачивал направо, четыре раза налево и один раз разворачивался. Через какие ворота он выехал? (*Международный конкурс «Кенгуру», 2017 год, 3–4 класс.*)

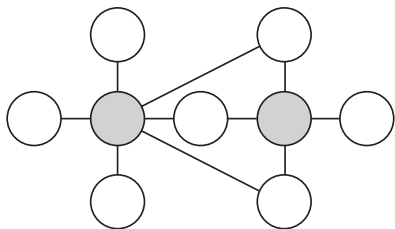


О т в е т: ворота Б.

Р е ш е н и е. Заметим, что разворот — это поворот на 180° , а поворот направо или налево — поворот на 90° . Тогда посчитаем, на сколько градусов в результате Дима повернулся: $3 \times 90^\circ + 4 \times (-90^\circ) + 180^\circ = 90^\circ$. То есть в результате он повернулся на столько же, как если бы просто повернул один раз направо. Значит, он выехал через ворота Б.

Задача 51. У деда Мазая на озере есть несколько островов, соединённых мостами так, как на рисунке. В половодье дед Мазай спас 9 зайцев и рассадил по одному на остров. Как только дед Мазай уплыл, непоседливые зайцы, как по команде, стали каждые пять минут перебегать на соседний остров. Какое наибольшее число зайцев сможет в какой-то момент оказаться на одном острове? (*Санкт-Петербургская олимпиада по математике для начальной школы, 3 класс, 2021 год.*)

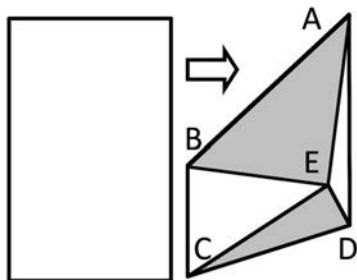




О т в е т: 7 зайцев.

Р е ш е н и е. Раскрасим наши островки в «шахматном порядке». А именно так, чтобы с белого кружка/островка можно было попасть только на чёрный и наоборот: с чёрного только на белый. Тогда заметим, что каждые 5 минут зайцы перепрыгивают на островок другого цвета. Это означает, что если два зайца находились на островках двух разных цветов, то они никогда не смогут оказаться вместе на одном островке. Следовательно, максимальное количество зайцев, которые могут собраться на одном островке, не превосходит максимальное количество островков одного цвета. У нас островков – 2 чёрных и 7 белых, значит, не больше 7. Пример для 7 зайцев уже приведён.

Задача 52. Прямоугольник согнули так, как на рисунке. Найдите периметр треугольника BEC , если периметр треугольника AED равен 17 см. (Олимпиада «Дважды Два» начальной школы, 4 класс, 2022 год.)



О т в е т: 17 см.

Р е ш е н и е. CE и AE – бывшие малые стороны прямоугольника, значит, $CE = AE$. BE и BC в сумме – бывшая большая сторона прямоугольника, как и AD и ED ,

значит, $BE + BC = AD + ED$. Складывая эти два равенства, получим $CE + BE + BC = AE + AD + ED$, что означает равенство периметров треугольников BEC и AED .

Задача 53. Крош и Ёжик по очереди (начинает Крош) ставят в клетки таблицы 5×5 натуральные числа от 1 до 25 (каждое число можно использовать только один раз, в клетку можно ставить только одно число). Если после заполнения таблицы найдётся строка или столбец с суммой чисел 70, выигрывает Крош, в противном случае – Ёжик. Кто выиграет при правильной игре? (IV Турнир Мёбиуса для 4–5 классов, лига 4 классов, 2019 год.)

О т в е т: выигрывает Крош.

Р е ш е н и е. Заметим, что $70 = 18 + 26 + 26$. Разобьём числа от 1 до 25 на пары (кроме числа 18), дающие в сумме 26. И теперь понятно, как должен играть Крош. Первым ходом он ставит в центр таблицы число 18, а остальные клетки разбивает на пары, как на рисунке. Тогда если Ёжик ставит в одну из клеток число из пары, то Крош ставит во вторую клетку второе число пары. Следовательно, рано или поздно Крош должен будет ходить в клетку, отмеченную крестиком (см. рисунок). А поскольку сумма чисел в парных клетках равна 26, то либо в вертикальном столбце, либо в горизонтальном (а на самом деле в обоих) сумма будет равна 70.

