Уважаемые читатели!

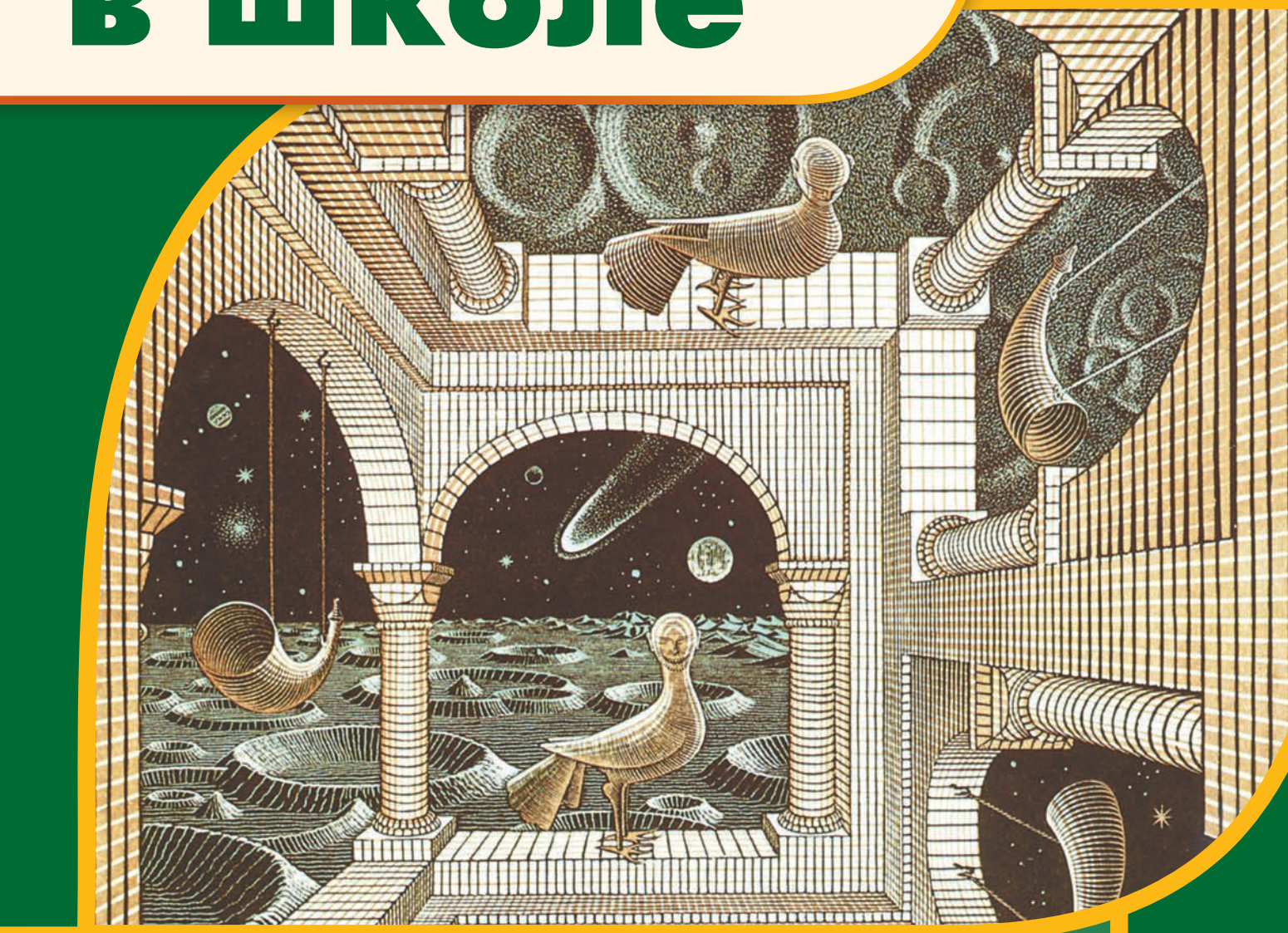
Подписка на электронные версии журналов не дает подписчику права на их дальнейшее распространение без письменного согласия правообладателя. Любое распространение подписчиками электронной версии запрещается. ООО «Школьная Пресса» является правообладателем всех редакционных материалов, опубликованных в печатных СМИ и (или) размещенных в интернет-проектах соответствующих СМИ, кроме материалов, в содержании которых имеется ссылка на другого правообладателя. Продолжив работу с электронной версией, вы тем самым соглашаетесь с вышеизложенным.

научно-теоретический и методический журнал

1 2023

ISSN 0130-9358

МАТЕМАТИКА в школе



Методические особенности решения стереометрических задач разными способами

Размышления регионального репетитора

Компьютер: время перемен

НЕ ЗАБУДЬТЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА ЖУРНАЛ ПО КАТАЛОГУ «ПОЧТА РОССИИ»!

Математика — самый любимый предмет!

Начало нового тысячелетия знаменуется обострением противоречий между стремительными общественными и социальными изменениями окружающего мира, ошеломляющими коммуникативными, технологическими прорывами и — естественным консерватизмом школьного образования. Уже невозможно игнорировать необходимость новаций и в школьной математике, справедливо казавшейся наиболее «устойчивой» в том, что касается содержания и методов обучения, и одновременно всё заметней ностальгическое желание вернутся к привычному, старому, к учебникам, по которым учились в прежние времена, формам преподавания и контроля.

Все последние документы, унификация учебников, программ, форм контроля, ФГОСы и прочее, скорее, льют воду на мельницу «традиционализма», всего привычного, давно освоенного, однако и от реальности, необходимости изменений, новых подходов не спрячешься.

Собственно, об этом многие материалы номера. Это и полемическая статья И.Г. Малышева о новых ФГОСах, и направленный на развитие критического мышления, коммуникативности материал Л.С. Сагателовой, и «Размышления регионального репетитора» А.В. Якубова, и аналитическое рассуждение нашего давнего и верного автора В.И. Рыжика «Компьютер: время перемен», и исследовательский проект П.В. Семёнова, предлагающего неожиданное соединение тем школьного курса математики — классической геометрической и новой вероятностной, и ряд других материалов.

Пожалуй, в том же русле оказывается и основной тезис недавнего доклада члена редколлегии нашего журнала, академика РАН и РАО А.Л. Семёнова «О продолжении российского математического образования в XXI веке», сделанного на семинаре под руководством ректора МГУ академика В.А. Садовничего и вызвавшего большой резонанс. А.Л. Семёнов справедливо утверждает, что большинство математиков подчеркивают возникший в школе интерес к решению задач, которые неизвестно, как решать. Теперь же, в XXI веке, возможно и нужно, уверен докладчик, построить математическое образование не только для избранных, высокомотивированных, но и для всех учащихся — на задачах, которые неизвестно, как решать. Конечно, разных по уровню задач для разных учеников, чтобы изучение математики стало интересным и психологически комфортным для учащихся разных способностей и склонностей.

Импульсы в профессиональной среде учителей, учёных, методистов, создателей учебников, стандартов и экзаменов, противоречивы и противонаправлены. А что происходит в среде учащихся и их родителей, тех, кого на современном сленге можно назвать «пользователями»?

И тут, как принято говорить, «есть и хорошие новости». Они обнаруживаются в довольно неожиданных по отношению к школьным урокам математики недавних результатах опроса «Как оценивают свои школьные годы взрослые москвичи», проведённого создателями столичной программы «Город».

Сначала о процентах, которые примерно соответствуют привычным представлениям о школе и потому не вызывают удивления. 58% опрошенных жителей города заявили, что им нравилось учиться в школе, а 27% не любили туда ходить. Оставшиеся 15% не смогли однозначно ответить на этот вопрос.

Но вот что удивительно. Мы привыкли обречённо считать, что основная масса школьников не любит математику, — говорящую о вещах абстрактных, оторванных от повседневной жизни, малопонятную, трудную, напрягающую, не любит, и уж тем более не считает её «самым любимым предметом».

Однако, по результатам опроса, самым любимым предметом москвичей была именно математика, её назвали 26% взрослых. Следом по популярности идут русский с литературой (19%) и физкультура (16%). Увы, у 11% москвичей любимого предмета не было вообще.

Самый любимый предмет — математика! Это вселяет надежду.

Евгений Бунимович

МАТЕМАТИКА в школе

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

1/2023

Министерство просвещения Российской Федерации
ООО «Школьная Пресса»
Издаётся с мая 1934 г.
Периодичность – 8 номеров в год

В НОМЕРЕ:

АКТУАЛЬНАЯ ТЕМА

3 *Малышев И.Г.*
О беготне впереди паровоза

ОЛИМПИАДЫ

10 *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С., Антропов А.В., Козлов Ю.П., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храмцов Д.Г.*
Региональные этапы Всероссийской олимиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2021/2022 учебного года (первый день)

МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

22 *Сагателова Л.С.*
Методические особенности решения стереометрических задач разными способами

ВНЕ УРОКА

33 *Семёнов П.В.*
Каких треугольников больше? (Сюжет для исследовательских проектов школьников)

ТОЧКА ЗРЕНИЯ

41 *Якубов А.В.*
Размышления регионального репетитора

ПРОБЛЕМЫ И СУЖДЕНИЯ

52 *Рыжик В.И.*
Компьютер: время перемен

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

61 *Карпушина Н.М.*
«Принят закон о единых программах и учебниках в школе» и другие новости (обзор интернет-ресурсов)

ХРОНИКИ

65 *Вечтомов Е.М., Ястребов А.В.*
Сорок первый международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов

ЗАДАЧИ

72 *Иванова Е.Ю.*
«Шахматные» задачи

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

78 *Карпушина Н.М.*
Хвала кирпичу

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук.
Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ.
Статьям журнала присваивается идентификатор DOI

Главный редактор **Е.А. Бунимович**
Заместитель главного редактора **С.И. Калинин**

Редакционная коллегия:
Н.Х. Агаханов, Г.А. Клековкин, И.Е. Малова, С.В. Пчелинцев, В.И. Рыжик, О.А. Саввина, Е.А. Седова, А.Л. Семёнов

Редакторы: **Н.М. Карпушина, В.П. Норин, Л.В. Панкратова, М.А. Родионов, Т.Н. Сабурова, А.Н. Соколова, Д.В. Широков**

Выпускающий редактор **И.А. Моргунова**

Компьютерная вёрстка **В.Н. Бармин**

ООО «Школьная Пресса»
Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62
Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80
E-mail: matematika@schoolpress.ru
Интернет http://www.школьнаяпресса.рф

Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–33044 от 04 сентября 2008 г.

Формат 84×108/16
Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3726. Заказ

Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13

© ООО «Школьная Пресса»
© «Математика в школе», 2023, № 1

В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.

Рукописи, поступившие в редакцию, не возвращаются. Редакция не несёт ответственности за содержание объявлений и рекламы.
Издание охраняется Гражданским кодексом РФ (часть 4). Любое воспроизведение материалов, размещённых в журнале, как на бумажном носителе, так и в виде ксерокопирования, сканирования, записи в память ЭВМ, и размещение в Интернете запрещается.
Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.

Математика в школе 2023. № 1. С. 3–9 Mathematics at school 2023. № 1. P. 3–9

О БЕГОТНЕ ВПЕРЕДИ ПАРОВОЗА

ABOUT SCURRY AHEAD OF A TRAIN

А. Дейнека, Раздолье, 1944

В. Комиссаров, Раздолье, 2018

В 2022 году завершился цикл ФГОС ООО и СОО, и начинается следующий ФГОС 2021 года. Заметим, что «овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования» из предыдущих стандартов (до 2012 г.) давно никого уже не интересует. Формирование знаний и умений школьников превратились в формирование неких УУД обучающихся. Математическое образование в фантазиях чиновников от образования и теоретиков педагогической науки резко скакнуло вверх. Какие уж тут результаты, (конкретные знания и умения), если цель обучения – формирование универсальных учебных действий, то есть в переводе на русский – растянутый во времени процесс оживления шаблонной мозговой деятельности ученика.

Для этого армия специалистов придумала мир симулякров реального образовательного процесса, то есть образов несуществующих вещей, подобий подобия и копий копии. Симулякр маскирует отсутствие настоящей реальности, закрывая собой пустоту. Именно об этом было написано профессионалом в одной из статей [1]: «Практически ни одна публикация или диссертация последних десятилетий не обходится без привлечения понятий “технология”, “проектная деятельность”, “компетентностная парадигма”, “универсальные учебные действия” и прочих симулякров реального образовательного процесса». Нечто подобное могут проиллюстрировать картины художников в начале статьи: воздух, природа, красота, соревнование – на одной; нарисованное небо, стенка, тренажёры, бег в никуда – на другой. В той же статье нам предлагается «оценить опасность внедрения последних нововведений (компетенций, универсальных учебных действий и прочих последствий рыночной идео-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

логии в образовании) в педагогический дискурс».

Ещё раньше не только учителя, но и профессора также были возмущены происходящим [2]: «**Вместо систематической работы над повышением уровня методического мастерства учителей** и их научной подготовки в административном порядке началось внедрение “педагогических технологий”, требование разработки каждым учителем педагогических инноваций, затем на смену пришло формирование предметных компетенций, теперь все ищут пути достижения метапредметности. Теоретикам кажется, что, изобретя звонкую систему лозунгов, они уже обеспечили новое педагогическое направление, не затрудняя себя переводом теорий на язык конкретных моделей урока. Они сами ждут от учителя разработок их набора лозунгов в конкретике предмета…»

А уж авторам учебников давно было всё понятно. Достаточно привести абзац из статьи [3]: «Системно-деятельностный подход – фикция, позволяющая “реформаторам” образования поставить деятельность выше знаний, как телегу перед лошадью. Такая постановка вопроса уже привела к потере качества образования на практике, так как учителей заставляют делать всякие системно-деятельностные выкрутасы, выделяя обязательные этапы урока, которые опытный учитель без административного давления не выделял бы из уважения к своей профессии. Он видит их надуманность, ощущает потерю времени». Кстати, обратите внимание на то, как перекликается мнение о нововведениях специалиста в наше время (см. выше выделенный текст) и мнение профессионала о реформе 1970-х годов (см. ниже выделенный текст): «Прежняя система преподавания математики складывалась многими десятилетиями. Она постоянно совершенствовалась и, как мы знаем, дала блестящие плоды. Все выдающиеся научно-технические достижения прошлого и настоящего в большей степени обязаны этой системе преподавания математики. **Вместо того, чтобы и далее совершенствовать эту систему с учётом преемственности**, вводя в неё новые научно обоснованные педагогические разработки, Министерство просвещения СССР несколько лет назад без достаточно глубокого и всестороннего изучения существа дела осуществило крутой поворот в преподавании математики. Изложение её сейчас идёт абстрактно, оторвано от реальных образов, пронизано сплошь наукообразием» (из выступления вице-президента АН СССР А.А. Логунова на Сессии Верховного Совета СССР в 1980 г.) [4].

И вот, понимая и соглашаясь с высказыванием известного математика: «Я не чувствую себя ни в коей мере компетентным в педагогике, в которой мне трудно видеть что-либо, кроме искусства»[1], не понимаю, в чём проблема, пусть и не безболезненно, но избавиться от этого морока, уводящего смысл образования в схоластические дебри теоретической педагогики (поистине оксюморон).

А теперь перейдём в наши бурные дни продолжающихся реформ. Новые ФГОС в образовании (которые назвали обновлёнными, так как парадигма как корпоративная «истина» не меняется) должны начать действовать с 2022–2023 учебного года только в 1-м и 5-м классах. Учащиеся других параллелей продолжат обучение по старым стандартам. С одной стороны, обновлённый ФГОС в

[1] Р. Том. Современная математика – существует ли она? // Математика в школе. № 1. 1973. С. 89.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

образовании никаких революционных изменений не предполагает и является рекомендательным документом по отношению к образовательной программе. С другой стороны, именно с точки зрения программы, её задач и содержания, по математике изменения предстоят существенные.

В настоящее время предложены примерные рабочие программы по базовой и углублённой математике. И вместе с ними получаем следующие проблемы при вхождении в обновлённый ФГОС. Начнём издалека. Математика как интегрированный предмет существует только в начальной школе и в 5–6 классах основной школы. И это эклектичный материал, к которому пришло человечество к XV веку. Начиная с Декарта, часть разделов математики, а именно: Алгебра, Функции, Начала математического анализа, Уравнения и неравенства, Элементы комбинаторики, Статистика и теория вероятностей, стали самодостаточными и отделились от Евклидовой геометрии. Традиционно это есть материал учебников «Алгебра и начала математического анализа» в 10–11 классах и «Алгебра» в 7–9 классах. Как написано в энциклопедии: «Математику можно рассматривать как предмет, развивающийся из взаимодействия алгебры и геометрии, а в отношении метода – из сочетания выкладок и геометрических представлений. Евклидовая геометрия является естественным и незаменимым промежуточным звеном между языком как средством общения и языком алгебры».

Учитывая, что из всех разделов математики геометрия является наиболее всесторонне развивающим предметом, в итоговой аттестации по математике и в 9-м и в 11-м классах объединили алгебру с геометрией. До этого в ГИА геометрия была экзаменом по выбору. И сейчас в содержании ЕГЭ и ОГЭ геометрия составляет от 25% до 35%, что вполне соответствует часовой нагрузке, приходящейся на геометрию в учебных планах по математике. Попытки ввести математику как интегрированный предмет терпят неудачу по причине принципиальной разницы между алгеброй и геометрией. Поэтому учебников таких нет, а те, которые пытаются внедрить, не находят спроса.

В старшей школе ФГОС СОО, утверждённый приказом министерства от 17 мая 2012 г. № 413, вступил в действие с 2020 года, и в нём есть обязательный предмет «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия». До 2017 года в учебном плане была именно такая запись. Приказ от 29 июня 2017 г. № 613 о внесении изменений в ФГОС уточнял то, что «Учебный план профиля обучения и (или) индивидуальный учебный план должны содержать 11 (12) учебных предметов и предусматривать изучение не менее одного учебного предмета из каждой предметной области, определённой настоящим Стандартом, в том числе общими для включения во все учебные планы являются учебные предметы: русский язык, литература, иностранный язык, математика, история (или Россия в мире), физическая культура, основы безопасности жизнедеятельности, астрономия». Между тем, в других местах того же ФГОС и в тех же изменениях в ФГОС от 2017 г. присутствует запись: «Математика (включая алгебру и начала математического анализа, геометрию)». И только в учебном плане «Математика» не расшифровывается. Отсутствие федеральных комментариев к документам ФГОС привело к тому, что многие посчитали, что с 2020 г. в старших классах не предполагается изучать отдельно алгебру и геометрию, и в журналах будет обозначена «математика».

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Непоследовательность в документах привела к тому, что местное министерство сразу объединило алгебру с геометрией, хотя никаких указаний свыше не было до сих пор. То, что произошло в 2020 году, называется хаосом. В школах полная неразбериха. Во многих школах, подчинившихся давлению региональных чиновников, обучаются по выдуманной эклектической программе, куда понадёрганы главы из учебников алгебры и геометрии. Некоторые школы срочно писали локальные акты и продолжили учёбу в традиционном формате. Последствия устроенного центральным министерством хаоса самые печальные.

Интересно, что в это же время в перечне учебников (Приказ №766 от 23.12.2020 г.), в таблице, отмечены следующие колонки: Наименование по федеральному перечню (например, Алгебра), линия УМК (например, Алгебра и авторы учебника), **предмет** (например, Алгебра). То есть для самого министерства есть, оказывается, отдельные предметы Алгебра, Алгебра и начала математического анализа, Геометрия. По какой-то причине нужно было подчеркнуть существование предметов. Сказав «А», про «Б» забыли.

Но описанные выше проблемы старшей школы – это «цветочки». Министерство просвещения РФ поторопилось с новым ФГОС и попало в очередную ловушку. Предложение о выделении стохастики в отдельный предмет (как алгебра или геометрия – с отдельной программой и строкой в школьном расписании) появилось на семинаре по школьному математическому образованию всего лишь в начале 2021 г.[2] Разумное в целом предложение через несколько месяцев было оформлено в новом ФГОС. Ничего для этого не было готово. И самое главное – учебники по новому ФГОС. В программе в рамках всех нынешних учебников алгебры разных авторов на теорию вероятностей в 7-м классе предполагается не больше 10 часов вместо 34-х, в 8-м классе вообще этой темы нет, а в 9-м – в большинстве случаев 20 часов. Итого не более 30 часов на три параллели вместо 102 часов. Обновлённый ФГОС требует обновления УМК. Но, следуя письму Министерства просвещения от 11.11.2021 №03-1899 «Об обеспечении учебными изданиями обучающихся в 2022/2023 учебном году», можно утверждать, что в сентябре 2022 г. новых учебников у нас не будет, и хорошо, если они появятся к 2023–2024 уч. г. Ничего критического не было бы, если бы это касалось 5 класса. Но у нас же чиновники хотят быть первыми, чтобы отметили их служебное рвение. Региональный министр предложил перейти на обновлённый ФГОС с 1-го по 8-й классы, а особо желающим – с 1-го по 9-й. Муниципалитеты выразили «одобрямс», и три четверти школ «очень пожелали» это сделать. Четверть школ не поддалась административному давлению. И опять получился хаос, как и в старшей школе. Но теперь уже министерство просвещения РФ, увидев армию восторженных поклонников ФГОС и идя навстречу пожеланиям трудящихся, проводит множество мероприятий для регионов, но не знает, что предпринять с математикой. Самое интересное то, что мнения учителей никто не спрашивает, так как за основу для перехода на новый ФГОС берётся мнение ничего не понимающих в образовательных стандартах родителей (как у нас любят демократию, где не надо). Появились горячие головы с мыслями объявить эти три отдельных

[2] О семинаре «Школьное математическое образование: содержание и аттестация» // Математика в школе. 2021. № 8.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

предмета (не раздела) одним предметом. Министерству показалось, что оно тем самым снимает напряжение с проблемой учебников. Пусть чему-то учатся по двум учебникам (Алгебра, Геометрия), пока не разрешится вопрос с третьим. Но кто-то наверху понял, что пошли не в ту сторону. Не случайно появилось письмо МП РФ №АЗ-686/03 от 11.05.2022 «О разработке рабочих программ», где указано, что должны быть отдельные рабочие программы учебных курсов «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика». Где же вы были, когда тот же вопрос решался осенью 2020 года со старшей школой? К сожалению, это не может остановить реформаторов. Ведь преподавать можно отдельно три предмета, а отметки ставить на одной странице журнала в графе «математика», и это ничему не противоречит. И на местах могут пойти по этому сомнительному пути. Зато какие от этого плюсы. В журнале только одна страница вместо трёх будет заполнена отметками из трёх предметов. В результате, например, отметки «2» по геометрии, «3» по алгебре и «4» по вероятности и статистике преобразуются в «3». Проблема геометрии снимается, успеваемость вырастет. Мечта всех чиновников от образования – убрать геометрию, ибо она портит успеваемость. И в целом, три (или две, что было до сих пор) плохих отметки по математике – это гораздо хуже, чем одна плохая отметка в школьной статистике. Заметание мусора под ковёр не делает комнату чистой. А ведь может быть другой вариант. Отдельно вести все три предмета и иметь отдельные страницы в журнале. Если требуется общая отметка в аттестате за 9 класс, то она может быть средним арифметическим отметок, полученных за изучение **предметов** «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика», и отметки, полученной на итоговой аттестации по математике. Подобный формат итоговой отметки был предложен министерством в 2019 г. для аттестата об основном общем образовании (письмо МП РФ от 1 апреля 2019 г. № ТС-842/04).

Что касается учебников, то нам предлагают в период перехода на обновлённые ФГОС-2021 использовать любые учебно-методические комплекты, включённые в федеральный перечень учебников (как будто это изменит ситуацию с математикой 7–9), но особое внимание предлагают уделить **изменению методики** (это про системно-деятельностные выкрутасы [3]) преподавания учебных предметов при одновременном использовании дополнительных учебных, дидактических материалов, ориентированных на формирование предметных, метапредметных и личностных результатов. Такое впечатление, что министерству просвещения скорее бы отчитаться об успехах во всероссийском соревновании по вступлению регионов в новый ФГОС во всей основной школе сразу. Мало того, что федеральный перечень учебников ориентирован на меньшую нагрузку и деление на два предмета, а не на три (по сути в старых УМК не хватает содержания). Так ещё и методику предлагают поменять, хотя ни один реформатор, предлагая что-либо менять, до сих пор не показал (и не покажет) пример этого на собственном школьном опыте. Предлагают менять методику(!) в отсутствие учебников и авторских методических указаний к учебникам. Вполне закономерен вопрос, вынесенный в заглавие статьи на актуальную тему в журнале «Математика в школе» одним из авторов учебников [3]: «ФГОС 4.0. Если это не вредительство, то что такое вредительство?» Актуальным станет и новый Учебный план образовательных учреждений при переходе на

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ФГОС в 7 и 8 классах. Ведь нужно предусмотреть увеличенную нагрузку учителей математики. И это когда многие сейчас работают на 1,5–2 ставки (от безвыходности в школах ведут по 40 часов), так как учителей математики катастрофически не хватает. Вопрос с нагрузкой нужно было срочно решать ещё в 2015 г. после анализа результатов НИКО (национальных исследований качества образования), причём не только в 7–9 классах.

Но есть ещё одна проблема, необходимо же в процессе обучения обеспечить формирование функциональной грамотности. В принципе, если ученик, прочитав все указатели, смог купить билет на вокзале, сесть в поезд в нужном направлении и добраться в соседний город к бабушке, то он функционально грамотен (вот вам и читательская, и финансовая, и математическая, и естественнонаучная грамотность). А если он, сидя в электричке, не переписывался по телефону на так называемом олбанском языке (стиль употребления русского языка с фонетически почти верным, но орфографически нарочно неправильным написанием слов, частым употреблением ненормативной лексики и определённых штампов, характерных для сленгов), а читал газету или решал кроссворды, например, со словами база, безе, буза, Бизе, Бозе, Безу, слушая в наушниках классику, то – тем более. На самом деле ученик, имеющий «4» и «5» по всем предметам, функционально грамотен, и нечего «городить отдельный огород». Тем более, если под этим понимать базовый уровень образованности. Но это же модно, и уже появляются учебные пособия по математической грамотности с квазипрактико-ориентированными заданиями. В очередном пособии [5] содержится 9 кейсов (как мы раньше жили без английского чемодана с набором обстоятельств?). Да, там вполне реальные вопросы. Посудите сами. Кейс № 1. Задание 5. Бюджет студента. Уровень высокий (!). Дидактическое назначение – *формирование умения работать с моделью сложной проблемной ситуации, выбирать, сравнивать и оценивать стратегию решения комплексной проблемы. А также умение интерпретировать и рассуждать.* Весь этот высокопарный слог прикрывает примитивные арифметические действия по расчёту цены обеда или ужина с соответствующими ингредиентами, вплоть до 6–7 веточек укропа. Для грамотного расчёта приводятся таблицы с ценами продуктов в магазинах, сведения о массе продуктов вплоть до зубчика чеснока со средним весом 6 г.

В другом кейсе приведены для расчёта огромные таблицы на три страницы в формате А4 с характеристиками (жиры, холестерин, калории и т.п.) разных продуктов. И это для того, чтобы рассчитать параметры завтрака в школьной столовой и т.п. Всё это рассчитано на какого-то малахольного ученика, которому это жутко интересно. Впрочем, вполне возможно, это входит в базовый минимум студента кулинарного техникума. Таким образом, перед нами пособие для учащихся 9–11 классов с задачами 4–6 класса.

И возникает вопрос, в каком состоянии паралича должен быть учитель, чтобы потратить часы на абсолютно неинтересные, занудные задачи, забыв о программе в условиях дефицита времени. Насколько же авторы, кандидаты экономических и педагогических наук, далеки от школы. Насколько же функциональная грамотность с её PISAобразными заданиями является надуманной проблемой. Интересно, что регионы, отчитываясь об очередном модном веянии (функциональная грамотность), показывают при-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

меры уроков по читательской, естественнонаучной, финансовой грамотности, а вот уроков по математической грамотности на всероссийских семинарах не показывают. Потому, что показать нечего. Любой подобный искусственный урок с огромной потерей времени проиграет по эффективности обычному уроку на любую конкретную тему из программного материала.

Учитывая всё вышеизложенное, напрашивается печальный вывод о том, что нас ждёт дальнейшее падение математического образования, ибо ускоренный переход (пятилетка в один год) на обновлённый ФГОС (сам по себе «червивый» продукт), есть, по сути, волюнтаризм (согласно Википедии, стремление реализовать желаемые цели без учёта объективных обстоятельств и возможных последствий).

Список источников

1. *Саввина О.А.* Признаки кризиса отечественной методики преподавания математики // Математика в школе. – 2017. – № 2. – С. 3–8.

2. *Гребенев И.В.* О предмете и метапредметности // Нижегородское образование. – 2013. – № 4. – С. 31–35.

3. *Шевкин А.В.* ФГОС 4.0. Если это не вредительство, то что такое вредительство? // Математика в школе. – 2021. – № 7. – С. 3–11.

4. *Костенко И.П.* 1970–1986 гг. Реализация реформы-70, удержание её результатов (статья шестая) // Математическое образование. – 2015. – № 2 (74). – С. 2–18.

5. Математическая грамотность: пособие по развитию функциональной грамотности старшеклассников / [Т.А. Трофимова, И.Е. Барсуков, А.А. Бурдакова и др.]; [под общ. ред. Р.Ш. Мошниной]. – Москва: Академия Минпросвещения России, 2021. – 68 с.