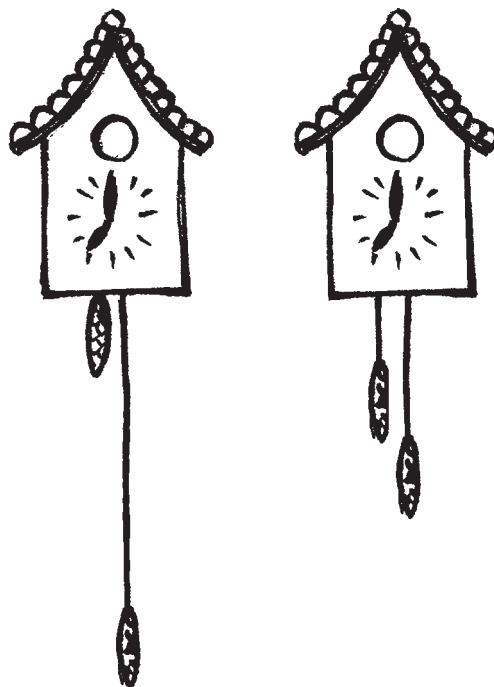
		18		

Задача 54. У бабушки есть часы с кукушкой и гирьками. Каждый день ровно в полдень (в 12 часов дня) она заводит ча-

сы, опуская правую гирьку до конца вниз (см. рисунок слева). Завода хватает ровно на сутки. Однажды в полдень она опустила гирьку не до конца, а так, что правая цепочка оказалась в два раза длиннее левой (см. рисунок справа). Во сколько теперь остановятся часы, если их больше не заводить? (*Олимпиада «ДваждыДва» начальной школы, 2 класс, 2007 год.*)

О т в е т: в 4 часа дня.

Р е ш е н и е. Заметим, что если полной длины цепочки хватает ровно на сутки, то есть на 24 часа, то половины цепочки должно хватать на 12 часов, трети на 8 часов и так далее. Посмотрим, во сколько раз длина цепочки завода меньше полной длины. Так как правая цепочка в два раза длиннее левой, то часы остановятся, когда пройдёт $\frac{2}{3}$ всей длины. Найдём $\frac{2}{3}$ от 24. Это 16 часов. Значит, часы остановятся в 16 часов, или в 4 часа дня.



Рубрику ведёт **Иванова Е.Ю.**

ХРОНИКИ

Восьмиклассники из Москвы стали победителями Иранской Олимпиады по геометрии

Подведены итоги участия московских старшеклассников в IX Международной Иранской олимпиаде по геометрии. Ребята завоевали две золотые медали и одну серебряную. Золотые медали получили Сергей Муханов и Дмитрий Комин. Другой учащийся лицея «Воробьёвы горы» Григорий Пистунов стал серебряным призёром. Международная Иранская олимпиада по геометрии считается одной из самых престижных в мире по своему направлению. Так, в 2022 году в ней дистанционно участвовали больше 8300 школьников из более чем 50 стран со всего мира.

Испытания проходили в письменном формате. Задачи были разбиты на три уровня сложности: «Начинающий» (Elementary Level) – для 8 класса, «Продолжающий» (Medium Level) – для 9–10 классов и «Профессиональный» (Advanced Level) – для 11 класса (в Иране – для 11–12 классов). На решение задач первого уровня отводилось 4 часа, на втором и третьем уровнях давали по 4 часа 30 минут. За полное правильное решение каждой задачи можно было получить восемь баллов. Продвижение по задаче тоже учитывалось и оценивалось определённым количеством баллов. После подведения итогов внутри страны, лучшие работы отправлялись в Иран для подведения общемировых итогов. В России олимпиада проходила в Долгопрудном, Казани, Кирове, Краснодаре, Кургане, Москве, Новосибирске, Санкт-Петербурге, Саранске, Саратове, Тюмени и в центре «Сириус» (Сочи).

Источник: <https://rg.ru/>.