И.Г. Малышев,
доцент ГБОУ ДПО НИРО
(г. Нижний Новгород), migniro@mail.ru

Статья поступила в редакцию 29.05.2022.
Принята к публикации 29.07.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Простой путь к единице

Существуют простые арифметические правила, позволяющие прийти от любого натурального числа к 1 – единице, неделимой сущности, и это единственное число, обладающее подобным свойством. Достаточно выполнить три простых действия:

1) если число чётное, его нужно разделить на 2;

2) если число нечётное, его нужно умножить на 3 и прибавить 1;

3) повторить описанные выше действия, пока не получится 1.

Возьмём для примера число 17. Так как оно нечётное, его нужно умножить на 3 и прибавить 1. Получим 52. Разделив результат на 2, получим 26. Снова разделим результат на 2, получим 13. Так как 13 – нечётное число, умножим его на 3 и прибавим 1, получим 40. Разделим 40 на 2, получим 20. Разделив 20 на 2, получим 10. При последующем делении на 2 получим 5. Так как 5 – нечётное число, умножим его на 3 и прибавим 1, получим 16. Так как 16 – чётное число, разделим его на 2, получим 8, а это число при делении на 2 даёт 4, затем 2, а 2 при делении на 2 даёт искомую единицу.

Те же действия можно выполнить для любого другого числа, конечным результатом всегда будет единица. Эта гипотеза пока не доказана, но и не опровергнута.

По книге: *Ламберто Гарсиа дель Сид.* Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии (М.: Де Агостини, 2014).

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Математика в школе 2023. №1. С. 10–21 Mathematics at school 2023. №1. P. 10–21

РЕГИОНАЛЬНЫЕ ЭТАПЫ ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ОЛИМПИАДЫ ИМ. Л. ЭЙЛЕРА 2021/2022 УЧЕБНОГО ГОДА (ПЕРВЫЙ ДЕНЬ)

THE REGIONAL STAGES OF THE ALL-RUSSIAN OLYMPIAD ON MATHEMATICS FOR SCHOOL STUDENTS AND EULER OLYMPIAD OF 2021/2022 ACADEMIC YEAR (FIRST DAY)

Научная статья Scientific article
УДК: 372.851 **DOI: 10.47639/0130-9358_2023_1_10**

Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов,
П.А. Кожевников, О.К. Подлипский,
Московский физико-технический институт,
Москва, nazar_ag@mail.ru,
И.С. Рубанов,
Кировский Центр дополнительного образования одаренных школьников,
А.В. Антропов,
Москва, Центр педагогического мастерства,
П.Ю. Козлов,
Московский государственный университет им. Ломоносова,
А.С. Кузнецов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
К.А. Сухов,
Санкт-Петербург, Президентский Физико-Математический Лицей № 239,
Д.Г. Храмцов,
Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

N.Kh. Agakhanov, I.I. Bogdanov,
P.A. Kozhevnikov, O.K. Podlipskii,
Moscow Institute of Physics and Technology,
nazar_ag@mail.ru,
I.S. Rubanov,
Kirov Centre for Additional Education of Gifted Student,
A.V. Antropov,
Moscow, Center for Teacher Excellence,
P.Yu. Kozlov,
Lomonosov Moscow State University,
A.S. Kuznetsov,
Saint-Petersburg State University,
K.A. Sukhov,
Saint-Petersburg, Presidential Physics and Mathematics Lyceum No. 239,
D.G. Khramtsov,
Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

Аннотация: в статье приводятся задания (с решениями) первого дня региональных этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2021/2022 учебного года

Abstract: problems with solutions of the first day of the regional stages of the All-Russian Olympiad on mathematics for school students and Euler Olympiad of 2021/2022 academic year are provided

Ключевые слова: Всероссийская олимпиада школьников по математике, олимпиады им. Л. Эйлера, региональный этап, олимпиадная задача

Keywords: All-Russian Olympiad on mathematics for school students, Euler Olympiad, regional stage, Olympiad problem

© Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С., Антропов А.В., Козлов П.Ю., Кузнецов А.С., Сухов К.А., Храмцов Д.Г. 2023

На протяжении ряда лет Всероссийская олимпиада школьников (ВсОШ) на региональном этапе проводилась для учащихся 8, 9, 10 и 11 классов. Затем, в свя-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

зи со значительным расширением числа предметов, по которым проводится ВсОШ, и унификацией её правил, официально региональный и заключительный этапы ВсОШ стали проводиться только для учащихся 9–11 классов. И в целях сохранения наработанной в нашей стране системы работы с одарёнными школьниками для учащихся 8 класса стала проводиться олимпиада им. Л. Эйлера. В статье приведены задания с решениями первого дня региональных этапов ВсОШ и олимпиады Эйлера 2021/2022 учебного года.

Условия задач

8 класс

8.1. (И. Рубанов) Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8×8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.

8.2. (И. Богданов) Учитель придумал ребус, заменив в примере $a + b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. (Например, если $a = 23$, $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус АБ + ВАГ = ВВД). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c.

8.3. (А. Кузнецов) В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC.

8.4. (Е. Бакаев) Числа 1, 2, ..., 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, k_2, \ldots, k_{500}$ и синие $s_1, s_2, \ldots, s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n, у которых разность $k_m - s_n$ даёт остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность $s_n - k_m$ даёт остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются **все** возможные разности, в том числе и отрицательные.

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен $2022 - 2000 = 22$, а остаток от деления числа -11 на 100 равен $-11 - (-100) = 89$.

8.5. (И. Рубанов) При каком наибольшем n существует выпуклый n-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?

9 класс

9.1. (П. Кожевников) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

9.2. (И. Ефремов) На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N. Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел?

9.3. (Н. Агаханов) Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c, d), что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

9.4. (Е. Бакаев) В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

9.5. (И. Фролов) Пусть CE – биссектриса в остроугольном треугольнике ABC. На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D, а на стороне BC – точка F, причём $\angle BAD = 90° = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF, лежит на прямой BD.

10 класс

10.1. (П. Кожевников) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

10.2. (Н. Агаханов) Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b + c) = P(a),\ P(c + a) = P(b),$$
$$P(a + b) = P(c).$$

10.3. (А. Антропов) У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n \geq 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n.

10.4. (Е. Холмогоров) Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n – натуральное число. Известно, что числа a_0, a_1, …, a_n – целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

10.5. (Д. Бродский) В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y, а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности.

11 класс

11.1. (П. Кожевников) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

11.2. (Н. Агаханов) Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b + c) = P(a),\ P(c + a) = P(b),$$
$$P(a + b) = P(c).$$

11.3. (А. Заславский) В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD и ACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD.

11.4. (Е. Бакаев, И. Богданов) В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

11.5. (П. Козлов) Пусть S – 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1000000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}.$$

На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

Решения задач
8 класс

8.1. Р е ш е н и е. Например, так, как показано на рисунке 1.

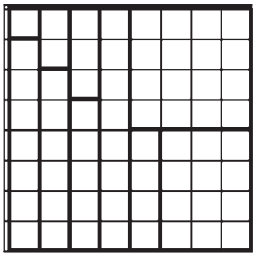


Рис. 1

8.2. О т в е т. 10.

Р е ш е н и е. Если ребус имеет вид А + Б = АВ, то А = 1, так как А + Б < 20, и Б = 9, так как иначе сумма А + Б – однозначное число. Таким образом, при $c = 10$ по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример 1 + 9 = 10. Если же $c < 10$, то ребус имеет вид А + Б = В или А + А = Б. В первом случае нельзя определить, был ли это пример 1 + 2 = 3 или пример 1 + 3 = 4, а во втором – пример 1 + 1 = 2 или пример 2 + 2 = 4.

8.3. О т в е т. 120°.

Р е ш е н и е. В равнобедренном треугольнике LNK $\angle KLN = \angle LKN$ (рис. 2). Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC. Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL – биссектриса угла AKB. Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB. Кроме того, она равноудалена от прямых $CA = KA$ и CB, так как лежит на биссектрисе угла ACB. Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1, где C_1 – точка, лежащая на продолжении отрезка CB за точку B, а его биссектрисой должен быть луч $BL = BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60°, откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120°$.

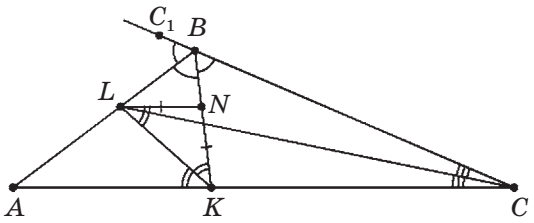


Рис. 2

8.4. Р е ш е н и е. Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа a к числу b, если разность $a - b$ даёт остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец, – синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и си-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ним концом, что и требовалось доказать.

8.5. Ответ. $n = 7$.

Решение. *Пример*. Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две.

Оценка. Пусть AB – сторона выпуклого многоугольника M, у которого есть диагонали только двух возможных длин x и y. Тогда для всякой вершины C, не смежной с A и B, стороны CA и CB треугольника ACB могут равняться только x и y. Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину C, так как она должна лежать с той же стороны от прямой AB, что и весь многоугольник M. Но таких комбинаций сторон есть только четыре: $CA = CB = x$; $CA = CB = y$; $CA = x$, $CB = y$; $CA = y$, $CB = x$. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна: иначе соответствующие вершины C_1 и C_2 многоугольника M лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне AB, и та из них, которая ближе к AB, оказалась бы внутри треугольника с вершинами в A, B и другой из этих вершин, что противоречит выпуклости M. Таким образом, у многоугольника M не больше трёх вершин, не смежных с вершинами A и B, то есть всего у него не более 7 вершин.

9 класс

9.1. Ответ. Может.

Решение. Пример: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20. В этом наборе три числа (5, 10, 20) делятся на 5, четыре числа (5, 8, 12, 20) делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12 и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

9.2. Ответ. 6.

Решение. Пусть S – сумма цифр числа N. Тогда суммы цифр полученных чисел будут равны $S + 1$, $S + 2$, …, $S + 9$. Три из этих сумм будут делиться на 3. По признаку делимости на 3 соответствующие три числа на доске также будут делиться на 3. При этом они будут больше 3, а значит, будут составными. Поэтому больше 6 простых чисел на доске оказаться не может.

Шесть простых чисел может оказаться даже при $N = 1$ – например, если Петя получит, среди прочих, числа 11, 13, 41, 61, 17 и 19.

Замечание. Петя может получить шесть простых чисел, даже если он будет приписывать цифры лишь с одной стороны. Например, из числа $N = 3$ он может получить числа 13, 23, 43, 53, 73 и 83.

9.3. Решение. Пусть $P(x) = ux^2 + vx + w$. По условию,

$$(a - b)(u(a + b) + v) =$$
$$= (ua^2 + va + w) - (ub^2 + vb + w) =$$
$$= P(a) - P(b) = n^2.$$

Поскольку n – натуральное число, $a - b \neq 0$. Будем искать подходящие пары чисел (c, d) в виде $c = a + k$ и $d = b - k$. Тогда разность $P(c) - P(d)$ будет равна

$$(c - d)(u(c + d) + v) =$$
$$= (a - b + 2k)(u(a + b) + v) =$$
$$= \frac{a - b + 2k}{a - b} n^2.$$

Таким образом, нам достаточно подобрать такие k, для которых дробь $\frac{a - b + 2k}{a - b}$ будет квадратом натурального числа. При $k = (a - b)m$ дробь будет равна нечётному числу $2m + 1$. Тогда нам подойдут те m, при которых $2m + 1$ будет квадратом нечётного числа.

Замечание. У многочлена из условия некоторые (или даже все!) коэффициенты могут оказаться иррациональными.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Например, условие выполнено для многочлена $P(x) = ux^2 + (1 - u)x - u$ и чисел $a = 1$, $b = 0$, где u – произвольное число.

9.4. Ответ. 101.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины – это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Если граф – это цикл, содержащий 101 вершину, то в любом подграфе, состоящем из 100 вершин, ровно 99 рёбер, так что такая компания удовлетворяет условиям задачи. Осталось показать, что не существует такой компании из 102 человек (тогда и компании из более чем 102 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Способ 1. Рассмотрим произвольное множество из 101 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из этого подграфа произвольную вершину (скажем, степени d), получаем подграф из 100 вершин с нечётным (по условию) количеством рёбер $k - d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k, то есть степени всех вершин подграфа имеют одну и ту же чётность. Но, как хорошо известно, в графе с нечётным числом вершин все вершины не могут иметь нечётную степень. Поэтому все эти степени чётны, а число рёбер k нечётно.

Пусть теперь во всём графе с 102 вершинами имеется l рёбер. При выкидывании любой вершины (скажем, степени d) получается подграф с нечётным (по доказанному) числом рёбер $l - d$; аналогично рассуждению, проведённому выше, получаем, что и во всём графе степени всех вершин имеют одинаковую чётность. Заметим, что наш граф не может быть пустым (то есть не иметь рёбер) или полным (то есть иметь все C_{102}^2 рёбер), иначе на любых 100 вершинах будет либо 0, либо $C_{100}^2 = 99 \cdot 50$ рёбер, то есть чётное количество. Тогда найдётся вершина, соединённая с какой-то другой вершиной, но не со всеми. Иначе говоря, есть вершины u, v_1 и v_2 такие, что u соединена с v_1, но не с v_2. Степени вершин v_1 и v_2 в исходном графе одной чётности, поэтому после удаления u они будут иметь разную чётность. Это невозможно по доказанному выше.

Способ 2. Существует всего $n = C_{102}^2 = 51 \cdot 101$ способов выбросить две вершины из 102, оставив 100. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i – количество рёбер в подграфе из оставшихся 100 вершин в i-м способе; по условию, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 100 вершин. Это происходит в $k = C_{100}^2 = 50 \cdot 99$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Способ 3. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное их число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности – всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин и l нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень l, а нечётные – (нечётную) степень k. Это невозможно, ибо $k + l = 102$.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Рассуждая так же, как и при разборе первого случая, получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин и l нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень $k - 1$, а нечётные – (нечётную) степень $l - 1$. Это опять же противоречит равенству $k + l = 102$.

Замечание. Существуют и другие примеры удовлетворяющей условию задачи компании из 101 человека.

9.5. Решение. Во всех решениях ниже окружность, описанная около треугольника CEF, обозначается через ω, а её центр – через O.

Решение 1. Внешняя (CD) и внутренняя (CE) биссектрисы угла ABC перпендикулярны. Тогда $\angle DAE = \angle DCE = 90°$, и четырёхугольник $ADCE$ вписан. Поэтому $\angle ADE = \angle ACE$, откуда $\angle BEF = 180° - \angle AED - \angle DEF = 90° - \angle AED = \angle ADE = \angle ACE = \angle ECF$. Значит, ω касается AB (в точке E; рис. 3).

Выберем на отрезке BC такую точку P, что $PE \parallel AC$. Тогда $\angle PEC = \angle ECA = \angle PCE$, откуда $PC = PE$. Поскольку и $OC = OE$, то треугольники POE и POC равны. Тогда PO – биссектриса внешнего угла треугольника BPE, что влечёт параллельность прямых PO и CD.

Совершим гомотетию с центром в точке B, переводящую треугольник BPE в BCA. Тогда прямая PO перейдёт в CD, а прямая EO (перпендикулярная AB) – в AD. Значит, точка O перейдёт в D, откуда и следует, что точка O лежит на BD.

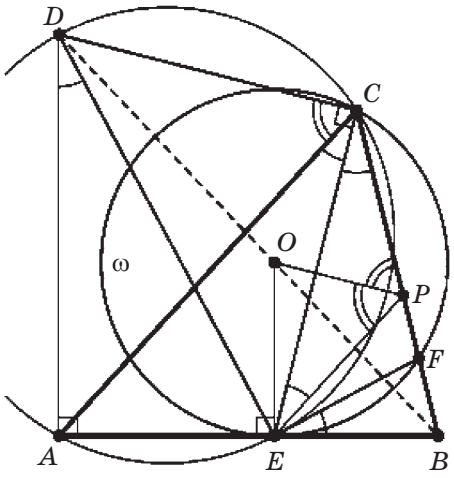


Рис. 3

Решение 2. Выберем на прямой CD точку D' так, что $\angle ABD' = 90°$ (рис. 4). Как и в первом решении, докажем, что окружность ω касается AB.

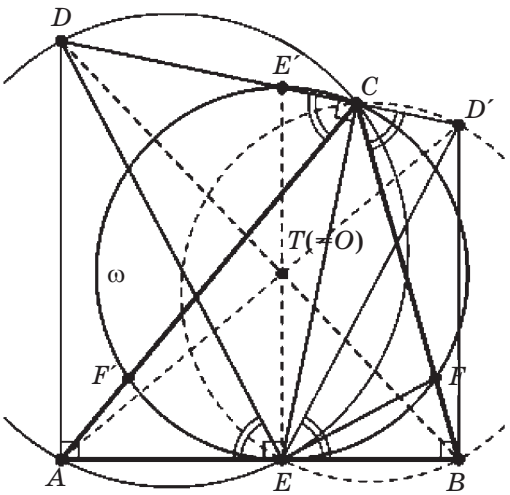


Рис. 4

Докажем, что центром ω является точка T пересечения диагоналей BD и AD' трапеции $ADD'B$. Заметим сразу, что из

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

вписанных четырёхугольников $ADCE$ и $BD'CE$ получаются равенства $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD' = \angle BED'$, так что прямоугольные треугольники AED и BED' подобны, и $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD'} = \frac{DT}{BT}$ (последнее равенство следует из подобия треугольников ATD и BTD). Значит, $ET \parallel AD \parallel BD'$.

Пусть TE пересекает DD' в точке E'. Поскольку E' лежит на диаметре ω, проходящем через E, и $\angle ECE' = 90°$, точка E' лежит на ω и EE' – диаметр ω. Прямая EE' параллельна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; как известно, в этом случае EE' делится точкой T пополам. Следовательно, $T = O$.

10 класс

10.1. О т в е т. Может.

Р е ш е н и е. См. решение 9.1.

10.2. Р е ш е н и е. Пусть прямая $x = d$ – ось симметрии параболы $y = P(x)$. Тогда для любых чисел t и s с суммой $2d$ (то есть таких, что точки t и s симметричны относительно точки d) выполнено равенство $P(t) = P(s)$. Таким образом, любая тройка попарно различных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2d$, будет удовлетворять условию задачи. Можно взять, скажем,

$$a = \frac{2d}{3} - 1,\ b = \frac{2d}{3},\ c = \frac{2d}{3} + 1.$$

10.3. О т в е т. 160.

Р е ш е н и е. *Оценка.* Докажем, что $n \le 160$.

Пусть дан набор из n конфет ($n > 160$). Назовём сорт *критическим*, если конфет этого сорта ровно 10 (среди всех данных n конфет). Пусть в наборе есть k критических сортов, тогда $n \ge 10k$. Уберём по одной конфете каждого критического сорта и организуем группу из оставшихся $n - k$ конфет. Для этой группы нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Кроме того,

$$n - k \ge n - \frac{n}{10} = \frac{9n}{10} > \frac{9 \cdot 160}{10} = 144.$$

Значит, в рассматриваемой группе не менее 145 конфет, поэтому условие задачи для такого набора не выполняется. Следовательно, $n \le 160$.

Пример. Теперь приведём пример ситуации, в которой у Васи может быть 160 конфет. Пусть у него есть ровно по 10 конфет 16-ти сортов. Пусть выбрана группа, для которой нет сорта, представленного ровно 10 конфетами. Тогда в эту группу не входит хотя бы одна конфета каждого сорта (иначе говоря, ни один сорт не будет взят полностью), то есть группа содержит не более $16 \cdot 9 = 144$ конфет, значит, условие задачи выполнено.

Замечание 1. Оценка $n \le 160$ может быть доказана иначе. Предположим, что $n = 145 + m$. По условию набор K_0 из всех $n = 145 + m$ конфет удовлетворяет условию задачи. Тогда в наборе K_0 есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_0. Совершим m раз одну и ту же процедуру. Уберём конфету a_0 сорта A_0 и рассмотрим группу K_1 из оставшихся $n - 1$ конфет. В группе (по условию) есть в точности 10 конфет некоторого сорта A_1, при этом сорт A_1 отличен от A_0. Уберём из K_1 конфету a_1 сорта A_1 и рассмотрим группу K_2 из оставшихся $n - 2$ конфет, в котором найдём 10 конфет нового сорта A_2 и т.д. Так дойдём до группы K_m, состоящей из $|K_m| = 145$ конфет. При этом K_0 содержит по 10 конфет сортов $A_0, \ldots, A_m$, значит, $|K_0| \ge 10(m + 1)$. Следовательно, $145 + m \ge 10(m + 1)$, откуда $m \le 15$ и $n \le 160$.

Замечание 2. Пример при $n = 160$ единственный.

10.4. Р е ш е н и е. Достаточно доказать *утверждение*: многочлен $P(x)$ делится на $(x - 1)^2$. Действительно, после деления

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

(например, столбиком), в частном получится многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, и тогда равенство многочленов $P(x)= (x-1)^2Q(x)$ влечёт равенство $P(2022) = 2021^2 \cdot Q(2022)$, из которого следует утверждение задачи, поскольку $Q(2022)$ – целое число.

Для доказательства утверждения сделаем замену $t = x - 1$, положим $R(t) = P(t+1) = a_n(t+1)^n + a_{n-1}(t+1)^{n-1} + \ldots + a_1(t+1) + a_0$ и докажем, что $R(t)$ делится на t^2, то есть что последние два коэффициента многочлена $R(t)$ равны 0.

Свободный член многочлена R равен $R(0) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Поскольку в многочлене $(t+1)^k$ коэффициент при t равен k, коэффициент при t многочлена R равен $na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1$. Из условий $a_{n-k} = a_k$ следует, что удвоенный коэффициент при t равен

$$(na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + a_1) + (na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}) = n(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) = 0.$$

Тем самым, задача решена.

Замечание. Утверждение о делимости $P(x)$ на $(x-1)^2$ можно доказать несколькими другими способами. Например:

1) Можно доказать, что при делении $P(x)$ на $x - 1$ мы получаем многочлен $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$ такой, что $b_{n-1-k} = -b_k$ при всех $0 \le k \le n-1$. Отсюда последует равенство $Q(1) = 0$, и тогда, в силу теоремы Безу, $Q(x)$ делится на $(x-1)$.

2) Можно заметить, что $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$.

10.5. Р е ш е н и е . Отметим точку I – центр общей вписанной окружности ω треугольников ABC и DEF (рис. 5). Поскольку D – середина дуги BC, точки A, I, D лежат на одной прямой. Окружность ω вписана в угол $\angle FDE$, поэтому DI – биссектриса угла $\angle FDE$, а точка A – середина дуги FE.

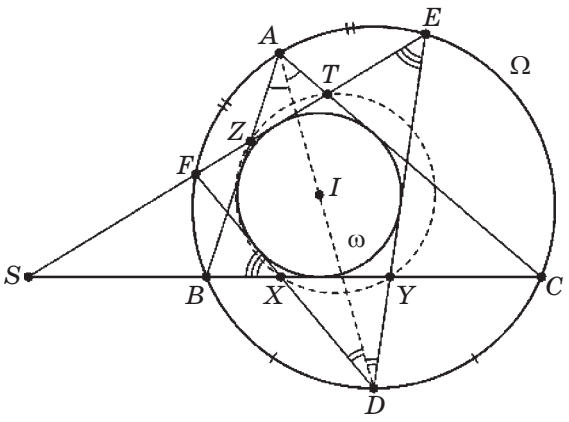


Рис. 5

Заметим, что четырёхугольник $FEYX$ вписанный. Это следует из равенства углов

$$\angle FED = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FB} + \overset{\frown}{CD}) = \angle FXB.$$

Аналогично, четырёхугольник $BCTZ$ – вписанный.

Если $BC \parallel EF$, то конструкция симметрична относительно прямой AD, и утверждение задачи очевидно. Иначе, отметим точку S пересечения прямых FE и BC. Приравнивая произведения отрезков секущих для окружностей Ω, $(BCTZ)$ и $(FEYX)$ (то есть степени точки S относительно этих трёх окружностей), имеем: $SX \cdot SY = SF \cdot SE = SB \cdot SC = SZ \cdot ST$. Доказанное равенство $SX \cdot SY = SZ \cdot ST$ означает, что X, Y, Z, T лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

11 класс

11.1. О т в е т. Может.

Р е ш е н и е. См. решение 9.1.

11.2. Р е ш е н и е. См. решение 10.2.

11.3. Р е ш е н и е. Из условия задачи следует, что точки A, A', B, B' лежат в одной плоскости, поэтому прямые BA' и AB' пересекают ребро CD в одной точке X (рис. 6). Из условия следует, что эти прямые являются биссектрисами

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

углов $CA'D$, $CB'D$ соответственно. Отсюда, по свойству биссектрисы, $CA' : A'D = CX : XD = CB' : B'D$, а поскольку $\angle CA'D = \angle CB'D = 120°$, треугольники $CA'D$ и $CB'D$ подобны. Поскольку CD – общая сторона этих треугольников, лежащая против равных углов, то треугольники равны. В этих равных треугольниках равны соответствующие высоты, проведённые из вершин A' и B', что и требовалось доказать.

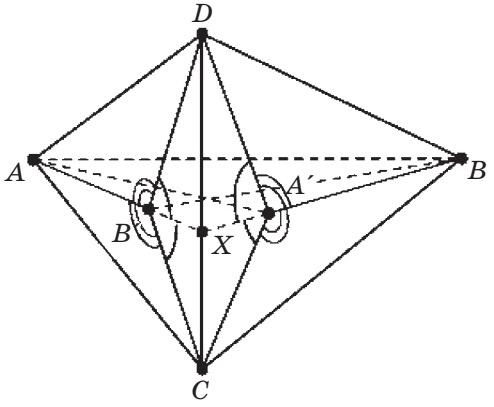


Рис. 6

11.4. Ответ. 102.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины – это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Рассмотрим 102 вершины и построим на них следующий граф. Одну вершину x соединим с тремя другими v_1, v_2, v_3. Остальные 98 вершин разобьём на пары и соединим вершины в каждой паре. Получился граф с 98/2 + 3 = 52 рёбрами. При удалении любой вершины удаляется нечётное число рёбер, то есть остаётся также нечётное их число. Поэтому компания, описанная в условии, может состоять из 102 человек.

Осталось показать, что не существует такой компании из 103 человек (тогда и компании из более чем 103 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Способ 1. Существует всего $n = C_{103}^2 = 51 \cdot 103$ способа выбросить две вершины из 103, оставив 101. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n. Пусть a_i – количество рёбер в графе с оставшимися 101 вершинами в i-м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv. Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i-м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 101 вершин. Это происходит в $k = C_{101}^2 = 50 \cdot 101$ способах, и число k чётно. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Способ 2. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2, то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности – всегда соединены.

Значит, если в графе есть k чётных вершин, то общее число рёбер равно $k(103 - k)$, то есть чётно. Но мы предполагали, что это количество нечётно – противоречие.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Рассуждая так же, как и при разборе первого случая, получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе имеется k чётных вершин, то число пар вершин, не соединённых рёбрами, равно $k(103 - k)$, то есть чётно. Поэтому общее число рёбер в графе равно

$$C_{103}^2 - k(103-k) = 103 \cdot 51 - k(103-k),$$

то есть нечётно. Но мы предполагали, что это количество чётно.

Замечание. Существуют и другие примеры удовлетворяющей условию компании из 102 человек.

11.5. О т в е т. $3 \cdot C_{100}^2 = 14850$.

Р е ш е н и е. Назовём тройку натуральных чисел (x, y, z), элементы которой принадлежат S, *хорошей*, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx). \qquad (*)$$

Таким образом, нам надо найти наибольшее возможное количество хороших троек.

Выясним, когда тройка хорошая. Перепишем (*) как квадратное уравнение относительно x,

$$x^2 - 2x(y + z) + (y - z)^2 = 0.$$

Решая его, получаем

$$x = (y+z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2,$$

откуда $\sqrt{x} = \pm\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$. Иначе говоря, тройка является хорошей тогда и только тогда, когда одно из чисел $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ равно сумме двух других.

Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_{100}$ – все элементы множества S. Положим $t_i = \sqrt{s_i}$. Оценим количество хороших троек (x, y, z), в которых z – наибольшее из трёх чисел, то есть $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Заметим, что при любых $1 \le i < j \le 100$ есть не более одной такой тройки, в которой $\sqrt{x} = t_i$ и $\sqrt{z} = t_j$ (по этим значениям восстанавливается $\sqrt{y} = \sqrt{z} - \sqrt{x}$). Поэтому оцениваемое количество не превосходит количества таких пар чисел (i, j), то есть C_{100}^2.

Аналогично, количества хороших троек, в которых наибольшими являются x или y, не превосходят C_{100}^2. Поэтому общее количество хороших троек не больше $3 \cdot C_{100}^2$.

Эта оценка достигается, если положить $si = i^2$, то есть $t_i = i$: действительно, тогда при любых $i < j$ найдётся хорошая тройка (s_i, s_{j-1}, s_j).

Замечание 1. Можно показать, что для того, чтобы оценка достигалась, необходимо выполнение равенств $t_i = it_1$ при всех i. Поскольку $1 \le t_i \le 100$, приведённый выше пример – единственный.

Замечание 2. Можно показать, что верен следующий **факт:** равенство $\sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ при натуральных x, y, z возможно лишь тогда, когда отношения x/z и y/z являются квадратами рациональных чисел, то есть когда $x = a^2t$, $y = b^2t$ и $z = c^2t$ при некоторых натуральных a, b, c и t (где $a + b = c$).

Список источников

1. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А.* Математика. Областные олимпиады. 8–11 класс. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.

2. *Агаханов Н.Х., Подлипский О.К.* Математические олимпиады Московской области. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.

3. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А.* Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012/2013 учебного года // Математика в школе. 2013. № 9. С. 36–6.

4. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевни-*

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ков П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А. Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2013/2014 учебного года // Математика в школе. 2014. № 9. С. 37–40.

5. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терёшин Д.А.* Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2015/2016 учебного года // Математика в школе. 2016. № 5. С. 16–8.

6. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С.* Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (первый день) // Математика в школе. 2019. № 4. С. 11–21.

7. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С.* Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2018/2019 учебного года (второй день) // Математика в школе. 2019. № 5. С. 15–25.

8. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С.* Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (первый день) // Математика в школе. 2020. № 5. С. 12–19.

9. *Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Рубанов И.С.* Региональные этапы Всероссийской олимпиады школьников по математике и олимпиады им. Л. Эйлера 2019/2020 учебного года (второй день) // Математика в школе. 2020. № 6. С. 10–20.

Статья поступила в редакцию 31.08.2022.
Принята к публикации 21.09.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Число *e* в повседневной жизни

Где используется число $e \approx 2{,}71828\ldots$? Вот несколько примеров.

В одной карточной игре между двумя игроками делится колода карт. Каждый игрок по очереди выкладывает на стол верхнюю карту своей колоды. Выигрывает тот, кто покажет карту более высокого достоинства. Если оба игрока показывают карты одного достоинства, на стол выкладывается ещё по одной карте, и так далее. Если вести игру с двумя колодами, то вероятность того, что вся колода перейдёт от одного игрока к другому, при этом игроки ни разу не вытянут карты одинакового достоинства, равна $1/e$.

Верёвка, на которой вывешивается одежда для просушки, имеет форму кривой, которая называется цепной линией и описывается формулой

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Предельный доход при использовании сложных процентов, когда число периодов начисления процентов стремится к бесконечности, равен числу e. То есть максимально возможная сумма, которую можно получить с одной денежной единицы, если начислять проценты бесконечное число раз, будет равна примерно 2,72.

Численность популяции животных и население планеты возрастает по тому же закону, что и сложные проценты, и также ограничивается числом e. Подобный рост называется экспоненциальным, обратный процесс называется экспоненциальным уменьшением.

По книге: *Ламберто Гарсиа дель Сид.* Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии (М.: Де Агостини, 2014).

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Математика в школе 2023. №1. С. 22–32 Mathematics at school 2023. №1. P. 22–32

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ

METHODOLOGICAL FEATURES OF SOLVING STEREOMETRIC PROBLEMS THROUGH VARIOUS MEANS

Научная статья
УДК: 373.016.514.113

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_1_22

Л.С. Сагателова, канд. пед. наук, доцент, Волгоградский государственный технический университет, lisersag@mail.ru

L.S. Sagatelova, PhD (in Pedagogy), associate professor, Volgograd State Technical University, lisersag@mail.ru

Аннотация: актуализируется проблема решения стереометрических задач разными способами. Решение стереометрических задач рассматривается как средство развития критического мышления, творческих способностей, коммуникативного взаимодействия, необходимых для полноценной жизнедеятельности в динамично развивающемся обществе. Выделены и описаны методические особенности решения стереометрических задач различными способами с применением геометрического, векторного и координатного подходов. Описана организация деятельности обучающихся

Abstract: the article actualises the problem of solving stereometric problems in different ways as a means of developing critical reasoning, creative abilities, communicative interaction, as necessary for full-value activity in the dynamically developing society. The methodological features of solving stereometric problems through various means using geometric, vector and coordinate approaches are highlighted and described. The organisation of learners' activities towards solution of stereometric problems in different ways is described

Ключевые слова: решение стереометрических задач разными способами, методические особенности, организация деятельности

Keywords: solution of stereometric problems in different ways, methodological features, organisation of activities

© Сагателова Л.С. 2023

Развитие математического образования ориентировано на перспективные проблемы социально-экономического развития общества. Особая роль математического образования обусловлена тем, что математика широко используется человечеством во всех сферах жизни. С учётом текущих и перспективных потребностей общества цели среднего общего математического образования должны быть ориентированы на овладение комплексом математических знаний, умений и навыков, необходимых для полноценной жизни в обществе в долгосрочной перспективе [1–5]. Одним из наиболее эффективных средств в обучении математике считаются задачи [6, 7]. Термин «задача» употребляется достаточно широко. Задачу понимают и как проблему, которую требуется решить, и как проблемную ситуацию [8, с. 100]. Кроме того, математические задачи являются также средством организации учебной деятельности [9]. Причём учебная деятельность должна быть организована учителем математики таким образом, чтобы у обучаю-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

щихся формировался интерес к процессу решения задачи.

Обучение в старших классах направлено на подготовку к продолжению образования, а также к успешной профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры. Умение решать задачи разными способами характеризует высокую степень владения операциями мышления, готовность применять знания в нестандартных ситуациях, решать комбинированные задачи, построенные на межпредметном материале.

Решение стереометрической задачи разными способами позволяет охватить большой объём теоретического материала, установить связи между изучаемыми понятиями и фактами, темами школьного курса геометрии, интегрировать разные образовательные области и дисциплины (метапредметный подход). Выработка умений решать задачи разными способами приучает выдвигать гипотезы и проверять их, сравнивать математические результаты, делать выводы.

Методический аспект решения одной стереометрической задачи разными способами предполагает выбор эффективных форм проведения занятий, организацию самостоятельной работы, сотрудничества и проблемных дискуссий. Правильная организация деятельности при решении стереометрической задачи разными способами позволяет добиться различных целей [10]. Выделяют пять основных целей решения одной задачи разными способами:

1) выявление межпредметных связей: алгебра – геометрия, тригонометрия – геометрия и др.;

2) обобщение и систематизация полученных знаний, установление связей между различными теоретическими фактами;

3) выявление сущности определённых методов, их отличительных черт, достоинств и недостатков при применении к конкретным классам задач;

4) вооружение учащихся различными методами решения задач с целью обретения ими уверенности в своих силах, возможности в случае затруднения перейти к другому приёму решения;

5) демонстрация рациональности, эффективности и изящества одних и нерациональности и порою ошибочности других способов [11].

Рассмотрим решение одной стереометрической задачи несколькими способами на примере задачи на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми [12]. Решение задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми традиционно вызывают затруднения. Объясняется это тем, что у школьников не достаточно развито пространственное мышление. Умение находить расстояние между скрещивающимися прямыми важно для продолжения образования. Например, направление действия силы и некоторый элемент конструкции, на который она воздействует, могут ассоциироваться со скрещивающимися прямыми, между которыми необходимо уметь находить расстояние.

Для нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми применяют геометрический, векторный и координатный подходы. Геометрический подход связан с последовательным рассмотрением нескольких планиметрических задач и требует довольно подробных пояснений. Координатный и векторный подходы позволяют находить расстояния между скрещивающимися прямыми в различных геометрических конфигурациях. Неизменным достоинством данных подходов является их эффективность, несмотря на довольно большой объём вычислений. Ап-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

парат векторной алгебры и аналитической геометрии позволяет решать определённые группы задач даже при недостаточно развитом пространственном мышлении. При этом предполагается, что учащиеся знакомы с основами векторной алгебры и аналитической геометрии в объёме программы средней школы. Как правило, для решения задач с применением векторного подхода достаточно знать основные формулы перевода геометрического факта на язык векторной алгебры. Основное преимущество метода координат состоит в том, что не надо изображать искомое расстояние на чертеже. При решении задач координатным методом главное – удачный выбор системы координат.

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми может быть применён один из приведённых ниже приёмов.

1. Построение общего перпендикуляра между двумя скрещивающимися прямыми. Его длина и будет искомым расстоянием между ними.

2. Построение параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой скрещивающейся прямой. Расстояние между этими плоскостями будет искомым.

3. Построение плоскости, содержащей одну из прямых и параллельную второй. Искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

4. Применение формулы для объёма тетраэдра $V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot h \cdot \sin\varphi$, где V – объём тетраэдра, a и b – длины противолежащих рёбер, h – расстояние между ними, φ – угол между прямыми a и b, тогда $h = \frac{6 \cdot V}{a \cdot b \cdot \sin\varphi}$.

5. Применение ортогонального проектирования и его свойств в задачах для нахождения расстояний и углов между скрещивающимся прямыми, основанного на приведённом ниже утверждении. *Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость.*

6. Применение формул перевода геометрического факта на язык векторной или координатной алгебры (аналитическая геометрия).

Рассмотрим применение изложенных выше приёмов в приведённой ниже задаче.

Задача. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

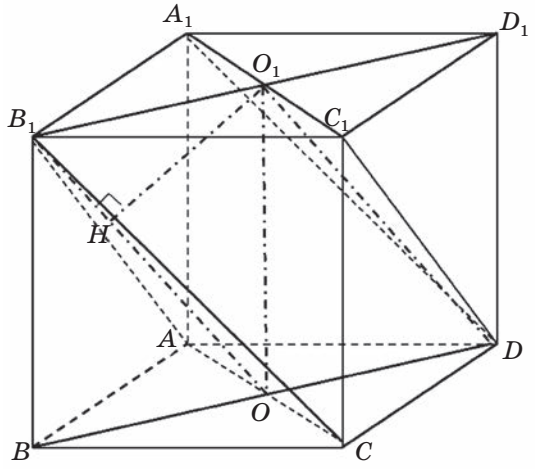


Рис. 1

Р е ш е н и е 1. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдём расстояние между прямыми CB_1 и DC_1. Искомое расстояние h между скрещивающимися прямыми CB_1 и DC_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1C и DA_1C_1 ($CB_1 \parallel DA_1$, $AB_1 \parallel DC_1$), и, следовательно, равно расстоянию от

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

точки O_1 до плоскости AB_1C. Поэтому искомое расстояние h равно высоте O_1H прямоугольного треугольника OO_1B_1:

$$\frac{1}{O_1H^2}=\frac{1}{OO_1^2}+\frac{1}{O_1B_1^2},$$

откуда

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3.$$

Окончательно имеем: $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Примечание. Для прямоугольного треугольника $\angle C = 90°$, $CA = b$, $CB = a$, где h – высота, имеет место равенство

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2};h=\frac{ab}{c}\right),$$

которым удобно пользоваться на практике.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 2. Воспользуемся формулой:

$$V_{C_1B_1CD}=\frac{1}{6}\cdot B_1C\cdot C_1D\cdot h\cdot\sin\angle(B_1C,C_1D).$$

Найдём угол между прямыми B_1C и C_1D. Так как $B_1A \parallel C_1D$, то $\angle(B_1C,\ C_1D) = \angle CB_1A$. Треугольник AB_1C равносторонний, так как стороны его являются диагоналями граней квадрата. Следовательно, $\angle CB_1A = 60°$, $B_1C=C_1D=\sqrt{2}$.

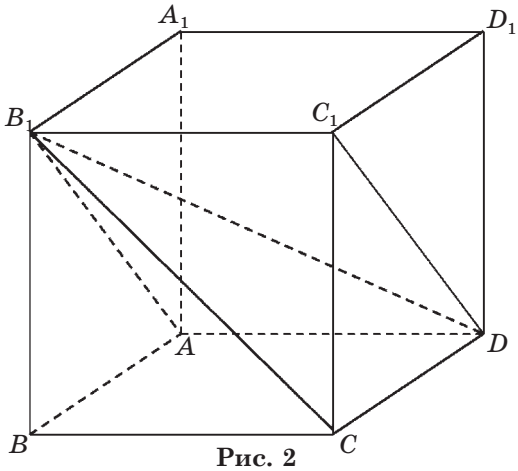


Рис. 2

$$V_{C_1B_1CD}=V_{C_1BCD},$$

$$V_{C_1BCD}=\frac{1}{3}\cdot CC_1\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD=\frac{1}{6}.$$

$$\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot h\cdot\sin 60°=\frac{1}{6},$$

откуда $h=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

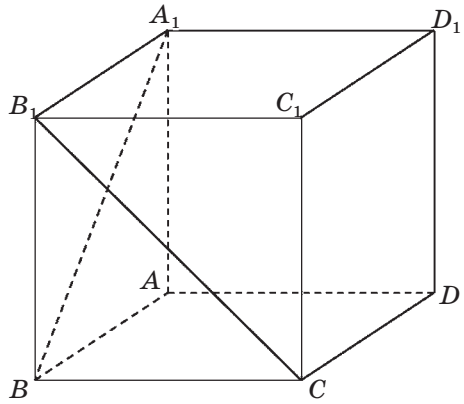


Рис. 3*а*

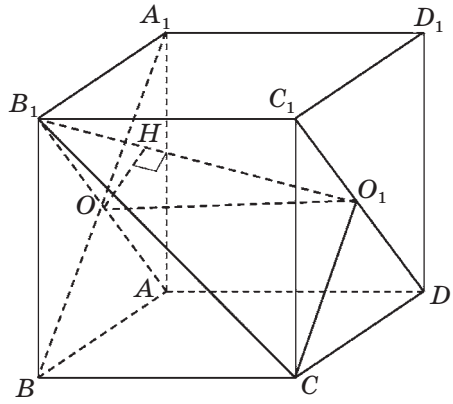


Рис. 3*б*

Решение 3 (***применение ортогонального проектирования и его свойств***). Найдём расстояние между диагоналями A_1B и B_1C. Точки O и O_1 – точки пересечения диагоналей A_1B и AB_1, DC_1 и D_1C соответственно. Выполним ортогональное проектирование A_1B и CB_1 на плоскость AB_1C_1 (рис. 3*б*). Тогда точка O –

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

проекция диагонали A_1B, а B_1O_1 – проекция диагонали CB_1. Значит, искомое расстояние – это расстояние от точки O до B_1O_1, то есть высота OH прямоугольного треугольника OO_1B_1 ($\angle B_1OO_1 = 90°$), проведённой к гипотенузе B_1O_1.

Поскольку по условию ребро куба равно 1, то $OO_1 = BC = 1$, $B_1O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OO_1^2} + \frac{1}{B_1O^2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3,$$

откуда $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

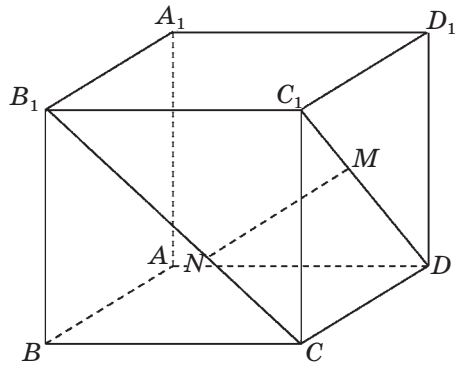


Рис. 4*а*

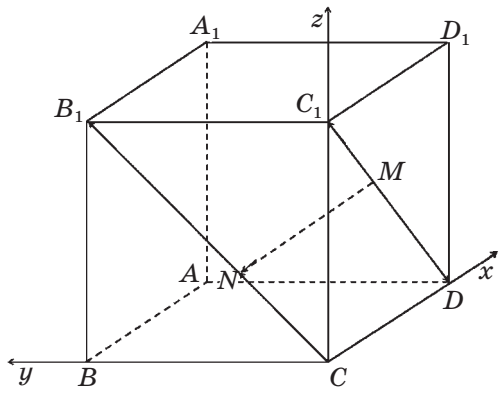


Рис. 4*б*

Решение 4 (координатный подход). Введём прямоугольную систему координат следующим образом: точка O совпадает с точкой C, CC_1 – единичный отрезок на оси Oz, CD – единичный отрезок на оси Ox, CB – единичный отрезок на оси Oy.

MN – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым CB_1 и DC_1.

$$\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN}.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{CB_1} \cdot \overline{MN} = 0, \\ \overline{DC_1} \cdot \overline{MN} = 0. \end{cases}$$

Запишем скалярное произведение векторов в координатной форме.

Найдём координаты векторов:

$C(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $C_1(0; 0; 1)$, $B_1(0; 1; 1)$,

$$\overline{DC} = (-1;0;0), \ \overline{DC_1} = (-1;0;1),$$
$$\overline{CB_1} = (0;1;1).$$

Воспользовавшись коллинеарностью векторов $\overline{MD}$ и $\overline{DC_1}$, $\overline{CN}$ и $\overline{CB_1}$, запишем:

$$\overline{MD} = -x \cdot \overline{DC_1}, \ \overline{MD} = (x;0;-x),$$
$$\overline{CN} = y \cdot \overline{CB_1}, \ \overline{CN} = (0;y;y).$$

Откуда имеем

$$\overline{MN} = (x;0;-x) + (-1;0;0) + (0;y;y), \text{ или}$$
$$\overline{MN} = (x-1;y;-x+y).$$

Перепишем исходную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (0;1;1) \cdot (x-1;y;-x+y) = 0, \\ (-1;0;1) \cdot (x-1;y;-x+y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + x = 0, \\ y - 1 - 2x = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$. Тогда

$$|\overline{MN}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 5 (векторный подход, рис. 4*а*, 4*б*). Введём базис $(\overline{a};\overline{b};\overline{c})$, где $\overline{a} = \overline{CD}$, $\overline{b} = \overline{CB}$, $\overline{c} = \overline{CC_1}$ и $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Для дальнейших вычислений воспользуемся таблицей, в которую внесём попарные скалярные произведения базисных векторов

	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$
$\overline{a}$	1	0	0
$\overline{b}$	0	1	0
$\overline{c}$	0	0	1

За направляющие векторы прямых DC_1 и CB_1 можно взять $\overline{DC_1} = \overline{c} - \overline{a}$, $\overline{CB_1} = \overline{b} + \overline{c}$. Если MN – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым, то

$$\overline{MN} = x(\overline{c} - \overline{a}) + y(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a}.$$

Составим систему уравнений для нахождения неизвестных значений x и y:

$$\begin{cases} \overline{CB_1} \cdot \overline{MN} = 0, \\ \overline{DC_1} \cdot \overline{MN} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x(\overline{c} - \overline{a}) + y(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a}) \cdot (\overline{c} - \overline{a}) = 0, \\ (x(\overline{c} - \overline{a}) + y(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a}) \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = 0. \end{cases}$$

С помощью таблицы приведём систему к равносильной:

$$\begin{cases} 2y + x = 0, \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. Тогда

$$\overline{MN} = \frac{2}{3} \cdot (\overline{c} - \overline{a}) - \frac{1}{3} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a} =$$

$$= \frac{1}{3}\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c} = \frac{1}{3}(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}).$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{9}(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}(\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} - 2\overline{b} \cdot \overline{c} + 2\overline{a} \cdot \overline{c})} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}(1+1+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 6. *Теоретическая справка.* Для нахождения расстояния между прямыми CB_1 и DC_1 воспользуемся геометрическим приложением векторного и смешанного произведения векторов: расстояние между скрещивающимися прямыми можно вычислить по формуле:

$$h = \rho(l_1, l_2) = \frac{|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|}{|\overline{a} \times \overline{b}|},$$

где l_1 и l_2 – скрещивающиеся прямые, $\overline{b}$ – направляющий вектор прямой l_1, $\overline{a}$ – направляющий вектор прямой l_2, $\overline{c}$ – вектор (мост), начало которого лежит на одной прямой, а конец – на второй, $h = \rho(l_1, l_2)$ – расстояние между прямыми l_1 и l_2.

Найдём расстояние между прямыми CB_1 и DC_1 (рис. 4).

Введём прямоугольную систему координат следующим образом: точка O совпадает с точкой C, CC_1 – единичный отрезок на оси Oz, CD – единичный отрезок на оси Ox, CB – единичный отрезок на оси Oy. MN – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым CB_1 и DC_1.

Укажем координаты векторов:

$$\overline{CB_1}(0;1;1), \ \overline{CC_1} = (0;0;1),$$

$$\overline{DC_1} = (-1;0;1), \ \overline{CB_1} = (0;1;1)$$

(см. решение 4). Найдём $(\overline{CB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DC_1})$ и $\overline{CB_1} \times \overline{DC_1}$.

$$(\overline{CB_1}, \overline{CC_1}, \overline{DC_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\overline{CB_1} \times \overline{DC_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k},$$

$$|\overline{CB_1} \times \overline{DC_1}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Для нахождения расстояния между

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

прямыми CB_1 и DC_1 воспользуемся формулой

$$h = \rho(CB_1, DC_2) = \frac{|(CB_1, CC_1, DC_1)|}{|CB_1 \times DC_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 7. (рис. 4). Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдём расстояние между прямыми CB_1 и DC_1.

Введём прямоугольную систему координат следующим образом: точка O совпадает с точкой C, CC_1 – единичный отрезок на оси Oz, CD – единичный отрезок на оси Ox, CB – единичный отрезок на оси Oy. MN – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым CB_1 и DC_1.

Укажем координаты векторов:

$$\overline{DC_1} = (-1;-0;1),\ \overline{CB_1} = (0;1;1).$$

Найдём координаты точек M и N. Пусть $\frac{DM}{MC_1} = \lambda$, тогда

$$x_M = \frac{x_D + \lambda x_{C_1}}{1+\lambda} = \frac{1+\lambda\cdot 0}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda},$$

$$y_M = \frac{y_D + \lambda y_{C_1}}{1+\lambda} = \frac{0+\lambda\cdot 0}{1+\lambda} = 0,$$

$$z_M = \frac{z_D + \lambda z_{C_1}}{1+\lambda} = \frac{0+\lambda\cdot 0}{1+\lambda} = \frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Получим координаты точки M:

$$M = \left(\frac{1}{1+\lambda}; 0; \frac{1}{1+\lambda}\right).$$

Аналогично, пусть $\frac{CN}{NB_1} = \mu$, тогда

$$x_N = \frac{x_C + \mu x_{B_1}}{1+\mu} = \frac{1+\mu\cdot 0}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu},$$

$$y_N = \frac{y_C + \mu x_{B_1}}{1+\mu} = \frac{0+\mu\cdot 1}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu},$$

$$z_N = \frac{z_C + \mu z_{B_1}}{1+\mu} = \frac{0+\mu\cdot 1}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu}.$$

Получим координаты точки N:

$$N = \left(\frac{1}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu}\right).$$

Запишем координаты вектора $\overline{MN}$:

$$\overline{MN} = \left(\frac{-1}{1+\lambda}; \frac{\mu}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right).$$

Так как MN – общий перпендикуляр к рассматриваемым прямым CB_1 и DC_1, то составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{CB_1}\cdot\overline{MN} = 0, \\ \overline{DC_1}\cdot\overline{MN} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1;0;1)\cdot\left(\frac{-1}{1+\lambda}; \frac{\mu}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) = 0, \\ (0;1;1)\cdot\left(\frac{-1}{1+\lambda}; \frac{\mu}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим

$$\lambda = 2,\ \mu = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\overline{MN} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, а длина общего перпендикуляра прямых CB_1 и DC_1 будет равна:

$$|\overline{MN}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

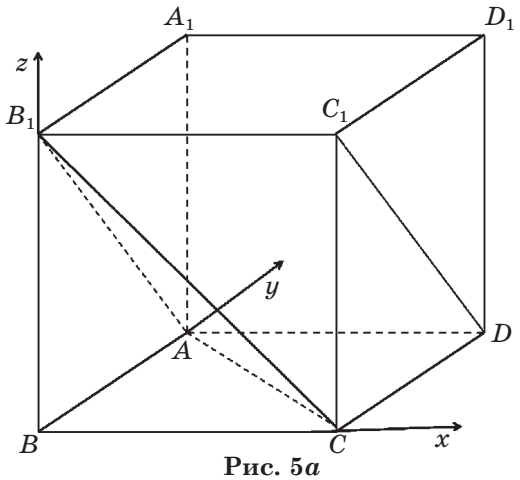


Рис. 5*а*

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Р е ш е н и е 8. *Теоретическая справка.* Расстояние h от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рассмотрим единичный куб. Искомое расстояние h между скрещивающимися прямыми CB_1 и DC_1 равно расстоянию от точки D до плоскости AB_1C ($AB_1 \parallel DC_1$, следовательно, $DC_1 \parallel AB_1C$).

Введём прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 5*а*.

Запишем уравнение плоскости AB_1C:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1;\ x + y + z - 1 = 0,$$

откуда $\overline{n}(1;1;1)$, $|\overline{n}| = \sqrt{3}$.

Найдём координаты точки D на прямой DC_1: $D(1; 1; 0)$, тогда

$$h = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

О т в е т: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

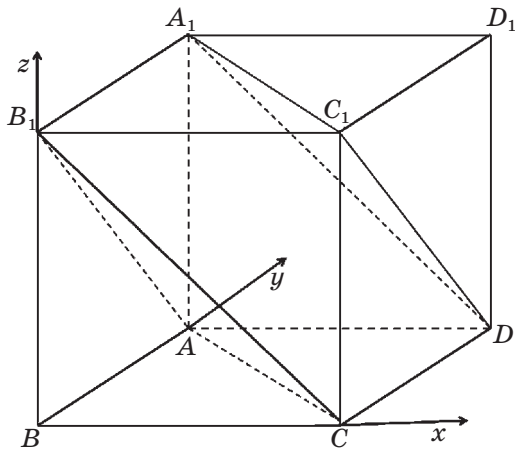


Рис. 6

Р е ш е н и е 9. *Теоретическая справка.* Расстояние h между параллельными плоскостями α_1 и α_2, где α_1: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и α_2: $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Рассмотрим единичный куб (рис. 6). Искомое расстояние h между скрещивающимися прямыми CB_1 и DC_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1C и DA_1C_1 ($CB_1 \parallel DA_1$, $AB_1 \parallel DC_1$). Введём прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 6. Запишем уравнения плоскостей:

$$AB_1C:\ \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1,\ x + y + z - 1 = 0,$$

откуда $\overline{n}(1;1;1)$, $|\overline{n}| = \sqrt{3}$.

$$DA_1C_1:\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1,\ x + y + z - 2 = 0,$$

откуда $\overline{n}(1;1;1)$, $|\overline{n}| = \sqrt{3}$.

Имеем: $h(AB_1C; DA_1C_1) = \frac{|-1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

О т в е т: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

По мнению Э.Г. Готмана и З.А. Скопеца, «решая одну задачу различными методами, можно лучше понять специфику того или иного метода, его преимущество и недостатки в зависимости от содержания задачи» [13, с. 5]. Суждение о простоте или трудности того или иного способа решения задачи в значительной степени субъективно. Оно существенно зависит от степени подготовленности учащихся, от уровня владения методами решения задач. При разборе способов решения одной и той же задачи учащиеся должны сопоставить и оценить способы решения, проведя их сравнение, выбрать наиболее рациональный. Возможность выбора рационального способа решения воспитывает самостоятельность учащихся, способствует прочности усвоения математического материала.

На уроках при решении задач разными способами можно использовать раз-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

личные режимы работы в сотрудничестве: коллективную работу, когда весь класс решает задачу; работу в подгруппах; индивидуальную работу, а затем групповое сравнение и обсуждение результатов. Сотрудничество создаёт соответствующую психологическую атмосферу в классе, в которой важную роль играют отношения «учащийся – учащийся». Можно рекомендовать комментированные упражнения, когда один из учеников объясняет вслух ход выполнения задания. Эта форма помогает учителю «опережать» возможные ошибки, ненавязчиво корректировать действия учащихся.

Обучение учащихся решению задач разными способами может быть организовано в три этапа. На первом (начальном) этапе занятия должны быть обучающими. Самостоятельность учащихся минимальна. Учитель знакомит учащихся с разными способами решения стереометрических задач, акцентируя внимание учащихся на ключевых идеях и особенностях разных подходов. Учащиеся анализируют задачи и методы их решения, знакомятся с встречающимися новыми терминами и понятиями, фактами, пополняют знания по геометрии.

На втором этапе учителем демонстрируется применение разных методов при решении одной специально подобранной задачи. Задача подробно разбирается учителем математики совместно с учащимися в режиме активного диалогического взаимодействия по следующему плану: осмысление условия задачи – изучение требований, предъявляемых к решению задачи – выдвижение гипотез – построение плана решения задачи – выстраивание последовательности действий. Это позволит учащимся сравнить методы решения задачи с точки зрения их эффективности и рациональности.

На третьем (заключительном) этапе, когда учащиеся в достаточной мере овладеют умением решать задачи разными способами, можно увеличить степень их самостоятельности. Учащимся может быть предложено самостоятельно решить стереометрическую задачу разными способами. По истечении отведённого времени провести обсуждение найденных способов решения задачи. Такая работа предполагает получение прочных и осознанных предметных знаний, развивает творческие и исследовательские способности учащихся, формирует умения грамотно аргументировать свою позицию. Использование такой формы организации занятий, как проблемная дискуссия, в рамках которой предлагается сравнить различные решения одной задачи, направлено на формирование и развитие у учащихся интеллектуальных (систематизировать знания, работать со справочными материалами), творческих (генерировать идеи, варьировать варианты решения задачи) и коммуникативных (умение вести дискуссию) умений и навыков. Проблемная дискуссия вызывает мотивацию и обеспечивает деятельность учащихся в изучении и закреплении материала.

Самостоятельная работа может организовываться и в группах. Каждой группе предлагается решить задачу как можно большим числом способов. В классах с невысоким уровнем подготовки учитель каждой группе может дать задание решить задачу каким-то конкретным способом. Затем представители групп показывают свои способы решения, происходит обсуждение их достоинств и недостатков, делаются выводы, обобщаются результаты. Завершается работа над задачей рефлексией, учащиеся сами оценивают свою деятельность. В результате у обучающихся развиваются навыки коллективного

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

решения проблем в совокупности с умением работать самостоятельно, вырабатываются способности оценивать результаты своей деятельности, деятельности одноклассников.