Ньютон, Пипс и вероятность

В 1693 году Сэмюэль Пипс, в прошлом крупный чиновник адмиралтейства, член английского парламента и президент Королевского общества, обратился к своему давнему другу Исааку Ньютону по поводу одной вероятностной задачи. Суть её такова. В коробке у каждого из игроков A , B и C имеется 6, 12 и 18 игровых костей соответственно. С помощью них A должен выкинуть шестёрку, B – 2 шестёрки, а C – 3 шестёрки. Нужно оценить, кто имеет наибольшую возможность выиграть при одинаковом везении (ни у одного из игроков нет преимущества).



Сэмюэль Пипс



Исаак Ньютон

История во многом примечательная. Во-первых, придумал задачу вовсе не Сэмюэль Пипс, хотя та по сей день носит его имя. Пипс узнал о ней от мистера Смита, учителя из школы, которую много лет курировал и впоследствии стал её вице-президентом. А уж потом обратился за разъяснениями к Исааку Ньютону. Более того, в обсуждении задачи в разное время поучаствовали и другие люди из окружения Пипса. Во-вторых, предложенное Ньютоном решение – единственный вклад знаменитого учёного в теорию вероятностей. В-третьих, тот сразу дал правильный ответ, несмотря на ошибки в рассуждениях, и позже подтвердил его расчётами на двух страницах.

Не зная наверняка, какой смысл вкладывал в некоторые фразы автор задачи,

Ньютон по-своему истолковал и уточнил условие. По его мнению, каждый игрок должен был по одному разу бросить сразу все кости. Выпадение шестёрки у A означало появление её по крайней мере на одной из 6 костей, а двух и трёх шестёрок у B и C – появление их как минимум на двух из 12 и на трёх из 18 костей соответственно. На том и сошлись.

Сегодня задачу Пипса формулируют так. Какое из событий наиболее вероятно: A – выпадение по крайней мере одной шестёрки при подбрасывании 6 костей; B – выпадение хотя бы двух шестёрок при подбрасывании 12 костей; C – появление не менее трёх шестёрок при подбрасывании 18 костей? Обычно решение сводят к рассмотрению противоположных событий и применению формулы Бернулли. В общем случае при бросании $6n$ костей вероятность появления не менее n шестёрок

$$P_{6n}(n \leq k \leq 6n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} C_{6n}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}.$$

Тогда $P(A) = P_6 (1 \leq k \leq 6) \approx 0,6651$, $P(B) = P_{12} (2 \leq k \leq 12) \approx 0,6187$ и $P(C) = P_{18} (3 \leq k \leq 18) \approx 0,5973$. Наиболее вероятно событие A .

Однако в конце XVII века формула Бернулли не была известна. Ньютон, по сути, опирался на классическое определение вероятности и подсчитывал разного рода «шансы», в частности с помощью треугольника Паскаля. Он ограничился вычислением первых двух вероятностей и отметил, что третья будет ещё меньше. Пипс, увы, в расчётах математика не разобрался и продолжал сомневаться в ответе. Вскоре один из его друзей нашёл вероятности всех трёх событий и подтвердил результат Ньютона.

Наталья Карпушина

ПОДПИСКА 2023. II ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI



ПОЧТА
РОССИИ

на сайте
podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении
Почты России

через почтальона



Журнал
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

P1591

Комплект журналов
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и
«МАТЕМАТИКА для школьников»

Подписной индекс

P1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов
со скидкой

«МАТЕМАТИКА
В ШКОЛЕ»
и «МАТЕМАТИКА
для
школьников»
Подписной
индекс — P1597



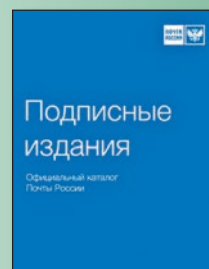
Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

● В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**

● На сайте «Почта России»:

<https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226>

Открыть ссылку приложением «Камера»



● Урал-Пресс: <http://www.ural-press.ru>

● На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

● Вы можете подписаться на наши журналы через электронно-библиотечные системы:
• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

● Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru **СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее,
экономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку
приложением
«Камера»



ВНИМАНИЕ! Вы можете купить отдельную статью и любой номер журнала
(в т.ч. за прошедшие годы) в электронном виде на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru



Математика в школе, 2023, № 2, 1–80