В настоящее время в образовании наметилась тенденция к переходу от массового унифицированного образования к образованию, ориентированному на личностные особенности и способности обучающихся. Решение задач разными способами считается заданием повышенной сложности. Подобная работа должна вестись систематически с более способными учащимися, развивая и удовлетворяя их любопытство и математические интересы. При выстраивании индивидуальной траектории учеником учителю важно помочь правильно оценить его способности, возможности, перспективы, интересы и усилия. Любое положительное проявление творчества обучающимся должно находить поддержку и сопровождение учителя. Главным ориентиром обучения являются личностные образовательные приращения учащихся. Организация на занятиях должна отличаться от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать версии и гипотезы. Учащимся с высоким уровнем подготовки могут быть предложены творческие задания. Например, сформулировать, опираясь на исходную задачу, новые задачи; изменить начальные условия и проанализировать их влияние на выбор рационального способа решения; подобрать задачи в учебной литературе; придумать новую задачу, систему задач; разработать алгоритм решения задачи, подготовить мини-пособия, памятки для одноклассников, презентации решений с использованием информационных технологий. Творческие самостоятельные работы, ориентированные на поиск и подбор, а также составление задач, решаемых несколькими способами, требуют от учащихся собственной инициативы, активизируют мышление, развивают исследовательские способности, повышают интерес к изучению математики. Общеизвестно, что учащиеся прочно усваивают только то, что прошло через их индивидуальные усилия. Умения решать задачи различными способами позволят учащимся уверенно справляться с задачами на итоговой аттестации.

Решение стереометрических задач разными способами – один из ресурсов учителя математики для реализации эффективного обучения геометрии, развития математической культуры, творческих и исследовательских способностей. Успех зависит от умения учителя организовывать и управлять деятельностью учащихся. Следует признать, что на текущем этапе развития среднего общего математического образования требуется всесторонний анализ накопленного опыта и новые подходы в поиске совершенствования образовательного процесса обучения математике с учётом перспектив развития общества. Реальные условия реализации математического образования в общеобразовательных организациях позволяют говорить лишь о стартовом этапе развёртывании деятельности в этом направлении.

Список источников

1. *Кузнецова Т.И.* Всероссийский научно-методический семинар «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» в 2019/2020 учебном году // Математика в школе, 2020. № 5. С. 68–71.

2. *Подлипский О.К.* Современные тенденции развития образования и математическая подготовка школьников // Вестник Майкопского государственного университета, 2020. № 1 (44). С. 94–102.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

3. *Тумашева О.В.* Формирование функциональной грамотности учащихся на уроках математики: размышления о целевых ориентирах // Математика в школе, 2021. № 5. С. 8–13.

4. *Чанкаев М.Х., Гербеков Х.А., Сурхаев М.А.* Математическое образование в условиях внедрения и развития цифровых технологий // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования, 2020. № 1 (51). С. 46–52.

5. *Christian Wittmann E.* Connecting Mathematics and Mathematics Education: collected Papers on Mathematics Education as a Design Science, Springer, Cham. 2021. 318 p.

6. *Пойа Д.* Математическое открытие: решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / пер. с англ. В.С. Бермана ; под ред. И.М. Яглома. – 2-е изд., стер. М. : Наука, 1976. 448 с.

7. *Балл Г.А.* Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М.: Педагогика, 1990. 184 с.

8. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – 2-е изд. испр. М.: Дрофа, 2008. 415 с.

9. *Саранцев Г.И.* Методическая подготовка будущего учителя в современных условиях // Педагогика, 2006. № 7. С. 61–68.

10. *Дюмина Т.Ю., Махонина А.А.* Обучение школьников поиску идеи решения геометрической задачи различными способами / Электронный научно-образовательный журнал ВГСПУ «Грани познания», №1(21). Февраль 2013, (Волгоград), URL: http://www.grani.vspu.ru. (дата обращения: 12.05.2022).

11. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике : в 2 ч. Ч. 2 : Обучение математике через задачи и обучение решению задач. М. : Просвещение, 1977. 145 с.

12. *Сагателова Л.С.* Задание С2: метод ортогонального проектирования // Математика в школе, 2012. № 3. С.18–23.

13. *Готман Э.К., Скопец З.А.* Задача одна – решения разные: Геометр. задачи : Кн. для учащихся. М.: Просвещение, 2000. 223 с.

Статья поступила в редакцию 30.05.2022.
Принята к публикации 30.08.2022.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

Трансцедентные связи π

Число *e* является основанием натурального логарифма. Его значение равно 2,71828… После числа π это самая известная и наиболее часто встречающаяся математическая постоянная.

Несомненно, $\pi + e = 5{,}859874482...$, но неизвестно, является ли это число трансцендентным. Удивительно, но известно, что одно из чисел $\pi + e$ или $\pi \cdot e$ трансцендентное, однако неизвестно, какое именно. Также неизвестно, трансцендентное или нет число π^{π}.

Напротив, e^{π} является трансцендентным. Однако это нельзя доказать для π^{e}. В действительности неизвестно, является ли это число рациональным или иррациональным. Неизвестно, являются ли иррациональными $\pi + e$, π/e.

По книге: *Хоакин Наварро.* Секреты числа π. Почему неразрешима задача о квадратуре круга (М.: Де Агостини, 2014).

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Математика в школе 2023. №1. С. 33–40 Mathematics at school 2023. №1. P. 33–40

КАКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ БОЛЬШЕ? (Сюжет для исследовательских проектов школьников)

WHICH TRIANGLES ARE MORE? (A plot for students' research projects)

Научная статья
УДК: 372.851+519.212.3

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_1_33

П.В. Семёнов,
Москва, факультет математики, отдел математического образования НИУ «Высшая школа экономики», pavelssem@gmail.com

P.V. Semenov,
Moscow, Faculty of Mathematics, department of mathematical education Higher School of Economics, pavelssem@gmail.com

Аннотация: приведены 10 различных способов математической (геометрической) формализации понятия «случайно выбираемый треугольник». Показано, что событие «Выбираемый треугольник окажется остроугольным» имеет в них 7 принципиально различных вероятностей. В основном тексте детально разобраны 4 из 10 моделей, а остальные собраны в виде заданий для выполнения исследовательских проектов школьников; по три проекта для основной и для старшей школы

Abstract: 10 different ways of mathematical (geometric) formalization of the concept of «randomly selected triangle» are given. It is shown that the event «The chosen triangle will turn out to be acute-angular» has 7 principally pifferent probabilities in them. In the main text, 4 out of 10 models are analyzed in detail, and the rest are collected in the form of assignments for students' research projects; three projects each for primary and high school

Ключевые слова: задачи открытого типа, вероятность случайного события, геометрическая вероятность, треугольник, площадь, интеграл

Keywords: open-type problems, probability of a random event, geometric probability, triangle, area, integral

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта №19–29–14192

© Семёнов П.В., 2023

Введение. Решение текстовых задач традиционно есть один из самых сложных моментов при обучении математике. Что и как обозначить за переменную (неизвестное), какие вопросы следует поставить и как на них ответить, как составить «нужное» уравнение или неравенство, кратко, «как перевести с русского на математический»?

Ответы на подобные вопросы – своего рода Рубикон, преодоление которого в заметной степени является критерием успешности школьника при обучении математике.

Выделение вероятности и статистики в виде отдельного учебного курса [1], отнюдь не снимает напряженности по поводу решения текстовых задач, а, пожалуй, лишь усугубляет её. Многие текстовые задачи и сюжеты аттестационных испытаний последних лет на нахождение вероятности допускают весьма различные математические формализации (модели). Правда, на нынешнем элементарном уровне по-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

добных задач эти различия, как правило, не приводят к несовпадению численных ответов. Но даже при незначительном повышении сложности текстовых сюжетов, теория вероятностей как раз таки и выделяется среди других учебных дисциплин тем, что по текстовому условию задачи можно составить *принципиально различные* математические модели и получить *различные* ответы.

Классическим разделом, в котором возможны подобные ситуации, является «Геометрическая вероятность»[1]. Например, известный парадокс Бертрана состоит в том, что текстовая постановка вопроса о вероятности длины наудачу выбираемой хорды допускает, как минимум, три различных математических трактовки с ответами 1/2, 1/3, 1/4 [2, 3].

В этой статье эффект, аналогичный парадоксу Бертрана, рассмотрен для неформального вопроса «Каких треугольников больше, остроугольных или тупоугольных?» и его вероятностной версии «Какова вероятность того, что случайный треугольник на плоскости окажется остроугольным (тупоугольным)?». Несколько иначе можно сказать, что тут мы имеем дело с примером *задачи открытого типа* [5, 6]: множественность ответов подразумевается априорно.

Изложение ориентировано на организацию *проектной деятельности* школьников. Рекомендуется прочесть введение и один (или несколько) из пунктов 1–4 статьи и после этого перейти к решению задач в п. 5. Решение нескольких из них может составить «самостоятельную» часть проектной работы, а её «теоретическую» часть можно составить, используя материал, изложенный в п. 1–4 и связанные с ним факты. Приведём два факта из школьного курса математики, необходимых для дальнейшего.

А) Вычисление площадей. Площади простых фигур вычисляются по формулам школьной планиметрии 7–9 классов. Площади криволинейных трапеций вычисляются через определённые интегралы, которые, в свою очередь, вычисляются как приращения первообразных (см., например, [4], формула Ньютона–Лейбница).

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, сверху (снизу) графиком непрерывной функции $y = f(x)$ (функции $y = g(x)$) равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = H(b) - H(a),$$

где
$g(x) \le f(x)$ *и* $H'(x) = f(x) - g(x)$ *для всех* $a \le x \le b$.

Б) Вычисление геометрической вероятности. Пусть A – событие, состоящее в том, что точка, наудачу выбираемая из плоской фигуры площадью S, окажется расположенной в её заранее заданной подфигуре Ф площадью $S_Ф$.

Вероятность $P(A)$ события A равна отношению $S_Ф$: S площадей.

Вот краткое объяснение этого факта (см. [4]). Допустим, что всё происходит на мониторе компьютера, все фигуры состоят из одинаковых маленьких квадратиков, пикселей площадью s. Допустим, что данная фигура состоит из N пикселей, а её подфигура Ф состоит из $N_Ф$ пикселей, то есть их площади равны $S' = N \cdot s$, $S'_Ф = N_Ф \cdot s$. Выбор точки фигуры заменим на выбор одного из пикселей. Тогда по классическому определению вероятность

[1] Раздел «Геометрическая вероятность» с 2022 г. включен в ПООП основной школы [1, с. 738].

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

того, что случайно выбранный пиксель окажется среди уже отмеченных $N_Ф$ пикселей равна

$$P = \frac{N_Ф}{N} = \frac{N_Ф \cdot s}{N \cdot s} = S'_Ф : S'.$$

Остаётся перейти к пределу при $s \to 0$ и согласиться с тем, что P стремится при этом к $P(A)$, а $S'_Ф : S'$ – к отношению площадей «настоящих», не пиксельных фигур.

Для событий в испытаниях с конечным числом исходов (элементарных событий) равносильны утверждения «событие A невозможно» и «$P(A) = 0$». Для геометрических вероятностей это уже на так. Например, при случайном выборе точки из круга событие «будет выбрана точка на границе» имеет нулевую вероятность, но вполне возможно.

1. Три угла. В этой модели размеры треугольника не важны, будем работать только с углами. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то переформулируем задачу следующим образом: «Число 180 случайным образом разложили в сумму трёх положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?».

Разберёмся сначала с треугольниками, у которых нет двух равных углов. Пусть $0 < x < y < z$ – упорядоченная по возрастанию тройка (величин) углов треугольника.

Поставим ей в соответствие пару больших слагаемых, то есть точку $(y\,;\,z)$ координатной плоскости Oyz.

Тогда $0 < 180 - y - z < y < z$, то есть

$$\begin{cases} y + z < 180 \\ 2y + z > 180 \\ y < z. \end{cases}$$

Значит, точка $(y\,;\,z)$ лежит выше биссектрисы $z = y$, ниже прямой $y + z = 180$ и выше прямой $2y + z = 180$, то есть лежит внутри треугольника с вершинами $A(0; 180)$, $B(90; 90)$, $C(60; 60)$.

Итак, каждому разложению $180 = x + y + z$ при условии, что $0 < x < y < z$, соответствует точка $(y; z) \in \Delta ABC$ и наоборот, каждая точка $(y; z) \in \Delta ABC$ однозначно «отвечает» за некоторый треугольник с углами $0 < 180 - y - z < y < z$. Поэтому задачу о *случайном выборе разложения* 180 в сумму трёх положительных слагаемых можно трактовать как *случайный выбор точки* из ΔABC, см. рисунок 1. В этом и состоит вероятностная (геометрическая) модель.

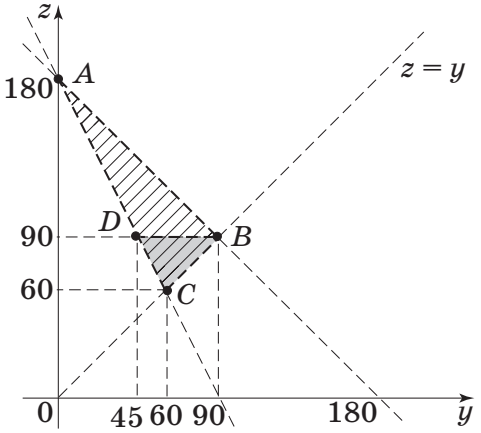


Рис. 1

Остроугольным треугольникам в этой модели соответствуют точки $(y; z) \in \Delta ABC$ для которых $y < z < 90$. Они образуют треугольник с вершинами B, C и $D(45; 90)$. В треугольниках ΔABC и ΔDBC – одна и та же высота, проведённая из вершины B, а сторона DC составляет четверть стороны AC: достаточно заметить, что $y_D = 90$ делит в отношении 3 : 1 отрезок $[y_C; y_A] = [60; 180]$, и применить теорему Фалеса. Значит, искомая вероятность остроугольности случайного треугольника равна

$$P = S_Ф : S = S_{DBC} : S_{ABC} = DC : AC = 0{,}25.$$

В этой модели (внутренние) точки стороны BC соответствуют равнобедренным

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

треугольникам с $x < y = z$, (внутренние) точки стороны AC соответствуют равнобедренным треугольникам с $x = y < z$, а точки стороны AB – вырожденным треугольникам с $x = 0$. От добавления (или удаления) этих сторон площади S_{DBC} и S_{ABC} не меняются, а значит, не меняется и вероятность. Итак, получаем ответ.

О т в е т: $P = 0{,}25$.

А можно ли каждой тройке $0 < x < y < z$ решений уравнения $180 = x + y + z$ поставить в соответствие не пару $(y; z)$, а $(x; y)$ или $(x; z)$? Изменится ли при этом ответ? Ответы на эти вопросы предлагается получить самостоятельно, см. п. 5.

2. Три стороны. Как и выше, начнём со случайного выбора неравнобедренных треугольников, получим ответ для них, а затем объясним, почему добавление равнобедренных треугольников этот ответ не изменит.

Обозначим $a < b < c$ длины сторон неравнобедренного треугольника. Поставим в соответствие такому треугольнику точку $(a; b)$ координатной плоскости Oab. Выпишем ограничения на её координаты. Во-первых, $a > 0$. Во-вторых, $a < b$. В-третьих, $b < c$. Наконец, по неравенству треугольника $a + b > c$ (два других неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$ – следствия $a < b < c$). Получаем систему из четырёх линейных неравенств относительно переменных a и b с параметром c. Множество её решений в координатной плоскости Oab – это треугольник с вершинами $A(0; c)$, $B(c, c)$ $C\left(\frac{c}{2};\frac{c}{2}\right)$, а точнее – множество всех его внутренних точек (см. рисунок 2). Его площадь S равна $\frac{c^2}{4}$. Итак, построена вероятностная (геометрическая) модель случайного выбора треугольника с наибольшей стороной c – *это случайный выбор точки* $(a; b) \in \Delta ABC$.

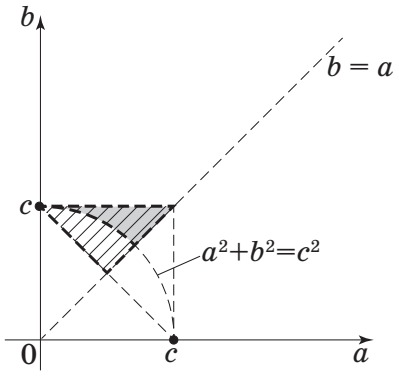


Рис. 2

А какие точки $(a; b)$ в этой модели соответствуют остроугольным треугольникам? Так как c – наибольшая из сторон треугольника, то его остроугольность равносильна остроте угла, противолежащего c, или же, по теореме косинусов, выполнению неравенства $a^2 + b^2 > c^2$. В координатной плоскости Oab множество решений неравенства $a^2 + b^2 > c^2$ – это все точки, лежащие вне круга $\{(a; b): a^2 + b^2 \le c^2\}$. Площадь S_Φ фигуры Ф, состоящей из точек треугольника ABC, лежащих вне этого круга, можно найти как разность площадей треугольника OAB и кругового сектора с центральным углом $\frac{\pi}{4}$:

$$S_\Phi = \frac{c^2}{2} - \frac{\pi c^2}{8} = \frac{c^2}{4}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)S,$$

$$P = \frac{S_\Phi}{S} = 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}4292.$$

В этой модели (внутренние) точки стороны AB соответствуют выбору треугольников, в которых $a < b = c$, точки стороны BC – треугольников, в которых $a = b < c$, вершина B соответствует выбору равностороннего треугольника, а точки стороны AC соответствуют вырожденным треугольникам, в которых $a + b = c$. От учёта или не учёта всех (или некоторых) из этих сторон площади не изменятся и значит,

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

не изменится и вероятность.

Итак, в этой модели с выбором трёх сторон вероятность остроугольности случайного треугольника чуть ли не в два раза больше, чем в предыдущей модели с выбором трёх углов.

Ответ: $P = 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0{,}4292.$

Если действовать так же, как в п. 2, но рассматривать систему четырёх линейных неравенств относительно переменных a, c с параметром b, то получится *другая* геометрическая модель случайного выбора трёх сторон тре-угольника. Ответ для вероятности выбора остроугольного треугольника также будут *другим*, примерно 0,2956 (см. подробнее п. 5).

3. Три стороны +.

Приведём ещё один способ. В нём в качестве параметра выберем не одну из сторон, а полусумму, например, двух больших сторон, $d = \frac{b+c}{2}$.

А именно, для каждого положительного значения параметра d числа a, b, c зададим равенствами $a = d - y$, $b = d - x$, $c = d + x$ для $x > 0$ и $y > 0$. Тогда условия $a > 0$, $a < b$, $b < c$, $a + b > c$ приведут к таким неравенствам относительно переменных x, y:

$$0 < x < y \text{ и } (d - y) + (d - x) > d + x,$$
$$y + 2x < d.$$

В плоскости Oxy возникает треугольник с вершинами

$$O(0;\ 0),\ A(0;\ d),\ B\left(\frac{d}{3};\frac{d}{3}\right).$$

Получается другая вероятностная (геометрическая) модель выбора треугольника – *это случайный выбор точки* $(x;\ y) \in \Delta OAB$. Ясно, что $S = S_{OAB} = \frac{d^2}{6}$.

Равенство $a^2 + b^2 = c^2$ выглядит так:

$$(d + x)^2 = (d - y)^2 + (d - x)^2,\ x = \frac{(d-y)^2}{4d}.$$

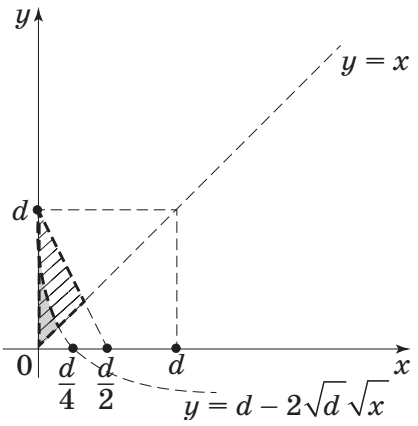


Рис. 3

Ниже прямой $y = d$ получаем ветвь параболы $y = d - 2\sqrt{d}\sqrt{x}$, соединяющую точки A и $C\left(\frac{d}{4};0\right)$. Эта ветвь пересекает биссектрису $y = x$ при

$$x = d - 2\sqrt{d}\sqrt{x},$$
$$x = (\sqrt{2} - 1)^2 d = (3 - 2\sqrt{2})d.$$

Неравенству $a^2 + b^2 > c^2$, соответствующему остроугольности треугольника со сторонами $a < b < c$, удовлетворяют точки ниже параболы. Действительно, при малых x и y неравенство $(d + x)^2 < (d - y)^2 + (d - x)^2$, очевидно, верно. Значит, искомая вероятность равна

$$P = \frac{S_\Phi}{S} = \left(\int_0^{(3-2\sqrt{2})d} (d - 2\sqrt{d}\sqrt{x} - x)dx\right) : \frac{d^2}{6} =$$

$$= 6\left(dx - 2\sqrt{d}\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{(3-2\sqrt{2})d} : d^2 =$$

$$= 6\left((3 - 2\sqrt{2}) - \frac{4}{3}(3 - 2\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2} - 1) - \frac{17 - 12\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 23 - 16\sqrt{2} \approx 0{,}3726.$$

Итак, при разных геометрических моделях случайного выбора трёх сторон треугольника могут получаться разные ответы. В данном случае ответ такой.

Ответ: $P = 23 - 16\sqrt{2} \approx 0{,}3726.$

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

4. Две стороны и угол между ними. В этой модели также потребуется интегрирование, только вместо $y = \sqrt{x}$ придётся интегрировать тригонометрическую функцию $y = \cos x$. Ответ получается значительно меньше всех предыдущих.

Обозначим $a < b < c$ длины сторон неравнобедренного треугольника и t – величину в радианах угла между двумя меньшими сторонами. Этот угол наибольший и значит, $\frac{\pi}{3} < t < \pi$. Треугольник будет полностью задан, если кроме b и t выбрать меньшую сторону a с ограничением $0 < a < b$. При этом следует учесть, что сторона, противолежащая углу t, должна быть наибольшей: $c^2 = a + b^2 - 2ab\cos t > b^2$, $a > 2b\cos t$.

В системе координат Ota уравнение $a = 2b\cos t$ задаёт обычную косинусоиду, монотонно убывающую от b к 0 при $\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$. Итак, в этой модели случайный выбор тупоугольного треугольника отождествляется со *случайным выбором точки* $(t; a)$ из прямоугольника $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \times (0; b)$, а случайный выбор остроугольного треугольника – с выбором точки $(t; a)$ из криволинейного треугольника правее вертикали $t = \frac{\pi}{3}$, левее вертикали $t = \frac{\pi}{2}$ выше графика $a = 2b\cos t$ и ниже горизонтали $a = b$. Площадь прямоугольника $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \times (0; b)$ равна $\frac{\pi}{2}b$, а площадь «криволинейного» треугольника равна

$$S = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (b - 2b\cos t)dt =$$

$$= b\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\right)b.$$

Значит, вероятность остроугольности в этой модели равна

$$P = \frac{\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\right)b}{\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\right)b + \frac{\pi}{2}b} \approx$$

$$\approx \frac{(0{,}5236 + 1{,}732 - 2)}{(0{,}5236 + 1{,}732 - 2) + 1{,}5708} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}2556}{1{,}8264} \approx 0{,}14.$$

Ответ: $P \approx 0{,}14$.

5. Для самостоятельного решения. Всюду ниже каждому неравнобедренному треугольнику поставлена в соответствие некоторая точка координатной плоскости или пространства. Координаты такой точки – это углы (проекты 1–3) или длины сторон (проекты 4–6) треугольника. В каждом проекте через M обозначено множество всех соответствующих точек координатной плоскости (пространства), M_0 – множество точек, соответствующих остроугольным треугольникам, и P – вероятность того, что наудачу выбираемый треугольник окажется остроугольным.

Проект 1[2]. Треугольнику с углами $0 < x < y < z$ поставлена в соответствие точка $(x; y)$ координатной плоскости Oxy. Докажите, что:

а) M – это внутренние точки ΔOAB (см. рисунок 4);

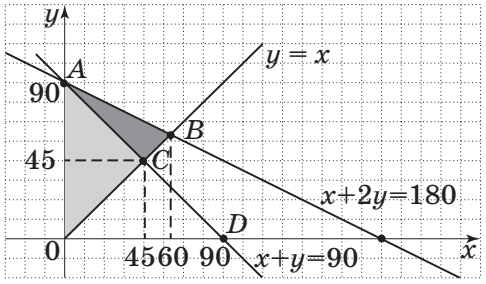


Рис. 4

[2] Проекты 1–3 доступны ученикам 8–9 классов, остальные – для старшеклассников.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

б) M_0 – это внутренние точки ΔABC;

в) $P = 0{,}25$.

Проект 2. Треугольнику с углами $0 < x < y < z$ поставлена в соответствие точка $(x; z)$ координатной плоскости Oxz. Докажите, что:

а) M – это внутренние точки треугольника с вершинами $A(0; 90)$, $B(0; 180)$, $C(60; 60)$ (см. рисунок 5);

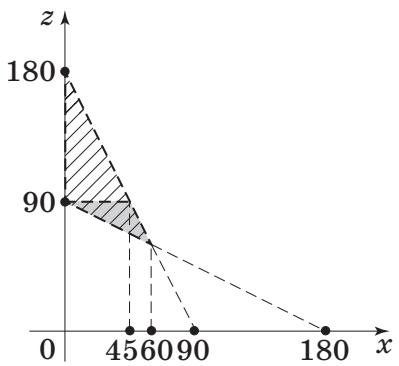


Рис. 5

б) M_0 – это внутренние точки треугольника с вершинами A, C, $D(45; 90)$;

в) $P = 0{,}25$.

Проект 3. Треугольнику с углами $0 < x < y < z$ поставлена в соответствие точка $(x; y; z)$ координатного пространства $Oxyz$. Докажите, что:

а) M – внутренние точки треугольника с вершинами $A(0; 0; 180)$, $B(0; 90; 90)$, $C(60; 60; 60)$;

б) M_0 – внутренние точки треугольника с $B(0; 90; 90)$, $C(60; 60; 60)$ $D(45; 45; 90)$;

в) $P = 0{,}25$.

Проект 4. Треугольнику периметром $2p$ и со сторонами $0 < a < b < c$ поставлена в соответствие точка $(a; b)$ координатной плоскости Oab.

Докажите, что:

а) M – это точки треугольника с вершинами $A\ (p; 0)$, $B\left(\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$, $C\left(\frac{2p}{3}; \frac{2p}{3}\right)$ (см. рисунок 6);

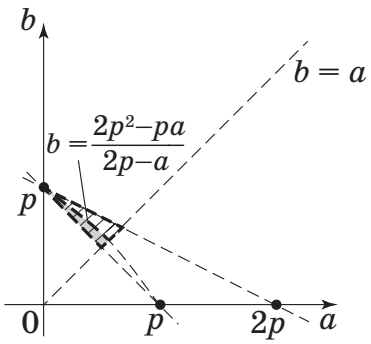


Рис. 6

б) M_0 – это точки данного треугольника, лежащие ниже графика гиперболы $b = \frac{2p^2 - 2pa}{2p - a}$; a – переменная, p – параметр;

в) $P = 12ln\,2 - 8 \approx 0{,}3178$.

Проект 5. Треугольнику со сторонами $0 < a < b < c$ поставлена в соответствие точка $(a; c)$ координатной плоскости Oac. Докажите, что:

а) M – это точки треугольника с вершинами $A(0; b)$, $B(b; 2b)$, $C(b; b)$ (см. рис. 7);

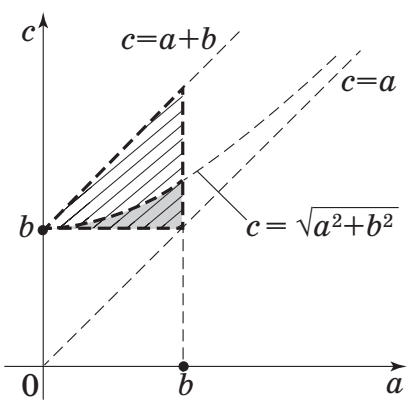


Рис. 7

б) M_0 – это точки данного треугольника, лежащие ниже графика гиперболы $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; a – переменная, b – параметр;

в)

$$\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + d^2} + \frac{d^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})\right)' = \sqrt{x^2 + d^2};$$

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

г) $P = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2 \approx 0{,}2956.$

Проект 6. Треугольнику со сторонами $0 < a < b < c$ поставлена в соответствие точка $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, где $a = d - x$, $b = d + x$, $c = d + y$, $d = \dfrac{a+b}{2}$. Докажите, что:

а) M – это точки треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; d)$, $B(d; d)$;

б) M_0 – это точки этого треугольника, лежащие ниже графика гиперболы $y = \sqrt{2(x^2 + d^2)} - d$;

в) см. в) Проекта 5;

г) $P = \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - 1 \approx 0{,}2464.$

Проект 7. (Технически сложнее остальных примеров.) Треугольнику со сторонами $0 < a < b < c$ поставлена в соответствие точка $(t; b)$ координатной плоскости, где t – наименьший из углов. Докажите, что:

а) M – это фигура правее оси ординат, ниже прямой $b = c$ и выше графика $b = \dfrac{c}{2\cos t}$;

б) M_0 есть часть этой фигуры выше косинусоиды $b = c\cos t$;

в) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$;

г) $P \approx 0{,}3146.$

Проекты 8. Можно, например, в Проекте 4 рассмотреть точки $(a; c)$ или точки $(b; c)$. Или же, и в п. 3, и в Проекте 6 рассмотреть случай, когда d делит соответствующий отрезок не пополам, а в отношении, скажем, 1 : 2, 2 : 1, 2 : 3 и т.п. Более того, можно рассмотреть случай, когда d делит отрезок в отношении t : 1, где t – любое положительное число.

В целом, оказывается, что вероятность остроугольности случайного треугольника может быть любым числом из промежутка $\left(0; 2 - \dfrac{\pi}{2}\right]$, в зависимости от выбора математической модели понятия «случайный треугольник». Вопрос о том, может ли эта вероятность быть больше $2 - \dfrac{\pi}{2}$, *открыт*.

Список источников

1. ПООП ООО, Сайт «Единое содержание общего образования», 2002, https://edsoo.ru/Primernaya_osnovnaya_obrazovatelnaya_programma_osnovnogo_obschego_obrazovaniya.htm.

2. *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М.: Наука, 1975. 112 с.

3. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990. 240 с.

4. *Мордкович А.Г., Семёнов П.В.* Алгебра и начала математического анализа, 11 класс. Часть I, Учебник. М.: Мнемозина, 2020. 311с.

5. *J. P. Guilford.* The Nature of Human Intelligence. N.Y., 1967.

6. *Альтшуллер Г.С.* Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1991. – 225 с.

Статья поступила в редакцию 04.08.2022.
Принята к публикации 19.09.2022.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Математика в школе 2023. №1. С. 41–51 Mathematics at school 2023. №1. P. 41–51

РАЗМЫШЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО РЕПЕТИТОРА

REFLECTIONS OF A REGIONAL TUTOR

Научная статья
УДК: 372.851

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_1_41

А.В. Якубов, канд. пед. наук, доцент, ведущий научный сотрудник КНИИ им. Х.И. Ибрагимова РАН (г. Грозный), ayakubov@mail.ru

A.V. Yakubov, PhD (in Pedagogy), Associate Professor, Leading Researcher of the Kh.I. Ibragimov Research Institute of the Russian Academy of Sciences (Grozny), ayakubov@mail.ru

Аннотация: в статье излагается мнение автора, занимающегося репетиторством, по ряду вопросов относительно состояния, в первую очередь, регионального математического образования в условиях «разрастающейся» цифровизации общества и аттестации знаний учащихся в виде ЕГЭ, ОГЭ. Приводятся примеры или факты из работы репетитора

Abstract: the article presents the opinion of the author, who is engaged in tutoring, on a number of issues regarding the state, first of all, of regional mathematical education, in the context of the growing digitalization of society and the certification of students' knowledge in the form of the Unified State Exam, OGE. Examples or facts from the tutor's work are given

Ключевые слова: репетитор, методические приёмы репетитора, репетитор ЕГЭ профильного уровня, задачи репетитора, результаты работы репетитора, особенности работы репетитора

Keywords: tutor, methodical techniques of the tutor, the tutor of the Unified State Exam of the profile level, the Unified State Exam, the tasks of the tutor, the results of the tutor's work, especially the work of the tutor

© Якубов А.В. 2023

Репетитор (от лат. **Repetitor** «тот, кто повторяет») – преподаватель, дающий частные уроки на дому или дистанционно. Может проводить как индивидуальные, так и групповые занятия по различным дисциплинам.

Репетитор м. 1. Преподаватель, который проводит дополнительные – обычно индивидуальные и платные – занятия, помогая усвоить необходимые знания. 2. Опытный специалист...

Это определения из Википедии, незаменимого, удобного и доступного спутника современного человека. Не всегда надёжного.

Из второго определения термина отметим: «помогая усвоить необходимые знания», что далеко не всегда верно, особенно про «необходимые».

Данная статья задумывалась давно, как минимум, больше года. За это время в Интернете появилась статья с таким названием: «Минпросвещения сможет разрушить рынок репетиторства в стране» [1]. В этой статье связывают проблему с двумя компонентами: дефицит учителей и рост рынка репетиторов, которые ***не платят налоги***.

Я бы хотел рассмотреть проблему с иных позиций, применительно к математике.

Вот цитата из статьи покойного академика Л.С. Понтрягина (1908–1988), опу-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

бликованной в 1980 году: «… не отказ ли от того положительного, что было раньше в школьном преподавании, способствовал развитию «чёрного рынка» репетиторства с его спекулятивными ценами – явления возмутительного, несовместимого с нравственными принципами нашего общества» [2]. Применительно к содержанию цитируемого абзаца укажу и такой интересный заголовок статьи [3]: «Почему в Израиле учатся по старым советским учебникам?». То есть отечественные учебники, по которым преподавали раньше, оказались там востребованными сейчас.

Но как резко, за какие-то 20–30 лет, нравственные принципы поменялись!

Спекулятивные цены – действительно имеют место у репетитора. В сравнении с заработной платой учителя, да и вузовского работника, доход выше. Причём ему не надо ходить на всевозможные педсоветы, писать планы, отчёты и т.д., плюс участие в мероприятиях из-за специфики региона.

В чём выражался «отказ от того положительного, что было раньше в школьном преподавании»?

Статья была написана академиком Л.С. Понтрягиным в период так называемых «колмогоровских реформ». В программу школ были введены новые разделы математики, изменена концепция программы на теоретико-множественный подход, и что больше всего, на взгляд автора, оказало влияние негативного характера на систему образования – это все-обуч.

Подход не выдержал испытание и закончился провалом, начали появляться новые учебники, меняться программы, многие из т.н. учителей старой закалки, «выросшие и состоявшиеся на А.П. Киселёве», покинули школу. А родители, пытающиеся добиться полного усвоения программ, стали прибегать к услугам репетиторов. И появились «случаи», перешедшие в «явление»…

Подготавливая статью, я планировал, что буду рассматривать содержание программ и экзаменационных материалов разных лет и их изменения. Например, вычислительные задания экзамена по математике.

1985 год, задания выпускного экзамена по математике для 8-го класса (нынешний 9-й).

Выполните действия:

а) $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{12}(1{,}25-1{,}64:0{,}8)$;

б) $(3{,}05-2{,}1253{,}2):\frac{5}{6}+1\frac{1}{6}$ [4, с. 5].

Из КИМов (И.В. Ященко).

ОГЭ–2019.

1-е задание.

Найдите значение выражения

$$\left(\frac{5}{6}+1\frac{1}{10}\right)24.$$

ЕГЭ–2019. Базовый уровень.

Найдите значение выражения

$$(-8{,}68):\left(3\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right).$$

Читатель сам сможет оценить уровень сложности заданий, между которыми временной интервал в 35 лет, а также формулировку задания.

Репетитор должен работать с учащимися, отталкиваясь от имеющегося уровня, он не может влиять на содержание программ, поэтому я отказался от анализа этого аспекта вопроса. Тем более, «традиции составления программ по математике утрачены» [5].

Последствия катаклизмов начала 90-х годов привели к фактическому и полному развалу школьного, и не школьного тоже, образования в республике. Если к этому добавить влияние многих непродуманных «реформ» федеральных органов, можно

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

представить всю неприглядную картину в образовании в стране и в республике, в частности.

До развала СССР знания детей сельских школ республики, в основной массе, серьёзно уступали городским, в том числе и по естественным причинам. У них и нагрузка по учебному плану была выше, нежели у городских сверстников, и среда общения, в отличие от городских школьников, не соответствовала языку обучения и т.д. Теперь же в условиях серьёзного дефицита профессионализма в квалификации учительской среды, руководства в сфере образования и, как сказано выше, резко изменившихся аксиологических параметров в обществе качество образования настолько снизилось, что сегодня нет особой разницы в уровне знаний сельских и городских школьников.

В нулевые годы, после войны, школы республики восстанавливались. Однако освещение состояния дел и действий в этом направлении имело странный характер. Республика, лишившаяся многих замечательных учителей, в частности математики, вдруг стала «лидером» в образовательном пространстве страны [6]. Каждый год её представители входили в пятерку финалистов всероссийского конкурса «Учитель Года». В 2007 году одна из школ республики «вошла» в десятку лучших школ страны. Каждый 15-й выпускник получал золотые медали. Треть учителей школ республики имели высшую квалификационную категорию. Так бы и продолжалось, если бы не введение ЕГЭ.

В 2008 году «лидировавшее» руководство министерства сменилось. Новое организовало пробный ЕГЭ, т.к. в 2009 году надо было в обязательном порядке участвовать в ЕГЭ. Результатом экзамена по математике, в котором приняли участие 1500 учащихся 50 лучших(!) школ республики, были положительные отметки лишь у 17(!) участников (13 – «3», 4 – «4»). Руководство поняло реальное состояние дел. При всех действиях министерства, которое руководством федерального ведомства (в 2011 году министр А.А. Фурсенко посетил республику) было отнесено к «объективности» организации и проведения экзамена, результаты давали около 20% неудовлетворительных отметок. На самом деле это было пределом возможности учительского корпуса того периода.

Появление в 2013 году в качестве руководителя местного министерства (министры меняются часто, а школа консервативна) человека, имевшего многолетний и фактический опыт работы в школе, принявшего жёсткие меры по объективному проведению ЕГЭ, выявило другую картину и показало относительно реальный уровень знаний. В 2015 году более 80% участников ЕГЭ не сдали профильный и более 55% – базовый экзамен по математике. В числе несдавших ЕГЭ впервые были и дети крупных местных чиновников.

Введённое в том 2015 году разделение экзамена по математике на два вида вызывает вопросы. Можно было бы их совместить, изменив оценочные критерии, т.к. количество совпадающих заданий значительно. А то детей делят на «умных» и… Но это не проблема репетитора.

Совершенствование учебно-воспитательного процесса в школе, причём на той кадровой базе, которая досталась новому министру, требовала длительной и многоплановой работы. Принятые этим новым руководством местного министерства меры по повышению квалификации учителей требовали много времени. Уровень подготовленности учителей – низкий, несмотря на старания руководства от школы до министерства.

Результаты нужно было улучшать.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

«Схемы» не работали или пресекались. Тогда и возникла потребность в репетиторах. В последующие годы репетиторство стало системой, позволившей постепенно улучшать республиканские показатели на ЕГЭ по уменьшению количества несдавших экзамен.

Непосредственно в школах республики, насколько мне известно, также налажен конвейер по проведению платных дополнительных занятий с учителями для успешной сдачи ЕГЭ. Фактически школа, по крайней мере её старшие классы, перешла на платную основу получения образования. Дополнительные занятия учителей в школе оплачиваются родителями. Старшие классы стали востребованы среди отдельной категории учителей-предметников. Правда, по математике в школах республики как на уроке, так и на внеурочных занятиях, в основном, занимаются подготовкой к сдаче ЕГЭ только базового уровня.

Заниматься репетиторством я начал ещё до того, как ушёл из педагогического вуза, где проработал почти два десятилетия. И с 2018 года репетиторство стало не дополнительным, а основным видом заработка.

Читателю может быть интересно, почему в заголовке присутствует термин «региональный»?

Потому что определенные факты вряд ли характерны для всех регионов.

Работу приходится вести с детьми, проживающими в мононациональной среде, обучающихся на неродном языке, учебная нагрузка которых на четверть больше сверстников, обучающихся на своем родном языке и проживающих в той же языковой среде.

Другое отличие регионального репетитора возможно в том, что перед репетитором большинством родителей не ставится задача устранения пробелов в системных знаниях.

Да и ситуации с подготовкой к экзаменам бывают разные. Приведу пример.

Апрель 2021 года. Попросили подготовить группу из 4-х человек к сдаче ОГЭ по математике. Скрепя сердце, согласился.

Знаний – «ноль». Первое занятие. Тема «Числа и действия». Объяснил, показал. К следующему занятию попросил выучить действия умножения, деления в столбик и наизусть знать квадраты чисел от 1 до 30 и кубы от 1 до 10.

Второе занятие. Что-то сделано. Ровно столько, что нельзя сказать, дома не работали. Не более. Снова объясняю действия с числами, дробями. Даю задание на дом.

Очередное занятие – задания все выполнены. Прошу показать у доски. «А я с калькулятором решала». Прекращаю занятия с этой группой.

Какие цели ставил перед собой я, и какие задачи ставились передо мной родителями, учащимися?

Научить самостоятельно учиться в условиях новых возможностей, предоставляемых современными технологиями, с соблюдением эргономических параметров – вот главная, на мой взгляд, задача любого современного репетитора.

По большому счёту, в жизни основной массе выпускников математические теоремы и формулы не понадобятся вовсе, значительной части – на определённом уровне, лишь единицы будут нуждаться в основательной подготовке.

По логике, основной контингент учащихся должен учить учитель математики в школе. Репетитор должен работать лишь со второй и третьей категориями учащихся. Причём для третьей категории могут привлекаться специалисты высшей квалификации, в т.ч. и вузовские.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Изначально мною ставилась задача качественного усвоения программы по математике, но её решение оказалось нереальным из-за уровня знаний учащихся. Показать внутреннюю гармонию математики как науки и её гармонию со всеми остальными науками не получилось. Повторять теорию – тоже. Количество проводимых занятий явно не соответствовало объёму материала. Многие родители, может быть, и хотели бы проводить по три и более занятий в неделю, но ограничиваются двумя. Скорее всего, из-за финансовых проблем. Хотя стоимость занятий в нашем регионе в разы ниже столичных.

Многолетняя практика подготовки к ЕГЭ показывает, что «сильные» учащиеся всё больше и больше пользуются социальными сетями. Это и дешевле, и более доступно, поскольку родители таких учащихся уже могут не платить ни репетиторам – заработную плату, ни государству – часть налогов, направляемую на образование.

В этих условиях задача репетиторов по набору подготовленных учащихся, получающих высокие баллы, сильно усложняется. В то же время, в условиях жёсткой организации проведения ЕГЭ, всё больше родителей слабых учащихся пытаются решить накопившиеся проблемы с помощью репетиторов. Правда, заботиться об этом начинают почему-то в 11 классе и лишь во втором полугодии учебного года.

Вопрос о решении задач второй части профильного ЕГЭ, повышенного уровня сложности, также изначально не стоял, так как республика, по сути, замыкала страну по результатам сдачи ЕГЭ по математике. Это показали первые результаты проверки.

Приходилось и приходится заниматься формированием умений выполнять определённые действия по заранее заданному алгоритму.

Впрочем, в 2016 году у меня была группа из 3 человек, которым нужно было отточить свой уровень. С ними проводилось по три занятия в неделю. Если занятия срывались, то лишь по моей вине.

В 2017 году двое учащихся из этой группы сдали математику на 94 и 96 баллов (лучшие результаты того года в республике и, пока, последующих тоже) и затем оба подтвердили их на внутренних испытаниях в МГУ. Результаты этой группы: один остался учиться в МГУ, двое поступили в Финансовый университет (ФУ) при Правительстве РФ. Все на бюджетной основе. Студент из ФУ получал именную стипендию. За время учёбы он опубликовал около 20 статей, 4 из которых – «ВАКовские», 2 – индексируемые WoS, объёмом более 4 печатных листов. В 2021 году все трое успешно окончили вузы, причём двое – с отличием, и поступили в магистратуру также на бюджетной основе. Больше таких групп, к сожалению, не было. Но для меня это было хорошей рекламой.

К концу учёбы в школе, как сказано выше, родители начинают заботиться об успеваемости детей. На первой встрече я объясняю учащимся и их родителям, что ни один репетитор не сможет устранить все пробелы в знаниях по математике, образовавшиеся в результате плохого освоения программного материала за почти 2000 уроков, выделяемых государством школе по учебному плану этому предмету. И особая роль при подготовке к ЕГЭ лежит в ответственном подходе детей и, что немаловажно, родителей тоже.

Работать репетитору приходится в условиях цейтнота из-за **различного** уровня подготовленности учащихся и **большого** объёма работы. Поскольку пре-

⦿ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

подавание математики в школе построено по спиралевидной траектории, репетитор вынужден подниматься по самодельной лестнице, причём абсолютно не будучи уверенным в надёжности каждой её ступеньки (как предыдущей пройденной, так и последующей). При этом исходный план работы должен по ходу подготовки регулярно корректироваться.

Постоянной проблемой является проверка и оценка проведённой учеником работы дома. Вести учёт не получается. Впрочем, это не получалось и во время педагогической работы в школе. Желание уделить больше времени объяснению и закреплению мешает проводить проверку проделанной работы. Хотя это и есть серьёзный недостаток. Учащиеся выпускных классов загружены не меньше, чем я. Школа не **обеспечивает** знания, а **только**, как минимум, аттестат. Поэтому **школьникам** приходится бегать по репетиторам практически по всем предметам, в том числе и **с целью** подстраховки. Вместе с тем, им необходимо посещать школу и выполнять текущие требования школьной жизни.

Методические приёмы, оставшиеся ещё с периода работы в школе, которые применялись и применяются на занятиях, таковы.

1. Если ученик опоздал, то право сесть он получает лишь при ответе на вопрос. Вопрос может быть любым, будь то геометрическая или тригонометрическая формулы, свойства, теоремы. Правило распространяется и на меня. С удовольствием спрашивают при моём опоздании и меня. А в той особой группе, которая была в 2016–2017 учебном году, специально подготовили для меня вопрос об объёме шарового сегмента… Не помнил. Поймали!

Дома, посмотрев справочник, я понял, что меня могли поймать и на объёмах шарового слоя, сектора… «Нечестно» по отношению ко мне они поступили. Я всегда спрашивал только то, что использовалось при решении задач ЕГЭ. Этот приём несколько расслабляет и создает комфортную, непринуждённую обстановку.

2. Проверка внимательности. При выполнении задания специально допускается ошибка, и потом, если не заметят, то проводится разбор с «укором». Пока срабатывает. За каждым моим вычислением, которое обязательно сопровождается комментированием, выясняется, следят основательно.

В российской школе неудовлетворительно преподаётся геометрия. Печально, но факт. Об этом много пишет наш журнал, изменения в сторону улучшения малы.

«У нас на уроках геометрии учитель выводит на экран текст учебника, и мы весь урок записываем под диктовку»,– не знаю, соответствует ли это высказывание одного из моих учеников действительности. Хотя и похоже на правду.

Удивляет и другой вариант организации преподавания геометрии в школе. Один месяц изучают алгебру, затем месяц геометрию. И так повторяется. Неясно, из каких посылок исходят.

Есть и такие высказывания: «Мы на уроках учебниками вообще не пользуемся, мы готовимся к ЕГЭ».

Проблемы детям создают и КИМы от разработчиков. В них встречаются ошибки в ответах и в условиях. Журнал опубликовал мою статью об этом [8]. Но даже в [10] они не исчезли. Например, вариант 16, 4-е задание, неверное условие: tg угла в 3-й четверти у авторов отрицателен [10, **с. 71]; вариант 35, 2-е задание – не**верный ответ [10, с. 172]. Как объяснить это детям?

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Сегодня много источников информации. Надо быть готовым к «провокации».

Вот и сегодня принесли следующее задание из Интернета с сайта «Решу ЕГЭ».

Решить неравенство:

$$\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0.$$

В предлагаемом на сайте решении проводится разъяснение, рассматривается область допустимых значений (ОДЗ), делаются длинные выкладки и затем вывод. Мне это решение не нравится.

Я предлагаю использовать формулу перехода к другому основанию, естественно, с учетом ОДЗ, и получить дробь, из которой решение при использовании метода интервалов проглядывает явно и быстро. *Одна из задач репетитора – научить находить и исправлять ошибки при неправильном решении.*

Выясняется, что некоторые учащиеся не владеют элементарными понятиями. Как они добрались до 11-го класса, ведь их отсекают после 9-го класса, причём довольно жёстко? В 10-е классы в республике с определённого времени учащиеся допускались лишь в результате жёсткого выдавливания слабо успевающих детей. К примеру, в Урус-мартановской МБОУ СОШ № 7 в 2019 году основную школу окончили и сдали «успешно» ОГЭ (необъективность оценки знаний на ОГЭ сегодня признаёт и Рособрнадзор) учащиеся пяти 9-х классов, почти 150 человек. В 2021 году к сдаче ЕГЭ из них в этой школе осталось около 20 человек.

Необходимо оснастить кабинет цифровыми технологиями, тогда будет существенная экономия времени. В Ютуб я не знаю репетиторов, постоянно использующих цифровые технологии. При этом свободного времени не бывает ни у кого из них. Все так работают.

Но у меня не получается качественно отобразить те или иные графики, фигуры, сечения. Надо изготовить макеты к заданию по стереометрии? Или все же делать это с помощью интерактивной доски? Может, арендовать такую доску у вуза или школы? Пока нет решения.

При использовании видео-уроков не всегда есть возможность проверки освоенности материала, оперативной обратной связи.

Над такими проблемами репетиторам приходится думать постоянно.

Нынешняя ситуация приводит к тому, что государство в сфере образовании ориентируется на форму, а содержание оплачивает родитель на стороне.

Провалов у меня не было. Ни у одного, до 2020 года. В тот год – год самого страшного периода ковида – один из учеников как-то на занятии спросил: «Были ли у Вас несдавшие?» Я ответил, что нет. И он, как в фильме «Операция Ы», сказал: «Будут». Действительно, в тот год появился один. Хотя этот, несдавший ЕГЭ ученик, перед экзаменом дал мне расписку, что в случае невыполнения какого-то задания первой части вся вина лежит на нём самом.

Кстати, о расписках. В период работы в вузе основная моя нагрузка была на старших курсах. Я, как зав. кафедрой, входил в состав членов ГЭК. И появлялись студенты, которые, скажем мягко, не были обременены знаниями. Являясь студентами, они добрались до 5 курса, а как – история умалчивает. Перед выставлением положительной оценки я с таких студентов брал расписки, что они… не пойдут работать в школу. Только затем выставлял «3». Помнил свою работу завучем в школе и проблемы, когда появлялись такие горе-учителя без всякой подготовки. А так, в жизни, они, возможно, смогут найти себя в других направлениях.

Выработанная мною стратегия и так-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

тика работы по устранению некоторых упущений общеобразовательной школы за ограниченный промежуток времени обеспечивает хоть и минимальный, но положительный результат. В отдельных же случаях результат получался очень хороший.

Если я объясняю материал, хочется раскрыть его сразу нескольким учащимся одновременно. Правда, лучше, когда их не более пяти. Но не все дети и их родители желают этого. Есть и те, кто хочет заниматься только индивидуально.

Придерживаюсь определённой методики организации и проведения занятий в течение учебного года.

1. Практически всегда есть проблемы с выполнением арифметических действий. На 1–3 первых занятиях, в зависимости от уровня подготовленности группы, занимаемся решением заданий на вычисления из сборника М.И. Сканави [7].

2. В течение всего периода поддерживается постоянный контакт с родителями. Родители, перед каждым занятием, регулярно высылают мне скрины результатов решения заданий сайта «Решу ЕГЭ» своих детей. Они видят динамику результатов, а я ещё и проблемы.

3. Последовательно проводится решение заданий КИМов по параллели, то есть все задания 1 из [8, 9], затем 2-е и т.д. до 11-го (с 2021–2022 учебного года).

4. В начале каждого занятия первые 5–7 минут выделяются для самостоятельного выполнения выборочных заданий с сайта **math100.ru. Результаты анализи**руются.

5. Даются ответы на вопросы учащихся, возникшие, в том числе, и по домашним заданиям.

6. Использование сайтов, особенно «Решу ЕГЭ», помогает сильно. После окончания решения заданий первой части ещё неделю-другую они отрабатывают их дополнительно.

7. Затем осуществляется переход к заданиям второй части. Теперь надо следить и за решением, и за оформлением решения. Количество решаемых задач на занятии сокращается. Для группы в 2016–2017 году этот период начался с ноября 2016 года, то есть через 2,5 месяца. Для последующих групп он начинался в марте-апреле. И это было хорошо.

Теперь о некоторых, скажем так, «сторонних» моментах работы репетитора.

Появилась моя бывшая студентка, имеющая диплом бакалавра по профилю «Математика», пожелавшая переехать в Москву для занятий репетиторством. «Там, говорят, хорошо зарабатывают учителя и репетиторы». Но при этом нужно выдержать вступительные испытания на материалах ЕГЭ и получить не менее 92 баллов. После первого занятия я фиксирую её номер и даю ей имя «ЕГЭ 62 балла», так как по тому уровню, который она показывает, 62 балла – предел её возможностей, по крайней мере, на данном этапе. Проведя с ней около десяти занятий, мы расстались. Позже я узнал, что она ездила в Москву, и, как и ожидалось, вернулась ни с чем.

Наиболее ответственным для репетитора является экзаменационный период.

Связь поддерживается со всеми подопечными. Завтра экзамен, я шлю каждому ученику SMS-ки:

«На экзамене: 1. Спокойствие, спокойствие и ещё раз спокойствие 2. Решить задания первой части. 3. Проверить, отдохнуть и перепроверить их ещё раз. Решать задания 12 и далее всё, что решается. Как можно больше».

Первым пунктом поставил «спокойствие» потому, что во время сдачи экзамена в 2018 году один мой ученик допустил

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

4 досадные ошибки в заданиях первой части из-за того, что переволновался. Хотя подобные задания на занятиях в большинстве случаев им решались в уме и без ошибок.

День экзамена. 14.00. Первый звонок.

«Решила все 12 первой части и 4 задания второй части», – в принципе неплохо. Но ещё надо знать, правильно ли эти задания выполнены. Позже подтвердилось, что не все.

Через 10 минут – новый звонок. «Я тоже решил задания 1–12».

Следующий звонок обрадовал больше всего.

«Думаю, что прошёл». А это уже хорошо. Я получил ученика, по сути, без знания таблицы умножения. Такие выпускники – не редкость в республике. И, если есть проходные баллы, то в республике без особых проблем можно поступить в вуз.

Звоню сам. Девочка явно недовольна своим результатом. Не получилось решить задания второй части. Хотя в последние два-три месяца она явно прогрессировала в понимании сути таких заданий и в способах их решения.

Ждём официальных результатов. И вот они появились. Проверяю у своих подопечных всё.

Важен каждый балл. Поэтому, рассматривая одну из работ, подаём на апелляцию.

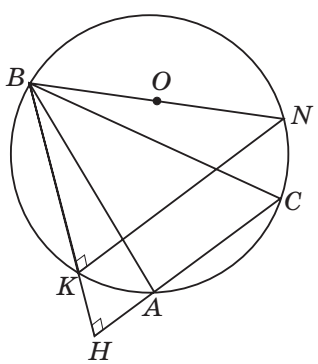
Я не согласен с отказом экспертов. Один балл вполне можно было дать. Но решаю не я.

2021 год. ЕГЭ по математике сдает мой сын. Для республики результат получен довольно неплохой (1 выпускник получил 96 баллов, двое – 88, ещё двое – 84, остальные меньше) – 3-й результат. Я не буду подробно анализировать технологию проведения экзамена. Ограничусь лишь тем, что скажу, не хотел бы возврата к нулевым годам, когда результаты искусственно культивировались, а не обеспечивались качественной подготовкой. Представляется, что у сегодняшних руководителей министерства имеются основания для беспокойства и выработки адекватных мер. Иначе есть опасность возврата к периоду «лидерства в образовании».

В письме академика Л.С. Понтрягина «О математике и качестве её преподавания», с которого мы начали статью, есть такое предложение: «А ведь, признаться, неплохим, в общем, был предшествующий опыт школьного обучения, неплохими были и учебники, – не случайно именно к ним обращаются репетиторы, подготавливая сегодня абитуриентов в вузы» [2].

Академик прав. Прав он и в абзаце, представленном в начале данной статьи.

Не должны дети ходить к репетиторам! Школа сама должна полноценно выполнять свои функции. Любое обра-



а) Рассмотрим △ BKN – он прямоугольный т.к. он опирается на сторону BN а BN – диаметр (по усл.) и ∠ BHC тоже прямой т.к. BH высота △ BHC (по усл.) значит KN параллельна HC. т.к. BH сторона общая а ∠ BKN = ∠ BHC что и требовалось

Рис. 1

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

зовательное учреждение или, как школу сейчас окрестили, организация, должны качественно выполнять свои функциональные обязанности по усвоению требований программы. А если ходят, то мне, репетитору, должно платить государство за устранение пробелов в школьных знаниях. За работу с выпускниками, которым не вполне интересно в общеобразовательной школе, получающими в результате высокие баллы хотя бы по отдельным предметам.

Если государство несёт ответственность за уровень образования, то оно должно гарантировать его качество, отвечающее потребностям общества. Если для этого требуется изменение содержания программ, то и они должны быть изменены. Но не втягивая при этом родителей в дополнительные расходы.

Предприимчивые предприниматели, не имеющие ни профессиональной подготовки, ни отношения к преподавательской деятельности, уже сегодня создали сеть учреждений, в том числе школ, в которых работают тренеры, репетиторы, преподаватели вузов и передовые учителя, получающие весомые надбавки к заработной плате. При этом основной капитал от таких учреждений идёт к предпринимателям, педагоги получают лишь оговорённую сумму. Таким образом, даже здесь учитель оказался в роли прислуги.

Репетиторство как ***система*** не должно существовать не только у нас, но и в любом цивилизованном государстве. Репетиторство, на самом деле, это двойная нагрузка на ученика. Выходит, что для получения одной единицы объёма знаний, он должен учиться дважды.

Если же репетиторство как ***система*** все-таки будет иметь место в формировании математических знаний, то необходимо существенно пересмотреть содержание математического образования в общеобразовательной школе.

В связи со сказанным, актуальным становится вопрос: что будет преобладать в перспективе в отечественном математическом образовании – основы системных знаний по дисциплине или разрозненные факты?

Репетитор, конечно, может существовать как способ развития индивидуальных способностей лиц, способных показывать в перспективе существенные научные результаты. Но за счёт государства. Репетитор должен стать в этом случаетем трамплином, с которого таланты «взлетают ввысь и ведут за собой».

Если же нынешняя тенденция использования репетиторства сохранится, то государству придётся всерьёз заняться разработкой методических проблем в этом направлении. Другими словами, возникнет необходимость научного исследования репетиторства как явления в общеобразовательной школе.

В частности, работа репетиторов имеет свои особенности, связанные с режимом, продолжительностью занятий, их содержанием, количеством участников, психологической совместимостью с преподавателем и другими учениками и т.д. Соответственно вузы, особенно педагогические, тогда должны готовить репетиторов по отдельной программе повышенной сложности, деятельность должна лицензироваться и оцениваться и т.д.

Отметим, что в период работы в вузе, когда я совмещал работу с репетиторством, на занятиях по элементарной математике и методике обучения математике уже стали рассматривать КИМы как компонент занятий и элемент контроля. Педагогическое вузовское образование по предметам, по которым проводится итоговая

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

аттестация, также стало ориентироваться на формирование у будущих учителей умений решать задания ЕГЭ. За прошедшие годы это стало давать определённую положительную динамику в результатах ЕГЭ. А то, что это зачастую происходит в ущерб развивающей составляющей математического содержания, к сожалению, не учитывается.

Список источников

1. Минпросвещения сможет разрушить рынок репетиторства в стране. https://zen.yandex.ru/media/obucheniepro/minprosvesceniia-mojet-razrushit-rynok-repetitorstva-v-strane-62569a01c15da430b732fe03 (Дата обращения 24.06.2022).

2. *Понтрягин Л.С.* О математике и качестве её преподавания // Коммунист, 1980, № 14, с. 99–112.

3. *Костенко И.П.* Почему в Израиле учатся по старым советским учебникам? https;//econet.ru/articles/74336-pochemu-v-izraile-uchatsya-po-starym-sovetskim-uchebnikam (дата обращения 30.07.2022).

4. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике в восьмых классах общеобразовательных школ РСФСР. М., Просвещение, 1985. – 64 с.

5. *Шевкин А.В.* Традиции составления программ по математике утрачены // Математика в школе, 2022, № 2, с. 3–7.

6. *Ефлаева Т.* «Риск – приложение к моей должности», «Лидеры образования», 2002, № 7, с. 50–51.

7. *Сканави М.И.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М.И. Сканави, 6-е изд., М.: ООО «Мир и образование», 2013, 608 с.

8. *Якубов А.В.* О некоторых заданиях в КИМах для подготовки к ЕГЭ по математике и ответах к ним // Математика в школе, № 8, 2016, с. 3–6.

9. *Ященко И.*В. и др. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. 2021. Национальное образование. М., 256 с.

10. *Ященко И.В.* и др. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. 2022. Национальное образование. М., 226 с.

Статья поступила в редакцию 25.06.2022.
Принята к публикации 02.08.2022.

Логичный вывод

Однажды Евклида спросили:

– Что бы ты предпочёл – два целых яблока или же четыре половинки?

– Четыре половинки, – ответил Евклид.

– Но разве это не одно и то же?

– Конечно, нет. Ведь выбрав половинки, я сразу увижу, червивые эти яблоки или нет.

Каждому своё

Однажды один из учеников Евклида спросил его: «А какая мне будет практическая польза от изучения геометрии?» В ответ Евклид позвал раба и, указывая на ученика, сказал: «Дай ему монету – он ищет выгоду, а не знаний!»

Особый путь

В Египте времен царя Птолемея I (305–283 гг. до н.э.) было два вида дорог: одни для обычного люда и другие, более короткие и удобные, – для царя и его курьеров.

Решив как-то изучить геометрию, Птолемей обнаружил, что это не такое простое дело. Тогда он призвал к себе Евклида и спросил, нет ли более легкого пути для её изучения.

– В геометрии нет царских путей! – гордо ответил Евклид.

Из книги «Математики тоже шутят», автор С.Н. Федин, Изд-во «Ленанд», 2017

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Математика в школе 2023. № 1. С. 52–60 Mathematics at school 2023. № 1. P. 52–60

КОМПЬЮТЕР: ВРЕМЯ ПЕРЕМЕН

COMPUTER: TIME FOR CHANGE

Научная статья
УДК: 372.851

Scientific article
DOI: 10.47639/0130-9358_2023_1_52

В.И. Рыжик, канд. пед. наук,
Физико-техническая школа (Санкт-Петербург),
rvi@inbox.ru

V.I. Ryzhik, Ph.D (in Pedagogy),
Physical-Technical school (St. Petersburg),
rvi@inbox.ru

Аннотация: в статье обсуждается кризис школьного математического образования и выход из него в результате использования компьютерных инструментов

Abstract: the crisis of school math education and the way to overcoming the crisis using computer-asisted tools are discussed

Ключевые слова: введение в математику, динамическая модель, компьютерная математика

Keywords: introduction to mathematics, dynamic model, computer-assisted mathematics

© Рыжик В.И. 2023

Кризис в школьной математике

Выступая на VI Международном конгрессе по математическому образованию, академик А.П. Ершов говорил о кризисе школьного математического образования, в частности о присущих ему противоречиях и даже их нарастании[1].

Возникают вопросы:

1. О каких противоречиях речь?
2. Почему они так живучи?
3. А не изжила ли себя нынешняя парадигма школьного математического образования (ОМШ)?

Одна из причин существования этих противоречий – изменения, которые происходят в самой математике. Вот несколько примеров. Существенно возросла роль дискретной математики, моделирования, переосмыслена роль геометрии. Появились компьютерные инструменты (КИ), повлиявшие на толкование строгости доказательства. Видоизменилась экспериментальная математика, сблизились математика и физика, математика и гуманитарные науки. Другая причина – появление новых тенденций в педагогике, дидактике, реальной практике. Пример тому – повышенное внимание к процессу деятельности, к феномену понимания.

Эти и прочие изменения повлияли на школьную математику. За последние десятилетия в школе появилась информатика, в курс математики добавилась теория вероятностей, в школу пришли основы математического анализа, векторы, координаты, основные понятия теории множеств и математической логики, исчезли как самостоятельные предметы арифметика и тригонометрия. Однако противоречия не исчезли.

И только с появлением КИ, постоянным расширением и углублением их воз-

[1] См.: *Ершов А.П.* Компьютеризация школы и математическое образование // Математика в школе. – 1989. – № 1.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

можностей я связываю такие изменения в школьной математике, которые позволят смягчить имеющиеся противоречия. Об этом и не только далее поведу речь.

Более 60 лет я много кого учил математике (и учу по сию пору) – от учащихся начальной школы до будущих учителей. Примерно половину этого времени я использую КИ. Данная статья – попытка, уже не первая, этот опыт чуток осмыслить.

За многие годы работы я на практике прочувствовал противоречия между:

- *содержанием математики как науки и содержанием математики как учебного предмета* (пример: отношение науки и отношение учебного предмета к строгости содержания учебного текста);
- *целями и ценностям школьного математического образования* (готовить к экзаменам или раскрывать значимость и красоту науки?);
- *логическим и генетическим подходами к изучению теории* (аккуратно рассказывать о производной или исходить из наглядных представлений?);
- *реальной работой учителя и ценностями ОМШ* (учим без «двоек» или в первую очередь заботимся об истине?);
- *реальной работой учителя и принципами дидактики* (научность или понятность?);
- *строгостью рассуждений и возможной её реализацией* (доказывать всё, полностью или избирательно, частично?);
- *строгостью курса в целом и возможной её реализацией* (чередовать ли доказанное с недоказанным или такое недопустимо?);
- *значением геометрии для развития школьника и тем местом, которое она занимает на деле* (изучать симметрию или только иллюстрировать её?);
- *различными взглядами на школьный курс геометрии* (что важнее: пространственное мышление или знание формул?);
- *учебной деятельностью и другими видами деятельности: исследовательской и критической* (учим хотя бы доказывать то, что требуется, или учим это же открывать и исследовать?);
- *обязательной и «абитуриентской» математикой* (изучаем логарифмы и их свойства или логарифмы с неизвестным основанием?);
- *оценками роли теории и роли задач* (что важнее: знать, как вычислить площадь круга, или знать, что это такое?);
- *теоретической и практической составляющими ОМШ* (аксиомофилы[2] или практики?);
- *различными ролями учителя математики: «просветителя» и «тренера»* (рассказывать об исторических корнях понятия иррациональности или упражняться в решении иррациональных уравнений?);
- *различными тенденциями при выборе программного материала* (изучать комплексные числа или нет?);
- *использованием компьютерных инструментов и традиционными образовательными технологиями* (применять КИ при решении задач или вовсе отказаться от них?).

Новации в образовательной политике (ФГОС, ГИА, ЕГЭ) привели к тому, что некоторые из противоречий резко обострились. Пример: сведение ОМШ к решению задач определённого типа и содержания из готового «тренировочного списка».

Далее я употребляю в тексте некоторые общие понятия. Поясню, как я их для себя толкую – для большей чёткости.

---

[2] Термин В. Арнольда.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ОМШ традиционно предполагает *воспитание* (ценности), *просвещение* (знания) и *обучение* (умения). *Развитие* школьника происходит в трёх этих направлениях: усваиваются ценности, умножаются знания, совершенствуются умения.

Ученик, который усваивает готовые знания и применяет их в простейших случаях, – это *пользователь*, а ученик, чья деятельность этим не ограничивается и включает в себя также другие виды деятельности: исследовательскую и критическую, – *теоретик* (названия условные).

Базовые знания и умения *расширяются* (усваивается новая информация) и *углубляются* (обнаруживаются новые связи в содержании). В результате возникает *понимание*.

Введение в математику

Противоречия в ОМШ, как видно, растут. Можно ли двинуться в обратном направлении: смягчить их или даже устранить? История ОМШ показывает, что при всех локальных его изменениях это не получилось. Полагаю, причина в том, что сохранялась установившаяся образовательная парадигма. Видимо, нужны принципиально новые подходы. Один из них связан с понятием *введения* в математику.

Введение в конкретную математическую дисциплину давно известно. В моей библиотеке около десятка книг с таким названием. Введение в учебный предмет – понятие многоплановое, и я рискну дать разве что краткое схематичное его описание. Сразу скажу, что *Введение* в учебный предмет не тождественно самому учебному предмету. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить, к примеру, учебник геометрии и книгу [9]. Они преследуют разные цели, имеют разную структуру и содержание, написаны в разных стилях.

Введение рассматривается авторами этих книг как самостоятельная сущность и имеет видимые особенности. Отмечу такие.

1. Цели *Введения*:

- дать общее представление о предмете;
- сосредоточиться на главных понятиях и теоремах;
- продемонстрировать основные способы решения типичных задач;
- показать применение полученных знаний на практике;
- показать важнейшие внутренние связи в теории;
- показать связи математики с другими науками;
- познакомить с историей математики;
- не упустить случая познакомить учеников с занимательной стороной математики;
- развить интерес к предмету;
- познакомить учеников с красивыми результатами, даже если их полное обоснование не приводится;
- не перегружать учеников «техническими подробностями»;
- не перегружать учеников малозначимыми частными результатами.

О соблюдении научной строгости при изложении теории во *Введении* важно понять вот что. Она ведь не самоцель, а только средство достижения убедительности в постижении истины. В математике много другого важного для развития школьника, иногда строгостью можно поступиться ради наглядности, работы пространственного мышления, интуиции. Строгость должна сохраняться в построении теории в целом, в последовательности принципиально важных результатов, а в получении иных результатов возможна значительная свобода.

2. Во *Введении* необходимо (перечислю конспективно):

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

- *отразить* связь образования:
  – с *наукой* (цели);
  – с *педагогикой* (ценности);
  – с *дидактикой* (принципы);
  – с *методикой* (способы);
  – с *психологией* (готовность).
- *сохранить структуру* математической деятельности школьника, которая включает:
  – учебную деятельность;
  – исследовательскую деятельность;
  – критическую деятельность.
- *сохранить* основные виды математической деятельности:
  – построение;
  – доказательство;
  – вычисление;
  – оценивание.

3. *Введение* в математику опирается на современные изменения (конспективно):

- *в математике* (прикладная математика, экспериментальная математика, моделирование, использование КИ);
- *в педагогике* (понимание);
- *в дидактике* (готовность к продолжению образования);
- *в методике* (использование КИ).

4. Реализация дидактического принципа научности во *Введении* должна привести к исчезновению «аппендиксов» в нынешнем ОМШ, как то (конспективно):

- копирование элементов вузовской математики;
- ориентация на абитуриентскую («ЕГЭшную») составляющую;
- преобладание частных результатов;
- гипертрофия вычислительных задач;
- чрезмерная техническая работа;
- превосходство математики для пользователя перед математикой для исследователя.

Принцип научности обязательно предполагает учёт изменений, которые происходят в науке. К таковым ныне можно отнести появление эксперимента с использованием КИ и моделирование. Мягкое моделирование приводит к использованию КИ.

Моделирование в образовании – не новость. Давно известно *статическое* моделирование, когда при решении текстовой (сюжетной) задачи используется рисунок и составляется уравнение; то же самое нередко происходит и при решении геометрических задач. Такую задачу естественно называть *модельной*. О ней и пойдёт речь далее. Тут моделирование проходит в несколько этапов:

1) задача подаётся как неформальный текст;

2) делается соответствующий условию рисунок;

3) на рисунке отмечаются данные величины;

4) вводятся переменные величины (и ограничения на них), которые также отмечаются на рисунке;

5) составляется одно или несколько уравнений, которые следует решить.

Принципиальным, с использованием КИ, в этой последовательности действий становится переход от *статической* модели к *динамической*. В динамической модели рисунок можно изменять по собственному разумению с учётом ограничений на введённые величины. Работа ученика становится экспериментальной, включает наблюдение и предполагает различные мыслительные операции.

Замечу, что в динамической модели изменяющийся во времени рисунок может трактоваться как реальный объект наблюдения. Такое толкование сближает рассматриваемые процессы в модельных задачах геометрии с процессами в задачах естественных наук.

После составления уравнения возмож-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ны дальнейшие действия с использованием КИ. Например, выводится на экран график уравнения, изучается поведение соответствующей функции, выясняется, существует ли решение и будет ли оно единственным.

Приведу простой пример. Пусть требуется найти периметр и площадь вписанного в данную окружность прямоугольника. «Безмодельной» задача будет в том случае, если рассматривается вписанный квадрат. Модельная задача появляется тогда, когда одна из вершин вписанного прямоугольника начинает двигаться по окружности. Полученные уравнения исследуются, в том числе с помощью КИ.

В теории и в решении задач, включённых во *Введение*, используются КИ, рациональные рассуждения, делается упор на содержательные задачи, допускаются наглядно очевидные соображения (непрерывность, симметрия). Особо подчеркну использование понятий размерности, пропорциональности и механических соображений.

5. *Геометрия*.

Важнейшая роль геометрии в познании действительности заключается в том, что с помощью наглядных представлений совершается переход от реальности к её аналитическому выражению. Аналогична её роль в математическом образовании, когда совершается переход от текста через рисунок к формальному его отражению.

Введение в математику, внедрение в ОМШ динамической модели, а тем самым и КИ, усиливают давно понятую роль геометрии в развитии интеллекта.

Важно уразуметь, что именно геометрия как таковая является альтернативой глобальному использованию КИ, будто бы призванному заменить все традиционные средства обучения.

Добавлю ещё. Ясно, что КИ будут совершенствоваться и позволят со временем расширить диапазон решаемых задач и повысить их сложность. Что остаётся людям? Естественно, остаются такие задачи, в которых КИ помочь не могут или почти не могут.

Принципиальный вопрос: можно ли считать доказанным результат в геометрии, если он был получен с помощью КИ? На этот вопрос возможны два ответа.

Первый ответ такой. В динамической модели наблюдается процесс изменения, то есть (косвенно) присутствует фактор времени, а восприятие времени – континуального свойства. Потому изменение на экране фигуры или её положения воспринимается как явление, аналогичное природному.

Второй ответ связан с обобщением результата, полученного в конкретной ситуации, если процедура его получения в общем случае аналогична процедуре в частном случае.

Наконец, можно ссылаться на то, что понятие доказательства в конечном счёте не формализовано, а по существу сводится к проверке возникающих гипотез, и его главная цель – убедить некое сообщество в истинности полученного результата.

6. Очевидно значение динамической модели:

- *для педагогики* (КИ позволяют «оживить» перед школьником мир геометрических фигур, тем самым способствуя формированию и поддержанию интереса к геометрии);
- *для дидактики* (эксперимент с элементами динамики входит в арсенал дидактических средств);
- *для методики* (появляется мощное средство постановки и решения задач, в частности при изучении теории).

7. Разумеется, в новой трактовке ОМШ сохраняется установка на знание и уме-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ние, на развитие мышления, на воспитание логической культуры.

В последние десятилетия в нашей педагогической литературе внимание привлекает проблема понимания. Размышляя о ней более тридцати лет, пытаясь разобраться в ней практически, я пришёл к некоторому её толкованию.

Понимание предмета в целом обеспечивается (конспективно):

- целесообразной последовательностью изучения теории;
- связью полученных утверждений;
- различными способами их получения;
- связью идей;
- связью теории с практикой.

Понимание задачи включает в себя:

- рассмотрение её структуры в виде следования;
- формулировку обратного утверждения;
- формулировку отрицаний прямого и обратного утверждений;
- формулировку равносильного утверждения;
- рассмотрение заданной фигуры как части другой фигуры;
- рассмотрение структуры фигуры, то есть частей фигуры и связей между ними;
- выделение элементов симметрии фигуры;
- проверку существования заданной фигуры;
- проверку единственности фигуры, соответствующей условию;
- установление достаточности данных для получения результата;
- установление необходимости данных для получения результата;
- выяснение происхождения задачи;
- получение возможных следствий;
- получение возможных обобщений;
- формулировку условия в общем виде, если данные были численными;
- формулировку ограничений на переменные, если условие задано в общем виде;
- исследование предельных случаев;
- поиск различных решений;
- поиск аналогий;
- применение задачи на практике или для решения других задач.

8. *Дидактика.*

Какова во *Введении* опора на дидактику? Принципы дидактики, лежащие в основе ОМШ, известны: научность, наглядность, доступность, самостоятельность, активность, индивидуализация, воспитывающий характер образования.

Современный подход к проблемам ОМШ включает в дидактику *понимание* – как процесс, так и результат. В тот же ряд я поставлю *готовность к продолжению образования*.

Проявление готовности к продолжению образования отражается, в частности, в умении:

- аргументировать;
- опровергать;
- проверить условие задачи на определённость (достаточность данных);
- проверить условие задачи на корректность (непротиворечивость данных);
- установить связи между утверждениями;
- установить отсутствие связей между утверждениями;
- проанализировать логическую структуру утверждения;
- оперировать понятиями в общем виде;
- придать аналитической зависимости наглядную форму;
- выразить геометрическое содержание в виде аналитической зависимости;
- отделить собственное знание от незнания;
- провести умозаключение логически корректно.

А также, решая задачи, *использовать:*

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

- эвристику;
- рациональные соображения (пропорциональность, непрерывность, симметрию, размерность, механические аналогии);
- динамическое моделирование;
- экспериментальное исследование;

отделять:

- нелепое (абсурдное) утверждение от утверждения, имеющего смысл;
- понятое условие от непонятого;
- истинное от ложного;
- доказанное от недоказанного;
- проверенное от сомнительного;

проводить:

- длинные выкладки;
- оценку величин;
- точные и приближённые вычисления;
- построение алгоритма для получения результата;

а также:

- критически воспринимать теоретический текст;
- формулировать вопросы по тексту;
- оценивать приведённое решение задачи;
- оценивать собственное решение задачи;
- обобщать, сравнивать, анализировать, синтезировать, абстрагировать, идеализировать, конкретизировать.

При использовании динамической модели почти всё перечисленное, как мне ясно из опыта и соответствующей литературы, может быть реализовано.

9. Какие же есть возможности *Введения* для того, чтобы отразить в методике изменения в науке, педагогике, дидактике?

Укажу только некоторые, вполне очевидные.

Большее внимание можно и важно уделить модельным задачам.

В *компьютерной геометрии* есть и другие возможности для использования КИ (помимо работы с динамическими моделями). Например, можно выстроить курс геометрии, который позволит быстрее начать её систематическое изучение и перейти к содержательным задачам. Поясню.

Аксиомы планиметрии исторически основывались на реальной деятельности. Появилась аксиоматика, отражающая возможности односторонней линейки без делений и циркуля постоянного раствора. «Дух линейки и циркуля» выдержан по сию пору в типичных задачах на построение, хотя есть и угольник, и другие инструменты.

Со временем на практике появились односторонняя линейка с делениями и транспортир – «изогнутая по окружности линейка с делениями». А в геометрии со временем появилась аксиоматика (метрическая), отражающая свойства этих измерительных инструментов.

КИ тоже инструмент. Не видно препятствий для создания курса геометрии, основанного на аксиоматике, использующей КИ. Он будет развиваться быстрее, нежели сейчас. Такую возможность повысить интерес к предмету и мотивацию школьника можно только приветствовать. Уже существует аксиоматика А.Д. Александрова, которая соответствует тому, что происходит на экране компьютера, то есть в пределах прямоугольника.

Ещё пример. КИ можно использовать для операций с формулами в общем виде, что расширяет множество учебных задач.

В *компьютерной математике* к геометрии подключаются алгебра и начала анализа. Так, в алгебре изменяется решение неравенства после того, как на экран выведен график исходной функции, найдены её нули и промежутки монотонности. Пример из анализа – изучение гра-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

фиков функций, заданных с помощью параметра.

Внедряющему КИ учителю желательно иметь некую основу, совокупность взглядов для перестройки порой годами наработанной установки и собственной системы деятельности. Я сформулировал её для себя как перечень постулатов.

Первый постулат. Математическая деятельность основана не только на логике, не только на строгой дедукции, но и на пространственном мышлении, на работе интуиции, на использовании эвристики и рациональных рассуждений.

Второй постулат. Математика – наука экспериментальная. Математический эксперимент сродни эксперименту в физике. Связи математики и физики – неотъемлемая часть математического образования.

Третий постулат. В математическом образовании компьютер является инструментом, который играет роль, сходную с ролью, какую играет прибор в физике.

Четвёртый постулат. КИ позволяют решать задачи, недоступные без них. Имеются задачи, которые могут быть решены при симбиозе интеллекта человеческого и «интеллекта электронного».

Пятый постулат. КИ могут быть использованы во всех видах математической деятельности школьника: учебной, исследовательской и критической.

Шестой постулат. Есть два уровня использования КИ: уровень пользователя и уровень теоретика.

Седьмой постулат. Результат, полученный с помощью КИ, можно в определённых случаях считать доказанным.

Восьмой постулат. Возможности, которые появляются в ОМШ при использовании КИ, оправдывают временные затраты, необходимые для этого.

Девятый постулат. Использование КИ опирается на важнейшие положения педагогики, принципы дидактики, методические традиции российского образования и обогащает их содержание.

Десятый постулат. Использование КИ наряду с привлечением интернета обогащает деятельность ученика и способствует его творчеству.

В заключение более общие соображения об использовании КИ во *Введении*.

1. Как видно, в результате использования КИ:
   – меняется содержание теоретического курса;
   – меняется содержание заданий;
   – меняются акценты в работе учителя;
   – меняются способы (методы и приёмы) работы учителя.

2. Использование КИ в школе является откликом на возникновение «компьютерной цивилизации» и тем самым необходимо для образования в целом.

В общем контексте достижений цивилизации КИ в конечном счёте – ещё одно средство, которое позволяет сэкономить время. На что употребить освободившееся время? Если на математику, то имеет смысл заняться изучением чего-то важного, но не нашедшего достойного места в школьной программе из-за того, что без КИ пока не под силу. Но, быть может, стоит сократить учебную нагрузку школьника и дать ему возможность самому распорядиться оставшимся временем?

3. Со временем использование КИ станет привычным в школьной практике. Но что изменилось по сути? Появилась какая-то другая математика? Новые способы решения задач? Новые приёмы доказательства? Что нового стало возможно? Как соединить использование КИ и интернета с многовековым опытом? КИ – не

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

цель образования, а только средство достижения целей образования и внедрения его ценностей. Легко напутать и объявить внедрение КИ важным само по себе, то есть ради самого себя.

Полагаю, что ответы на эти и аналогичные вопросы можно найти при толковании школьного предмета «Математика» как «Введение в математику».

Список источников

1. *Александров А.Д.* Основания геометрии. – М.: Наука, 1987.

2. *Александров А.Д.* О геометрии // Математика в школе. – 1980. – № 3.

3. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 7. – С-Пб.: СМИО Пресс, 2022.

4. *Арнольд В.И.* «Жёсткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000.

5. *Арнольд В.И.* Экспериментальное наблюдение математических фактов. – М.: МЦНМО, 2012.

6. *Арнольд В.И.* Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2018.

7. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. – М.: Наука, 1990.

8. *Иванов С.Г., Рыжик В.И.* Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика». – М.: Просвещение, 2013.

9. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.

10. *Рыжик В.И.* 25 000 уроков математики. – М.: Просвещение, 1993.

11. *Рыжик В.И.* Тесты готовности к продолжению образования. – С-Пб.: Оракул, 1999.

12. *Рыжик В.И.* Царский путь в геометрии? // Математика в школе. – 2017. – № 4.

13. *Рыжик В.И.* Четвёртая линия // Математика в школе. – 2018. – № 7.

14. *Рыжик В.И.* Школьная математика как введение в науку // Математика в школе. – 2019. – № 2.

15. *Рыжик В.И.* Компьютер в школе. Взгляд назад и взгляд вперёд // Математика в школе. – 2021. – № 5.

16. *Рыжик В.И.* Кризис среднего математического образования глазами учителя // Математика в школе. – 2013. – № 10; 2014. – № 1.

17. *Успенский В.А.* Предисловие к математике. – С-Пб.: Амфора, 2015.

18. *Фрейденталь Г.* Математика как педагогическая задача. Ч. I. – М.: Просвещение, 1982.

19. *Фрейденталь Г.* Математика как педагогическая задача. Ч. II. – М.: Просвещение, 1983.

20. *Юнг Дж.В.А.* Как преподавать математику. – Петроград: Общественная польза, 1916.

Работа выполнена
по гранту РФФИ 19-29-14141.

Статья поступила в редакцию 30.08.2022.
Принята к публикации 14.09.2022.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Барометр ЕГЭ

ПОДВОДЯ ИТОГИ

(чем запомнился ЕГЭ-2022: статистика и не только)

* В основной период ЕГЭ сдавали более 690 тысяч человек. 100 баллов по одному из предметов получили 6544 учащихся. 200 баллов по двум предметам набрал 381 человек. Ещё 16 выпускникам удалось получить максимальные 300 баллов на трёх экзаменах. Самый высокий результат по итогам четырёх экзаменов – 396 баллов.

* После досрочного периода сдачи ЕГЭ была скорректирована шкала перевода первичных баллов в тестовые по многим предметам. В 2022 году по профильной математике минимальный пороговый первичный балл был снижен с 6 до 5 (с учётом сокращения количества заданий и повышения сложности двух заданий). Порог для получения аттестата не изменился: 27 тестовых баллов. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы уменьшился с 32 до 31.

* Математику профильного уровня сдавали 302 тысяч человек, средний тестовый балл составил 56,86, число стобалльников – 579. Несмотря на рост результатов выполнения геометрических заданий, по сравнению с прошлыми годами сохраняется заметный разрыв между уровнем алгебраической и геометрической подготовки выпускников. Математику базового уровня сдавали после двухгодичного перерыва. Из 343 тысяч участников с экзаменом справились около 80%, средний тестовый балл составил 4,16.

* Особенность ЕГЭ-кампании 2022 года: экзамен сдавали школьники, пропустившие ранее ОГЭ из-за пандемии. Прогноз о снижении средних баллов оправдался: результаты ухудшились по половине предметов в сравнении с 2021 годом. По мнению учителей, основные причины тому – «дистанционка» и отсутствие у выпускников опыта сдачи госэкзамена в 9 классе. Чиновники с ними не согласились и связали слабые результаты с обновлением КИМ на основе принятых ФГОС.

* Среди нарушителей ЕГЭ наметился интересный тренд: стало больше тех, кто обзавёлся старыми добрыми бумажными шпаргалками. За них с экзамена удалили 346 человек. За использование мобильных телефонов «пострадали» 298 учащихся, за другие нарушения – ещё 95.

* Самое большое недоразумение случилось на ЕГЭ по русскому языку. Некоторым выпускникам попалось задание по анализу текста, где нужно было найти необходимую информацию в 19-м предложении, хотя всего в тексте их было 18. Кто-то из составителей задания обсчитался, а невезунчикам пришлось подавать апелляцию.

Подробности: rg.ru, 4ege.ru, mel.fm, fipi.ru.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Перспективы далёкие и близкие

ПРИНЯТ ЗАКОН О ЕДИНЫХ ПРОГРАММАХ И УЧЕБНИКАХ В ШКОЛЕ

(чего ожидать и о чём предупреждают эксперты?)

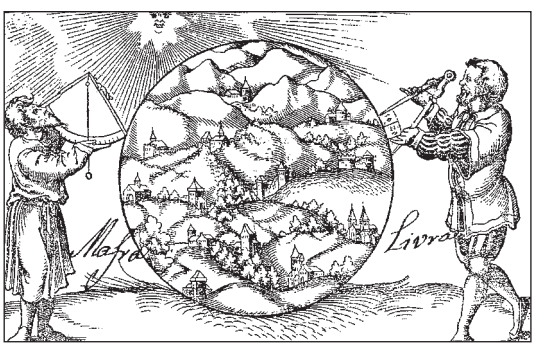
В сентябре Госдума приняла поправки к закону «Об образовании в РФ». Одна из них вводит в школах единые образовательные программы вместо примерных. При этом акцент сделан на гуманитарных дисциплинах, единых программ, например, по математике обновлённый закон не предполагает. Сами программы разработает Минпросвещения, и школы перейдут на них с 1 сентября 2023 года. Изменится также порядок создания учебников. Теперь Минпросвещения будет осуществлять госзаказ на разработку учебников и утверждать их авторский коллектив; требования к экспертизе останутся. Для замены учебников установлен переходный период в пять лет. По словам депутатов, закон направлен на создание «единого образовательного пространства». Между тем некоторые педагоги и эксперты считают, что для образования это шаг назад, как и любой единый стандарт. Они предупреждают, что нововведения ограничат автономию школ и академические свободы учителей (могут лишить их возможности адаптировать программы, применять разные методики, учесть интересы различных групп учеников), приведут к потере идентичности инновационных и частных школ. В итоге это повлечёт за собой снижение качества обучения.

Подробности: rbc.ru/society/.

Из жизни учёных

КРАТКАЯ ИСТОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ ЗЕМЛИ

(о вкладе математиков в науку геодезию)



Как только в древности сложилось представление о Земле как о шаре (античные авторы приписывают его Пифагору), учёные стали пытаться разными способами определять её размер. Первым это попробовал сделать на основе собственных измерений Дикеарх из Мессены в IV веке до н. э. Кстати, для древних греков это была задача из области географии. Эратосфен Киренский решал её средствами геометрии (первое в истории градусное измерение Земли, то есть определение длины дуги меридиана), а Аристарх Самосский – на основе астрономических наблюдений с привлечением тригонометрии. По прошествии столетий измерение Земли стало задачей другой, не менее древней науки – геодезии, методы которой также изначально опирались на достижения математики. В IX веке определением длины дуги меридиана занимались арабские учёные. Следующее градусное измерение было произведено только в эпоху Возрождения, причём простейшим способом и примитивными инструментами. В 1528 году французский математик, астроном и врач Жан Франсуа Фернель измерил дугу меридиана от Парижа до Амьена оборотами колеса своего экипажа, а высоту солнца в конечных точках пути определил с помощью треугольника, одна сторона которого имела деления в минутах дуги. И получил, как ни странно, довольно точный результат. Позже к измерению Земли добавилась новая, ещё

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

более сложная задача: определение её формы. В практическую и теоретическую геодезию внесли вклад многие математики: Снеллиус, Клеро, Эйлер, Гаусс, Листинг и пр. На их счету метод триангуляции, понятие геодезической (кратчайшая линия на поверхности), термин «геоид» («математическая» фигура Земли) и др.
Подробности: geovestnik.ru/articles/history/.

Портрет педагога

КАК НАЛАДИТЬ ДИСЦИПЛИНУ В КЛАССЕ

(лайфхак от учительницы из США)

«Тайный ученик» – так называется игра, которая, по словам американской учительницы Джордан Ли, помогает ей дисциплинировать учеников и заставляет их почувствовать ответственность друг за друга. В начале занятия учитель выбирает «тайного ученика», но не говорит классу, кто это, просто сообщает, что будет наблюдать за ним весь урок. Тот, в свою очередь, должен выполнить определённые требования: не перебивать других, ответить на вопрос и пр. Если требования будут выполнены, весь класс получит награду: пять минут свободного времени, дополнительный перерыв, отмену домашнего задания или иное поощрение. В случае если «тайный ученик» справляется, его имя раскрывается со словами: «Ребята, вы можете поблагодарить сегодня Лену (Митю, Сашу…) за то, что у вас не будет домашнего задания». В противном случае учитель говорит: «К сожалению, наш “тайный ученик” не справился, но вы сможете попробовать получить награду на следующей неделе». Почему этот метод работает и о чём нужно помнить, если вы решили провести эту игру?
Подробности: mel.fm/ucheba/shkola/.

Житейские истории

БЫВАЕТ ЖЕ ТАКОЕ!

(невероятно, но факт: более 400 человек зараз сорвали джекпот)

1 октября 2022 года на Филиппинах случилось нечто удивительное: сразу 433 участника благотворительной лотереи сорвали куш в размере 236 млн песо (4 млн долларов). Этот факт тут же привлёк внимание общественности, возникли подозрения в фальсификации результатов. Один из сенаторов даже призвал провести расследование. Но организаторы игры не увидели в нём ничего странного: мол, люди склонны выбирать простые числовые комбинации и делать ставки на числовые последовательности. По условиям розыгрыша участникам предлагалось указать любые 6 чисел от 1 до 55. Шансы угадать заветную шестёрку были малы – 1 : 28 989 675. Неудивительно, что многие не поверили в аномальное совпадение результатов. Однако игроки положились не на случай, а на простую числовую закономерность. Все выигрышные числа оказались кратны 9 (см. фото). Известны и другие подобные истории. Так, в ЮАР в 2020 году в одной из лотерей выпала комбинация чисел 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тогда победителей было 20 человек. Как тут не вспомнить «Пиковую даму»

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Пушкина, ведь даже в знаменитой карточной комбинации «тройка – семёрка – туз», выраженной в очках, скрыты члены арифметической прогрессии: 3, 7, 11.
Подробности: news.mail.ru, secretmag.ru.

Пополняем ресурсы

ЭТА СТРАННАЯ МАТЕМАТИКА

(захватывающее путешествие в самые невероятные миры, доступные разуму)

Данная книга – плод творчества английского астронома, популяризатора науки и музыканта Дэвида Дарлинга и его ученика, одарённого молодого математика Агниджо Банерджи. Авторы задались целью поговорить о самых необычных и удивительных областях математики, сделать акцент на присущих ей странных, причудливых вещах и по возможности показать связь их с проблемами реального мира, с повседневной жизнью. При этом не избегать сложных тем, взяв за правило: не можешь объяснить что-то простыми словами, значит, сам не очень хорошо в этом разбираешься. Первый отвечал за исторические и философские аспекты каждой главы и примеры из жизни, а второй – за «техническую» часть. Спектр обсуждаемых тем весьма широк: от высших измерений, загадок топологии и бесконечности до невообразимо огромных чисел, музыки сфер, игр и парадоксов. Книга рассчитана на широкую аудиторию. Читателя ждёт встреча с неэлементарной математикой в элементарном изложении.
Подробности: nplus1.ru/blog/2021/04/08/weird-math (отрывок из книги).

Нетривиальные суждения

Математики похожи на влюблённых…
Согласитесь с математиком в самом простом высказывании, и он выведет из него следствие, с которым вы также должны согласиться, а из этого следствия – другое.
Бернар Фонтенель, французский писатель, учёный, популяризатор науки

Скупец, как выразился Бюффон, подобен математику:
оба они деньги ценят исходя лишь из количественных данных.
Морис Крайчик, бельгийский математик и популяризатор науки

Я люблю математику за то, что в ней нет ничего человеческого,
за то, что с нашей планетой, со всей вселенной её, по существу, ничего не связывает.
За то, что любовь к ней… безответна.
Бертран Рассел, британский философ и логик

Рубрику ведёт Н.М. Карпушина

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

СОРОК ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ УНИВЕРСИТЕТОВ И ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Введение. 22–24 сентября 2022 года в г. Кирове состоялось 41-е заседание «Международного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов» (далее Семинар). Оно проводилось на базе Вятского государственного университета (ВятГУ), а его непосредственным организатором выступила кафедра фундаментальной математики. «Семинар Мордковича», как его называют по имени основателя и бессменного руководителя, имеет давнюю, 36-летнюю, историю, а Киров занимает в этой истории достойное место, проводя Семинар в третий раз.

На этот раз общая тематика Семинара была сформулирована достаточно широко: «Математика и проблемы образования». Разнообразие конкретных тем, стремление педагогического сообщества к самовыражению, наличие «болевых точек» в системе образования – всё привело к тому, что педагоги-математики были достаточно хорошо представлены на Семинаре. В работе очно участвовало более 80 специалистов, в том числе 52 человека из других городов. С учётом заочной и дистанционной форм участия всего в Семинаре работало около 200 человек, в том числе 40 докторов и 95 кандидатов наук. Помимо постоянных участников семинара в Киров приехали новые люди – коллеги из Казани, Москвы, Перми, Смоленска, Сыктывкара, Томска.

К началу работы 41-го Семинара вышел в свет сборник материалов [3], который вместе с Программой, видеозаписью пленарного заседания, фотографиями и другой информацией размещён на сайте ВятГУ: mathconf.vyatsu.ru. «Цифровые» итоги Семинара вполне достойны: опубликованы материалы 120-ти докладов 159-ти авторов из 40-ка городов 6-ти государств. При этом сборник содержит 15 материалов пленарных докладов (реально сделано 14 докладов, 9 очно и 5 дистанционно), 8 по математике и информатике (сделано 6), 56 по вузовской методике (сделано 13) и 41 по школьной методике (сделано 10).

Региональное представительство не является равномерным, и это, по-видимому, неизбежно. Так, 24 города находятся в европейской части России, а 9 – на Урале и в Сибири (Глазов, Екатеринбург, Красноярск, Оренбург, Орск, Пермь, Томск, Ханты-Мансийский автономный округ, Челябинск). Количественное представительство городов было различным, в основном 1–3 человека от города, однако некоторые города сформировали большие команды: от Москвы участвовало 25 человек, от Кирова – 16, от Самары – 9, от Казани – 8, от Ульяновска и Ярославля – по 7 человек.

Событийный компонент Семинара. На научно-методических форумах многое бывает предопределено, однако каждый раз встречается какая-нибудь особенность. Прежде всего, участников Семина-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ра приветствовало руководство Вятского государственного университета в лице проректора по науке и инновациям, заместителя директора института математики и информационных систем. Они отметили фундаментальную роль математики в науке, образовании и производстве, а также роль научно-методических школ в обучении студентов и школьников; была отмечена важная роль Семинара в жизни педагогико-математического сообщества. Приветствие основателя Семинара и его научного руководителя Александра Григорьевича Мордковича для многих участников прозвучало необычно, потому что *впервые* за 36 лет (!) он участвовал в заседании дистанционно.

Кроме приветствий, достаточно традиционно выглядело Пленарное заседание и две секции: «Преподавание математики в вузе» и «Преподавание математики в школе». Кроме того, как всегда на математико-методических конференциях, проводимых в Кирове, работала секция «Математика и компьютерные науки», посвященная изложению собственно математических результатов.

Основную линию Семинара сопровождала серия дополнительных мероприятий, которая оттеняла и украшала его. Была развёрнута выставка учебных пособий и монографий участников Семинара. Естественное лидерство на этой выставке принадлежало преподавателям математики Вятского государственного университета, принимавших и организовавших Семинар. Параллельно с работой Семинара на базе Института развития образования проводились мастер-классы, организованные в рамках деятельности лаборатории А.Г. Мордковича. Участникам Семинара была предложена содержательная культурная программа: пешеходная экскурсия по центру Кирова, выступление фольклорного ансамбля «Горенка», посещение драматического театра, автобусная экскурсия в село Великорецкое, знаменитое своим крестным ходом, возраст которого составляет 625 (!) лет.

Пленарные доклады[1]**.** Естественно предположить, что коллекция из 120-ти небольших (трёхстраничных) статей, подготовленных разными авторами с разными целями в разных географических точках нашей страны окажется в значительной мере эклектичной. Однако более подробный анализ показывает, что это не так, что исследования по педагогике математики дают целостный взгляд на проблемы образования, образуя несколько содержательных линий. Особенно ярко эти линии проступили на пленарных докладах.

Историческая линия достаточно хорошо представлена на Семинаре. Так, *Е.М. Вечтомов* и *В.И. Варанкина* (Киров) описали эволюцию кировской научно-методической школы по математическому образованию от её возникновения [1]–[2] до современного состояния, а *Г.М. Полотовский* (Нижний Новгород) описал деятельность выдающихся нижегородских математиков. При всей разнице в списках персоналий и в совокупностях фактов в докладах проступает нечто общее: активная академическая жизнь, формирование научных школ, связь с «большой математикой» и ряд других. В докладе *М.Р. Марданова* и *Р.М. Асланова* (Баку) представлена деятельность азербайджанского мыслителя Насреддина Туси в сфере просвещения.

И.М. Смирнова (Москва) в своей публикации изложила становление российского учебника по геометрии. В силу ограни-

[1] *Примечание.* О содержании докладов см. Материалы Семинара [3].

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ченности объёма тезисов подобный обзор неизбежно является неполным, однако даже краткий обзор выявляет важное обстоятельство: ещё на рубеже XVIII–XIX веков С.Е. Гурьевым был поставлен вопрос о системе преподавания геометрии, отвечающей индивидуальным запросам учеников.

В онлайн-докладе *И.В. Игнатушиной* (Оренбург) и *Р.М. Асланова* (Баку) ставится вопрос мировоззренческого характера: «Нужна ли история математики в подготовке будущих учителей математики?» Хотя каждый культурный человек знает, что ответ на этот вопрос является утвердительным, для читателя будет интересна аргументация авторов, подробная, искусная, достаточно полная.

Перед преподавателем конкретной математической дисциплины – алгебры, геометрии, анализа и т.д. – всегда стоит вопрос о доступном источнике исторической информации, который мог бы быть использован при изучении той или иной темы курса. В онлайн-докладе *Ю.А. Дробышева* и *И.В. Дробышевой* (Калуга) «Интернет-ресурсы истории математики для преподавателей математики» представлен подробный обзор существующих интернет-ресурсов по истории математики. Важно, что эти ресурсы многочисленны и выставлены как на русскоязычных, так и на англоязычных сайтах.

Упоминание об интернет-ресурсах переводит нас на, образно говоря, ***компьютерную линию*** методических исследований. Так, в докладе *Г.Е. Сенькиной* (Смоленск) «Проблемы совершенствования профессиональной подготовки учителей математики с применением цифровых платформ» речь идёт о «вечном» и «модном» одновременно, а именно, о профессиональной подготовке учителя математики (вечное) с применением цифровых платформ (модное). Основное утверждение автора состоит в следующем: многие современные проблемы в системе подготовки и повышения квалификации учителей математики могут быть решены с помощью разрабатываемой цифровой платформы «Smartteacher».

Особый интерес вызвал доклад *Е.В. Котельникова* (Киров) «Современные нейросетевые языковые модели» по теории распознавания образов, посвящённый машинным методам выявления эмоциональной составляющей в текстах.

Применение компьютеров в преподавании неизбежно связано с экспериментированием. Материалы *В.Р. Майера* (Красноярск) рассказывают о курсе для педвузов под названием «Компьютерный эксперимент в геометрии». Помимо общей структуры курса, его целей и задач в нём описаны эксперименты, формирующие критическое мышление экспериментатора. Так, эксперимент может подводить к гипотезе, которая на поверку оказывается ложной, а другой, *очень похожий*, эксперимент приводит к *похожей* гипотезе, которая верна.

Применение компьютеров в преподавании неизбежно связано с дополнением и улучшение существующих методик преподавания. Этому направлению был посвящён онлайн-доклад *С.В. Ларина* и *С.В. Шуманского* (Красноярск) «Об использовании анимационных рисунков на уроках тригонометрии», в котором была предложена удачная и убедительная визуализация того, что в «докомпьютерных» условиях приходилось рассказывать словами.

Особого разговора заслуживает доклад *М.В. Шабановой* и *Л.А. Шестаковой* (Москва) «Реальный мир сквозь призму физики, математики и информатики». Дело в том, что авторы используют так

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

называемый конвергентный подход к объекту изучения, под которым понимается рассмотрение этого объекта одновременно (или почти одновременно) с разных позиций. В качестве примера авторы анализируют преломление и отражение света с различных точек зрения: с точки зрения практической фотографии, физики, математики, информатики, экспериментирования с системами динамической математики. В такой трактовке конвергентность выступает как элемент мировоззрения исследователя, так что представленный материал естественным образом ассоциируется с мировоззренческим компонентом исторической линии Семинара.

Любой форум по методике преподавания математики невозможен без обращения к первоосновам методики, то есть к собственно математике. Так мы плавно переходим к ***математической линии*** нашего Семинара. *П.В. Семёнов* (Москва) рассматривает вопрос, который на естественном языке звучит так: «Каких треугольников больше, остроугольных или тупоугольных?» Более точная формулировка использует понятие вероятности: «Какова вероятность того, что случайно выбранный (нарисованный) треугольник окажется остроугольным?» Удивительно, но ответ зависит от способа построения «случайного» треугольника. Автор приводит восемь способов построения и, соответственно, восемь различных вероятностей. Такой результат непривычен как для студентов, так и для преподавателей, поэтому систематический поиск ситуаций такого типа представляет собой интересную задачу из области педагогики математики.

В докладе *А.В. Ястребова* (Ярославль) «Житейский опыт школьников как источник исследовательских задач» отражён его опыт руководства научной работой школьников. Основная идея состоит в том, чтобы поставить школьника в ситуацию «начальной математики» (термин С. Кранца), когда полноценное научное исследование оказывается порождённым житейскими, донаучными наблюдениями. Эта идея применяется к житейским представлениям о расстоянии от точки до геометрической фигуры, например, к расстоянию от пловца (точка) до берега (сложная фигура), или к расстоянию между точкой и окружностью (лучом, отрезком, треугольником…). Важно при этом, что освоение сложного определения облегчает самостоятельную постановку школьником исследовательских задач.

К математической линии Семинара относится и работа секции «Математика и компьютерные науки».

Мировоззренческая, методологическая линия буквально «растворена в воздухе» Семинара. Помимо пленарных докладов Игнатушиной – Асланова или Шабановой – Шестаковой к ней можно отнести материалы *А.И. Дзундза* и её коллег (Донецк) «Роль перевёрнутых задач в мировоззренческом развитии будущих учителей математики», доклад *В.А. Тестова* (Вологда) «О некоторых методологических проблемах цифровой трансформации математического образования», онлайн-доклад *В.И. Игошина* (Саратов) «Аксиоматический метод для школьников и их учителей математики» и ряд других.

Процесс преподавания многогранен и включает в себя много аспектов, пусть не столь крупных, как математика или её история, но важных и совершенно неизбежных. Так, ***разработка учебных пособий*** и опыт использования автором собственных пособий отражён в материалах *Ю.А. Еловиковой* (Брянск), а нестандартный и оригинальный ***метод контроля*** в системе математического образования

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

описан в онлайн-докладе *В.Г. Ермакова* (Гомель).

Секционные заседания. Второй день работы Семинара, 23 сентября, был посвящён секционным заседаниям. В оснащённых для этого аудиториях функционировали три секции.

***Секция* 1.** «Математика и компьютерные науки». Руководители: д.т.н., доц. *Е.В. Котельников*; д.ф.-м.н., доц. *В.В. Чермных* (Сыктывкар). Сделано 6 докладов следующих авторов: *Е.М. Вечтомов*, *А.А. Петров* (Киров); *С.И. Калинин*, *Ю.И. Макарова*, *Н.С. Протасов* (Киров); *Г.М. Полотовский* (Нижний Новгород); *В.И. Звонилов* (Нижний Новгород); *А.А. Олехов* (Пермь); *З.Я. Якупов* (Казань).

Наибольший интерес вызвало выступление *Г.М. Полотовского* по теории плоских алгебраических кривых. Полотовский принадлежит нижегородской школе профессора А.Д. Гудкова, решившего 16-ую проблему Гильберта о классификации неособых плоских алгебраических кривых 6-го порядка. В своём 40-минутном докладе Григорий Михайлович изложил историю решения проблемы и сформулировал ряд новых результатов о плоских алгебраических кривых более высоких порядков, полученных им и его аспирантами.

***Секция* 2.** «Методика обучения математике и информатике в вузе». Руководители: д.п.н., проф. *Р.М. Асланов* (Баку); д.п.н., проф. *С.И. Калинин* (Киров).На секции с докладами выступили *П.С.* и *С.Н. Богдановы* (Самара); *Л.Н. Евелина*, *О.М. Кечина* (Самара); *М.Ф. Гильмуллин* (Елабуга); *О.С. Кипяткова* (Ярославль); *О.В. Макеева* (Ульяновск); *Г.М. Полотовский* (Нижний Новгород); *М.Е. Сангалова* (Арзамас); *В.В. Сушков* (Сыктывкар); *О.А. Холшевникова* (Брянск); *Ю.С. Шатрова* (Самара); *Е.В. Яковлева* (Сыктывкар).

Также были заслушаны доклады *Ю.Б. Мельникова* (Екатеринбург) и *А.Ю. Скорняковой* (Пермь) в дистанционном формате.

Таким образом, на секции состоялось 13 докладов. Отметим, что все сообщения были содержательными. Особое внимание у слушателей привлекли выступления *Г.М. Полотовского* о сведениях из истории математики в курсах математических дисциплин и *Ю.С. Шатровой* по «геометрии города Самары». При обсуждении докладов полезные советы от участников конференции получили аспирант *О.С. Кипяткова* и соискатель учёной степени кандидата пед. наук *Е.В. Яковлева*. Приятно подчеркнуть то, что в работе секции приняла участие д.п.н. *О.А. Сотникова*, ректор Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина, которая активно задавала вопросы и высказывала своё мнение при обсуждении докладов.

***Секция* 3.** «Методика обучения математике и информатике в школе». Руководители: д.п.н., доц. *М.В. Егупова* (Москва); к.п.н., доц. *Е.В. Разова*(Киров). Было заслушано 10 очных докладов.

Наиболее примечательными оказались следующие доклады.

В выступлении *Н.И. Заводчиковой*, *И.А. Быковой* (Ярославль) «Управление познавательной деятельностью учащихся при изучении программирования на уроках информатики» на примере использования платформы Stepik рассмотрены различные с точки зрения характера обратной связи варианты управления познавательной деятельностью учащихся с помощью серии взаимосвязанных упражнений, способствующих формированию навыка работы с задачей, оценки качества её решения и поиска наиболее эффективного решения.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Е.В. Безенковой (Пермь) «Цифровые технологии при работе с элементами истории математики в школе» дан обзор цифровых платформ, которые могут быть использованы при формировании историко-математического знания, проиллюстрированы приёмы работы с ними.

Е.О. Новикова (Пермь) в своём сообщении «Проектная задача как средство развития универсальных учебных действий формирования математической грамотности» рассмотрела проектирование проектной задачи и работы с ней во внеурочной деятельности по математике для формирования математической грамотности и универсальных учебных действий школьников.

В докладе *М.С. Фроловой* (Брянск) «Особенности обучения математике кадет на уровне среднего общего образования» рассмотрен опыт разработки и применения рабочих тетрадей по математике, использование которых способствует развитию самостоятельности при решении задач, формированию логики рассуждений, способов обоснования своих выводов и действий.

Кроме того, в рамках семинара в сентябре–октябре 2022 года в ВятГУ было заслушано 16 докладов на студенческой секции «Математика и информатика», руководимой к.п.н., доц. *Н.А. Бояринцевой* и д.ф.-м.н., проф. *Е.М. Вечтомовым*. Тематика докладов: 5 докладов по функциональной алгебре (н. р. – *Е.М. Вечтомов*), 1 доклад по теории полуколец (н. р. – к.ф.-м.н. *А.А. Петров*), 2 доклада по методике обучения математике (н. р. – к.п.н., доцент *Н.А. Зеленина*), 3 доклада по машинному обучению (н. р. – *Е.В. Котельников*), 5 докладов по методике обучения информатике (н. р. *Н.А. Бояринцева*, *Е.В. Разова*).

Подводя итоги профессиональной содержательной части работы семинара, следует отметить весьма широкий спектр обсуждаемых вопросов, появление новой перспективной тематики, включающей развитие исследовательских, экспериментальных, проектных и IT-методик и подходов к обучению математике в вузе и в школе. Авторы обзора убеждены в том, что знакомство с материалами Семинара принесёт пользу педагогической общественности.

Заключение. Наш Семинар регулярно работает с 1987 года, то есть 36 лет. Как и всякое позитивное и долгоживущее явление, он эволюционирует, сохраняя при этом свою сущность. По нашему мнению, анализ этой эволюции представляет интерес не только для участников Семинара, но и для широкой педагогической общественности. Действительно, всё происходящее на Семинаре и с Семинаром является отражением как его внутренних процессов, так и неизбежного влияния внешней среды, и, следовательно, имеет прогностическую силу по отношению к «родственным» научно-педагогическим феноменам.

Описание 36-летней эволюции сложного и важного явления представляет собой весьма трудоёмкую задачу и требует поэтапного решения. В частности, предстоит выработать *методологию анализа* Семинара и родственных педагогических явлений. В настоящий момент такая методология только намечается и, как следствие, нуждается в формировании, дополнении, уточнении, обсуждении и т.д.

Семинар А.Г. Мордковича продолжит свою работу. В Кирове было объявлено, что следующий, 42-й семинар, состоится в 2023 г. в Смоленске на базе Смоленского государственного университета, а 43-й семинар – в 2024 г. в Сыктывкаре на базе Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

Список источников

1. *Варанкина В.И., Вечтомов Е.М.* Первая кафедра математики на Вятской земле // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 1. С. 39–56.

2. *Варанкина В.И., Вечтомов Е.М.* Научно-методическая школа профессора Ф.Ф. Нагибина «Теории и методика обучения решению математических задач» // Математика в школе. 2022. № 5. С. 58–67.

3. Математика и проблемы образования: Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Киров: ВятГУ, ООО «ВЕСИ», 2022. 292 с.

Вечтомов Е.М.,
председатель оргкомитета Семинара, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет» (г. Киров), vecht@mail.ru;

Ястребов А.В.,
соруководитель Семинара, д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского», alexander.yastrebov47@gmail.com.

ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Можно дискутировать о том, в каком объёме человеку необходимо знать математику. Но действительность всегда забавнее любого анекдота… При въезде в США при проверке уровня образования известного физика, будущего лауреата Нобелевского премии Энрико Ферми попросили найти сумму 15 + 27.
- Будучи гимназистом, Александр Фридман вместе со своим товарищем Я. Тамаркиным написал работу о числах Бернулли и послал её за границу в научный журнал. Вскоре пришёл ответ с комплиментами и сообщением, что работа будет напечатана. Взрыв восторга произошёл прямо на уроке. Гимназическое начальство не сочло повод уважительным, обоих учеников выгнали из класса. А в 1905 году их исследование появилось в авторитетных «Анналах математики», которые издавали Клейн и Гильберт.
- По какой-то причине в 1826 году М.В. Остроградский своевременно не получил деньги от отца, задолжал в гостинице «за харч и постой» и после жалобы, поступившей от её хозяина, попал в долговую тюрьму в Париже. Здесь он написал свою знаменитую работу «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» и послал её О. Коши. Тот представил мемуар вместе с лестным отзывом Парижской академии, и работа была напечатана. Более того, Коши, не будучи богатым человеком, выкупил Остроградского из «долгового».
- Наполеон покровительствовал точным наукам и сделал нескольких учёных важными государственными сановниками. Лаплас стал министром внутренних дел, однако вскоре лишился этой должности: глубоко вникая в каждую мелочь, учёный проглядел антиправительственный заговор. В приказе говорилось: «Освободить за внесение духа бесконечно малых в государственные дела».

По материалам сайта https://teachmen.csu.ru/.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

«ШАХМАТНЫЕ» ЗАДАЧИ

Представляемая вниманию читателя подборка задач в этот раз посвящена *шахматной доске*. Мы не будем говорить о шахматных дебютах или о решении шахматных задач на мат в два хода. Мы познакомимся с задачами, так или иначе связанными с шахматными фигурами или клетчатыми досками, которые в математике традиционно считаются шахматными. Например, достаточно популярными являются задачи об обходах шахматной доски конём, когда используется чередование цвета клетки, где стоит конь, или задачи на разрезание шахматной доски на какие-то особые кусочки.
Ниже приведены несколько задач такого типа разной сложности.

Задача 0. Из шахматной доски 8×8 по линиям сетки вырезают прямоугольники размером $m \times n$ клеток. Какое максимальное количество таких прямоугольников удастся вырезать, если они все различны? (*Фольклор.*)

О т в е т: 12.

Р е ш е н и е. Это классическая задача на «*оценку + пример*». Сначала оценим, какое максимальное количество прямоугольников можно вырезать. В силу того, что размер доски 8×8 , то сторона каждого вырезанного прямоугольника не превосходит 8. Тогда найдём сумму площадей всех возможных клетчатых прямоугольников с площадью не больше 8:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + \\ + 6 + 7 + 8 + 8 = 54.$$

Для площадей, выраженных единицей или простым числом, возможен только один вариант прямоугольников, а именно прямоугольников вида $1 \times n$, для площадей же 4, 6 и 8 – по два варианта. Следующий по величине прямоугольник должен иметь площадь не менее 9, а клеток свободных осталось только 10 (= 64 – 54). Таким образом, разрезать доску можно не более, чем на 12 прямоугольников. Пример для 12 прямоугольников на рисунке 1.

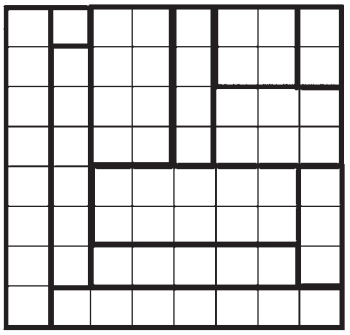


Рис. 1

Задача 00. На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали чёрных полях стоят две чёрные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число чёрных шашек и одну белую таким образом, чтобы белая одним ходом взяла все чёрные шашки, включая две первоначально стоявшие? (*Московская математическая олимпиада школьников, 7 класс, 1970 год.*)

О т в е т: Нельзя.

Р е ш е н и е. При каждом взятии чёрной шашки белая шашка перемещается на чётное число вертикалей. Поэтому после того, как белая шашка взяла первую чёрную, она всегда будет отстоять от второй чёрной шашки на чётное число вер-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

тикалей. Следовательно, она не сможет её взять.

Задача 000. На белых и чёрных клетках доски 10 × 10 стоит по одинаковому количеству ладей так, что никакие две ладьи друг друга не бьют. Докажите, что на эту доску можно поставить ещё одну ладью так, чтобы она не била никакую из уже стоящих. (*Московская математическая регата, 2013 год, 7 класс.*)

Р е ш е н и е. Так как ладьи друг друга не бьют, то на каждой горизонтали и на каждой вертикали расположено не более чем по одной ладье. Поэтому максимальное количество ладей, стоящих на доске и не бьющих друг друга, – 10. Пусть ладей 10. Рассмотрим ладьи, стоящие на чётных горизонталях ($Л_ч$). Часть из них стоит также на чётных вертикалях ($Л_{чч}$), а остальные на нечётных вертикалях ($Л_{чн}$). Аналогично для ладей, стоящих на нечётных горизонталях ($Л_н$), чётных и нечётных вертикалях. Заметим, что ладьи, стоящие на пересечении вертикалей и горизонталей одной чётности, стоят на чёрных клетках, а на пересечении вертикалей и горизонталей разной чётности – на белых клетках.

То есть Л на чёрных = $Л_{чч} + Л_{нн}$, а Л на белых = $Л_{чн} + Л_{нч}$. При этом $Л_ч = Л_{чч} + Л_{чн}$, а $Л_н = Л_{нн} + Л_{нч}$. А в силу нашего предположения, что всего ладей 10, получаем $Л_ч = Л_н = 5$, откуда следует, что $Л_{чч} = Л_{нн}$, то есть ладей, стоящих на чёрных клетках чётное количество. Для наглядности это приведено на рисунке 2.

По условию на чёрных и белых клетках стоит одинаковое количество ладей. Но тогда если ладей 10, то на чёрных клетках стояло бы 5 ладей, что противоречит доказанному выше. Значит, общее число ладей не больше восьми. Следовательно, найдутся, по крайней мере, две свободные вертикали и две свободные горизонтали, на пересечении которых мы сможем поставить даже две ладьи.

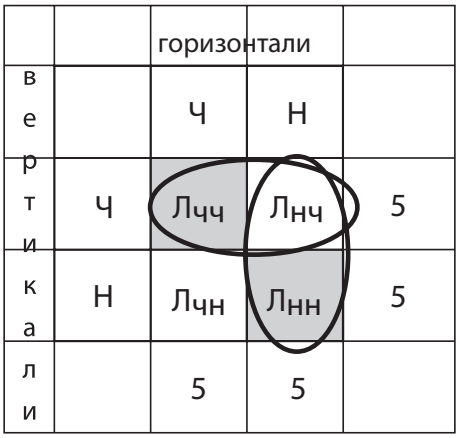


Рис. 2

Задачи для самостоятельного решения

Задача 55. Доминошки с точками от 0 до 6 стали выкладывать в спираль на шахматной доске (см. рис. 3). В какой-то момент все доминошки кончились. Как обозначена клетка, которую накрыла последняя доминошка? (*О.С.Парамонова, Олимпиада начальной школы «ДваждыДва», 3 класс, 2018 год.*)

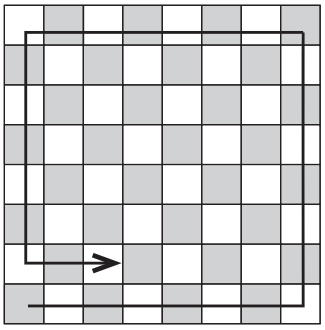


Рис. 3

Задача 56. «Летучая ладья» ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход встать на соседнее поле (на рисунке 4 показаны возможные ходы такой

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ладьи). Может ли за 16 ходов «летучая ладья» обойти всю доску размером 4 × 4, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле? (*А.К. Толпыго, Турнир имени Ломоносова, 1991 год.*)

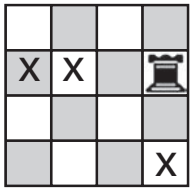


Рис. 4

Задача 57. На шахматной доске 8 × 8 две клетки (e4 и f5) выкрашены в серый цвет так, как на рисунке 5. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке 5 приведён пример такого прямоугольника. (*Л.М. Самойлов, из материалов Ульяновских математических кружков, 2021 год*).

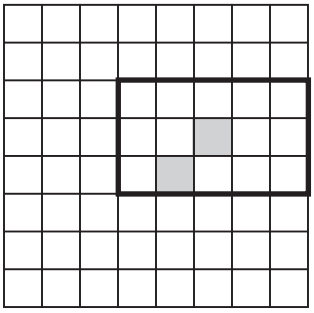


Рис. 5

Задача 58. Шахматный король обошёл всю доску 8 × 8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов. (*В.В. Произволов, Турнир Городов, 1998 год.*)

Задача 59. Под одной из клеток доски 8 × 8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад? (*Н.П. Стрелкова, Турнир Городов, 2012 год.*)

Задача 60. На шахматной доске 8 × 8 стоят восемь ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.) (*Д.Ю. Кузнецов, Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 9 класс, 2002 г.*)

Решения задач нужно присылать ведущему рубрики «Задачи» Ивановой Елене Юрьевне по адресу distant@mathbaby.ru к 01.03.23 в формате pdf или jpg. Перед текстом решения необходимо указать:

для взрослых – фамилию, имя, отчество, город (населённый пункт);

для школьников – фамилию, имя, город (населённый пункт), класс, в котором вы учитесь.

Принимаются решения от кружков, в этом случае нужно указать название кружка, город (населённый пункт), ФИО руководителя.

Присланные решения задач будут внимательно проверяться и анализироваться, а лучшие из них – размещаться на страницах рубрики.

Решения задач из 7-го номера 2022 г.

Задача 43. В одном дворе дети лгут, если держат за руки чётное число человек, и говорят правду, если нечётное. Однажды трое детей, как-то взявшись за руки сказали:

A: «Мы все тут мальчики». B: «Среди нас есть мальчики». C промолчал. Затем каждый взял за руку только всех тех, кого не держал в первый раз. И теперь они сказали:

A: «Мы все тут девочки». B промолчал. C: «Я тут одна девочка». Определите, кто

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

мальчик, а кто девочка. (*Е.Ю. Иванова, Олимпиада начальной школы Дважды-Два, 2022 год, 4 класс.*)

О т в е т: A, B – мальчики, C – девочка.

Р е ш е н и е. Так как детей трое, то для каждого ребёнка чётность количества детей, которых он держит за руки, равна чётности количества детей, которых он не держит. Значит, каждый либо оба раза говорит правду, либо оба раза лжёт. **A** не мог оба раза сказать правду, так как его фразы не могут быть обе верными. Значит, **A** оба раза соврал. Поэтому не все из них мальчики и не все девочки. То есть среди них есть и мальчики, и девочки. Это значит, что **B** сказал правду. Значит, **B** оба раза держал за руки нечётное количество детей, то есть одного. Значит, **C** тоже оба раза держал за руки одного и говорит правду.

Задача 44. В комнате стоят 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они как-то пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидит на красных стульях? (*Д.А. Калинин, Московская устная олимпиада для 6–7 классов, 2018 г.*)

О т в е т: 5 рыцарей.

Р е ш е н и е. Изначально все рыцари сидят на синих стульях, а все лжецы на красных. Значит, количество рыцарей, пересевших на красные стулья, равно количеству лжецов, пересевших на синие стулья. И те, и другие сказали, что сидят на красных стульях. Всего сказавших, что сидят на красных стульях, – 10. Значит, на красных стульях сидят 10 : 2 = 5 рыцарей.

Задача 45. Четверо друзей играли в игру «Мафия». Каждый имел одну из ролей (мафия, комиссар и двое мирных жителей). Известно, что все утверждения мафии ложны. Комиссар знает, кто мафия, и всегда говорит правду. Мирные жители изначально ничего не знают и могут высказывать как ложные, так и истинные утверждения.

Петя заявил: *Я знаю, кто мафия!*

Вася: *Петя – мафия!*

Саша: *Петя – комиссар. А я тоже знаю, кто мафия.*

Дима: *Это я – комиссар. А Саша – мафия.*

После этих высказываний один из мальчиков ещё не знает, кто мафия. Назовите его имя. (Все мальчики способны сделать логические выводы, если они следуют из высказанных утверждений.) (*Н.А. Солынин, Турнир разновозрастных команд 2012 г.*)

О т в е т: Саша.

Р е ш е н и е. Заметим, что имеющий роль мафии не может высказать утверждение «*я знаю, кто мафия*», поскольку оно будет истинным. Отсюда сразу следует, что Петя и Саша не мафия. Следовательно, высказывания Димы и Васи ложны, и никто из них не может быть комиссаром. Саша также не может быть комиссаром, так как тогда утверждение про комиссара Петю было бы ложно. Следовательно, комиссар – Петя. А Саша – мирный житель, поскольку только мирный может высказывать как истинные, так и ложные утверждения. Таким образом, любой, в том числе и любой из мальчиков, мог бы провести эти рассуждения и получить тот же результат.

Среди Васи и Димы один мафия, один мирный. Ясно, что каждый из них, зная, кто он, автоматически знает, кто мафия (либо он сам, либо второй). Комиссар то-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

же знает, кто мафия по условию. Значит, единственный, кто так и не понял, кто мафия, это Саша.

Задача 46. Имеется 100 карточек, пронумерованных числами от 1 до 100. На каждой карточке написано утверждение. На первой: «На карточках с бóльшими номерами ровно одно ложное утверждение». На второй: «На карточках с меньшими номерами ровно одно ложное утверждение». На третьей: «На карточках с бóльшими номерами ровно два ложных утверждения». На четвёртой: «На карточках с меньшими номерами ровно два ложных утверждения», и т.д. Сколько утверждений на карточках могут быть истинными? (*Н.А. Михайловский*, *Турнир разновозрастных команд, 2013 г.*)

О т в е т: 50 утверждений.

Р е ш е н и е. Рассмотрим два последовательных «нечётных утверждения». То, у которого номер больше, утверждает, что количество ложных утверждений стало на 1 больше, в то время как количество рассматриваемых карточек стало меньше. Следовательно, *среди карточек с нечётными номерами может быть максимум одно истинное утверждение*. Либо ни одного.

Случай 1. Если все карточки с нечётными номерами ложны, то все карточки с чётными номерами истинны. Но тогда утверждение на карточке № 49 должно быть истинно, так как тогда с бóльшими номерами ровно 25 ложных утверждений. Противоречие.

Случай 2. Среди карточек с нечётными номерами ровно одно истинное. Какое? Рассмотрим карточку с номером 49 и только нечётные карточки. Тогда только она может быть истинной, если рассматривать нечётные карточки. Для карточек с номером меньше 49 ложных слишком много. Но если 49-ая карточка истинна, то, чтобы были истинны чётные карточки, нужно одну из чётных сделать ложной, не испортив остальное. Это карточка с номером 50. И всё сходится. Всего 50 ложных утверждений: все нечётные, кроме 49, и утверждение 50.

Задача 47. 25 мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного и зелёного цвета. Причём известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зелёный?» Никто не ответил ни «да», ни «нет». Через каждую минуту этот вопрос снова повторяли всем мудрецам. Наконец, через 6 минут несколько мудрецов в первый раз сказали «да» (до этого никто не говорил «да»). Сколько мудрецов ответило теперь «да»? (*По мотивам задачи О.С. Нечаевой, Устная командная Олимпиада «ДваждыДва» для 7–8 классов, 2019 г.*)

О т в е т: От 7 до 15 мудрецов могли ответить «Да».

Р е ш е н и е. Предположим, что колпаков какого-то цвета А (не обязательно зелёного) только один. Тогда после первого же вопроса тот, на ком колпак цвета А, немедленно сообразит, что на нём колпак цвета А, так как зная, что все цвета должны присутствовать, он не увидит колпак цвета А и на вопрос «Ваш колпак зелёный?» ответит «Нет». Но такого ответа не прозвучало. Таким образом, колпаков каждого цвета не меньше двух. Рассуждая аналогично, можно заметить, что если колпаков какого-то цвета ровно два, то после второго вопроса мудрецы в этих колпаках догадаются, что на них колпаки этого цвета (раз на первый вопрос ответа не было) и на вопрос «Ваш колпак зелёный?» дадут определённый ответ «Да» или «Нет». Поскольку ответ «Да» прозву-

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

чал впервые через 6 минут (на седьмой вопрос), то зелёных колпаков не меньше 7. Но давайте подумаем, могут ли быть другие варианты?

Для понимания ситуации рассмотрим несколько частных случаев. Если никто не сказал ни «Да», ни «Нет» до шестого вопроса включительно (через 5 минут), то колпаков каждого цвета не менее 6. И тогда на шестой вопрос все, кроме обладающих зелёными колпаками, ответят «Нет», а потом мудрецы с зелёными колпаками скажут «Да». В этом случае зелёных колпаков в точности 7, и минимум достигается. Рассмотрим, какое максимальное количество зелёных колпаков может быть. Заметим, что если кроме зелёных остальных цветов по два, то все, обладающие незелёными колпаками, скажут «Нет» уже на второй вопрос. И все с зелёными тут же догадаются о своём цвете. Глобально: как только все «незелёные» говорят «Нет», «зелёные» сразу догадываются о цвете своего колпака и на следующий вопрос отвечают «Да». Поскольку они молчали до 6-й минуты, то такой ситуации не было. То есть каких-то незелёных колпаков было не меньше 6. Значит, максимальное количество зелёных – это 25 – 6 – 2 – 2 = 15. Проверим, что такое может быть. Да, конечно. Например, 2 синих, 2 белых, 6 красных и 15 зелёных. На втором вопросе «белые» и «синие» сказали «Нет», а «красные» молчали до 5 минуты (шестого вопроса). «Зелёные» тоже молчали, так как не знали, синих 6 или 7.

Таким образом, количество зелёных колпаков от 7 до 15 может быть. Для каждого из вариантов есть пример. Оставляем построение примера для каждого из случаев от 8 до 14 на откуп читателям.

Задача 48. За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причём у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «Да». Сколько из остальных могли также ответить «Да»? (*Н.Х. Агаханов. Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 9 класс, 2012 г.*)

О т в е т: 0.

Р е ш е н и е. Все сидящие за столом разбиваются на пары друзей; значит, рыцарей и лжецов поровну. Рассмотрим любую пару друзей. Если они сидят рядом, то рыцарь на заданный вопрос ответит «Да», а лжец – «Нет». Если же они не сидят рядом, то их ответы будут противоположными. В любом случае ровно один из пары друзей даст ответ «Да». Значит, все остальные 15 ответов будут «Нет».

Рубрику ведёт
Иванова Е.Ю.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ХВАЛА КИРПИЧУ

С каким предметом ассоциируется у вас прямоугольный параллелепипед? Полагаю, многие, если не большинство, назовут кирпич. И неудивительно. Обычный кирпич даёт наглядное и достаточно полное представление и о самом многограннике, и о его свойствах.

В древности кирпич являлся основным строительным материалом у многих народов. Отличались кирпичи не только составом и размером, но и формой. Изначально они лепились руками и внешне походили на современные батоны и булки: могли быть продолговатыми или округлыми, выпукло-вогнутыми или односторонне выпуклыми, а иногда, наоборот, тонкими и плоскими наподобие плитки. Позже их сменили кирпичи, сделанные в специальных формах – прямоугольных деревянных ячейках без дна и верха. Так кирпич приобрёл наиболее рациональную, лёгкую в изготовлении и удобную в работе форму. Но ею, конечно, никогда не ограничивались.

Кирпич служил мерилом на стройке ещё вавилонянам и египтянам. Размеры различных сооружений и площади внутренних помещений были кратны его размерам. Согласно Витрувию и Плинию Старшему, римляне использовали прямоугольный лидийский кирпич длиной 1½ фута и шириной 1 фут[1], а греки предпочитали квадратные кирпичи двух сортов: тетрадорон и пентадорон со стороной основания 4 ладони и 5 ладоней[2] соответственно. Применялся также половинчатый кирпич, что позволяло делать кладку шириной в 1½ и в 2½ кирпича. Толщина стен и сегодня определяется типом кладки и измеряется «в кирпичах», стандартных, с удобным соотношением сторон, близким к 4 : 2 : 1.

Для облицовки римляне использовали узкие треугольные кирпичи. Способ их изготовления описал Леон Баттиста Альберти. Брали кирпич размером $1 \times 1 \times {}^{1}/_{8}$ фута, пока он был свежий, на квадратной стороне чертили диагонали и углубляли их до середины толщи. Тем самым заготовка разбивалась на четыре равные части [1]. Во время работы каменщик лёгким ударом отделял их друг от друга и по фасадам стен выкладывал в ряд, обращая треугольники большей стороной наружу, а прямым углом внутрь. Такой кирпич был дешевле четырёхугольного и благодаря форме обеспечивал более прочную связь со слоем щебня и раствора.

То, что габариты кирпича увязывались с единицами длины, основанными на размерах частей тела человека, не было ни случайностью, ни редкостью. Так, кирпичи в египетских пирамидах были длиной в локоть[3]. На Руси в XII–XIII веках их нередко делали шириной в пядь[4]. Кстати, именно изучение размеров кирпичей той эпохи привело историков к выводу о существовании ещё одной древнерусской пяди – «с кувырком». Известны также внесистемные меры, связанные с кирпичом. Пример тому – английский ласт. Эта еди-

[1] 1 римский фут ≈ 29,6 см.

[2] 4 ладони = 1 футу, 5 ладоней = 1,25 фута, 1 греческий фут ≈ 30,9 см.

[3] 1 египетский локоть ≈ 45 см.

[4] 1 малая пядь ≈ 19 см.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

ница объёма, веса и счёта корабельного груза или партии товара имела различные значения в зависимости от того, что ею измеряли. Так, в ласте насчитывалось сельди – 12 бочек, шерсти – 12 мешков, кирпичей – 500 штук, а плитки – 1000.

«Кирпич» давно и прочно вошёл в лексикон учёных и обычно используется как сравнение или метафора. Бывало, ещё древние греки, мысля фигурные числа геометрически, уподобляли их стройматериалам. Никомах Герасский выделял среди телесных чисел «балки» и «плитки»[5]. Необычные названия достались им от балок и плиток, с коими имели дело плотники, строители и прочие ремесленники. Один исследователь заметил, что в славянских языках в числительных от 11 до 19 единицы «кладутся» на десятки, словно кирпичи друг на друга, например в русском языке 3 – три, 10 – десять (сокр. *дцать*), 13 – тринадцать.

Норвежский математик Ойстин Оре назвал число 1 тем кирпичом, из которого строились все остальные числа. Его американский коллега Дон Цагир считал простые числа кирпичиками для построения натурального ряда. Ту же роль им по праву отводят, говоря об основной теореме арифметики. Исходными кирпичиками для геометрической теории служат неопределяемые понятия и аксиомы. Да и сама наука, по словам Анри Пуанкаре, строится из фактов, как дом из кирпичей, но ими, разумеется, не ограничивается.

С древности кирпич фигурирует в различных практических задачах. Вавилоняне рассчитывали не только расход кирпича, объём кладки, наклон кирпичной стены (в сечении – прямоугольной трапеции), но и, например, рабочую норму переноски кирпича – общий вес, количество штук – на одного человека в день. Сохранился египетский папирус, где упоминается задача на вычисление числа кирпичей, необходимого для возведения наклонной насыпи (для подъёма каменных глыб при строительстве крупных сооружений) известных размеров. Средневековый индийский математик Брахмагупта, описывая приближённые способы измерения на практике «неправильных тел», указал, как определить примерный объём груды кирпичей. Выкладывание жертвенных алтарей самой разной формы из кирпичей у индийцев вообще было отдельным видом искусства, подчинённым строгим правилам.

Вот занятный пример из русской математической рукописи XVII века – для желающих поупражняться в сложении и умножении.

1. Был некий град каменный кругом 30 вёрст. Высота его 5 сажен, ширина 2 сажени. Кругом же его 10 башен с ворота, 20 башен глухих. А кругом башни с ворота по 20 сажен, а глухие по 16 сажен; высота всем по 8 сажен, а в широту 2 сажени. А у 10 башен врата в высоту и широту 3 сажени, а у глухих башен проходные двери в высоту и широту в сажень. А кирпич делан был в длину поларшина, в широту в четверть аршина, в толстоту 2 вершка. Много ли того града в стены и башни кирпичей пошло?

К счастью, авторы учебников и пособий по арифметике страсти к большим числам и сложным расчётам не испытывали. Их задачи оказались не только проще, но и ближе к реальной жизни. Школяры подсчитывали количество подвод, необходимых для перевозки кирпича, и прибыль от его продажи, оценивали стоимость кладки, вычисляли, сколько кирпича пойдёт

[5] Числа, представимые как произведение трёх множителей abc, а геометрически – в виде прямоугольного параллелепипеда размером $a \times b \times c$. Для «балок» $a = b < c$, для «плиток» $a = b > c$. Примеры: $112 = 4 \cdot 4 \cdot 7$ и $50 = 5 \cdot 5 \cdot 2$.

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

на постройку печи, лестницы и пр. Ещё интереснее геометрические задачи с минимумом расчётов или вовсе без них, в частности прикладные.

2. При формовке кирпича поступают так. Закладывают глину в форму, а излишек снимают линейкой, передвигая её по двум противоположным краям формы [2]. Объясните, почему при такой обработке поверхность кирпича будет плоской.

3. Как применяет каменщик отвес, чтобы класть кирпичи вертикально? Достаточно ли отвеса, чтобы сделать кирпичную стену плоской?

4. Почему, желая сложить отвесную стену, каменщики проводят на горизонтальной площадке прямую линию и затем укладывают кирпичи так, чтобы их наружные грани прикасались к отвесным линиям, пересекающим горизонтальную линию?

Не могли пройти мимо кирпича и популяризаторы науки, посвятившие ему не одну занимательную задачу.

5. Может ли паук одним непрерывным движением обойти все кирпичи стены [3], обходя границу каждого кирпича только один раз? (В. Аренс)

6. Какой воз легче опрокинуть: с соломой или с кирпичом при равном весе возов и одинаковой устойчивости телеги? (А. Лямин)

7. Если целый кирпич уравновешивается ¾ кирпича и ¾ фунта [4], то сколько он весит? (С. Лойд)

8. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше? (Я. Перельман)

Последняя задача хороша неожиданным ответом: игрушечный кирпич весит всего 62,5 г. Ещё больший эффект произвело бы другое сравнение: сколько лилипутских кирпичей требуется, чтобы уравновесить один кирпич великанов?

9. При помощи масштабной линейки измерьте диагональ кирпича, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, то есть расстояние между самыми отдалёнными его вершинами. Укажите практический способ, пригодный для работы в мастерских, а не школьный пример на применение теоремы Пифагора. (Г. Штейнгауз)

Гуго Штейнгауз дал два простых и наглядных решения, одно из них ясно из рисунка [5]. И сама задача, и идея решения приглянулись многим авторам отечественных учебников и пособий по математике. Но, пытаясь переработать условие, они намудрили и перегрузили его стройматериалом, один даже предложил измерить диагональ кирпича, который достали из груды кирпичей, лежащих во дворе… Кто бы объяснил зачем?

Математики ставили и решали более сложные и содержательные задачи. Можно ли разбить плоскость на равные многоугольники, которые нигде не примыкают друг к другу более чем по три? Очевидное решение – паркет из правильных шестиугольников. Другой простой, но менее явный пример – схема кирпичной кладки со сдвигом на полкирпича в любых двух соседних рядах.

Штейнгауз выяснил, можно ли заполнить всё пространство одинаковыми многогранниками так, чтобы в каждой вершине сходилось по четыре из них. Для этого он рассмотрел многослойную кирпичную кладку и получил на её основе искомый многогранник. Таковым оказалось одно из архимедовых тел: усечённый октаэдр. Кстати, задачу, приводящую к подобной трёхмерной периодической структуре, поставил ещё в 1887 году британский физик Уильям Томпсон, более известный как лорд Кельвин. Он искал замощение пространства фигурами одинакового объёма

⊙ Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

с минимальной площадью поверхности. Учёный пришёл к выводу, что оптимальным является разбиение пространства на равные усечённые октаэдры с изогнутыми гранями и рёбрами. Решение красивое, но, как показали уже в наше время математики, неверное.

В комбинаторной геометрии есть задача об упаковке кирпичей. Доказано, например, что можно плотно, без пустот, заполнить ящик кирпичами размером $a \times ab \times abc$, где a, b и c – натуральные числа, причём разными способами, лишь в том случае, когда его размеры кратны размерам кирпича. То же верно и для «плоских кирпичей» – прямоугольников, и для гиперкирпичей любой размерности $n > 3$.

А иные задачи являются настоящими кирпичами преткновения для математиков. Вот одна из них, простая с виду и до сих пор нерешённая. Существует ли целочисленный кирпич? Речь идёт о прямоугольном параллелепипеде, у которого длины рёбер a, b, c, диагоналей граней m, n, k и главной диагонали d [6] выражаются целыми числами. Его также называют совершенным кирпичом Эйлера – в честь Леонарда Эйлера, открывшего два семейства почти совершенных кирпичей. «Почти» – потому что у них только главная диагональ – не целое число. Наименьший такой параллелепипед имеет размеры $44 \times 117 \times 240$.

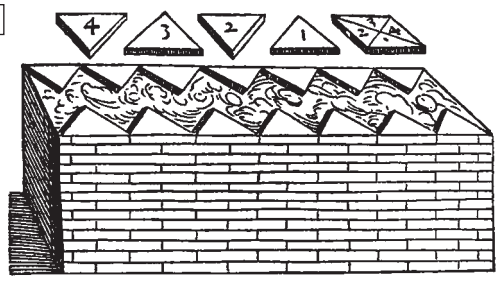
Задача сводится к решению в натуральных числах системы четырёх уравнений с семью неизвестными:

$$a^2 + b^2 = n^2,$$
$$a^2 + c^2 = m^2,$$
$$b^2 + c^2 = k^2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

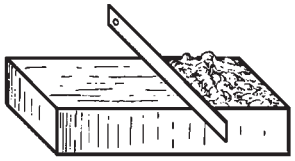
Пока математикам удалось доказать лишь, что существуют совершенные непрямоугольные параллелепипеды.

Наталья Карпушина

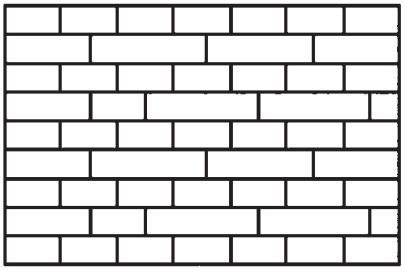
1



2

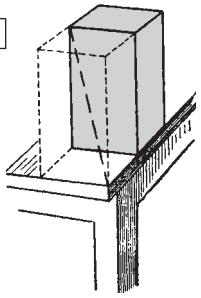


3

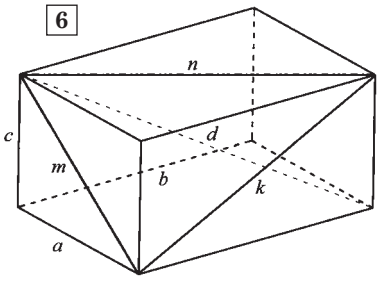


4

5



6



ПОДПИСКА 2023. I ПОЛУГОДИЕ

Подписывайтесь на журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»!

Издается с 1934 года. Входит в перечень ВАК

Статьям журнала присваивается DOI

ПОЧТА РОССИИ

на сайте podpiska.pochta.ru

в мобильном приложении Почты России

через почтальона

Журнал «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ»

Подписной индекс

П1591

Комплект журналов «МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

Подписной индекс

П1597

ВНИМАНИЕ!

Комплекты журналов СО СКИДКОЙ

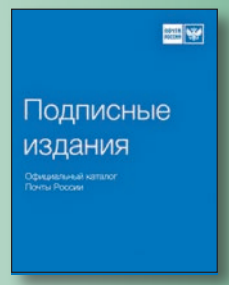
«МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ» и «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ»

Подписной индекс — П1597

Оформляйте подписку на ПЕЧАТНЫЕ ЖУРНАЛЫ издательства «Школьная Пресса»:

- В любом почтовом отделении по каталогу **«Подписные издания. Почта России»**
- На сайте «Почта России»: https://podpiska.pochta.ru/publisher/349226

Открыть ссылку приложением «Камера»



- Урал-Пресс: http://www.ural-press.ru
- На сайте издательства **SCHOOLPRESS.RU**

Оформляйте подписку на ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЕРСИИ ПЕЧАТНЫХ ЖУРНАЛОВ:

- Вы можете подписаться на наши журналы через **электронно-библиотечные системы:**

• Ивис - ivis.ru • Руконт - rucont.ru • eLIBRARY.RU – Научная электронная библиотека

- **Подписка на электронные версии печатных журналов оформляется на сайте schoolpress.ru СКИДКА 500 РУБ. С КАЖДОГО НОМЕРА!**

Электронная версия позволяет: получать журнал быстрее, сэкономить средства за подписку и доставку.
Доставка журнала: pdf-файл – на e-mail подписчика.

Открыть ссылку приложением «Камера»

ВНИМАНИЕ! Вы можете купить **отдельную статью** и **любой номер журнала** (в т.ч. за прошедшие годы) **в электронном виде** на сайте **www.schoolpress.ru**

Тел.: +7(495) 619-52-87, 619-83-80. E-mail: periodika@schoolpress.ru

ISSN 0130-9358 01

9 770130 935237

Школьная Пресса

Математика в школе, 2023, № 1, 1–80